

Nome completo: _____

N.º aluno: _____ Curso: _____

Nas alíneas das perguntas 1 a 6 apenas uma das respostas está correta. Determine-a e assinale-a com uma **cruz** no quadrado correspondente. Uma resposta incorreta desconta 0.2 ou 0.1 valores consoante a pergunta ou alínea vale 1.0 ou 0.5 valores, respetivamente. Uma não resposta nada vale nem desconta. A pergunta 7 deverá ser resolvida nas folhas do caderno.

- (1.0) 1. Numa aldeia agrícola com 1000 agricultores, 250 produzem mirtilos, 500 produzem framboesas e 400 produzem morangos. Também se sabe que 125 agricultores produzem mirtilos e framboesas, 100 produzem mirtilos e morangos e 200 produzem framboesas e morangos. Ainda se sabe que 50 produzem os 3 tipos de frutos (A, B e C). A probabilidade de encontrarmos um agricultor dessa aldeia que não produza nenhum dos 3 frutos é:

☐ A 0.95 ☐ B 0.225 ☐ C 0.05 ☐ D 0.725

2. A FCT tem três servidores de email, designados por S_1 , S_2 e S_3 , respetivamente. 30% do tráfego de emails é gerido pelo S_1 , 50% pelo S_2 e o restante pelo S_3 . Sabe-se ainda que 1% do tráfego de emails gerido pelo S_1 tem erro e 2% do tráfego de emails gerido pelo S_2 tem erro. Também se sabe que 2% dos emails geridos pela FCT têm erro.

- (1.0) (a) A probabilidade de ocorrer erro no tráfego de um email, sabendo que é gerido pelo servidor S_3 é:

☐ A 0.035 ☐ B 0.97 ☐ C 0.935 ☐ D 0.04

- (1.0) (b) Admita que 4% do tráfego de emails gerido pelo S_3 tem erro. A probabilidade do tráfego de um email que ocorreu sem erro, ter sido gerido pelo servidor S_3 é:

☐ A 0.9918 ☐ B 0.1959 ☐ C 0.6 ☐ D 0.4

3. Entre os 64 programadores de uma empresa, 48 são do sexo masculino. A empresa decide sortear 10 programadores para fazer um curso avançado de programação.

- (0.5) (a) A variável aleatória X que conta o número de programadores do sexo masculino, entre os 10 sorteados tem distribuição:

☐ A $B(64, 0.75)$ ☐ B $B(10, 0.75)$ ☐ C $H(64, 48, 10)$ ☐ D $H(64, 16, 10)$

- (1.0) (b) A probabilidade dos programadores sorteados serem todos do sexo masculino é:

☐ A 0.05631 ☐ B 0.04318 ☐ C 0.94369 ☐ D 0.95682

- (0.5) (c) O número esperado de programadores do sexo masculino sorteados é:

☐ A 2.5 ☐ B 48 ☐ C 10 ☐ D 7.5

4. Considere $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma população $X \sim E(3, \delta)$, $\delta \in \mathbb{R}^+$ e $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ a média amostral.

- (1.0) (a) A variância de $1 - \bar{X}$ é:

☐ A $1 - \frac{\delta^2}{n}$ ☐ B $\frac{\delta^2}{n}$ ☐ C δ^2 ☐ D $1 - \delta^2$

- (1.0) (b) O estimador de momentos para o parâmetro δ é:

☐ A $3 + \bar{X}$ ☐ B $\bar{X}$ ☐ C $\sqrt{\bar{X}}$ ☐ D $\bar{X} - 3$

- (1.0) (c) ☐ V ☐ F $\hat{\delta} = a + \bar{X}$ é um estimador centrado para δ se e só se $a = 3$.

(V.S.F.F.)

5. Pretende-se estudar a espessura dos componentes eletrônicos produzidos numa fábrica. Para o efeito registou-se a espessura (em mm) de 30 componentes, apresentadas na seguinte tabela:

12	12	11	15	16	13	15	14	14	15	15	16	12	11	15
11	13	14	11	14	15	11	13	14	15	12	14	15	13	14

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 405 \quad \sum_{i=1}^{30} (x_i - \bar{x})^2 = 73.5$$

- (1.0) (a) O intervalo de confiança para a espessura média de todos os componentes produzidos nessa fábrica, usando o nível de confiança de 99%, é:

☐ [12.2, 14.8] ☐ [12.3, 14.7] ☐ [12.7, 14.3] ☐ [12.8, 14.2]

- (1.0) (b) Se $\sigma = 1.6$, a dimensão mínima da amostra que garante um intervalo de confiança a 95%, para a espessura média de todos os componentes produzidos, com amplitude inferior a $1mm$ é:

☐ 39 ☐ 40 ☐ 27 ☐ 28

- (c) Pretende-se testar se a proporção de componentes com espessura inferior a $13mm$, p , difere de 0.25.

- (0.5) i. As hipóteses a testar são:

☐ $H_0 : p \neq 0.25 \quad vs \quad H_1 : p = 0.25$ ☐ $H_0 : p = 0.25 \quad vs \quad H_1 : p \neq 0.25$
☐ $H_0 : \hat{p} = 0.25 \quad vs \quad H_1 : \hat{p} \neq 0.25$ ☐ $H_0 : p = 0.3 \quad vs \quad H_1 : p \neq 0.3$

- (0.5) ii. Para um nível de significância de 5%, a região de rejeição, $R_{0.05}$, é:

☐ $]-\infty, -1.96[\cup]1.96, +\infty[$ ☐ $]1.64, +\infty[$ ☐ $]-\infty, -1.64[$ ☐ $]1.96, +\infty[$

- (0.5) iii. O valor observado da estatística de teste é:

☐ 0.3464 ☐ 0.5976 ☐ 0 ☐ 0.6325

- (1.0) iv. Se para outra amostra de igual dimensão, o valor observado da estatística de teste for -0.65 , o p -value é:

☐ 0.516 ☐ 0.258 ☐ 0.742 ☐ 0.758

6. Pretende-se usar um modelo de regressão linear simples para explicar o número de veículos Y (em milhares), que passam na Ponte 25 de Abril, durante a manhã de um domingo de verão, em função da temperatura do ar x ($^{\circ}C$) em Lisboa às 8h. Para esse efeito registaram-se os valores do par (x, Y) durante 10 domingos, com $9 \leq x \leq 27$, onde se obtiveram as seguintes estimativas: $\sum_{i=1}^{10} x_i = 160$, $\sum_{i=1}^{10} Y_i = 206$, $S_{xx} = 350$, $S_{xY} = 280$ e $S_{YY} = 250$.

- (0.5) (a) A estimativa da ordenada na origem da reta de regressão é:

☐ 0.8 ☐ 7.8 ☐ 1.6 ☐ 3.25

- (0.5) (b) ☐ ☐ Tendo em conta o valor do coeficiente de determinação, o modelo de regressão linear simples explica estatisticamente a relação entre x e Y .

- (0.5) (c) A estimativa do número esperado de veículos que passam na Ponte 25 de Abril, num domingo em que a temperatura do ar às 8h é $12^{\circ}C$ é (em milhares):

☐ 17.4 ☐ 27 ☐ 94.4 ☐ 9.6

- (1.0) (d) A região de rejeição do teste $H_0 : \sigma^2 \geq 3.5 \quad vs \quad H_1 : \sigma^2 < 3.5$, para $\alpha = 0.01$ é:

☐ $]-\infty, 1.65[$ ☐ $]0, 1.65[$ ☐ $]-\infty, 20.1[$ ☐ $]0, 20.1[$

7. A proporção (em volume) de determinada substância química num produto pode ser considerada uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade e função de distribuição dadas, respetivamente por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases} \quad \text{e} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^4 + x^2}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

- (1.5) (a) Determine o valor da constante a .

- (1.5) (b) Sempre que a proporção da referida substância é inferior a 0.5 o produto é de qualidade inferior. Qual a probabilidade de um produto que foi considerado de qualidade inferior a proporção daquela substância ser superior a 0.25?

- (2.0) (c) Seja Y o valor comercial (em euros) de cada unidade de volume de produto, função da proporção da substância, definido por $Y = 2X$. Sabendo que $E(X^2) = 7/12$, calcule $cov(X, Y)$.

Nome completo: _____

N.º aluno: _____ Curso: _____

Nas alíneas das perguntas 1 a 6 apenas uma das respostas está correta. Determine-a e assinale-a com uma **cruz** no quadrado correspondente. Uma resposta incorreta desconta 0.2 ou 0.1 valores consoante a pergunta ou alínea vale 1.0 ou 0.5 valores, respetivamente. Uma não resposta nada vale nem desconta. A pergunta 7 deverá ser resolvida nas folhas do caderno.

- (1.0) 1. Numa aldeia agrícola com 1000 agricultores, 250 produzem mirtilos, 500 produzem framboesas e 400 produzem morangos. Também se sabe que 125 agricultores produzem mirtilos e framboesas, 100 produzem mirtilos e morangos e 200 produzem framboesas e morangos. Ainda se sabe que 50 produzem os 3 tipos de frutos (A, B e C). A probabilidade de encontrarmos um agricultor dessa aldeia que não produza nenhum dos 3 frutos é:

☐ A 0.725 ☐ B 0.05 ☐ C 0.225 ☐ D 0.95

2. A FCT tem três servidores de email, designados por S_1 , S_2 e S_3 , respetivamente. 30% do tráfego de emails é gerido pelo S_1 , 50% pelo S_2 e o restante pelo S_3 . Sabe-se ainda que 1% do tráfego de emails gerido pelo S_1 tem erro e 2% do tráfego de emails gerido pelo S_2 tem erro. Também se sabe que 2% dos emails geridos pela FCT têm erro.

- (1.0) (a) A probabilidade de ocorrer erro no tráfego de um email, sabendo que é gerido pelo servidor S_3 é:

☐ A 0.935 ☐ B 0.035 ☐ C 0.97 ☐ D 0.04

- (1.0) (b) Admita que 4% do tráfego de emails gerido pelo S_3 tem erro. A probabilidade do tráfego de um email que ocorreu sem erro, ter sido gerido pelo servidor S_3 é :

☐ A 0.9918 ☐ B 0.6 ☐ C 0.4 ☐ D 0.1959

3. Entre os 64 programadores de uma empresa, 48 são do sexo masculino. A empresa decide sortear 10 programadores para fazer um curso avançado de programação.

- (0.5) (a) A variável aleatória X que conta o número de programadores do sexo masculino, entre os 10 sorteados tem distribuição:

☐ A $B(10, 0.75)$ ☐ B $B(64, 0.75)$ ☐ C $H(64, 16, 10)$ ☐ D $H(64, 48, 10)$

- (1.0) (b) A probabilidade dos programadores sorteados serem todos do sexo masculino é:

☐ A 0.04318 ☐ B 0.95682 ☐ C 0.94369 ☐ D 0.05631

- (0.5) (c) O número esperado de programadores do sexo masculino sorteados é:

☐ A 2.5 ☐ B 7.5 ☐ C 10 ☐ D 48

4. Considere $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma população $X \sim E(2, \delta)$, $\delta \in \mathbb{R}^+$ e $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ a média amostral.

- (1.0) (a) O estimador de momentos para o parâmetro δ é:

☐ A $2 + \bar{X}$ ☐ B $\bar{X}$ ☐ C $\sqrt{\bar{X}}$ ☐ D $\bar{X} - 2$

- (1.0) (b) ☐ V ☐ F $\hat{\delta} = a + \bar{X}$ é um estimador centrado para δ se e só se $a = -2$.

- (1.0) (c) A variância de $1 - \bar{X}$ é:

☐ A $1 - \frac{\delta^2}{n}$ ☐ B $\frac{\delta^2}{n}$ ☐ C δ^2 ☐ D $1 - \delta^2$

(V.S.F.F.)

5. Pretende-se estudar a espessura dos componentes eletrônicos produzidos numa fábrica. Para o efeito registou-se a espessura (em mm) de 30 componentes, apresentadas na seguinte tabela:

12	12	11	15	16	13	15	14	14	15	15	16	12	11	15
11	13	14	11	14	15	11	13	14	15	12	14	15	13	14

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 405 \quad \sum_{i=1}^{30} (x_i - \bar{x})^2 = 73.5$$

- (1.0) (a) O intervalo de confiança para a espessura média de todos os componentes produzidos nessa fábrica, usando o nível de confiança de 99%, é:

[A] [12.8, 14.2] [B] [12.2, 14.8] [C] [12.7, 14.3] [D] [12.3, 14.7]

- (1.0) (b) Se $\sigma = 1.6$, a dimensão mínima da amostra que garante um intervalo de confiança a 95%, para a espessura média de todos os componentes produzidos, com amplitude inferior a $1mm$ é:

[A] 27 [B] 28 [C] 39 [D] 40

- (c) Pretende-se testar se a proporção de componentes com espessura inferior a $13mm$, p , difere de 0.25.

- (0.5) i. As hipóteses a testar são:

[A] $H_0 : p \neq 0.25 \quad vs \quad H_1 : p = 0.25$ [B] $H_0 : \hat{p} = 0.25 \quad vs \quad H_1 : \hat{p} \neq 0.25$
[C] $H_0 : p = 0.25 \quad vs \quad H_1 : p \neq 0.25$ [D] $H_0 : p = 0.3 \quad vs \quad H_1 : p \neq 0.3$

- (0.5) ii. Para um nível de significância de 5%, a região de rejeição, $R_{0.05}$, é:

[A] $]-\infty, -1.96[\cup]1.96, +\infty[$ [B] $]1.96, +\infty[$ [C] $]-\infty, -1.64[$ [D] $]1.64, +\infty[$

- (0.5) iii. O valor observado da estatística de teste é:

[A] 0.6325 [B] 0.3464 [C] 0 [D] 0.5976

- (1.0) iv. Se para outra amostra de igual dimensão, o valor observado da estatística de teste for -0.65 , o p -value é:

[A] 0.258 [B] 0.758 [C] 0.742 [D] 0.516

6. Pretende-se usar um modelo de regressão linear simples para explicar o número de veículos Y (em milhares), que passam na Ponte 25 de Abril, durante a manhã de um domingo de verão, em função da temperatura do ar x ($^{\circ}C$) em Lisboa às 8h. Para esse efeito registaram-se os valores do par (x, Y) durante 10 domingos, com $9 \leq x \leq 27$, onde se obtiveram as seguintes estimativas: $\sum_{i=1}^{10} x_i = 160$, $\sum_{i=1}^{10} Y_i = 206$, $S_{xx} = 350$, $S_{xY} = 280$ e $S_{YY} = 250$.

- (0.5) (a) A estimativa da ordenada na origem da reta de regressão é:

[A] 3.25 [B] 7.8 [C] 0.8 [D] 1.6

- (0.5) (b) [V] [F] Tendo em conta o valor do coeficiente de determinação, o modelo de regressão linear simples explica estatisticamente a relação entre x e Y .

- (0.5) (c) A estimativa do número esperado de veículos que passam na Ponte 25 de Abril, num domingo em que a temperatura do ar às 8h é $12^{\circ}C$ é (em milhares):

[A] 94.4 [B] 17.4 [C] 27 [D] 9.6

- (1.0) (d) A região de rejeição do teste $H_0 : \sigma^2 \geq 3.5 \quad vs \quad H_1 : \sigma^2 < 3.5$, para $\alpha = 0.01$ é:

[A] $]0, 1.65[$ [B] $]-\infty, 1.65[$ [C] $]0, 20.1[$ [D] $]-\infty, 20.1[$

7. A proporção (em volume) de determinada substância química num produto pode ser considerada uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade e função de distribuição dadas, respetivamente por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases} \quad \text{e} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^4 + x^2}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

- (1.5) (a) Determine o valor da constante a .

- (1.5) (b) Sempre que a proporção da referida substância é inferior a 0.5 o produto é de qualidade inferior. Qual a probabilidade de um produto que foi considerado de qualidade inferior a proporção daquela substância ser superior a 0.25?

- (2.0) (c) Seja Y o valor comercial (em euros) de cada unidade de volume de produto, função da proporção da substância, definido por $Y = 2X$. Sabendo que $E(X^2) = 7/12$, calcule $cov(X, Y)$.