FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Caderno: ____________

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E
Ano Letivo 2017/18
Teste 1 21 abril 2018
Duração: 2h00m

Nome completo: ____

N.º aluno: ____________ Curso: ______________________________________

Nas alíneas das perguntas 1 a 5 apenas uma das respostas está correta. Determine-a e assinale-a com uma cruz no quadrado correspondente. Uma resposta incorreta desconta 0.25 valores e uma não resposta nada vale nem desconta. A pergunta 6 deverá ser resolvida numa folha do caderno.

1. Sejam A e B acontecimentos de um espaço de resultados Ω.

(1.0) (a) [V] [F] Sabendo que A e B são independentes, que $P(A) = 0.5$ e que $P(A-B) = 0.2$ então $P(B) = 0.4$.

(1.0) (b) [V] [F] Se $P(B) = 0.2$, $P(A|B) = 0.6$ e $P(A|\overline{B}) = 0.4$ então $P(A) = 0.44$.

2. Seja (X, Y) um par aleatório com a seguinte função de probabilidade conjunta:

$X \setminus Y$	0	1	2
0	1/8	1/8	1/4
1	3/8		0

(1.0) (a) A $P(X + 1 = Y)$ é:

[A] 1/8 [B] 3/4 [C] 1/2 [D] 0

(1.0) (b) O valor de $\text{Cov}(X^2, Y)$ é:

[A] $-\frac{1}{2}$ [B] $\frac{3}{4}$ [C] $-\frac{1}{4}$ [D] $\frac{1}{2}$

(1.0) (c) [V] [F] As variáveis aleatórias X e Y são independentes.

(0.5) (d) [V] [F] Os acontecimentos $\{X = 0\}$ e $\{Y = 1\}$ são independentes.

(1.0) (e) O valor de $V(X|Y = 0)$ é:

[A] 0.2344 [B] 0.1875 [C] 0.625 [D] 0.2147

3. Considere uma experiência aleatória cujo resultado é êxito ou fracasso, sendo a probabilidade de resultar em êxito de 0.67. O custo de uma experiência que resulte em êxito é de 5 euros e em fracasso de 10 euros. A experiência é repetida 6 vezes, de forma independente. Seja X a variável aleatória que conta o número de êxitos.

(0.5) (a) A probabilidade do número de êxitos ser pelo menos 2 é:

[A] 0.642 [B] 0.903 [C] 0.017 [D] 0.983

(1.0) (b) A probabilidade de haver mais êxitos do que fracassos é:

[A] 0.687 [B] 0.097 [C] 0.313 [D] 0.903

(1.0) (c) O custo esperado de uma experiência é:

[A] 39.90€ [B] 50.10€ [C] 6.65€ [D] 8.35€

(0.5) (d) O custo total C_T das 6 experiências pode ser expresso como $C_T = 60 - 5X$. A probabilidade do custo total ser inferior a 55 euros é:

[A] 0.903 [B] 0.642 [C] 0.017 [D] 0.983

(V.S.F.F.)

4. O tempo de vida em anos X de um regulador de voltagem de um carro é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{x^3}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(1.0) (a) Qual a probabilidade de um regulador de voltagem durar pelo menos 3 anos?

A 17/18 B 1/18 C 1/2 D 1/9

(0.5) (b) A moda de X é:

A 1 B 0 C 1/2 D não existe

(1.0) (c) O valor médio de X é:

A 1/3 B 1 C 0 D 4/3

(1.0) (d) Seja Y o número de reguladores de voltagem com tempo de vida inferior a 1 ano, numa amostra de 8 reguladores de voltagem escolhidos ao acaso. Então, $P(Y \leq 1)$ é igual a:

A 1/2 B 0.0352 C 0.9648 D 0.0313

5. Considere X uma v.a. com distribuição Normal, valor médio 10 e variância 4.

(1.0) (a) O quantil de ordem 0.0228 é:

A 14 B 6 C 12 D 2

(1.0) (b) A variância de $1 - X$, $V(1 - X)$, é:

A $V(X)$ B $1 - V(X)$ C $-V(X)$ D $1 + V(X)$

(1.0) (c) Considere a v.a. $Y \sim N(2, 2)$ independente de X. A probabilidade de X ser superior a $3Y$ é:

A 0.8023 B 0.1038 C 0.8962 D 0.1977

---

6. A FCT tem dois servidores de e-mail, designados por S_1 e S_2, respetivamente. 70% do tráfego de e-mails ocorre no S_1 e os restantes 30% no S_2. Podem ocorrer dois tipos de erro disjuntos no tráfego de e-mails. Se os e-mails são enviados ou recebidos pelo S_1, ocorre o erro do tipo 1 com probabilidade 0.02 e o erro do tipo 2 com probabilidade 0.003. Se os e-mails são geridos pelo S_2, ocorre o erro do tipo 1 com probabilidade 0.01 e o erro do tipo 2 com probabilidade 0.015.

(2.5) (a) Calcule, justificando, a probabilidade de um e-mail chegar sem erro. Apresente todos os cálculos.

(1.5) (b) Se ocorreu um erro no envio de um e-mail, qual é a probabilidade de ter sido no S_1. Justifique e apresente todos os cálculos.

Formulário

Distribuição	$P(X = k)$	Suporte	Valor médio	Variância
$H(N, M, n)$	$\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}/\binom{N}{n}$	$\max(0, M + n - N) \leq k \leq \min(M, n)$	nM/N	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
$B(n, p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$0 \leq k \leq n$	np	$np(1-p)$
$P(\lambda)$	$e^{-\lambda}\lambda^k/k!$	$k \in \mathbb{N}_0$	λ	λ
$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$k \in \mathbb{N}$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
Distribuição	$f(x)$	**Suporte**	**Valor médio**	**Variância**
$U(a, b)$	$\frac{1}{b-a}$	$a < x < b$, $x \in \mathbb{R}$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
$E(\lambda, \delta)$	$\frac{1}{\delta}e^{-(x-\lambda)/\delta}$	$x > \lambda$, $x \in \mathbb{R}$	$\lambda + \delta$	δ^2
$N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$	$x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2

Caderno: ____________

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E
Ano Lectivo 2017/18
Teste 1 21 abril 2018
Duração: 2h00m

Nome completo: ____

N.º aluno: ____________ Curso: ______________________________________

Nas alíneas das perguntas 1 a 5 apenas uma das respostas está correta. Determine-a e assinale-a com uma <u>cruz</u> no quadrado correspondente. Uma resposta incorreta desconta 0.25 valores e uma não resposta nada vale nem desconta. A pergunta 6 deverá ser resolvida numa folha do caderno.

1. Sejam A e B acontecimentos de um espaço de resultados Ω.

(1.0) (a) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sabendo que A e B são independentes, que $P(A) = 0.5$ e que $P(A - B) = 0.2$ então $P(B) = 0.6$.

(1.0) (b) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Se $P(B) = 0.2$, $P(A|B) = 0.6$ e $P(A|\overline{B}) = 0.4$ então $P(A) = 0.44$.

2. Seja (X, Y) um par aleatório com a seguinte função de probabilidade conjunta:

$X \setminus Y$	0	1	2
0	1/8	1/8	1/4
1	3/8		0

(1.0) (a) A $P(X + 1 = Y)$ é:

$\boxed{\text{A}}$ 1/2 $\boxed{\text{B}}$ 3/4 $\boxed{\text{C}}$ 1/8 $\boxed{\text{D}}$ 0

(1.0) (b) O valor de $\mathrm{Cov}(X^2, Y)$ é:

$\boxed{\text{A}}$ $-\frac{1}{4}$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{C}}$ $-\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{D}}$ $\frac{3}{4}$

(1.0) (c) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ As variáveis aleatórias X e Y não são independentes.

(0.5) (d) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Os acontecimentos $\{X = 0\}$ e $\{Y = 1\}$ são independentes.

(1.0) (e) O valor de $V(X|Y = 0)$ é:

$\boxed{\text{A}}$ 0.625 $\boxed{\text{B}}$ 0.2344 $\boxed{\text{C}}$ 0.2147 $\boxed{\text{D}}$ 0.1875

3. Considere uma experiência aleatória cujo resultado é êxito ou fracasso, sendo a probabilidade de resultar em êxito de 0.67. O custo de uma experiência que resulte em êxito é de 5 euros e em fracasso de 10 euros. A experiência é repetida 6 vezes, de forma independente. Seja X a variável aleatória que conta o número de êxitos.

(0.5) (a) A probabilidade do número de êxitos ser pelo menos 2 é:

$\boxed{\text{A}}$ 0.983 $\boxed{\text{B}}$ 0.903 $\boxed{\text{C}}$ 0.017 $\boxed{\text{D}}$ 0.642

(1.0) (b) A probabilidade de haver mais êxitos do que fracassos é:

$\boxed{\text{A}}$ 0.097 $\boxed{\text{B}}$ 0.903 $\boxed{\text{C}}$ 0.313 $\boxed{\text{D}}$ 0.687

(1.0) (c) O custo esperado de uma experiência é:

$\boxed{\text{A}}$ 8.35€ $\boxed{\text{B}}$ 6.65€ $\boxed{\text{C}}$ 50.10€ $\boxed{\text{D}}$ 39.90€

(0.5) (d) O custo total C_T das 6 experiências pode ser expresso como $C_T = 60 - 5X$. A probabilidade do custo total ser inferior a 55 euros é:

$\boxed{\text{A}}$ 0.017 $\boxed{\text{B}}$ 0.642 $\boxed{\text{C}}$ 0.983 $\boxed{\text{D}}$ 0.903

(V.S.F.F.)

Total de folhas entregues: ____________

4. O tempo de vida em anos X de um regulador de voltagem de um carro é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{x^3}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(1.0) (a) Qual a probabilidade de um regulador de voltagem durar pelo menos 3 anos?

$\boxed{\text{A}}$ 1/9 $\boxed{\text{B}}$ 1/2 $\boxed{\text{C}}$ 1/18 $\boxed{\text{D}}$ 17/18

(0.5) (b) A moda de X é:

$\boxed{\text{A}}$ 1 $\boxed{\text{B}}$ 1/2 $\boxed{\text{C}}$ 0 $\boxed{\text{D}}$ não existe

(1.0) (c) O valor médio de X é:

$\boxed{\text{A}}$ 4/3 $\boxed{\text{B}}$ 0 $\boxed{\text{C}}$ 1 $\boxed{\text{D}}$ 1/3

(1.0) (d) Seja Y o número de reguladores de voltagem com tempo de vida inferior a 1 ano, numa amostra de 8 reguladores de voltagem escolhidos ao acaso. Então, $P(Y \leq 1)$ é igual a:

$\boxed{\text{A}}$ 1/2 $\boxed{\text{B}}$ 0.0313 $\boxed{\text{C}}$ 0.0352 $\boxed{\text{D}}$ 0.9648

5. Considere X uma v.a. com distribuição Normal, valor médio 10 e variância 4.

(1.0) (a) O quantil de ordem 0.0228 é:

$\boxed{\text{A}}$ 2 $\boxed{\text{B}}$ 6 $\boxed{\text{C}}$ 12 $\boxed{\text{D}}$ 14

(1.0) (b) A variância de $1 - X$, $V(1 - X)$, é:

$\boxed{\text{A}}$ $V(X)$ $\boxed{\text{B}}$ $1 + V(X)$ $\boxed{\text{C}}$ $-V(X)$ $\boxed{\text{D}}$ $1 - V(X)$

(1.0) (c) Considere a v.a. $Y \sim N(2, 2)$ independente de X. A probabilidade de X ser superior a $3Y$ é:

$\boxed{\text{A}}$ 0.1977 $\boxed{\text{B}}$ 0.1038 $\boxed{\text{C}}$ 0.8023 $\boxed{\text{D}}$ 0.8962

---

6. A FCT tem dois servidores de e-mail, designados por S_1 e S_2, respetivamente. 70% do tráfego de e-mails ocorre no S_1 e os restantes 30% no S_2. Podem ocorrer dois tipos de erro disjuntos no tráfego de e-mails. Se os e-mails são enviados ou recebidos pelo S_1, ocorre o erro do tipo 1 com probabilidade 0.02 e o erro do tipo 2 com probabilidade 0.003. Se os e-mails são geridos pelo S_2, ocorre o erro do tipo 1 com probabilidade 0.01 e o erro do tipo 2 com probabilidade 0.015.

(2.5) (a) Calcule, justificando, a probabilidade de um e-mail chegar sem erro. Apresente todos os cálculos.

(1.5) (b) Se ocorreu um erro no envio de um e-mail, qual é a probabilidade de ter sido no S_1. Justifique e apresente todos os cálculos.

Formulário

Distribuição	$P(X=k)$	Suporte	Valor médio	Variância
$H(N,M,n)$	$\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}/\binom{N}{n}$	$\max(0, M+n-N) \leq k \leq \min(M,n)$	nM/N	$\dfrac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
$B(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$0 \leq k \leq n$	np	$np(1-p)$
$P(\lambda)$	$e^{-\lambda}\lambda^k/k!$	$k \in \mathbb{N}_0$	λ	λ
$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$k \in \mathbb{N}$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
Distribuição	$f(x)$	Suporte	Valor médio	Variância
$U(a,b)$	$\dfrac{1}{b-a}$	$a < x < b,\ x \in \mathbb{R}$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
$E(\lambda,\delta)$	$\dfrac{1}{\delta}e^{-(x-\lambda)/\delta}$	$x > \lambda,\ x \in \mathbb{R}$	$\lambda+\delta$	δ^2
$N(\mu,\sigma^2)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$	$x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2