2017/2018 Ficha Prática 4 - Teorema de Taylor e Extremos AM2E

64. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x, y) = e^x \sin(y)$. Utilize a fórmula de Taylor de de ordem dois para calcular um valor aproximado de $e^{0.01} \sin(-0.03)$.

65. Determine e classifique os pontos críticos das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$f_1(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 \qquad f_2(x, y) = x^3 + 3xy - y^3$$

$$f_3(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} \qquad f_4(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

66. Assumindo que o problema tem solução, determine três reais positivos cuja soma seja 1000 e cujo produto seja máximo.

67. Pretende-se construir uma caixa de cartão paralelepipédica (aberta no topo) com uma capacidade de 32 cm^3. Assumindo que o problema tem solução, quais devem ser as suas dimensões, de modo a minimizar a quantidade de cartão utilizada?

68. Calcule as coordenadas do(s) ponto(s) da superfície esférica centrada na origem e de raio $r = 6$ que se encontra(m) mais distante(s) do ponto $M(1, 2, 2)$. Qual (Quais) o(s) ponto(s) mais próximo(s)?

69. Mostre que o valor máximo da função $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ quando sujeita à restrição $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ é igual a $(R^2/3)^3$. Deduza a desigualdade:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma > 0, \ (\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}.$$

(Isto é, a média geométrica de três números é inferior à sua média aritmética.)

70. A temperatura de um ponto (x, y) de uma placa metálica é dada por

$$T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2.$$

Uma formiga percorre a circunferência centrada em 0 e de raio 5. Qual a maior e a menor temperatura que encontra?

71. Qual é o volume do maior paralelepípedo rectangular que pode ser inscrito no elipsóide

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1?$$

72. Calcule o máximo e o mínimo das funções f_i nos conjuntos D_i indicados:

a. $f_1(x, y) = x^2 - 2xy + 5y^2,\ D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

b. $f_2(x, y) = x + y,\ D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 \leq 3\}$

c. $f_3(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ no quadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$

d. $f_4(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2x^2y + 4$ no quadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$