

ANÁLISE MATEMÁTICA I

1º semestre de 2016/2017

Ficha 9 - Funções Reais de Variável Real Primitivas por Partes, por Substituição e Racionais

1. Primitive, por partes, as funções definidas pelas expressões analíticas seguintes:

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------------|
| (a) $\arctg(x)$; | (f) $\frac{\log x }{x^2}$; |
| (b) $x \cos(x)$; | (g) $e^x \cos(x)$; |
| (c) $\frac{x}{\cos^2(x)}$; | (h) $\cos(x) \log(1 + \cos(x))$; |
| (d) $(x^2 + x + 1) e^x$; | (i) $e^{2x}(2 - e^x)^{-1/3}$; |
| (e) $(x^2 + 1) \cos(x)$; | (j) $x^3 \cos(x^2)$. |

2. Primitive, por substituição, usando em cada caso a substituição indicada, as funções definidas por:

- | | |
|--|--|
| (a) $\frac{3x}{\sqrt[4]{1+x}}$ | $(\sqrt[4]{1+x} = t)$; |
| (b) $\frac{e^{2x} + e^x}{e^x + 2}$ | $(e^x = t)$; |
| (c) $\sqrt{e^x - 1}$ | $(t = \sqrt{e^x - 1})$; |
| (d) $\frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x^3}}$ | $(x = t^4)$; |
| (e) $\frac{1}{(1 + x^2)^2}$ | $(x = \operatorname{tg}(t))$; |
| (f) $\frac{x}{1 + x^4}$ | $(x^2 = t)$; |
| (g) $\sqrt{1 - \sin(x)}$ | $(\sqrt{1 - \sin(x)} = t)$; |
| (h) $\frac{3 + 2 \log(x)}{x(\log^2(x) + 3 \log(x) + 1)}$ | $(\log(x) = t)$; |
| (i) $\frac{\cos(x)}{1 + \cos(x)}$ | $(\operatorname{tg}(\frac{x}{2}) = t)$. |

3. Determine as primitivas das funções racionais definidas pelas expressões analíticas seguintes:

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| (a) $\frac{x^5}{x^2 - 1}$; | (c) $\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; |
| (b) $\frac{x^2}{x^2 - 2x + 2}$; | (d) $\frac{3x}{-x^2 + x + 6}$; |

(e) $\frac{1}{x^2 - 9};$	(k) $\frac{x^4 - 9}{(2x + 2)(x^2 + 9)};$
(f) $\frac{1}{(x + 2)(2x^2 - 2x - 12)};$	(l) $\frac{1}{2x^3 - 8x^2 + 26x};$
(g) $\frac{x^4 - 17x^2 + 36x}{(x - 1)(x - 2)^2};$	(m) $\frac{x^3 + x^2 + x + 3}{x^4 + 2x^2 - 3};$
(h) $\frac{x + 2}{3x^2 - 12x + 12};$	(n) $\frac{3x^3}{(x^2 + 5)^2};$
(i) $\frac{x + 1}{x^3 + x};$	(o) $\frac{x^2 + 2x - 3}{(x^2 + 1)^2};$
(j) $\frac{20}{x^3 - 4x^2 + 20x};$	(p) $\frac{-x^3 + 2x^2 + x - 7}{(x - 2)^2(x^2 - 4x + 5)}.$

4. Mostre que, para $n \in \mathbb{N}$, é válida a seguinte fórmula de recorrência:

$$P(\log^n |x|) = x \log^n |x| - n P(\log^{n-1} |x|), \quad x \neq 0.$$

Aproveite o resultado anterior para calcular todas as funções $F(x)$ tais que $F'(x) = \log^2 |x|$ e que verificam a condição $F(1) + F(-1) = 0$.