Teoria da Computação

Aula Teórica 2: Lógica Proposicional e de Primeira Ordem

António Ravara

Departamento de Informática

11 de Março de 2019

Lógica proposicional

Um sistema formal de raciocínio, constituido por:

- Um *alfabeto* (conjunto de símbolos).
- Uma *linguagem* (conjunto de fórmulas).
- Uma *semântica* (para valoração de símbolos e fórmulas).
- Um *cálculo* (sistema sintático de prova, para raciocinar).

Objecto

- Estudo do comportamento dos *conectivos* lógicos negação, disjunção, conjunção, implicação e equivalência)
- Linguagem das *asserções* ou *proposições*: afirmações que são ou verdadeiras ou falsas.
- Linguagem construida a partir de símbolos proposicionais (asserções básicas) e conectivos lógicos (ligam asserções).

Asserções

Exemplos

- Básicas:
  - hoje chove;
  - todo o natural par maior que 2 é a soma de dois primos.
- Compostas:
  - estudo hoje *ou* amanha;
  - jogo hoje *e* amanha;
  - *se* tenho aulas *então* vou à Faculdade;
  - n é par se e só se $\mathrm{mod}(n, 2) = 0$.
- Não são asserções:
  - passe-me o sal, se faz favor;
  - quanto mais depressa, mais devagar.

Definição da sintaxe da lógica proposicional

Objectivo

- Obter a linguagem formal das fórmulas proposicionais.
- A partir de um alfabeto (conjunto de símbolos, representando asserções) define-se como construir palavras (sequências finitas de símbolos, ditas *fórmulas*).

Seja P um conjunto numerável (de símbolos proposicionais). O *alfabeto proposicional sobre P*, denotado Alf_P, é o conjunto constituido:

- por cada um dos elementos de P (as *asserções básicas*);
- pelo símbolo $\perp$ (chamado *falso*, ou *absurdo*);
- pelos conectivos *disjunção*, $\vee$, *conjunção*, $\wedge$ e *implicação*, $\rightarrow$;
- pelos parênteses esquerdo e direito, (e).

Definição da sintaxe da lógica proposicional

Nem toda a sequência de símbolos do alfabeto é uma palavra da linguagem.

A *linguagem proposicional induzida por* Alf_P, denotada F_P, é o conjunto definido indutivamente pelas seguintes regras:

- *BOT*: $\perp \in F_P$
- *PROP*: se $p \in P$ então $p \in F_P$
- *DIS*: se $\varphi, \psi \in F_P$ então $(\varphi \vee \psi) \in F_P$
- *CON*: se $\varphi, \psi \in F_P$ então $(\varphi \wedge \psi) \in F_P$
- *IMP*: se $\varphi, \psi \in F_P$ então $(\varphi \rightarrow \psi) \in F_P$

Terminologia

- Os elementos de F_P dizem-se *fórmulas*.
- Os elementos de P e o símbolo $\perp$ dizem-se fórmulas *atómicas*.

Que sequências são fórmulas?

Não são necessariamente fórmulas todas as sequências de símbolos do alfabeto.

As sequências seguintes não são fórmulas

- $pq \notin F_P$, porque não se podem fazer sequências de símbolos proposicionais;
- $(p\vee) \notin F_P$, porque a disjunção é um operador binário e a expressão só tem um operando;
- $(p \rightarrow (\vee q)) \notin F_P$, porque a implicação é um operador binário que deve ter como argumentos/operandos duas fórmulas; no entanto, apesar de p ser uma fórmula, $(\vee q)$ não o é.

Facilmente se vê que não foram seguidas as regras para definir fórmulas.

Que sequências são fórmulas?

Como mostrar que $(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r)) \in F_P$

Prova de fórmulas

Sejam $p, q, r \in P$.

1. Por *PROP*, tem-se que $p \in F_P$.
2. Por *PROP*, tem-se que $q \in F_P$.
3. Por *PROP*, tem-se que $r \in F_P$.
4. Por *DIS*, com 1 e 2, tem-se que $(p \vee q) \in F_P$.
5. Por *IMP*, com 4 e 3, tem-se que $((p \vee q) \rightarrow r) \in F_P$.
6. Por *CON*, com 1 e 5, tem-se que $(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r)) \in F_P$.

Exemplos de fórmulas da lógica proposicional

Asserções básicas e compostas

Considere as seguintes asserções básicas.

- p: 'estudo hoje'
- q: 'estudo amanhã'
- r: 'tenho exame amanhã'.

Constroiem-se as seguintes asserções compostas:

- estudo hoje *ou* estudo amanhã: $p \vee q$
- estudo hoje *e* estudo amanhã: $p \wedge q$
- *se* tenho exame amanhã *então* estudo hoje *e* estudo amanhã: $r \rightarrow (p \wedge q)$

Abreviaturas

São úteis novos conectivos para abreviar alguns tipos de fórmulas.

- Negação: $\neg\varphi \stackrel{\text{abv}}{=} \varphi \to \bot$;
- Verdade: $\top \stackrel{\text{abv}}{=} \neg\bot$;
- Equivalência: $\varphi \leftrightarrow \psi \stackrel{\text{abv}}{=} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

Convenções

- Para simplificar a notação omitem-se por vezes os parênteses mais exteriores das fórmulas.
- Consideramos que o conectivo $\neg$ tem precedência.

Exemplos

- $\neg(\neg\varphi \wedge \psi) \stackrel{\text{abv}}{=} ((\varphi \to \bot) \wedge \psi) \to \bot$
- $\neg\varphi \leftrightarrow (\psi \vee \delta) \stackrel{\text{abv}}{=} ((\varphi \to \bot) \to (\psi \vee \delta)) \wedge ((\psi \vee \delta) \to (\varphi \to \bot))$

Tradução da linguagem natural para lógica proposicional

- Os símbolos proposicionais representam asserções básicas (afirmações verdadeiras ou falsas): 'estudo hoje'.
- O conectivo disjunção representa alternativa. Uma frase que comece por "ou" e tenha um número par de ocorrências dessa palavra procura não ser ambígua: 'ou estudo hoje ou amanhã.
- O conectivo conjunção indica que a frase só é verdade se cada uma das partes o for.
  A fórmula $p \wedge q$ traduz as frases "p e q", "tanto p como q", "p tal como q", etc,. . .
- O conectivo implicação captura consequência. à esquerda está o *antecedente* (hipótese) e à direita o *consequente* (tese).
  A fórmula $p \rightarrow q$ traduz as frases "se p então q", "se p, q", "q se p", "p só se q", "caso p então q", "caso p, q", "como p, q", etc,. . .

Tradução da linguagem natural para lógica proposicional

- "gosto de lógica" escreve-se p;
  "gosto de álgebra" escreve-se q;
  "gosto de análise" escreve-se r;
- "gosto de lógica e de álgebra" escreve-se $p \wedge q$;
- "gosto de lógica ou de álgebra" escreve-se $p \vee q$;
- "gosto de lógica ou de álgebra e de análise" é ambígua, mas "ou gosto de lógica ou de álgebra e de análise" já não; nas fórmulas, os parênteses desambiguam: $p \vee q \wedge r$ é ambígua, mas $p \vee (q \wedge r)$ já não.
- Há ambiguidades difíceis de resolver: "o Pedro foi ao médico e ficou doente" tanto pode querer dizer $m \wedge d$ como $m \to d$.
- Comutatitividade? "o Pedro ficou doente e foi ao médico " deve querer dizer $d \to m$, não $d \wedge m$.

Necessidade de uma linguagem mais rica

- Apenas compõe asserções com os operadores de negação, disjunção, conjunção e implicação.
- Trata declarações que não envolvam estes operadores como atómicas, por muito elaboradas que sejam.
- Não permite expressar constantes, propriedades, funções.
- Quer-se raciocinar sobre factos como:
  - $3 < 9$ ou $3^2 = 9$
  - $\forall n \in \mathbb{N}_0 \; n \geq 0$ ou $\forall x, y \in \mathbb{N} \; \exists z \in \mathbb{N} \; (x^2 + y^2 = z^2)$
  - *Todo o homem é mortal* ou *Nenhum homem é mortal* ou *Algum homem é mortal* ou *Algum homem não é mortal*
  - *Qualquer estudante é mais novo que algum professor*
- A Lógica Proposicional representa estas asserções como básicas (um símbolo proposicional, p).

Lógica de Primeira Ordem

Ingredientes: os da Lógica Proposicional, mais

Termos

- Constantes: representam elementos concretos de conjuntos (ou universos).
  Exemplos: 3 (um natural), 1.5 (um racional), Sócrates (um homem)
- Variáveis: representam elementos arbitrários de conjuntos.
  Exemplos: n, m, x, y, x_1
- Funções: compõem constantes e variáveis com operadores para fazer determinado cálculo.
  Exemplos: Suc(n)=n+1, Quad(x)=x^2

Lógica de Primeira Ordem

Ingredientes: os da Lógica Proposicional, mais termos mais

Novas fórmulas

- Predicados: expressam propriedades (como *relações*).
  Exemplos: $2 = 1 + 1$, $2 > 3$, Mortal(Sócrates),
  Estudante(Pedro), Professor(António), Mais_novo(x,y)
- Fórmulas com quantificadores (universal e existencial): identificam todos ou alguns elementos de um conjunto com dada propriedade.
  - $\forall m\, Mortal(m)$ ou $\exists m \neg Mortal(m)$
  - $\forall x (Estudante(x) \rightarrow (\exists y (Professor(y) \wedge Mais\_novo(x, y))))$
  - $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ (|x - a| < \delta\ \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$

Que símbolos usar?

Definição 15.1: Assinatura

Uma *assinatura de primeira ordem* é um par de conjuntos $\Sigma = (SF, SP)$ sendo:

- $SF = \{SF_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, onde cada SF_i é um conjunto de símbolos de *função* de aridade i e em SF os conjuntos são disjuntos dois a dois.
- $SP = \{SP_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, onde cada SP_i é um conjunto de símbolos de *predicado* de aridade i e em SP os conjuntos são disjuntos dois a dois.

Os símbolos em SF_0 chamam-se *constantes*;
Os símbolos em SP_0 chamam-se *símbolos proposicionais*.

Uma assinatura

Exemplo

- $SF = \{SF_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, com
  - $SF_0 = \{Zero\}$
  - $SF_1 = \{Suc\}$
  - $SF_2 = \{Plus\}$
  - $SF_i = \emptyset$, para todo o $i \geq 3$
- $SP = \{SP_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, com
  - $SP_1 = \emptyset$
  - $SP_2 = \{=, >, <\}$
  - $SP_i = \emptyset$, para todo o $i = 0$ ou $i \geq 3$

Predicados são relações, mas podem ser vistos como funções para $\{0, 1\}$.

Alfabeto de primeira ordem sobre Σ e X

Dada uma assinatura de primeira ordem $\Sigma = (SF, SP)$ e um conjunto numerável X de *variáveis*, o *alfabeto de primeira ordem sobre* Σ *e* X, denotado por Alf_{Σ}^{X}, é constituido por:

- cada um dos elementos de SF_i, para cada $i \in \mathbb{N}_0$;
- cada um dos elementos de SP_i, para cada $i \in \mathbb{N}_0$;
- cada um dos elementos de X;
- o símbolo $\perp$ (falso, contradição ou absurdo);
- os conectivos disjunção, $\vee$, conjunção, $\wedge$ e implicação, $\rightarrow$;
- os quantificadores universal, $\forall$, e existencial, $\exists$;
- o símbolo , e os parênteses esquerdo e direito, (e).

Assume-se que $X \cap SF_i = \emptyset$ e $X \cap SP_i = \emptyset$, para cada $i \in \mathbb{N}_0$

Conjunto de termos induzidos por uma assinatura

O *conjunto de termos induzidos por* Alf_{Σ}^{X}, denotado por T_{Σ}^{X}, é definido indutivamente pelas seguintes regras.

- $CONST$: $c \in T_{\Sigma}^{X}$, para cada $c \in SF_0$;
- VAR: $x \in T_{\Sigma}^{X}$, para cada $x \in X$;
- FUN: se $t_1, \ldots, t_n \in T_{\Sigma}^{X}$ então $f(t_1, \ldots, t_n) \in T_{\Sigma}^{X}$ para cada $f \in SF_n$, com $n > 0$.

Exemplos

Considere-se a assinatura do exemplo anterior e assuma-se $x \in X$.

- Por $CONST$, tem-se que $Zero \in T_{\Sigma}^{X}$, pois, $Zero \in SF_0$.
- Como $x \in T_{\Sigma}^{X}$ (por VAR), então $Suc(x) \in T_{\Sigma}^{X}$ por FUN, pois $Suc \in SF_1$.

$Suc(Plus(x, Zero)) \in T_\Sigma^X$?

Como mostrar que a frase $Suc(Plus(x, Zero))$ é um termo?

Constroi-se uma *árvore de derivação*.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \in X}{x \in T_\Sigma^X}\,(\text{VAR}) \qquad \dfrac{Zero \in SF_0}{Zero \in T_\Sigma^X}\,(\text{CONST}) \qquad Plus \in SF_2}{Plus(x, Zero) \in T_\Sigma^X}\,(\text{FUN}) \qquad Suc \in SF_1}{Suc(Plus(x, Zero)) \in T_\Sigma^X}$$

Conjunto F_Σ^X das fórmulas de Primeira Ordem

A *linguagem das fórmulas de primeira ordem induzida por* Alf_Σ^X, denotada por F_Σ^X, é definida indutivamente pelas seguintes regras.

- *PROP*: $P \in F_\Sigma^X$, para cada $P \in SP_0$;
- *BOT*: $\perp \in F_\Sigma^X$;
- *PRED*: se $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma^X$ então $P(t_1, \ldots, t_n) \in F_\Sigma^X$ para cada $P \in SP_n$, com $n > 0$;
- *DIS*: se $\varphi, \psi \in F_\Sigma^X$ então $(\varphi \vee \psi) \in F_\Sigma^X$;
- *CON*: se $\varphi, \psi \in F_\Sigma^X$ então $(\varphi \wedge \psi) \in F_\Sigma^X$;
- *IMP*: se $\varphi, \psi \in F_\Sigma^X$ então $(\varphi \rightarrow \psi) \in F_\Sigma^X$;
- *UNIV*: se $x \in X$ e $\varphi \in F_\Sigma^X$ então $(\forall x\, \varphi) \in F_\Sigma^X$;
- *EXIST*: se $x \in X$ e $\varphi \in F_\Sigma^X$ então $(\exists x\, \varphi) \in F_\Sigma^X$.

Exemplos de expressões que não são fórmulas de primeira ordem

Sejam x é uma variável, f uma função, P e Q predicados e ψ uma fórmula.

- Funções não são fórmulas:

  $$Suc(x) \text{ e } (Suc(Zero) \vee Suc(Suc(Zero)))$$

  não são fórmulas de primeira ordem.
- Argumentos das funções e dos predicados são termos:

  $$Q(f(P(x))),\ P(\psi),\ \text{ e } P(Q(x))$$

  não são fórmulas de primeira ordem.
- Quantificam-se variáveis, não funções, predicados ou fórmulas:

  $$\forall x \forall f.P(f(x)),\ \forall x \forall P.P(Q(x)),\ \text{e } \forall \psi(\psi \vee P(x))$$

  não são fórmulas de primeira ordem.

O que representam os termos e fórmulas?

- Constantes referem entidades concretas.
- Variáveis referem entidades arbitrárias.
- Funções expressam cálculo.
- Relações expressam predicados (propriedades).
- Quantificador universal expressa uma asserção sobre *todas* as entidades (de um conjunto) – conjunção generalizada.
  Captura ideias como "todo", "qualquer", "cada um", etc.
- Quantificador existencial expressa uma asserção sobre *algumas* entidades (de um conjunto) – disjunção generalizada.
  Captura ideias como "algum", "pelo menos um", "existe um", ...

Fórmulas são asserções sobre as entidades representadas pelos termos.

Da linguagem natural para lógica de primeira ordem

Exemplos

- "O João é uma criança" escreve-se $C(\text{João})$;
  "A Ana é mãe do João" escreve-se $M(\text{Ana},\text{João})$;
  "O João é mais novo que a Ana" escreve-se $N(\text{João},\text{Ana})$;
- "Qualquer criança é mais nova que a sua mãe" escreve-se

$$\forall x\, \forall y\, (C(x) \wedge M(y, x)) \rightarrow N(x, y)$$

- "O conjunto tem pelo menos três elementos diferentes" escreve-se

$$\exists x\, \exists y\, \exists z\, (\neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z))$$

Funções ou predicados: uma questão de escolha

"Os filhos de meu pai são meus irmãos"

- "Pai" como predicado.
  Dada uma assinatura $\Sigma = (SF, SP)$, com
  - $eu \in SF_0$
  - $SP_2 = \{F, I, P\}$

  obtém-se a formulação $\forall x \forall y((P(x, eu) \wedge F(y, x)) \rightarrow I(y, eu))$
- "Pai" como função ("Pai de" é uma relação unívoca).
  Dada uma assinatura $\Sigma = (SF, SP)$, com
  - $eu \in SF_0$ e $P \in SF_1$
  - $SP_2 = \{I, F\}$

  obtém-se a formulação

$$\forall x(F(x, P(eu)) \rightarrow I(x, eu))$$