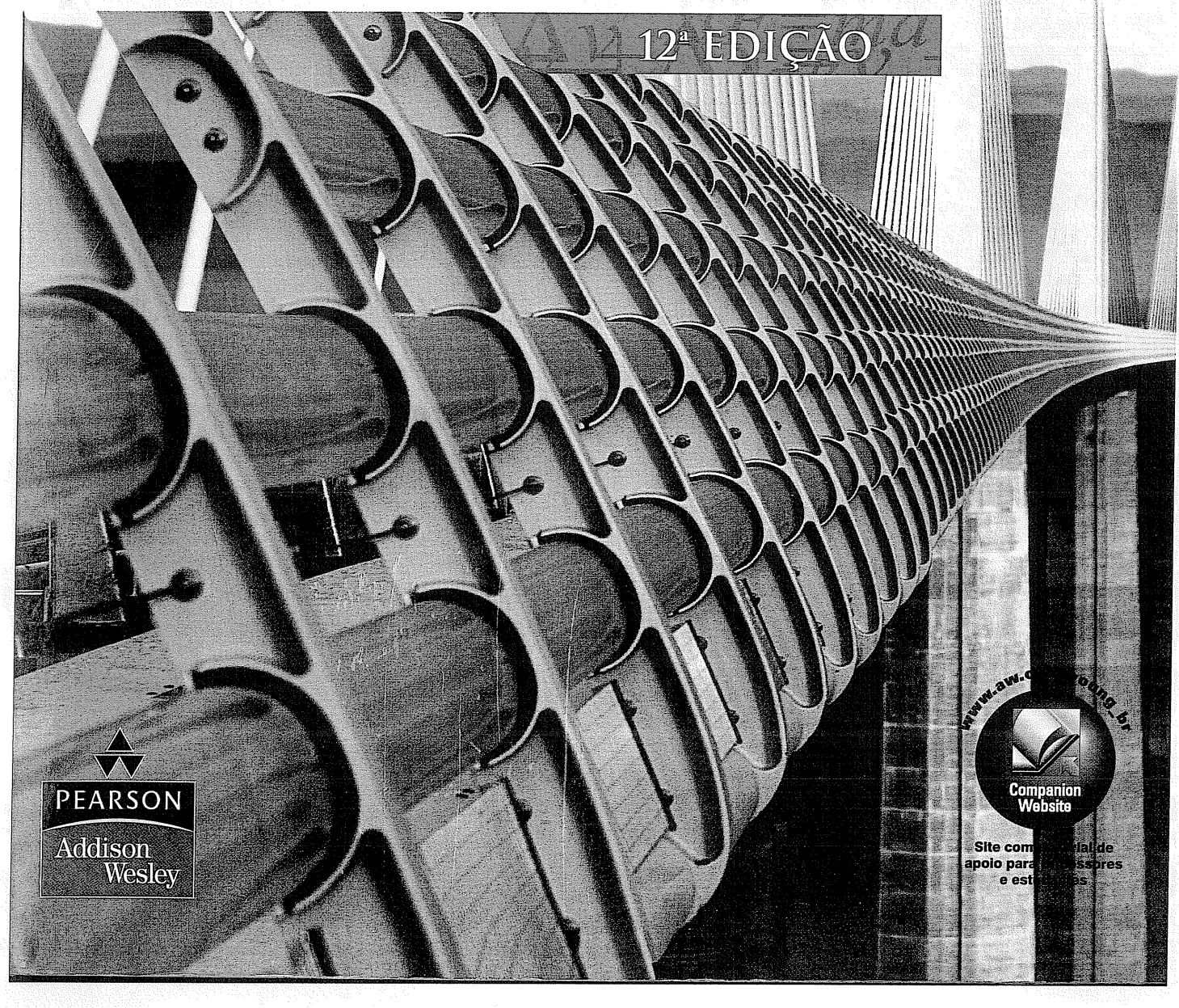
SEARS & ZEMANSKY

FÍSICA I

MECÂNICA

YOUNG & FREEDMAN

12ª EDIÇÃO



PEARSON

Addison Wesley

Companion Website

Site com material de apoio para professores e estudantes

SEARS & ZEMANSKY

FÍSICA I

MECÂNICA

YOUNG & FREEDMAN

12ª EDIÇÃO

Addison Wesley - Makron Books
PEARSON Education
CORTESIA

Com sua primeira edição publicada em 1949 por Sears e Zemansky, *Física I* é considerada hoje uma obra indispensável para qualquer professor ou estudante dessa disciplina por oferecer uma profunda e rigorosa introdução à física baseada no cálculo.

Esta 12ª edição de *Física I* apresenta as novas idéias extraídas de pesquisas acadêmicas realizadas recentemente na área, enfatizando o ensino aprimorado por meio de recursos visuais pioneiros e um texto claro e direto, que ajudam o estudante a desenvolver a intuição física e a adquirir as habilidades necessárias para a solução de problemas. Além disso, o livro conta com diversos elementos que contribuem para a fixação dos principais conceitos, entre eles:

- **Objetivos de aprendizagem**, no início de cada capítulo.
- **Estratégia para a solução de problemas** e **Exemplos resolvidos**, que fornecem aos estudantes, em quatro etapas, táticas específicas para a resolução de determinados tipos de problema.
- **Testes de compreensão**, com perguntas relacionadas ao conteúdo da seção em estudo.
- **Problemas** com níveis de dificuldade progressivos.
- **Resumo** ilustrado, no fim de cada capítulo, com cerca de 800 novos exercícios ao longo dos quatro volumes.
- **Figuras** com comentários no estilo "anotação", para orientar o estudante e reforçar suas habilidades.

Livro-texto para os cursos de física e engenharia, entre outros, este livro também é referência fundamental para quem precisa se preparar para exames ou atualizar-se no conhecimento da física.

SEARS & ZEMANSKY

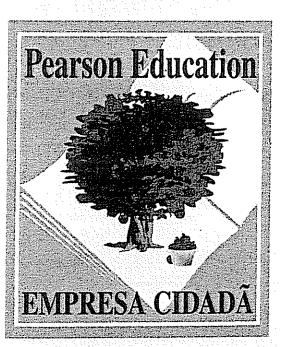
FÍSICA I

MECÂNICA

YOUNG & FREEDMAN

12ª EDIÇÃO

Longman - Makron Books - Prentice Hall - Addison Wesley
PEARSON
Education
CORTESIA
VENDA



SEARS & ZEMANSKY

FÍSICA I

MECÂNICA

YOUNG & FREEDMAN

12ª EDIÇÃO

Hugh D. Young
Universidade Carnegie-Mellon, Pittsburgh

Roger A. Freedman
Universidade da Califórnia, Santa Bárbara

Colaborador
A. Lewis Ford
Universidade A&M do Texas

Tradução
Sonia Midori Yamamoto

Revisão Técnica
Adir Moysés Luiz
Doutor em ciência
Professor associado do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro

PEARSON Addison Wesley

São Paulo

Brasil Argentina Colômbia Costa Rica Chile Espanha Guatemala México Peru Porto Rico Venezuela

ABDR EDITORA AFILIADA

© 2008 by Pearson Education do Brasil

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de nenhum modo ou por algum outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Pearson Education do Brasil.

Diretor editorial: Roger Trimer
Gerente editorial: Sabrina Cairo
Editores: Arlete Sousa e Marco Pace
Preparação: Marina Mourão Fanti
Revisão: Sílvia Garcia e Letícia Scarp
Capa: Rafael Mazzo, sob projeto original de Yvo Riezebos Design
Projeto gráfico e diagramação: ERJ Composição Editorial e Artes Gráficas

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Young, Hugh D.
Física I / Young e Freedman ; tradução Sonia Midori Yamamoto ; revisão técnica Adir Moysés Luiz. — 12. ed. — São Paulo : Addison Wesley, 2008.

Título original: Sears and Zemansky's university physics

ISBN 978-85-88639-30-0

1. Física 2. Física — Estudo e ensino
I. Freedman. II. Luiz, Adir Moysés. III. Título.

07-10684 CDD-530.07

Índice para catálogo sistemático:
1. Física : Estudo e ensino 530.07

2008

Direitos exclusivos para a língua portuguesa cedidos à
Pearson Education do Brasil,
uma empresa do grupo Pearson Education
Av. Ermano Marchetti, 1435
CEP: 05038-001 – São Paulo – SP
Fone: (11) 2178-8686 – Fax: (11) 2178-8688
e-mail: vendas@pearsoned.com

SUMÁRIO

FÍSICA 1
MECÂNICA

CAPÍTULO 1 Unidades, Grandezas Físicas e Vetores

1.1 A Natureza da Física 01
1.2 Solução de Problemas de Física 02
1.3 Padrões e Unidades 04
1.4 Coerência e Conversão de Unidades 06
1.5 Incerteza e Algarismos Significativos 08
1.6 Estimativas e Ordens de Grandeza 10
1.7 Vetores e Soma Vetorial 10
1.8 Componentes de Vetores 15
1.9 Vetores Unitários 19
1.10 Produtos de Vetores 20

Resumo/Principais Termos 26
Questões/Exercícios/Problemas 27

CAPÍTULO 2 Movimento Retilíneo

2.1 Deslocamento, Tempo e Velocidade Média 35
2.2 Velocidade Instantânea 38
2.3 Aceleração Instantânea e Aceleração Média 41
2.4 Movimento com Aceleração Constante 45
2.5 Queda Livre de Corpos 51
*2.6 Velocidade e Posição por Integração 54

Resumo/Principais Termos 57
Questões/Exercícios/Problemas 58

CAPÍTULO 3 Movimento em Duas ou Três Dimensões

3.1 Vetor Posição e Vetor Velocidade 69
3.2 Vetor Aceleração 72
3.3 Movimento de um Projétil 77
3.4 Movimento Circular 85
3.5 Velocidade Relativa 89

Resumo/Principais Termos 93
Questões/Exercícios/Problemas 95

CAPÍTULO 4 Leis de Newton do Movimento

4.1 Força e Interações 106
4.2 Primeira Lei de Newton 109
4.3 Segunda Lei de Newton 113
4.4 Massa e Peso 119
4.5 Terceira Lei de Newton 121
4.6 Exemplos de Diagramas do Corpo Livre 124

Resumo/Principais Termos 126
Questões/Exercícios/Problemas 128

CAPÍTULO 5 Aplicações das Leis de Newton

5.1 Uso da Primeira Lei de Newton: Partículas em Equilíbrio 135
5.2 Uso da Segunda Lei de Newton: Dinâmica das Partículas 141
5.3 Forças de Atrito 148
5.4 Dinâmica do Movimento Circular 157
*5.5 As Forças Fundamentais da Natureza 162

Resumo/Principais Termos 164
Questões/Exercícios/Problemas 165

CAPÍTULO 6 Trabalho e Energia Cinética

6.1 Trabalho 181
6.2 Energia Cinética e o Teorema do Trabalho-Energia 186
6.3 Trabalho e Energia com Forças Variáveis 192
6.4 Potência 198

Resumo/Principais Termos 200
Questões/Exercícios/Problemas 202

CAPÍTULO 7 Energia Potencial e Conservação da Energia

7.1 Energia Potencial Gravitacional 213
7.2 Energia Potencial Elástica 222
7.3 Forças Conservativas e Forças Não Conservativas 228
7.4 Força e Energia Potencial 231

7.5 Diagramas de Energia 234

Resumo/Principais Termos 235
Questões/Exercícios/Problemas 237

CAPÍTULO 8 Momento Linear, Impulso e Colisões

8.1 Momento Linear e Impulso 247
8.2 Conservação do Momento Linear 253
8.3 Conservação do Momento Linear e Colisões 258
8.4 Colisões Elásticas 262
8.5 Centro de Massa 266
*8.6 Propulsão de um Foguete 270

Resumo/Principais Termos 272
Questões/Exercícios/Problemas 274

CAPÍTULO 9 Rotação de Corpos Rígidos

9.1 Velocidade Angular e Aceleração Angular 286
9.2 Rotação com Aceleração Angular Constante 291
9.3 Relações entre a Cinemática Linear e a Cinemática Angular 292
9.4 Energia no Movimento de Rotação 296
9.5 Teorema dos Eixos Paralelos 301
*9.6 Cálculos de Momento de Inércia 302

Resumo/Principais Termos 304
Questões/Exercícios/Problemas 306

CAPÍTULO 10 Dinâmica do Movimento de Rotação

10.1 Torque 316
10.2 Torque e Aceleração Angular de um Corpo Rígido 319
10.3 Rotação de um Corpo Rígido em Torno de um Eixo Móvel 323
10.4 Trabalho e Potência no Movimento de Rotação 329
10.5 Momento Angular 331
10.6 Conservação do Momento Angular 334
10.7 Giroscópios e Precessão 337

Resumo/Principais Termos 340
Questões/Exercícios/Problemas 342

CAPÍTULO 11 Equilíbrio e Elasticidade

11.1 Condições de Equilíbrio 355
11.2 Centro de Gravidade 356
11.3 Soluções de Problemas de Equilíbrio de Corpos Rígidos 359
11.4 Tensão, Deformação e Módulos de Elasticidade 364
11.5 Elasticidade e Plasticidade 369

Resumo/Principais Termos 370
Questões/Exercícios/Problemas 372

APÊNDICES

A Sistema Internacional de Unidades 387
B Relações Matemáticas Úteis 389
C Alfabeto Grego 390
D Tabela Periódica dos Elementos 391
E Fatores de Conversão das Unidades 392
F Constantes Numéricas 393

Respostas dos Problemas Ímpares 395
Índice Remissivo 399
Créditos das fotos 402
Sobre os autores 403

FÍSICA 2
TERMODINÂMICA E ONDAS

CAPÍTULO 12 Gravitação

12.1 Lei de Newton da Gravitação
12.2 Peso
12.3 Energia Potencial Gravitacional
12.4 Movimento de Satélites
12.5 As Leis de Kepler e o Movimento de Planetas
*12.6 Distribuição Esférica de Massa
*12.7 Peso Aparente e Rotação da Terra
12.8 Buraco Negro

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 13 Movimento Periódico

13.1 Causas da Oscilação
13.2 Movimento Harmônico Simples
13.3 Energia no Movimento Harmônico Simples
13.4 Aplicações do Movimento Harmônico Simples

13.5 O Pêndulo Simples
13.6 O Pêndulo Físico
13.7 Oscilações Amortecidas
13.8 Oscilações Forçadas e Ressonância

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 14 Mecânica dos Fluidos

14.1 Densidade
14.2 Pressão em um Fluido
14.3 Empuxo
14.4 Escoamento de um Fluido
14.5 Equação de Bernoulli
14.6 Viscosidade e Turbulência

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 15 Ondas Mecânicas

15.1 Tipos de Ondas Mecânicas
15.2 Ondas Periódicas
15.3 Descrição Matemática das Ondas
15.4 Velocidade de uma Onda Transversal
15.5 Energia no Movimento Ondulatório
15.6 Interferência de Ondas, Condições de Contorno de uma Corda e Princípio da Superposição
15.7 Ondas Estacionárias em uma Corda
15.8 Modos Normais de uma Corda

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 16 Som e Audição

16.1 Ondas Sonoras
16.2 Velocidade das Ondas Sonoras
16.3 Intensidade do Som
16.4 Ondas Estacionárias e Modos Normais
16.5 Ressonância e Som
16.6 Interferência de Ondas
16.7 Batimentos
16.8 O Efeito Doppler
*16.9 Ondas de Choque

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 17 Temperatura e Calor

17.1 Temperatura e Equilíbrio Térmico
17.2 Termômetros e Escalas de Temperatura
17.3 Termômetro de Gás e Escala Kelvin
17.4 Expansão Térmica
17.5 Quantidade de Calor
17.6 Calorimetria e Transições de Fases
17.7 Mecanismos de Transferência de Calor

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 18 Propriedades Térmicas da Matéria

18.1 Equações de Estado
18.2 Propriedades Moleculares da Matéria
18.3 Modelo Cinético-Molecular de um Gás Ideal
18.4 Calor Específico
*18.5 Velocidades Moleculares
18.6 Fases da Matéria

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 19 A Primeira Lei da Termodinâmica

19.1 Sistemas Termodinâmicos
19.2 Trabalho Realizado Durante Variações de Volume
19.3 Caminhos entre Estados Termodinâmicos
19.4 Energia Interna e a Primeira Lei da Termodinâmica
19.5 Tipos de Processos Termodinâmicos
19.6 Energia Interna de um Gás Ideal
19.7 Calor Específico de um Gás Ideal
19.8 Processo Adiabático de um Gás Ideal

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 20 A Segunda Lei da Termodinâmica

20.1 Sentido de um Processo Termodinâmico
20.2 Máquinas Térmicas
20.3 Máquinas de Combustão Interna
20.4 Refrigeradores
20.5 Segunda Lei da Termodinâmica
20.6 O Ciclo de Carnot

20.7 Entropia
*20.8 Interpretação Microscópica da Entropia

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

FÍSICA 3
ELETROMAGNETISMO

CAPÍTULO 21 Carga Elétrica e Campo Elétrico

21.1 Carga Elétrica
21.2 Condutores, Isolantes e Cargas Induzidas
21.3 Lei de Coulomb
21.4 Campo Elétrico e Forças Elétricas
21.5 Determinação do Campo Elétrico
21.6 Linhas de Força de um Campo Elétrico
21.7 Dipolos Elétricos

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 22 Lei de Gauss

22.1 Carga Elétrica e Fluxo Elétrico
22.2 Determinação do Fluxo Elétrico
22.3 Lei de Gauss
22.4 Aplicações da Lei de Gauss
22.5 Cargas e Condutores

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 23 Potencial Elétrico

23.1 Energia Potencial Elétrica
23.2 Potencial Elétrico
23.3 Determinação do Potencial Elétrico
23.4 Superfícies Equipotenciais
23.5 Gradiente de Potencial

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 24 Capacitância e Dielétricos

24.1 Capacitância e Capacitores
24.2 Capacitores em Série e em Paralelo
24.3 Armazenamento de Energia em Capacitores e Energia do Campo Elétrico
24.4 Dielétricos
*24.5 Modelo Molecular da Carga Induzida
*24.6 Lei de Gauss em Dielétricos

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 25 Corrente, Resistência e Força Eletromotriz

25.1 Corrente
25.2 Resistividade
25.3 Resistência
25.4 Força Eletromotriz e Circuitos
25.5 Energia e Potência em Circuitos Elétricos
*25.6 Teoria da Condução em Metais

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 26 Circuitos de Corrente Contínua

26.1 Resistores em Série e em Paralelo
26.2 Leis de Kirchhoff
26.3 Instrumentos de Medidas Elétricas
26.4 Circuito R-C
26.5 Sistemas de Distribuição de Potência

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 27 Campo Magnético e Força Magnética

27.1 Magnetismo
27.2 Campo Magnético
27.3 Linhas de Campo Magnético e Fluxo Magnético
27.4 Movimento de Partículas Carregadas em um Campo Magnético
27.5 Aplicações do Movimento de Partículas Carregadas
27.6 Força Magnética Sobre um Condutor Transportando uma Corrente
27.7 Força e Torque Sobre uma Espira de Corrente
*27.8 O Motor de Corrente Contínua
*27.9 O Efeito Hall

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 28 Fontes de Campo Magnético

28.1 Campo Magnético de uma Carga em Movimento
28.2 Campo Magnético de um Elemento de Corrente
28.3 Campo Magnético de um Condutor Retilíneo Transportando uma Corrente
28.4 Força Entre Condutores Paralelos
28.5 Campo Magnético de uma Espira de Corrente
28.6 Lei de Ampère
28.7 Aplicações da Lei de Ampère
*28.8 Materiais Magnéticos

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 29 Indução Eletromagnética

29.1 Experiências de Indução
29.2 Lei de Faraday
29.3 Lei de Lenz
29.4 Força Eletromotriz Produzida pelo Movimento
29.5 Campos Elétricos Induzidos
*29.6 Correntes de Rodamoinho
29.7 Corrente de Deslocamento e Equações de Maxwell
*29.8 Supercondutividade

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 30 Indutância

30.1 Indutância Mútua
30.2 Indutores e Auto-Indutância
30.3 Indutores e Energia do Campo Magnético
30.4 O Circuito R-L
30.5 O Circuito L-C
30.6 O Circuito R-L-C em Série

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 31 Corrente Alternada

31.1 Fasor e Corrente Alternada
31.2 Resistência e Reatância
31.3 O Circuito R-L-C em Série
31.4 Potência em Circuitos de Corrente Alternada
31.5 Ressonância em Circuitos de Corrente Alternada
31.6 Transformadores

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 32 Ondas Eletromagnéticas

32.1 Equações de Maxwell e Ondas Eletromagnéticas
32.2 Ondas Eletromagnéticas Planas e a Velocidade da Luz
32.3 Ondas Eletromagnéticas Senoidais
32.4 Energia e Momento Linear em Ondas Eletromagnéticas
32.5 Ondas Eletromagnéticas Estacionárias

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

FÍSICA 4
ÓTICA E FÍSICA MODERNA

CAPÍTULO 33 Natureza e Propagação da Luz

33.1 Natureza da Luz
33.2 Reflexão e Refração
33.3 Reflexão Interna Total
*33.4 Dispersão
33.5 Polarização
*33.6 Espalhamento da Luz
33.7 Princípio de Huygens

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 34 Ótica Geométrica e Instrumentos de Ótica

34.1 Reflexão e Refração em uma Superfície Plana
34.2 Reflexão em uma Superfície Esférica
34.3 Refração em uma Superfície Esférica
34.4 Lentes Delgadas
34.5 Câmera
34.6 O Olho
34.7 A Lupa
34.8 Microscópios e Telescópios

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 35 Interferência

35.1 Interferência e Fontes Coerentes
35.2 Interferência da Luz Produzida por Duas Fontes
35.3 Intensidade das Figuras de Interferência
35.4 Interferência em Películas Finas
35.5 O Interferômetro de Michelson

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 36 Difração

36.1 Difração de Fresnel e Difração de Fraunhofer
36.2 Difração Produzida por uma Fenda Simples
36.3 Intensidade na Difração Produzida por uma Fenda Simples
36.4 Fendas Múltiplas
36.5 A Rede de Difração
36.6 Difração de Raios X
36.7 Orifícios Circulares e Poder de Resolução
*36.8 Holografia

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 37 Relatividade

37.1 Invariância das Leis Físicas
37.2 Relatividade da Simultaneidade
37.3 Relatividade dos Intervalos de Tempo
37.4 Relatividade do Comprimento
37.5 As Transformações de Lorentz
*37.6 O Efeito Doppler para as Ondas Eletromagnéticas
37.7 Momento Linear Relativístico
37.8 Trabalho e Energia na Relatividade
37.9 Mecânica Newtoniana e Relatividade

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 38 Fótons, Elétrons e Átomos

38.1 Emissão e Absorção da Luz
38.2 O Efeito Fotoelétrico
38.3 Espectro Atômico de Linhas e Níveis de Energia
38.4 O Núcleo do Átomo
38.5 O Modelo de Bohr
38.6 O Laser
38.7 Espalhamento e Produção de Raios X
38.8 Espectro Contínuo
38.9 A Dualidade Onda-Partícula

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 39 A Natureza Ondulatória das Partículas

39.1 Onda de De Broglie
39.2 Difração de Elétrons
39.3 Probabilidade e Incerteza
39.4 O Microscópio Eletrônico
39.5 Função de Onda e Equação de Schrödinger

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 40 Mecânica Quântica

40.1 Partícula em uma Caixa
40.2 Poço de Potencial
40.3 Barreira de Potencial e Efeito Túnel
40.4 O Oscilador Harmônico
40.5 Problemas em Três Dimensões

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 41 Estrutura Atômica

41.1 O Átomo de Hidrogênio
41.2 O Efeito Zeeman
41.3 Spin do Elétron
41.4 Átomos com Muitos Elétrons e o Princípio de Exclusão
41.5 Espectro de Raios X

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 42 Moléculas e Matéria Condensada

42.1 Tipos de Ligações Moleculares
42.2 Espectro Molecular
42.3 Estrutura de um Sólido
42.4 Bandas de Energia
42.5 Modelo do Elétron Livre para um Metal

42.6 Semicondutores
42.7 Dispositivos Semicondutores
42.8 Supercondutividade

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 43 Física Nuclear

43.1 Propriedades do Núcleo
43.2 Ligação Nuclear e Estrutura Nuclear
43.3 Estabilidade Nuclear e Radioatividade
43.4 Atividade e Meia-Vida
43.5 Efeitos Biológicos da Radiação
43.6 Reações Nucleares
43.7 Fissão Nuclear
43.8 Fusão Nuclear

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

CAPÍTULO 44 Física das Partículas e Cosmologia

44.1 Partículas Fundamentais – uma História
44.2 Aceleradores de Partículas e Detectores
44.3 Interações Entre Partículas
44.4 Quarks e o Modelo com Simetria de Oito Modos
44.5 O Modelo Padrão e os Modelos Futuros
44.5 O Universo em Expansão
44.6 O Começo do Tempo

Resumo/Principais Termos
Questões/Exercícios/Problemas

PREFÁCIO

Este livro é o resultado de meio século de liderança e inovação no ensino da Física. A primeira edição do livro *Física*, de Francis W. Sears e Mark W. Zemansky, publicada em 1949, foi revolucionária dentre os livros-texto baseados em cálculo por dar ênfase aos princípios da Física e suas aplicações. O êxito alcançado por esta obra para o uso de diversas gerações de alunos e professores, em várias partes do mundo, atesta os méritos desse método e das muitas inovações introduzidas posteriormente.

Ao preparar esta nova edição, incrementamos e desenvolvemos o livro de modo a incorporar as melhores idéias extraídas de pesquisas acadêmicas, com ensino aprimorado de solução de problemas, pedagogia visual e conceitual pioneira.

Novidades desta Edição

Estratégias para a solução de problemas e Exemplos resolvidos. Seções de Estratégia para a solução de problemas permeiam o livro e fornecem aos alunos táticas específicas para a resolução de determinados tipos de problema. Eles atendem às necessidades de todo estudante que já sentiu que 'compreende os conceitos, mas não consegue resolver os problemas'.

Todas as seções de Estratégia para a Solução de Problemas seguem a abordagem ISEE (do inglês *Identify, Set Up, Execute and Evaluate* – Identificar, Preparar, Executar e Avaliar). Essa abordagem ajuda os estudantes a saber como começar a tratar uma situação aparentemente complexa, identificar os conceitos relevantes de Física, decidir quais recursos são necessários para solucionar o problema, executar a solução e depois avaliar se o resultado faz sentido.

Essa é uma idéia extraída de pesquisas acadêmicas realizadas recentemente na área. Por ser um recurso extremamente didático, é muito eficiente para o aprendizado.

Estratégia para a solução de problemas 1.1

SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE FÍSICA

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: primeiro, defina quais conceitos de física são relevantes ao problema. Embora esta etapa não envolva nenhum cálculo, às vezes, é a parte mais desafiadora da solução do problema. Mas não pule este passo; escolher a abordagem errada no começo pode tornar o problema mais difícil do que realmente é, ou até induzir a uma resposta errada.

Neste ponto você deve também identificar a **variável-alvo** do problema – ou seja, a grandeza cujo valor se está tentando descobrir. Pode ser a velocidade em que um projétil atinge o solo, a intensidade do som de uma sirene ou a dimensão da imagem produzida por uma lupa. (Algumas vezes, o objetivo é encontrar uma fórmula matemática em vez de um valor numérico. Outras vezes, também, o problema terá mais de uma variável-alvo.) A variável-alvo é o objetivo do processo de solução do problema; não a perca de vista enquanto busca a solução.

PREPARAR *o problema*: com base nos conceitos selecionados na etapa de *Identificação*, escolha as equações que usará para resolver o problema e defina como vai usá-las. Se for o caso, represente graficamente a situação descrita no problema.

EXECUTAR *a solução:* neste passo, 'entra a matemática'. Antes de se empolgar com os cálculos, faça uma lista de todas as grandezas conhecidas e desconhecidas e observe quais são as variáveis-alvo. Então resolva as equações para as desconhecidas.

AVALIAR *sua resposta:* o objetivo da solução de problemas de física não é só obter um número ou uma fórmula; é obter uma

Cada seção de Estratégia para a Solução de Problemas é seguida por um ou mais **Exemplos resolvidos**, que ilustram a estratégia. Muitos outros Exemplos podem ser encontrados em cada capítulo. Assim como as seções de Estratégia para a Solução de Problemas, todos os exemplos quantitativos aplicam a abordagem ISEE. Vários deles são puramente qualitativos e classificados como Exemplos Conceituais.

Exemplo 1.3

ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS NA MULTIPLICAÇÃO A energia de repouso E de um corpo em repouso de massa m é dada pela equação de Einstein:

$$E = mc^2$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo. Determine E para um corpo que possui massa $m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg (a massa de um elétron com três algarismos significativos). A unidade SI para energia E é o joule (J); 1 J = 1 kg·m^2/s^2.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR E PREPARAR: nossa variável-alvo é a energia E. Nos é dada a equação e o valor da massa m; de acordo com a Seção 1.3 o valor exato da velocidade da luz é c = 299.792.458 m/s = $2{,}99792458 \times 10^8$ m/s.

Ensino associado à prática. Um recurso eficiente e sistemático de aprendizado associado à prática inclui os Objetivos de Aprendizagem, disponíveis no início de cada capítulo, e os Resumos dos capítulos, que consolidam cada conceito por meio de palavras, fórmulas matemáticas e figuras.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Estudando este capítulo, você aprenderá:

- Como descrever o movimento retilíneo em termos de velocidade média, velocidade instantânea, aceleração média e aceleração instantânea.
- Como interpretar gráficos de posição *versus* tempo, velocidade *versus* tempo e aceleração *versus* tempo para o movimento retilíneo.
- Como solucionar problemas relacionados ao movimento retilíneo com aceleração constante, incluindo questões de queda livre.
- Como analisar o movimento retilíneo em caso de aceleração não constante.

Teste sua compreensão da Seção 2.2 A Figura 2.9 é um gráfico *xt* do movimento de uma partícula. a) Classifique os valores da velocidade v_x da partícula nos pontos *P*, *Q*, *R* e *S*, do mais positivo para o mais negativo. b) Em quais pontos v_x é positiva? c) Em quais pontos v_x é negativa? d) Em quais pontos v_x é nula? e) Classifique os valores da velocidade escalar da partícula nos pontos *P*, *Q*, *R* e *S*, do mais rápido para o mais lento. ▮

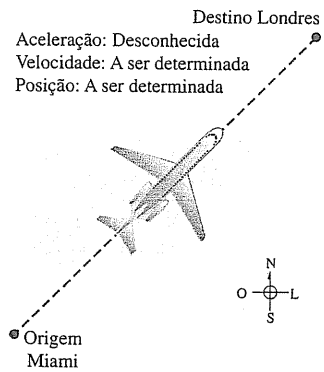


Figura 2.27 A posição e a velocidade de uma aeronave atravessando o Atlântico são obtidas integrando-se sua aceleração em relação ao tempo.

Organização dos capítulos

A Introdução de cada capítulo fornece exemplos específicos do conteúdo e faz a conexão com assuntos abordados em capítulos anteriores. Há também uma Pergunta de abertura do capítulo e uma lista de **Objetivos de Aprendizagem** para que o aluno reflita sobre a matéria no capítulo a seguir. (Para encontrar a resposta a essa pergunta, procure pelo ícone '?'.) A maioria das seções termina com um **Teste de compreensão**, que apresenta perguntas simples relacionadas ao conteúdo estudado. Esse recurso ajuda os alunos a testarem instantaneamente o que acabaram de aprender. O final de cada capítulo traz um Resumo visual dos princípios mais importantes apresentados, bem como uma lista de Principais termos com referência da página na qual cada termo foi introduzido pela primeira vez. As respostas à Pergunta de abertura do capítulo e do Teste de compreensão vêm na seqüência dos Principais termos.

O poder didático das figuras. O poder instrutivo das figuras é potencializado por meio da comprovada técnica de 'anotação' (comentários no estilo quadro-negro integrados às figuras, para orientar o estudante em sua interpretação) e do uso eficiente de detalhes.

Problemas em destaque, ao final dos capítulos. Outro reconhecido mérito desta 12ª edição vai ainda mais longe: ela oferece em seus quatro volumes a primeira biblioteca de problemas sistematicamente melhorados em Física, com mais de 800 novos problemas, que compõem o acervo total de 3700.

Questões e exercícios. No final de cada capítulo há um conjunto de Questões para discussão destinadas a aprofundar e ampliar a assimilação conceitual pelo aluno, e, logo após, vêm os Exercícios, problemas simples que envolvem um dado conceito relacionado com seções específicas do texto. Em seguida temos os Problemas, que normalmente necessitam de duas ou mais etapas não triviais, e, por fim, os Problemas desafiadores, destinados a desafiar os melhores estudantes. Os problemas abrangem aplicações a campos tão diversos quanto astrofísica, biologia e aerodinâmica. Muitos deles possuem partes conceituais as quais os estudantes devem discutir e explicar seus resultados. As novas questões, exercícios e problemas desta edição foram criados e organizados por Wayne Anderson (Sacramento City College), Laird Kramer (Florida International University) e Charlie Hibbard.

Parágrafos de 'atenção'. Duas décadas de pesquisa acadêmica em Física revelaram uma série de armadilhas conceituais que comumente afligem os iniciantes no estudo da Física. Dentre elas, as noções de que uma força é necessária para o movimento, que a corrente elétrica é 'usada' ao longo de um circuito e que o próprio produto da massa pela aceleração é uma força. Os parágrafos de 'Atenção' alertam para essas e outras armadilhas e explicam onde está o erro na abordagem (que pode ter inicialmente ocorrido ao estudante) de uma determinada situação.

> **ATENÇÃO Energia potencial gravitacional *versus* energia potencial elástica** Uma diferença importante entre a energia potencial gravitacional $U_{grav} = mgy$ e a energia potencial elástica $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$ é que *não* temos a liberdade de escolher arbitrariamente o valor $x = 0$. Para ser coerente com a Equação (7.9), $x = 0$ *deve* ser necessariamente o ponto para o qual a mola não está comprimida nem alongada. Para essa posição, sua energia potencial elástica é igual a zero e a força que ele exerce também é nula.

Notação e unidades. Os estudantes geralmente levam muito tempo para distinguir as grandezas escalares das grandezas vetoriais. Nesta edição usamos letras em itálico e negrito com uma seta em cima para designar vetores, como $\vec{\boldsymbol{v}}$, $\vec{\boldsymbol{a}}$, e $\vec{\boldsymbol{F}}$; vetores unitários como $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ possuem acento circunflexo. Os sinais em negrito $+$, $-$, $\times$ e $=$ são usados para relacionar grandezas vetoriais e não confundir com os respectivos sinais usados para relacionar grandezas escalares.

Nesta edição são usadas somente unidades SI (as unidades inglesas ocorrem em casos de exceção). O joule é usado como unidade padrão para todas as formas de energia, incluindo o calor.

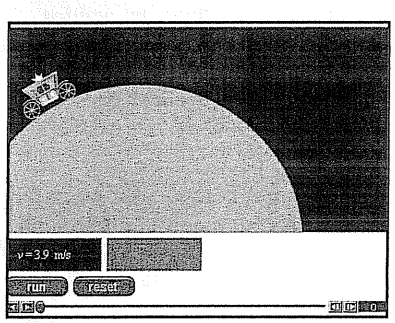
Um guia para o estudante. Muitos estudantes sentem dificuldade simplesmente porque não sabem como fazer o melhor uso do livro-texto. Depois deste prefácio, incluímos uma seção com o título 'Como Aprender Física Tentando para Valer', que serve como um 'manual do usuário' apontando para todas as características deste livro. Essa seção, escrita pelo Professor Mark Hollabaugh (Normandale Community College), fornece também inúmeras dicas para os alunos. Recomendamos que *todos* os estudantes leiam atentamente essa seção!

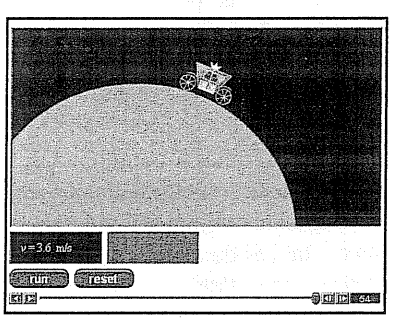
Flexibilidade. Este livro pode ser utilizado em uma grande variedade de cursos. Existe material suficiente para cursos de três semestres ou cinco trimestres. Embora muitos professores possam achar que há material demais para um curso de um ano, ele pode ser usado omitindo-se certos capítulos ou seções. Por exemplo, alguns ou todos os capítulos sobre mecânica dos fluidos, acústica, ondas eletromagnéticas ou relatividade podem ser omitidos sem perda da continuidade. Seja como for, ninguém é obrigado a seguir estritamente a seqüência do livro.

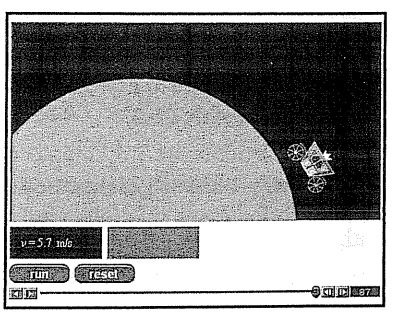
Material Adicional

No Companion Website deste livro (www.aw.com/young_br), professores e estudantes têm acesso a materiais adicionais que facilitarão a exposição das aulas e o aprendizado.
Para os professores: manual de soluções (em inglês) e apresentações em PowerPoint com figuras e os principais conceitos do livro (protegidos por senha).
Para estudantes: exercícios de múltipla escolha para ajudar na fixação de conceitos e animações (em inglês) que simulam alguns temas das lições, como no exemplo abaixo.

Simulação do movimento circular de um corpo







Como Aprender Física Tentando para Valer

Mark Hollabaugh (Normandale Community College)

A física abrange o pequeno e o grande, o velho e o novo. Dos átomos até as galáxias, dos circuitos elétricos até a aerodinâmica, a física é parte integrante do mundo que nos cerca. Você provavelmente está fazendo este curso de física baseado no cálculo como pré-requisito de cursos subseqüentes que fará para se preparar para uma carreira de ciências ou de engenharia. Seu professor deseja que você aprenda física e que goste da experiência. Ele está muito interessado em ajudá-lo a aprender essa fascinante matéria. Essa é uma das razões para ter escolhido este livro-texto para o seu curso. Também foi por isso que os doutores Young e Freedman me pediram para escrever esta seção introdutória. Desejamos o seu sucesso!

O objetivo desta seção é fornecer algumas idéias que possam auxiliá-lo durante a aprendizagem. Após uma breve abordagem sobre hábitos e estratégias gerais de estudo, serão apresentadas sugestões específicas sobre como usar o livro-texto.

Preparação para este Curso

Caso esteja adiantado em seus estudos de física, você aprenderá mais rapidamente alguns conceitos, por estar familiarizado com a linguagem dessa matéria. Da mesma forma, seus estudos de matemática facilitarão sua assimilação dos aspectos matemáticos da física. Seu professor poderá indicar alguns tópicos de matemática que serão úteis neste curso.

Aprendendo a Aprender

Cada um de nós possui um estilo próprio e um método preferido de aprendizagem. Compreender seu estilo de aprender ajudará você a identificar as dificuldades e superá-las. Obviamente você preferirá dedicar mais tempo estudando os assuntos mais complicados. Se você aprende mais ouvindo, assistir às aulas e conferências será muito importante. Caso prefira explicar, o trabalho em equipe vai lhe ser útil. Se a sua dificuldade está na solução de problemas, gaste uma parte maior do seu tempo aprendendo a resolver problemas. Também é fundamental desenvolver bons hábitos de estudo. Talvez a coisa mais importante que você possa fazer por si mesmo seja estabelecer uma rotina de estudos, em horários regulares e em um ambiente livre de distrações.

Responda para si mesmo as seguintes perguntas:

- Estou apto para usar os conceitos matemáticos fundamentais da álgebra, da geometria e da trigonometria? (Caso não esteja apto, faça um programa de revisão com a ajuda de seu professor.)
- Em cursos semelhantes, qual foi a atividade na qual tive mais dificuldade? (Dedique mais tempo a isso.) Qual foi a atividade mais fácil para mim? (Execute-a primeiro; isso lhe dará mais confiança.)
- Eu entendo melhor a matéria se leio o livro antes ou depois da aula? (Pode ser que você aprenda melhor fazendo uma leitura superficial da matéria, assistindo à aula e depois relendo o material com mais atenção.)
- Eu dedico um tempo adequado aos meus estudos de física? (Uma regra prática para um curso deste tipo é dedicar 2h30 de estudos para cada hora de aula. Para uma semana com 5 horas de aula, deve-se dedicar cerca de 10 a 15 horas de estudos por semana.)
- Devo estudar física todos os dias? (Distribua as 10 ou 15 horas de estudos durante a semana!) Em que parte do dia meus estudos são mais eficientes? (Escolha um período específico do dia e atenha-se a ele.)
- Eu estudo em ambiente silencioso que favoreça minha concentração? (As distrações podem quebrar sua rotina de estudos e atrapalhar a assimilação de pontos importantes.)

Trabalho em Grupo

Cientistas e engenheiros raramente trabalham sozinhos e preferem cooperar entre si. Você aprenderá melhor e com mais prazer estudando Física junto com outros colegas. Alguns professores aplicam métodos formais de aprendizagem cooperativa ou incentivam a formação de grupos. Você pode, por exemplo, formar seu próprio grupo de estudos com amigos da escola ou de sua vizinhança. Caso possua *e-mail*, use-o para se comunicar com outros colegas. Seu grupo de estudos será especialmente importante quando estiver fazendo uma revisão para os exames.

Aulas e Anotações

Um componente importante de seu curso são as aulas e conferências. Na física, isso é especialmente importante porque seu professor geralmente faz demonstrações de princípios físicos, executa simulações em computador ou exibe filmes. Todos esses recursos ajudam você a entender princípios fundamentais. Não falte a nenhuma aula, e caso, por algum motivo, isso seja inevitável, peça as anotações de algum colega de seu grupo de estudos.

Faça anotações das aulas sob a forma de tópicos e deixe para completar os detalhes do conteúdo mais tarde. É difícil anotar palavra por palavra, portanto, anote apenas as idéias básicas. O professor pode usar um diagrama do livro.

Deixe um espaço em suas notas para inserir o diagrama depois. Após as aulas, revise suas anotações, preenchendo as lacunas e anotando os pontos que devem ser mais desenvolvidos posteriormente. Anote as referências de páginas, equações ou seções do livro.

Faça perguntas em classe ou procure o professor depois da aula. Lembre-se de que a única pergunta 'tola' é aquela que não foi feita.

Exames

Fazer uma prova gera um elevado nível de estresse. Contudo, estar bem preparado e descansado alivia a tensão. Preparar-se para uma prova é um processo contínuo; começa assim que termina a última prova. Imediatamente depois de uma prova, você deve rever cuidadosamente os eventuais erros cometidos. Proceda do seguinte modo: divida uma folha de papel em duas colunas. Em uma delas, escreva a solução correta do problema. Na outra, coloque sua solução e verifique onde foi que errou. Caso não consiga identificar com certeza o erro, consulte seu professor. A física se constrói a partir de princípios básicos e é necessário corrigir imediatamente qualquer interpretação incorreta. Atenção: embora você possa passar em um exame deixando para estudar na última hora, não conseguirá reter adequadamente os conceitos necessários para serem usados na próxima prova.

Agradecimentos

Desejamos agradecer às centenas de revisores e colegas que ofereceram valiosos comentários e sugestões para este livro. O sucesso duradouro de *Física* deve-se, em grande medida, às suas contribuições.

Edward Adelson (Ohio State University)
Ralph Alexander (University of Missouri at Rolla)
J. G. Anderson, R. S. Anderson
Wayne Anderson (Sacramento City College)
Alex Azima (Lansing Community College)
Dilip Balamore (Nassau Community College)
Harold Bale (University of North Dakota)
Arun Bansil (Northeastern University)
John Barach (Vanderbilt University)
J. D. Barnett, H. H. Barschall,
Albert Bartlett (University of Colorado)
Paul Baum (CUNY, Queens College)
Frederick Becchetti (University of Michigan)
B. Bederson, David Bennum (University of Nevada, Reno)
Lev I. Berger (San Diego State University)
Robert Boeke (William Rainey Harper College)
S. Borowitz, A. C. Braden, James Brooks (Boston University)
Nicholas E. Brown (California Polytechnic State University, San Luis Obispo)
Tony Buffa (California Polytechnic State University, San Luis Obispo)
A. Capecelatro, Michael Cardamone (Pennsylvania State University)
Duane Carmony (Purdue University)
Troy Carter (UCLA)
P. Catranides, John Cerne (SUNY at Buffalo)
Roger Clapp (University of South Florida)
William M. Cloud (Eastern Illinois University)
Leonard Cohen (Drexel University)
W. R. Coker (University of Texas, Austin)
Malcolm D. Cole (University of Missouri at Rolla)
H. Conrad, David Cook (Lawrence University)
Gayl Cook (University of Colorado)
Hans Courant (University of Minnesota)
Bruce A. Craver (University of Dayton)
Larry Curtis (University of Toledo)
Jai Dahiya (Southeast Missouri State University)
Steve Detweiler (University of Florida)
George Dixon (Oklahoma State University)
Donald S. Duncan, Boyd Edwards (West Virginia University)
Robert Eisenstein (Carnegie Mellon University)
Amy Emerson Missourn (Virginia Institute of Technology)
William Faissler (Northeastern University)
William Fasnacht (U.S. Naval Academy)
Paul Feldker (St. Louis Community College)
Carlos Figueroa (Cabrillo College)
L. H. Fisher
Neil Fletcher (Florida State University)
Robert Folk
Peter Fong (Emory University)
A. Lewis Ford (Texas A&M University)
D. Frantszog, James R.
Gaines (Ohio State University)
Solomon Gartenhaus (Purdue University)
Ron Gautreau (New Jersey Institute of Technology)
J. David Gavenda (University of Texas, Austin)
Dennis Gay (University of North Florida)
James Gerhart (University of Washington)
N. S. Gingrich
J. L. Glathart
S. Goodwin
Rich Gottfried (Frederick Community College)
Walter S. Gray (University of Michigan)
Paul Gresser (University of Maryland)
Benjamin Grinstein (UC San Diego)
Howard Grotch (Pennsylvania State University)
John Gruber (San Jose State University)
Graham D. Gutsche (U.S. Naval Academy)
Michael J. Harrison (Michigan State University)
Harold Hart (Western Illinois University)
Howard Hayden (University of Connecticut)
Carl Helrich (Goshen College)
Laurent Hodges (Iowa State University)
C. D. Hodgman
Michael Hones (Villanova University)
Keith Honey (West Virginia Institute of Technology)
Gregory Hood (Tidewater Community College)
John Hubisz (North Carolina State University)
M. Iona, John Jaszczak (Michigan Technical University)
Alvin Jenkins (North Carolina State University)
Robert P. Johnson (UC Santa Cruz)
Lorella Jones (University of Illinois)
John Karchek (GMI Engineering & Management Institute)
Thomas Keil (Worcester Polytechnic Institute)
Robert Kraemer (Carnegie Mellon University)
Jean P. Krisch (University of Michigan)
Robert A. Kromhout, Andrew Kunz (Marquette University)
Charles Lane (Berry College)
Thomas N. Lawrence (Texas State University)
Robert J. Lee
Alfred Leitner (Rensselaer Polytechnic University)
Gerald P. Lietz (De Paul University)
Gordon Lind (Utah State University)
S. Livingston
Elihu Lubkin (University of Wisconsin, Milwaukee)
Robert Luke (Boise State University)
David Lynch (Iowa State University)
Michael Lysak (San Bernardino Valley College)

Jeffrey Mallow (Loyola University) Robert Mania (Kentucky State University)
Robert Marchina (University of Memphis)
David Markowitz (University of Connecticut)
R. J. Maurer
Oren Maxwell (Florida International University)
Joseph L. McCauley (University of Houston)
T. K. McCubbin, Jr. (Pennsylvania State University)
Charles McFarland (University of Missouri at Rolla)
James Mcguire (Tulane University)
Lawrence McIntyre (University of Arizona)
Fredric Messing (Carnegie-Mellon University)
Thomas Meyer (Texas A&M University)
Andre Mirabelli (St. Peter's College, New Jersey)
Herbert Muether (S.U.N.Y., Stony Brook)
Jack Munsee (California State University, Long Beach)
Lorenzo Narducci (Drexel University)
Van E. Neie (Purdue University)
David A. Nordling (U. S. Naval Academy)
Benedict Oh (Pennsylvania State University)
L. O. Olsen
Jim Pannell (DeVry Institute of Technology)
W. F. Parks (University of Missouri)
Robert Paulson (California State University, Chico)
Jerry Peacher (University of Missouri at Rolla)
Arnold Perlmutter (University of Miami)
Lennart Peterson (University of Florida)
R. J. Peterson (University of Colorado, Boulder)
R. Pinkston
Ronald Poling (University of Minnesota)
J. G. Potter
C. W. Price (Millersville University)
Francis Prosser (University of Kansas)
Shelden H. Radin
Michael Rapport (Anne Arundel Community College)
R. Resnick
James A. Richards, Jr.,
John S. Risley (North Carolina State University)
Francesc Roig (University of California, Santa Barbara)
T. L. Rokoske
Richard Roth (Eastern Michigan University)
Carl Rotter (University of West Virginia)
S. Clark Rowland (Andrews University)
Rajarshi Roy (Georgia Institute of Technology)
Russell A. Roy (Santa Fe Community College)
Dhiraj Sardar (University of Texas, San Antonio)
Bruce Schumm (UC Santa Cruz)
Melvin Schwartz (St. John's University)
F. A. Scott
L. W. Seagondollar
Paul Shand (University of Northern Iowa)
Stan Shepherd (Pennsylvania State University)
Douglas Sherman (San Jose State)
Bruce Sherwood (Carnegie Mellon University)
Hugh Siefkin (Greenville College)
Tomasz Skwarnicki (Syracuse University)
C. P. Slichter
Charles W. Smith (University of Maine, Orono)
Malcolm Smith (University of Lowell)
Ross Spencer (Brigham Young University)
Julien Sprott (University of Wisconsin)
Victor Stanionis (Iona College)
James Stith (American Institute of Physics)
Chuck Stone (North Carolina A&T State University)
Edward Strother (Florida Institute of Technology)
Conley Stutz (Bradley University)
Albert Stwertka (U.S. Merchant Marine Academy)
Martin Tiersten (CUNY, City College)
David Toot (Alfred University)
Somdev Tyagi (Drexel University)
F. Verbrugge
Helmut Vogel (Carnegie Mellon University)
Robert Webb (Texas A & M)
Thomas Weber (Iowa State University)
M. Russell Wehr (Pennsylvania State University)
Robert Weidman (Michigan Technical University)
Dan Whalen (UC San Diego)
Lester V. Whitney
ThomasWiggins (Pennsylvania State University)
DavidWilley (University of Pittsburgh, Johnstown)
George Williams (University of Utah)
John Williams (Auburn University)
Stanley Williams (Iowa State University)
Jack Willis
Suzanne Willis (Northern Illinois University)
Robert Wilson (San Bernardino Valley College)
L. Wolfenstein, James Wood (Palm Beach Junior College)
Lowell Wood (University of Houston)
R. E. Worley
D. H. Ziebell (Manatee Community College)
George O. Zimmerman (Boston University).

Além disso, nós dois temos agradecimentos individuais a fazer.

Estendo meus cordiais agradecimentos aos meus colegas da Carnegie-Mellon, em especial aos professores Robert Kraemer, Bruce Sherwood, Ruth Chabay, Helmut Vogel e Brian Quinn, por discussões estimulantes sobre pedagogia da Física e por seu apoio e incentivo durante a elaboração das sucessivas edições deste livro. Agradeço também às muitas gerações de estudantes da Carnegie-Mellon, por me ajudarem a entender o que é ser um bom professor e um bom escritor e por me mostrarem o que funciona ou não. É sempre um prazer e um privilégio expressar minha gratidão à minha mulher, Alice, e minhas filhas, Gretchen e Rebeca, pelo amor, suporte e amparo emocional durante a elaboração das sucessivas edições deste livro. Quem dera todos os homens e mulheres fossem abençoados com o amor que elas me dedicam.

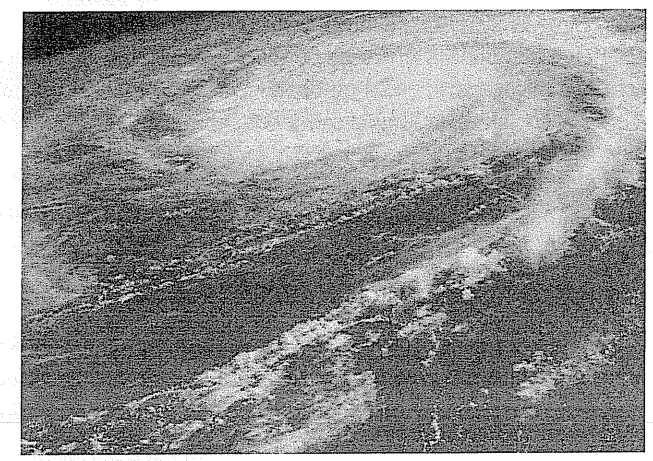
H. D.Y.

Gostaria de prestar agradecimento aos meus colegas do passado e do presente da UCSB, incluindo Rob Geller, Carl Gwin, Al Nash, Elisabeth Nicol e Francesc Roig, pelo dedicado apoio e pelas valiosas discussões. Expresso minha gratidão especial aos meus primeiros professores Willa Ramsay, Peter Zimmerman, William Little, Alan Schwerttman e Dirk Walecka por me mostrarem como é claro e envolvente o ensino da Física, e a Stuart Johnson por me convidar a participar deste projeto como co-autor a partir da nona edição. Meus especiais agradecimentos à equipe editorial da Addison Wesley e seus parceiros: a Adam Black pela visão editorial; a Margot Otway pelo extraordinário senso gráfico e cuidadoso desenvolvimento desta edição; a Peter Murphy e Carol Reitz pela cuidadosa leitura do manuscrito; a Wayne Anderson, Charlie Hibbard, Laird Kramer e Larry Stookey pelo trabalho nos problemas de final de capítulo; e a Laura Kenney, Chandrika Madhavan, Nancy Tabor e Pat McCutcheon por manter a produção editorial fluindo. Desejo agradecer ao meu pai por seu amor e suporte permanentes e por reservar um espaço na estante para este livro. Acima de tudo, desejo expressar minha gratidão e amor à minha esposa, Caroline, a quem dedico minhas contribuições a este livro. Alô, Caroline, a nova edição finalmente saiu – vamos comemorar!

R.A.F.

UNIDADES, GRANDEZAS FÍSICAS E VETORES

1



Para minimizar os danos causados por um furacão a vidas e propriedades, é essencial prever o seu percurso. Se um furacão se desloca a 20 km/h a 53° a nordeste, quanto ele se deslocará rumo ao norte em uma hora?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Quais são as grandezas mecânicas fundamentais e as unidades usadas pelos físicos para medi-las.
- Como não perder de vista os algarismos mais significativos nos seus cálculos.
- A diferença entre grandezas escalares e vetores e como somar e subtrair vetores graficamente.
- Quais são os componentes de um vetor e como usá-los em cálculos.
- O que são vetores unitários e como usá-los com componentes para descrever vetores.
- Duas formas de multiplicar vetores.

O estudo da física é importante porque essa ciência é uma das mais fundamentais. Cientistas de todas as disciplinas usam os conceitos da física, desde os químicos, que estudam a estrutura das moléculas, até os paleontólogos que tentam reconstruir como os dinossauros caminhavam, e os climatologistas, que analisam como as atividades humanas afetam a atmosfera e os oceanos. A física é também a base de toda engenharia e tecnologia. Nenhum engenheiro pode projetar uma tela plana de TV, uma nave espacial ou mesmo uma ratoeira mais eficiente, sem antes entender os princípios básicos da física.

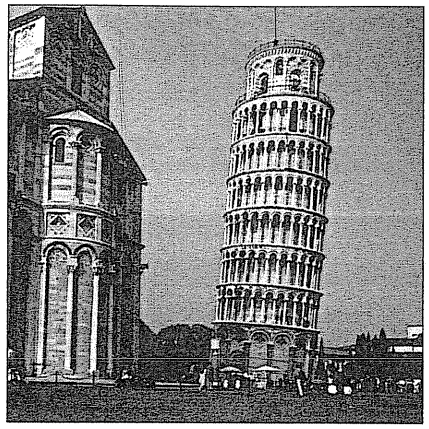
O estudo da física é também uma aventura. Ela poderá ser instigante, algumas vezes frustrante, ocasionalmente laboriosa e, com freqüência, significativamente compensadora e gratificante. Ela instigará o seu senso estético e sua inteligência racional. Se desejar saber por que o céu é azul, como as ondas de rádio se propagam através do espaço ou como um satélite permanece em órbita, você encontrará as respostas aplicando os conceitos fundamentais da física. Acima de tudo, você passará a encarar a física como uma elevada aquisição da mente humana na busca para compreender a nossa existência e o nosso mundo.

Neste capítulo inicial, apresentaremos algumas preliminares importantes que serão necessárias em nossos estudos. Discutiremos a natureza da teoria física e o uso de modelos idealizados para representar sistemas físicos. Introduziremos os sistemas de unidades usados para descrever grandezas físicas e discutiremos como representar a exatidão de um número. Apresentaremos exemplos de problemas para os quais não podemos (ou não desejamos) encontrar uma resposta exata, porém para os quais um cálculo aproximado pode ser útil e interessante. Finalmente, estudaremos diversos aspectos dos vetores e da álgebra vetorial. Os vetores serão permanentemente necessários em nossos estudos de física para descrever e analisar grandezas físicas, tais como velocidade e força, que possuem direção e sentido.

1.1 A natureza da física

A física é uma ciência *experimental*. O físico observa fenômenos naturais e tenta achar os padrões e os princípios que relacionam esses fenômenos. Esses padrões são denominados teorias físicas ou, quando bem estabelecidas e de largo uso, leis e princípios físicos.

(a)



(b)

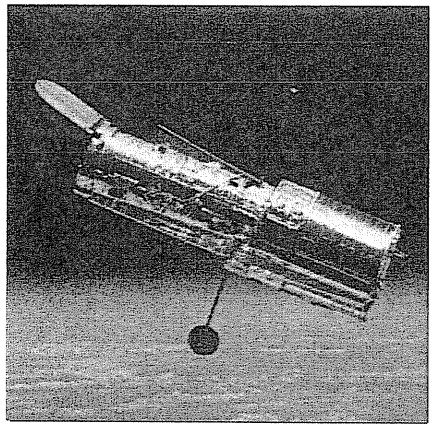


Figura 1.1 Dois ambientes de pesquisa. (a) Segundo a lenda, Galileu investigava a queda livre de corpos, deixando-os cair da Torre de Pisa, na Itália. Também se diz que ele estudou o movimento pendular observando as oscilações de um candelabro na catedral atrás da torre. (b) O Telescópio Espacial Hubble é o primeiro grande telescópio a ser operado fora da atmosfera terrestre. Medidas tomadas por meio desse telescópio têm contribuído para determinar a idade e a taxa de expansão do universo.

ATENÇÃO O significado da palavra 'teoria' Chamar uma idéia de teoria não significa que se trata apenas de um pensamento aleatório ou um conceito não comprovado. Uma teoria é, isso sim, uma explicação de fenômenos naturais pautada em observação e princípios fundamentais aceitos. Exemplo disso é a bem fundamentada teoria da evolução biológica, resultante de extensiva pesquisa e observação por gerações de biólogos.

O desenvolvimento de uma teoria física requer criatividade em todos os estágios. O físico deve aprender a fazer perguntas pertinentes, projetar experimentos para tentar responder a essas perguntas e tirar conclusões apropriadas dos resultados. A Figura 1.1 mostra dois ambientes onde foram realizadas renomadas experiências.

De acordo com a lenda, Galileu (Galileo Galilei — 1564-1642) deixava cair objetos leves e pesados do topo da inclinada Torre de Pisa (Figura 1.1a) para verificar se a taxa de queda livre era constante ou não. Galileu afirmava que somente a investigação experimental poderia responder a essa pergunta. Examinando-se os resultados dessas experiências (que eram na verdade muito mais sofisticadas do que as contadas na lenda), ele deu o salto intuitivo para o princípio, ou teoria, segundo o qual a aceleração de um corpo em queda livre não depende de seu peso.

O desenvolvimento de uma teoria física como a de Galileu é sempre um processo de mão dupla que começa e termina com experimentos ou observações. Esse desenvolvimento normalmente segue caminhos indiretos, com becos sem saída, suposições erradas e o abandono de teorias malsucedidas em favor de teorias mais promissoras. A física não é simplesmente uma coleção de fatos e de princípios; é também o *processo* pelo qual chegamos a princípios gerais que descrevem como o universo físico se comporta.

Nunca se encara uma teoria como uma verdade final e acabada. Existe sempre a possibilidade de novas observações exigirem a revisão ou o abandono de uma teoria. Faz parte da natureza da teoria física podermos desaprovar uma teoria ao encontrarmos um comportamento que não seja coerente com ela, porém nunca podemos provar que uma teoria seja sempre correta.

Retornando a Galileu, suponha que você deixe cair uma bala de canhão e uma pena. Certamente elas *não* caem com a mesma aceleração. Isto não significa que Galileu estivesse errado; significa que sua teoria estava incompleta. Se deixássemos cair uma bala de canhão e uma pena *no vácuo* para eliminar os efeitos do ar, então elas cairiam com a mesma aceleração. A teoria de Galileu possui um **limite de validade**: ela se aplica somente a objetos para os quais a força exercida pelo ar (devido ao empuxo e à resistência do ar) seja muito menor do que o peso do objeto. Objetos como penas ou pára-quedas estão claramente fora deste limite.

Toda teoria física possui um limite de validade fora do qual ela não pode ser aplicada. Freqüentemente um novo desenvolvimento na física estende o limite de validade de um princípio. A análise da queda livre de corpos feita por Galileu foi estendida 50 anos depois pela lei da gravitação e pelas leis do movimento de Newton.

1.2 Solução de problemas de física

Em algum ponto nos seus estudos, a maioria dos estudantes de física pensa: "Entendo os conceitos, mas não consigo resolver os problemas." Em física, porém, compreender realmente um conceito ou princípio é o mesmo que ser capaz de aplicá-lo a uma variedade de problemas práticos. Aprender a resolver problemas é fundamental; você não *sabe* física, a menos que você *faça* física.

Como se aprende a resolver problemas de física? Em todo capítulo deste livro encontram-se as *Estratégias para*

a Solução de Problemas, que apresentam técnicas de preparo e solução de problemas de modo eficiente e preciso. Após cada *Estratégia para a solução de problemas*, há um ou mais *Exemplos* resolvidos que demonstram a aplicação dessas técnicas. (As *Estratégias para a solução de problemas* também previnem contra o risco de se usar técnicas *incorretas*.) Há também exemplos extras que não estão associados a uma estratégia em particular. Estudem essas estratégias e exemplos com atenção e resolvam por si mesmos cada exemplo, num pedaço de papel.

Diferentes técnicas são úteis para a resolução de diversos tipos de problemas de física e, por isso, este livro apresenta dezenas de *Estratégias para a solução de problemas*. Entretanto, seja qual for o tipo de problema a solucionar, há algumas etapas essenciais a seguir. (As mesmas etapas são igualmente úteis para problemas de matemática, engenharia, química e muitos outros campos.) Neste livro, organizamos esses passos em quatro etapas de solução de problemas.

Todas as *Estratégias para a solução de problemas* e *Exemplos* deste livro seguirão esses quatro passos. (Em alguns casos, combinaremos os dois ou três primeiros passos.) Recomendamos que você siga essas mesmas etapas quando for resolver um problema. Você pode achar útil lembrar-se do acrônimo **I SEE (eu vejo)**, do inglês *Identify, Set up, Execute* e *Evaluate* (Identificar, Preparar, Executar e Avaliar).

Estratégia para a solução de problemas 1.1

SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE FÍSICA

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: primeiro, defina quais conceitos de física são relevantes ao problema. Embora esta etapa não envolva nenhum cálculo, às vezes, é a parte mais desafiadora da solução do problema. Mas não pule este passo; escolher a abordagem errada no começo pode tornar o problema mais difícil do que realmente é, ou até induzir a uma resposta errada.

Neste ponto você deve também identificar a **variável-alvo** do problema – ou seja, a grandeza cujo valor se está tentando descobrir. Pode ser a velocidade em que um projétil atinge o solo, a intensidade do som de uma sirene ou a dimensão da imagem produzida por uma lupa. (Algumas vezes, o objetivo é encontrar uma fórmula matemática em vez de um valor numérico. Outras vezes, também, o problema terá mais de uma variável-alvo.) A variável-alvo é o objetivo do processo de solução do problema; não a perca de vista enquanto busca a solução.

PREPARAR *o problema*: com base nos conceitos selecionados na etapa de *Identificação*, escolha as equações que usará para resolver o problema e defina como vai usá-las. Se for o caso, represente graficamente a situação descrita no problema.

EXECUTAR *a solução:* neste passo, 'entra a matemática'. Antes de se empolgar com os cálculos, faça uma lista de todas as grandezas conhecidas e desconhecidas e observe quais são as variáveis-alvo. Então resolva as equações para as desconhecidas.

AVALIAR *sua resposta:* o objetivo da solução de problemas de física não é só obter um número ou uma fórmula; é obter uma melhor compreensão. Isso significa que você deve examinar sua resposta para saber o que ela está lhe dizendo. Não deixe de se perguntar: "Essa resposta faz sentido?" Se a sua variável-alvo era o raio da Terra e sua resposta foi 6,38 centímetros (ou se sua resposta for um número negativo!), algo deu errado no seu processo de solução do problema. Reavalie o problema e corrija sua solução conforme necessário.

Modelos idealizados

Na linguagem cotidiana geralmente usamos a palavra 'modelo' para indicar uma réplica em pequena escala, tal como um modelo de estrada de ferro, ou uma pessoa que exibe partes do vestuário (ou a ausência delas). Na física, um **modelo** é uma versão simplificada de um sistema físico que seria complicado demais analisar com detalhes completos.

Por exemplo, suponha que queiramos analisar o movimento de uma bola de beisebol atirada ao ar (Figura 1.2a). Qual é a complicação deste problema? A bola não é uma esfera perfeita (ela possui costuras salientes) e gira durante seu movimento no ar. O vento e a resistência do ar influenciam seu movimento, o peso da bola varia ligeiramente com a variação da distância entre a bola e o centro da Terra etc. Se tentarmos incluir todos esses fatores, a análise se tornará inutilmente complexa. Em vez disto, criamos uma versão simplificada do problema. Desprezamos a forma e o tamanho da bola considerando-a um objeto puntiforme, ou **partícula**. Desprezamos a resistência supondo que ela se desloca no vácuo e consideramos o peso constante. Agora o problema se torna bastante simples de resolver (Figura 1.2b). Analisaremos esse modelo com detalhes no Capítulo 3.

Para criar um modelo idealizado do sistema, devemos desprezar alguns efeitos menores e nos concentrarmos nas características mais importantes. Naturalmente, devemos

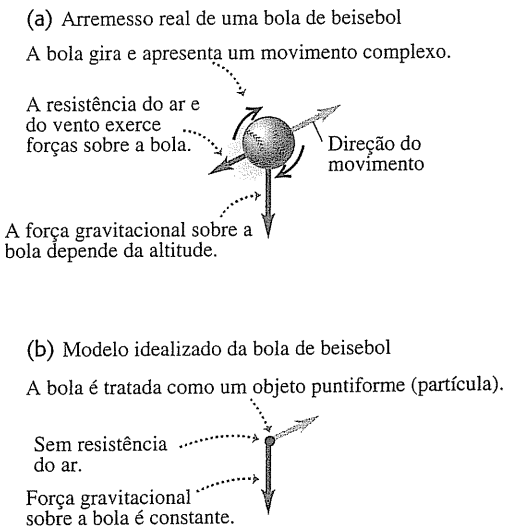


Figura 1.2 Para simplificar a análise de (a) uma bola de beisebol arremessada ao ar, usamos (b) um modelo idealizado.

ser cautelosos para não desprezar coisas demais. Se ignorarmos completamente o efeito da gravidade, ao lançarmos a bola, pela previsão do modelo, ela seguiria uma trajetória retilínea e desapareceria no espaço. É necessário usar certa criatividade e ponderação ao construirmos um modelo que simplifique bastante o problema, mantendo, contudo, suas características essenciais.

Quando usamos um modelo para antever o comportamento de um sistema, a validade de nossa previsão é limitada pela validade do modelo. Voltando a Galileu, vemos que sua previsão sobre a queda livre de corpos (Seção 1.1) corresponde a um modelo idealizado que não inclui os efeitos da resistência do ar. Este modelo funciona bem para uma bala de canhão, mas nem tanto para uma pena.

Quando aplicamos princípios físicos a sistemas complexos na ciência física e na tecnologia, sempre usamos modelos idealizados, e devemos estar cientes das hipóteses feitas. De fato, os próprios princípios da física são formulados em termos de modelos idealizados; falamos de massas puntiformes, corpos rígidos, isolantes ideais etc. Os modelos idealizados desempenham um papel crucial neste livro. Observe-os na discussão de teorias físicas e suas aplicações em problemas específicos.

1.3 Padrões e unidades

Como aprendemos na Seção 1.1, a física é uma ciência experimental. Os experimentos exigem medidas, e normalmente usamos números para descrever os resultados das medidas. Qualquer número usado para descrever quantitativamente um fenômeno físico denomina-se **grandeza física**. Por exemplo, duas grandezas físicas para descrever você são o seu peso e a sua altura. Algumas grandezas físicas são tão fundamentais que podemos defini-las somente descrevendo como elas são medidas. Tal definição denomina-se **definição operacional**. Alguns exemplos: medir uma distância usando uma régua e medir um intervalo de tempo usando um cronômetro. Em outros casos, definimos uma grandeza física descrevendo como calculá-la a partir de outras grandezas que *podemos* medir. Portanto, poderíamos definir a velocidade média de um objeto em movimento como a distância percorrida (medida com uma régua) dividida pelo intervalo de tempo do percurso (medido com um cronômetro).

Quando medimos uma grandeza, sempre a comparamos com um padrão de referência. Quando dizemos que um Porsche Carrera GT possui comprimento de 4,61 metros, queremos dizer que ele possui comprimento 4,61 vezes maior do que uma barra de um metro, a qual, por definição, possui comprimento igual a um metro. Tal padrão define uma **unidade** da grandeza. O metro é uma unidade de distância, e o segundo é uma unidade de tempo. Quando usamos um número para descrever uma grandeza física, precisamos sempre especificar a unidade que estamos usando; descrever uma distância simplesmente como '4,61' não significa nada.

Para calcular medidas confiáveis e precisas, necessitamos de medidas que não variem e que possam ser reproduzidas por observadores em diversos locais. O sistema de unidades usado por cientistas e engenheiros, em todas as partes do mundo, denomina-se normalmente 'sistema métrico', porém, desde 1960, ele é conhecido oficialmente como **Sistema Internacional**, ou **SI** (das iniciais do nome francês *Système International*). No Apêndice A apresentamos uma lista de todas as unidades SI, bem como as definições das unidades mais fundamentais.

As definições das unidades básicas do sistema métrico têm evoluído no decorrer dos anos. Quando o sistema métrico foi estabelecido em 1791 pela Academia de Ciências da França, o metro era definido como um décimo de milionésimo da distância entre o Pólo Norte e o Equador (Figura 1.3). O segundo era definido como o intervalo de tempo necessário para que um pêndulo de um metro de comprimento oscilasse de um lado para o outro. Essas definições eram desajeitadas e difíceis de duplicar com exatidão e, mediante um consenso internacional, elas foram substituídas por definições mais apuradas.

Tempo

De 1889 até 1967, a unidade de tempo era definida como certa fração do dia solar médio, a média de intervalos de tempo entre sucessivas observações do Sol em seu ponto mais elevado no céu. O padrão atual, adotado em 1967, é muito mais preciso. Fundamentado em um relógio atômico, usa a diferença de energia entre os dois menores estados de energia do átomo de césio. Quando bombardeado com microondas de uma dada freqüência, os átomos de césio sofrem transições de um estado para outro. Um **segundo** (abreviado como s) é definido como o tempo necessário para a ocorrência de 9.192.631.770 ciclos desta radiação.

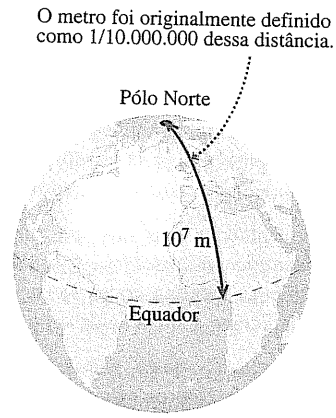


Figura 1.3 Em 1791, a distância entre o Pólo Norte e o Equador era considerada exatamente igual a 10^7 m. Usando a definição moderna de metro, esta distância é cerca de 0,02% maior do que 10^7 m.

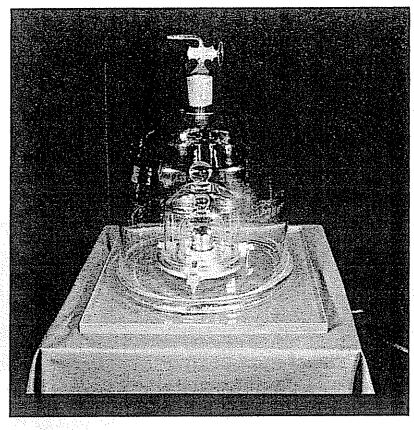


Figura 1.4 O objeto de metal cuidadosamente confinado nesses recipientes aninhados de vidro é o padrão internacional do quilograma.

Comprimento

Em 1960, um padrão atômico para o metro também foi estabelecido, usando-se o comprimento de onda da luz vermelho-laranja emitida pelos átomos do criptônio (^{86}Kr) em um tubo de descarga luminescente. Por esse padrão de comprimento, a velocidade da luz em um vácuo foi medida em 299.792.458 m/s. Em novembro de 1983, o padrão de comprimento foi novamente alterado, de modo que a velocidade da luz no vácuo foi *definida* como sendo exatamente igual a 299.792.458 m/s. O metro é definido de modo que esteja de acordo com este número e com a definição de segundo dada anteriormente. Logo, a nova definição de **metro** (abreviado como m) é a distância que a luz percorre no vácuo em uma fração de 1/299.792.458 do segundo. Isso fornece um padrão de comprimento muito mais preciso do que o construído com base no comprimento de onda da luz.

Massa

A unidade de massa, o **quilograma** (abreviado como kg), é definida como a massa de um cilindro específico feito com uma liga de platina e irídio. Este cilindro é mantido na Agência Internacional de Pesos e Medidas em Sèvres, próximo de Paris (Figura 1.4). Um padrão atômico para massa seria mais fundamental, porém até o presente não podemos medir massas em escala atômica com exatidão igual à obtida em medidas macroscópicas. O *grama* (que não é uma unidade fundamental) é igual a 0,001 quilograma.

Prefixos das unidades

Uma vez definidas as unidades fundamentais, é fácil introduzir unidades maiores e menores para as mesmas grandezas físicas. No sistema métrico, elas são relacionadas com as unidades fundamentais (ou, no caso da massa, com o grama) por meio de múltiplos de 10 ou de $\frac{1}{10}$.

Logo, um quilômetro (1 km) é igual a 1000 metros e um centímetro (1 cm) é igual a $\frac{1}{100}$ metros.

Normalmente escrevemos múltiplos de 10 ou de $\frac{1}{10}$ usando notação exponencial: $1000 = 10^3$, $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$ e assim por diante. Usando esta notação, 1 km = 10^3 m e 1 cm = 10^{-2} m.

Os nomes das demais unidades são obtidos adicionando-se um **prefixo** ao nome da unidade fundamental. Por exemplo, o prefixo 'quilo', abreviado por k, significa sempre um múltiplo de 1000, portanto:

1 quilômetro = 1 km = 10^3 metros = 10^3 m
1 quilograma = 1 kg = 10^3 gramas = 10^3 g
1 quilowatt = 1 kW = 10^3 watts = 10^3 W

Os prefixos padronizados do SI são indicados no Apêndice E, juntamente com as respectivas abreviações e significados.

Apresentamos aqui diversos exemplos do uso dos prefixos que designam múltiplos de 10 para unidades de comprimento, massa e tempo. A Figura 1.5 mostra como esses prefixos ajudam a descrever tanto longas, quanto curtas distâncias.

Comprimento

1 nanômetro = 1 nm = 10^{-9} m (algumas vezes maior do que o maior átomo)

1 micrômetro = 1 μm = 10^{-6} m (tamanho de uma bactéria e de células vivas)

1 milímetro = 1 mm = 10^{-3} m (diâmetro do ponto feito por uma caneta)

1 centímetro = 1 cm = 10^{-2} m (diâmetro de seu dedo mínimo)

1 quilômetro = 1 km = 10^3 m (percurso em uma caminhada de 10 minutos)

Massa

1 micrograma = 1 μg = 10^{-6} g = 10^{-9} kg (massa de uma partícula muito pequena de poeira)

1 miligrama = 1mg = 10^{-3} g = 10^{-6} kg (massa de um grão de sal)

1 grama = 1 g = 10^{-3} kg (massa de um clipe de papel)

Tempo

1 nanossegundo = 1 ns = 10^{-9} s (tempo para a luz percorrer 0,3 m)

1 microssegundo = 1 μs = 10^{-6} s (tempo para um satélite percorrer 8 mm)

1 milissegundo = 1 ms = 10^{-3} s (tempo para o som percorrer 0,35 m)

O sistema inglês

Finalmente, mencionamos o sistema inglês de unidades. Essas unidades são usadas apenas nos Estados Unidos e em mais alguns poucos países, e na maioria deles estão sendo substituídas pelas unidades SI. As unidades inglesas são agora oficialmente definidas em termos de unidades SI, como segue:

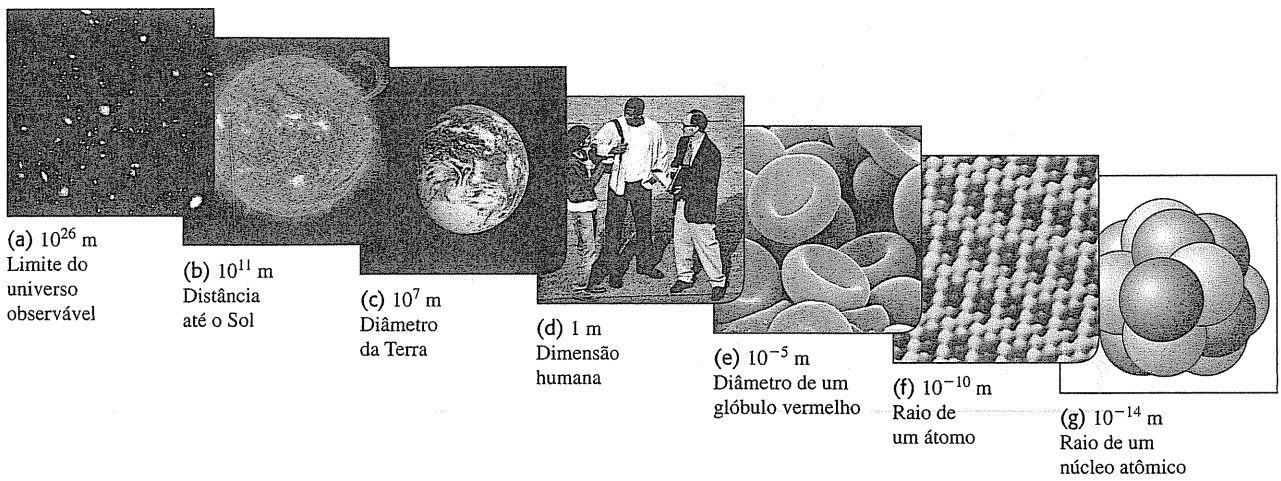


Figura 1.5 Alguns comprimentos típicos no universo. (a) A distância até as galáxias mais remotas que podemos enxergar é de cerca de 10^{26} m ou 10^{23} km. (b) O Sol está a $1{,}50 \times 10^{11}$ m ou $1{,}50 \times 10^{8}$ km da Terra. (c) O diâmetro da Terra é $1{,}28 \times 10^{7}$ m ou 12.800 km. (d) Um ser humano típico mede 1,70 m ou 170 cm de altura. (e) Os glóbulos vermelhos humanos possuem aproximadamente 8×10^{-6} m (0,008 mm ou 8 μm) de diâmetro. (f) Esses átomos de oxigênio, que se vêem dispostos sobre a superfície de um cristal, possuem cerca de 10^{-10} m ou 10^{-4} μm de raio. (g) Os núcleos atômicos típicos (representados de forma artística) possuem raios de cerca de 10^{-14} m ou 10^{-5} nm.

Comprimento: 1 polegada = 2,54 cm (exatamente)
Força: 1 libra = 4,448221615260 newtons (exatamente)

O newton, abreviado como N, é a unidade de força do SI. A unidade inglesa de tempo é o segundo, definida da mesma forma que no SI. Na física, as unidades inglesas são usadas somente em mecânica e termodinâmica; não há sistema inglês de unidades elétricas.

Neste livro usamos as unidades SI para todos os exemplos e problemas. Ao resolver os problemas com unidades SI, pode ser que você queira convertê-las para os equivalentes aproximados ingleses, caso esteja mais familiarizado com eles (Figura 1.6). Mas recomendamos que tente *pensar* o máximo possível em unidades SI.

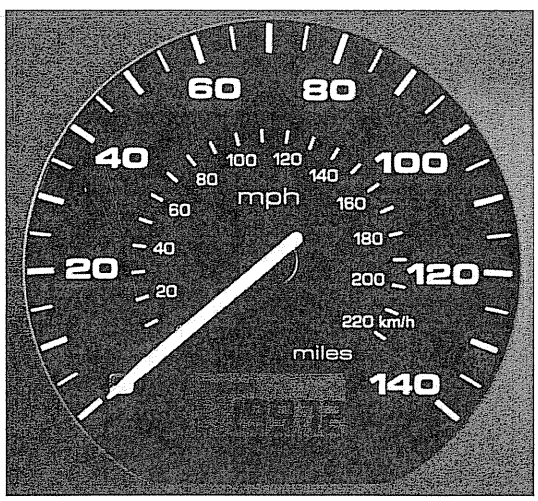


Figura 1.6 Muitos itens do nosso cotidiano utilizam tanto as unidades SI quanto as inglesas. Por exemplo, o velocímetro de um automóvel montado nos EUA, que mostra a velocidade tanto em quilômetros por hora (escala interna) quanto em milhas por hora (escala externa).

1.4 Coerência e conversão de unidades

Usamos equações para relacionar grandezas físicas representadas por símbolos algébricos. A cada símbolo algébrico sempre associamos um número e uma unidade. Por exemplo, d pode representar uma distância de 10 m, t um tempo de 5 s e v uma velocidade de 2 m/s.

Uma equação deve sempre possuir **coerência dimensional**. Não se pode somar automóvel com maçã; dois termos só podem ser somados ou equacionados caso possuam a mesma unidade. Por exemplo, se um corpo se move com velocidade constante v e se desloca uma distância d em um tempo t, essas grandezas podem ser relacionadas pela equação:

$$d = vt$$

Caso d seja medido em metros, então o produto vt também deve ser expresso em metros. Usando os valores anteriores como exemplo, podemos escrever:

$$10\ \text{m} = \left(2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(5\ \text{s})$$

Como a unidade 1/s do membro direito da equação é cancelada com a unidade s, o produto vt possui unidade de metro, como esperado. Nos cálculos, as unidades são tratadas do mesmo modo que os símbolos algébricos na divisão e na multiplicação.

ATENÇÃO Sempre use unidades em cálculos Quando os cálculos envolvem números com unidades em um problema, recomendamos que você *sempre* escreva os números com as respectivas unidades, como no exemplo anterior. Isto permite

que se faça uma rápida verificação dos cálculos. Se em um estágio da solução você notar alguma inconsistência de unidades, saberá que cometeu um erro em alguma etapa. Neste livro, *sempre* escreveremos as unidades em todos os cálculos e recomendamos enfaticamente que você siga esta prática na solução de problemas.

Estratégia para a solução de problemas 1.2

CONVERSÃO DE UNIDADES

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* a conversão de unidades é importante, assim como reconhecer quando ela se faz necessária. Na maioria dos casos, é melhor usar as unidades fundamentais do SI (comprimento em metros, massa em quilogramas e tempo em segundos) na solução de um problema. Caso necessite da resposta em um conjunto diferente de unidades (tais como quilômetros, gramas ou horas), deixe para fazer a conversão ao final do problema. Nos exemplos a seguir, nos concentraremos apenas na conversão de unidades, por isso pularemos a etapa da *Identificação*.

PREPARAR *o problema* e **EXECUTAR** *a solução:* na divisão e na multiplicação as unidades são tratadas como se fossem símbolos algébricos. Isso possibilita um método fácil para converter unidades. A idéia básica é que podemos expressar a mesma grandeza com duas unidades diferentes e fazer uma igualdade. Por exemplo, quando dizemos que 1 min = 60 s, não queremos dizer que 1 seja igual a 60, queremos dizer que 1 min corresponde ao mesmo intervalo de tempo de 60 s. Por este motivo, a razão (1 min)/(60 s) = (60 s)/(1 min) = 1. Podemos multiplicar uma grandeza por qualquer uma dessas razões sem alterar seu valor. Por exemplo, para determinar o número de segundos em 3 min, escrevemos:

$$3\ \text{min} = (3\ \cancel{\text{min}})\left(\frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}}\right) = 180\ \text{s}$$

AVALIAR *sua resposta:* se você converter unidades corretamente, como no exemplo anterior, cancelará as unidades não desejadas. Caso você multiplique 3 min por (1 min)/(60 s), obterá o resultado $\frac{1}{20}\ \text{min}^2/\text{s}$, o que é certamente um modo não apropriado para medir o tempo. Para que você converta unidades de modo apropriado, precisa escrever as unidades em *todas* as etapas dos cálculos.

Como verificação final, questione se sua resposta é razoável. O resultado 3 min = 180 s é razoável? A resposta é sim; o segundo é uma unidade menor do que o minuto, logo existem mais segundos do que minutos em um mesmo intervalo de tempo.

Exemplo 1.1

CONVERSÃO DE UNIDADES DE VELOCIDADE O recorde mundial de velocidade no solo é de 1228,0 km/h, estabelecido em 15 de outubro de 1997 por Andy Green com o *Thrust SSC*, um carro movido a jato. Expresse esta velocidade em m/s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR E PREPARAR: queremos converter as unidades de uma velocidade de km/h para m/s.

EXECUTAR: o prefixo k significa 10^3, de modo que a velocidade 1228,0 km/h = 1228,0 × 10^3 m/h. Sabemos que 1 h = 3600 s. Logo, devemos combinar a velocidade de 1228,0 × 10^3 m/h com o fator 3600. Porém, devemos multiplicar ou dividir por este fator? Se você tratasse o fator como um número puro sem unidade, seria forçado a fazer hipóteses sobre o procedimento.

O tratamento correto é escrever as unidades juntamente com cada fator. Escreva o fator de modo que cancele a unidade de hora:

$$1228{,}0\ \text{km/h} = \left(1228{,}0 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\cancel{\text{h}}}\right)\left(\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}}\right) = 341{,}11\ \text{m/s}$$

Caso você multiplicasse por (3600 s)/(1 h) não cancelaria a unidade de hora e seria capaz de facilmente notar o erro. Repetindo, a *única* maneira de você ter certeza da conversão de unidades apropriada é escrever as unidades em todas as etapas dos cálculos.

AVALIAR: embora você provavelmente tenha uma boa intuição para velocidades em quilômetros ou milhas por hora, a conversão em metros por segundo poderá ser um pouco mais confusa. Será útil lembrar que uma velocidade típica de caminhada é de aproximadamente 1 m/s: o comprimento do passo de uma pessoa comum é de cerca de um metro e um bom ritmo de caminhada é de cerca de um passo por segundo. Comparativamente, uma velocidade de 341,11 m/s é bem depressa!

Exemplo 1.2

CONVERSÃO DE UNIDADES DE VOLUME O maior diamante do mundo é o *First Star of Africa* (Primeira Estrela da África) (montado no Cetro Real Inglês e mantido na Torre de Londres). Seu volume é igual a 1,84 pol.^3. Qual é seu volume em centímetros cúbicos? E em metros cúbicos?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR E PREPARAR: devemos converter as unidades de um volume em polegadas cúbicas (pol.^3) para centímetros cúbicos (cm^3) e metros cúbicos (m^3).

EXECUTAR: para converter polegadas cúbicas em centímetros cúbicos, multiplicamos por $[(2{,}54\ \text{cm})/(1\ \text{pol.})]^3$, encontramos:

$$1{,}84\ \text{pol.}^3 = (1{,}84\ \text{pol.}^3)\left(\frac{2{,}54\ \text{cm}}{1\ \text{pol.}}\right)^3$$

$$= (1{,}84)(2{,}54)^3 \frac{\cancel{\text{pol.}^3}\ \text{cm}^3}{\cancel{\text{pol.}^3}} = 30{,}2\ \text{cm}^3$$

Como 1 cm = 10^{-2} m e

$$30{,}2\ \text{cm}^3 = (30{,}2\ \text{cm}^3)\left(\frac{10^{-2}\ \text{m}}{1\ \text{cm}}\right)^3$$

$$= (30{,}2)(10^{-2})^3 \frac{\cancel{\text{cm}^3}\ \text{m}^3}{\cancel{\text{cm}^3}} = 30{,}2 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

$$= 3{,}02 \times 10^{-5}\ \text{m}^3$$

AVALIAR: embora 1 centímetro seja = 10^{-2} de um metro (que é 1 cm = 10^{-2} m), nossa resposta demonstra que um centímetro cúbico (1 cm^3) *não* é igual a 10^{-2} de um metro cúbico. Em vez disto, é o volume de um cubo cuja aresta é igual a 1 cm. Logo 1 cm^3 = (1 cm)^3 = (10^{-2} m)^3 = (10^{-2})^3 m^3, ou 1 cm^3 = 10^{-6} m^3.

1.5 Incerteza e algarismos significativos

As medidas sempre envolvem incertezas. Se medir a espessura da capa de um livro com uma régua comum, sua medida será confiável até o milímetro mais próximo. Suponha que você meça 3 mm. Seria *errado* expressar este resultado como 3,0 mm. Por causa das limitações do dispositivo de medida, você não pode afirmar se a espessura real é 3,0 mm, 2,85 mm ou 3,11 mm. Contudo, se você usasse um micrômetro calibrador, um dispositivo capaz de medir distâncias com segurança até 0,01 mm, o resultado poderia ser expresso como 2,91 mm. A distinção entre essas duas medidas corresponde a suas respectivas **incertezas**. A medida realizada com um micrômetro possui uma incerteza menor; ela é mais precisa. A incerteza corresponde ao **erro** da medida, visto que ela indica a maior diferença esperada entre o valor real e o valor medido. A incerteza ou erro no valor da grandeza depende da técnica usada na medida.

Geralmente indicamos a **acurácia** ou exatidão de um valor medido — ou seja, o grau de aproximação esperado entre o valor real e o valor medido — escrevendo o número seguido do sinal ± e um segundo número indicando a incerteza da medida. Se o diâmetro de uma barra de aço for indicado por 56,47 ± 0,02 mm, concluímos que o valor real não deve ser menor que 56,45 mm, nem maior do que 56,49 mm. Em notação resumida, às vezes usada, o número 1,6454 (21) significa 1,6454 ± 0,0021. O número entre parênteses indica a incerteza nos dígitos finais do número principal.

Podemos também indicar a acurácia mediante o máximo **erro fracionário** ou **erro percentual** (também chamados de *incerteza fracionária* ou *incerteza percentual*). Um resistor com a indicação '47 ohms ± 10%' deve possuir um valor de resistência provável que difere no máximo de 10% de 47 ohms, ou seja, cerca de 5 ohms. O valor da resistência deve estar situado entre 42 e 52 ohms. Para o diâmetro da barra de aço mencionado anteriormente, o erro fracionário é igual a (0,02 mm)/(56,47 mm), ou aproximadamente 0,0004; o erro percentual é aproximadamente igual a 0,04%. Até mesmo erros percentuais pequenos, algumas vezes, podem se tornar importantes (Figura 1.7).

Em muitos casos, a incerteza de um número não é apresentada explicitamente. Em vez disto, ela é indicada pelo número de dígitos confiáveis, ou **algarismos significativos**, do valor da medida. Dissemos que a medida da espessura da capa de certo livro forneceu o valor 2,91 mm, que possui três algarismos significativos. Com isto queremos dizer que os dois primeiros algarismos são corretos, enquanto o terceiro dígito é incerto. O último dígito está na casa dos centésimos, de modo que a incerteza é aproximadamente igual a 0,01 mm. Dois valores com o *mesmo* número de algarismos significativos podem possuir incertezas *diferentes*; uma distância de 137 km também possui três algarismos significativos, porém a incerteza é aproximadamente igual a 1 km.

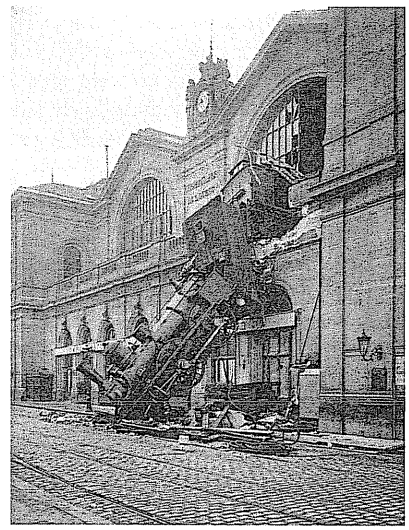


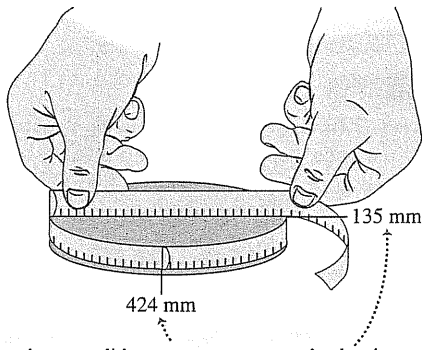
Figura 1.7 Este espetacular desastre foi causado por um erro percentual muito pequeno — ultrapassar em apenas alguns metros a posição final, em uma distância total percorrida de centenas de milhares de metros.

Quando você usa números com incertezas para calcular outros números, os resultados obtidos também são incertos. Quando você multiplica ou divide números, o número de algarismos significativos do resultado não pode ser maior do que o menor número de algarismos significativos dos fatores envolvidos. Por exemplo, 3,1416 × 2,34 × 0,58 = 4,3. Quando você adiciona ou subtrai números, o que importa é a localização da vírgula indicadora da casa decimal e não o número de algarismos significativos. Por exemplo, 123,62 + 8,9 = 132,5. Embora 123,62 possua uma incerteza de 0,01, a incerteza de 8,9 é de 0,1. Sendo assim, o resultado possui uma incerteza de 0,1 e deve ser expresso como 132,5 e não 132,52. A Tabela 1.1 resume essas regras para algarismos significativos.

Tabela 1.1 O uso de algarismos significativos

Operação matemática	Algarismos significativos resultantes
Multiplicação ou divisão	Não mais que no número com os menores algarismos significativos *Exemplo:* (0,745 × 2,2)/3,885 = 0,42 *Exemplo:* (1,32578 × 10^7) × (4,11 × 10^{-3}) = 5,45 × 10^4
Adição ou subtração	Determinados pelo algarismo com a maior incerteza (i. e., os menores dígitos à direita do ponto decimal) *Exemplo:* 27,153 + 138,2 − 11,74 = 153,6

Nota: Neste livro, normalmente fornecemos valores numéricos com três algarismos significativos.



Os valores medidos possuem apenas três algarismos significativos, portanto o cálculo da razão (π) também possui apenas três algarismos significativos.

Figura 1.8 Como determinar o valor de π a partir da circunferência e diâmetro de um círculo.

Para aplicar esses conceitos, vamos supor que você queira verificar o valor de π, a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro. O verdadeiro valor dessa grandeza com dez dígitos é 3,141592654. Para testar isso, desenhe um grande círculo e meça sua circunferência e diâmetro em milímetros, obtendo os valores 424 mm e 135 mm (Figura 1.8). Usando a calculadora, você chega ao quociente 3,140740741. Pode parecer divergente do valor real de π, mas lembre-se de que cada uma das suas medidas possui três algarismos significativos e, portanto, a sua medida de π, igual a (424 mm)/(135 mm), só pode ter três algarismos significativos. O resultado deve ser simplesmente 3,14. Respeitando-se o limite de três algarismos significativos, seu resultado está de acordo com o valor real.

Nos exemplos e problemas neste livro normalmente apresentamos os resultados com três algarismos significativos; portanto, as respostas que você achar não devem possuir mais do que três algarismos significativos. (Muitos números em nossa vida cotidiana possuem até acurácia menor. Por exemplo, o velocímetro de um automóvel fornece em geral dois algarismos significativos.) Mesmo que você use uma calculadora com visualização de dez dígitos, seria errado fornecer a resposta com dez dígitos, porque representa incorretamente a acurácia dos resultados. Sempre arredonde seus resultados indicando apenas o número correto de algarismos significativos ou, em casos duvidosos, apenas mais um algarismo. No Exemplo 1.1, seria errado escrever a resposta como 341,11111 m/s. Observe que, quando você reduz a resposta ao número apropriado de algarismos significativos, deve *arredondar* e não *truncar* a resposta. Usando a calculadora para dividir 525 m por 311 m, você encontrará 1,688102894; com três algarismos significativos o resultado é 1,69 e não 1,68.

Quando você trabalha com números muito grandes ou muito pequenos, pode mostrar os algarismos significativos mais facilmente usando **notação científica**, algumas vezes denominada de **notação com potências de 10**. A distância entre a Terra e a Lua é aproximadamente igual a 384.000.000 m, porém este modo de escrever não fornece indicação do número de algarismos significativos. Em vez disto, deslocamos oito casas decimais para a esquerda (o que corresponde a dividir por 10^8) e multiplicamos o resultado por 10^8. Logo,

$$384\,000\,000 \text{ m} = 3{,}84 \times 10^8 \text{ m}$$

Usando esta forma, fica claro que o número possui três algarismos significativos. O número $4{,}0 \times 10^{-7}$ também possui três algarismos significativos, embora haja dois zeros depois da vírgula. Note que, em notação científica, toda quantidade deve ser expressa por um número entre 1 e 10 seguido da multiplicação pela potência de 10 apropriada.

Quando um inteiro e uma fração ocorrem em uma equação, consideramos o inteiro como se não tivesse nenhuma incerteza. Por exemplo, na equação $v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$, que é a Equação (2.13) do Capítulo 2, o fator 2 vale *exatamente* 2. Podemos supor que este fator possua um número infinito de algarismos significativos (2,000000...). A mesma observação é válida para o expoente 2 em v_x^2 e v_{0x}^2.

Finalmente, convém notar a diferença entre a **precisão** e a *acurácia*. Um relógio digital barato que indica as horas como 10h35min17s é muito *preciso* (ele indica até o segundo), porém, se o seu funcionamento produz um atraso de alguns minutos, o valor indicado não é exato, ou seja, não é *acurado*. Por outro lado, o relógio do seu avô pode ser acurado (isto é, mostrar o tempo com exatidão), mas se este relógio não possui o ponteiro dos segundos, ele não é muito preciso. Medidas de elevada qualidade, como aquelas usadas para a definição de padrões (Seção 1.3), devem ser simultaneamente precisas *e* acuradas.

Exemplo 1.3

ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS NA MULTIPLICAÇÃO A energia de repouso E de um corpo em repouso de massa m é dada pela equação de Einstein:

$$E = mc^2$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo. Determine E para um corpo que possui massa $m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg (a massa de um elétron com três algarismos significativos). A unidade SI para energia E é o joule (J); 1 J = 1 kg·m^2/s^2.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR E PREPARAR: nossa variável-alvo é a energia E. Nos é dada a equação e o valor da massa m; de acordo com a Seção 1.3 o valor exato da velocidade da luz é c = 299.792.458 m/s = $2{,}99792458 \times 10^8$ m/s.

EXECUTAR: substituindo os valores de m e de c na equação de Einstein, encontramos

$$\begin{aligned} E &= (9{,}11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(2{,}99792458 \times 10^8\,\text{m/s})^2 \\ &= (9{,}11)(2{,}99792458)^2(10^{-31})(10^8)^2\,\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 \\ &= (81{,}87659678)(10^{[-31+(2\times 8)]})\,\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 \\ &= 8{,}187659678 \times 10^{-14}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 \end{aligned}$$

Como o valor de m foi dado com três algarismos significativos, podemos aproximar o resultado para

$$E = 8{,}19 \times 10^{-14}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 = 8{,}19 \times 10^{-14}\ \text{J}$$

Em geral, as calculadoras usam notação científica e somam automaticamente os expoentes, porém você deve ser capaz de realizar esses cálculos manualmente quando necessário.

AVALIAR: embora a energia de repouso contida em um elétron possa parecer desprezivelmente pequena, ela é enorme na escala atômica. Compare nossa resposta com 10^{-19} J, a energia obtida ou perdida por um único átomo em uma reação química típica; a energia de repouso de um elétron é cerca de 1.000.000 de vezes maior! (Discutiremos a importância da energia de repouso no Capítulo 37, vol. 4.)

Teste sua compreensão da Seção 1.5 A densidade de um material é igual à divisão da sua massa pelo seu volume. Qual é a densidade (em kg/m^3) de uma rocha com massa de 1,80 kg e volume de $6{,}0 \times 10^{-4}$ m^3? (i) 3×10^3 kg/m^3; (ii) $3{,}0 \times 10^3$ kg/m^3; (iii) $3{,}0 \times 10^3$ kg/m^3; (iv) $3{,}0 \times 10^3$ kg/m^3; (v) qualquer dessas alternativas – todas são matematicamente equivalentes. ▮

1.6 Estimativas e ordens de grandeza

Enfatizamos a importância de se conhecer a acurácia de números que representam grandezas físicas. Porém, mesmo a estimativa mais grosseira de uma grandeza geralmente nos fornece uma informação útil. Às vezes, sabemos como calcular certa grandeza, mas precisamos fazer hipóteses sobre os dados necessários para os cálculos. Ou os cálculos exatos podem ser tão complicados que fazemos algumas aproximações grosseiras. Em qualquer dos dois casos, nosso resultado será uma suposição, mas tal suposição pode ser útil mesmo quando a incerteza possuir um fator de dois, dez ou ainda maior. Tais cálculos denominam-se normalmente **estimativas de ordem de grandeza**. O grande físico nuclear ítalo-americano Enrico Fermi (1901-1954) chamava-os de 'cálculos feitos nas costas de um envelope'.

No final deste capítulo, desde o Exercício 1.18 até o Exercício 1.29, são propostas várias estimativas de 'ordem de grandeza'. Algumas são muito simples, outras exigem a elaboração de hipóteses para os dados necessários. Não tente procurar muitos dados; elabore as melhores hipóteses possíveis. Mesmo que elas estejam fora da realidade de um fator de dez, os resultados podem ser úteis e interessantes.

Exemplo 1.4

UMA ESTIMATIVA DE ORDEM DE GRANDEZA

Você está escrevendo um conto de aventuras no qual o herói foge pela fronteira transportando em sua mala barras de ouro estimadas em um bilhão de dólares. Seria isto possível? Poderia esta quantidade de ouro caber na mala? Esta quantidade seria pesada demais para carregar?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR, PREPARAR E EXECUTAR: o ouro vale cerca de 400 dólares a onça. Uma onça equivale a cerca de 30 gramas. O preço do ouro pode oscilar de 200 até 600 dólares por onça, mas isto não é relevante. Na realidade, uma onça ordinária (*avoirdupois*) equivale a 28,35 g e uma onça de ouro (*troy*) possui massa 9,45% maior. De novo, isto não é relevante. Um grama de ouro vale aproximadamente dez dólares, de modo que um bilhão (10^9) de dólares corresponde a 10^8 gramas ou 10^5 kg. Isto equivale a um peso de 100 toneladas. Mesmo assim o herói não poderia transportar este peso em sua mala.

Podemos também estimar o *volume* do ouro. Se ele possuísse a mesma densidade da água (1 g/cm^3), seu volume seria 10^8 cm^3 ou 100 m^3. Contudo, o ouro é um metal muito pesado, e podemos estimar sua densidade como sendo 10 vezes maior do que a da água. Na realidade, ele possui densidade 19,3 vezes maior do que a da água. Porém, usando a estimativa de 10, encontraremos um volume igual a 10 m^3. Imagine uma pilha de 10 cubos de ouro, cada cubo com aresta de 1 m de comprimento, e pense se elas poderiam caber na mala do herói!

AVALIAR: é evidente que o conto deve ser reescrito. Refaça o cálculo com uma mala cheia de diamantes de cinco quilates (1 grama), cada um valendo 100.000 dólares. Daria certo?

Teste sua compreensão da Seção 1.6 Você pode estimar o total de dentes na boca de todos (alunos, funcionários e acadêmicos) no seu campus? (*Sugestão:* quantos dentes há em sua boca? Conte-os!) ▮

1.7 Vetores e soma vetorial

Algumas grandezas físicas, como tempo, temperatura, massa, densidade e carga elétrica, podem ser descritas por um único número com uma unidade. Porém outras grandezas importantes possuem uma *direção* associada com elas e não podem ser descritas por um único número. Um exemplo simples de grandeza que possui direção é o movimento de um avião. Para descrever completamente seu movimento, não basta dizer com que velocidade ele se desloca, é necessário dizer a direção e o sentido do seu movimento. Para voar de São Paulo até Salvador, o avião deve ir para o norte e não para o sul. A velocidade do avião é uma grandeza com três características: o módulo da velocidade, a direção e o sentido do movimento. Outro exemplo é a *força*, que na física significa a ação de empurrar ou puxar um corpo. Descrever completamente uma força significa fornecer o módulo da força, sua direção e o seu sentido (empurrar ou puxar).

Quando uma grandeza física é descrita por um único número, ela é denominada de **grandeza escalar**. Diferentemente, uma **grandeza vetorial** é descrita por um **módulo** (que indica a 'quantidade' ou o 'tamanho'), juntamente com uma direção (e sentido) no espaço. Os cálculos envol-

vendo uma grandeza escalar são feitos pelas operações aritméticas usuais. Por exemplo, 6 kg + 3 kg = 9 kg ou 4 × 2 s = 8 s. Contudo, os cálculos que envolvem vetores necessitam de operações específicas.

Para entender mais de vetores e as operações com eles envolvidas, começaremos com uma grandeza vetorial muito simples, o **deslocamento**. O deslocamento é simplesmente a variação da posição de um ponto. (O ponto pode representar uma partícula ou um objeto pequeno.) Na Figura 1.9a, representamos a variação da posição de um ponto P_1 ao ponto P_2 por uma linha reta unindo estes pontos, com a ponta da flecha apontando para P_2 para representar o sentido do deslocamento. O deslocamento é uma grandeza vetorial, porque devemos especificar não só a distância percorrida, como também a direção e o sentido do deslocamento. Caminhar 3 km do sul para o norte leva a um local completamente diferente de uma caminhada de 3 km para o sudeste. Estes dois deslocamentos possuem o mesmo módulo, mas direções e sentidos diferentes.

Geralmente representamos uma grandeza vetorial por uma única letra, tal como $\vec{A}$, que indica o deslocamento na Figura 1.9a. Neste livro sempre designaremos uma grandeza vetorial por ***fonte em itálico e negrito, com uma seta sobre a letra***. Fazemos isto para você lembrar que uma grandeza vetorial possui propriedades diferentes das grandezas escalares; a flecha serve para lembrar que uma grandeza vetorial possui direção e sentido. Na notação manuscrita, o vetor é sublinhado ou então recebe uma flecha sobre a letra (veja a Figura 1.9a). Quando usar um símbolo para designar um vetor, *sempre* utilize uma destas convenções. Se você não fizer esta distinção na notação entre uma grandeza vetorial e uma grandeza escalar, poderá ocorrer também uma confusão na sua maneira de pensar.

Quando *desenhar* uma grandeza vetorial, é conveniente que você use uma flecha em sua extremidade. O comprimento do segmento fornece o módulo do vetor, a direção é indicada pelo segmento da reta e o sentido é indicado pela flecha. O deslocamento é sempre dado por um segmento de reta que fornece o módulo que liga o ponto inicial ao ponto final da trajetória, mesmo no caso de uma trajetória curva. Na Figura 1.9b, a partícula se deslocou ao longo de uma trajetória curva do ponto P_1 ao ponto P_2, porém o deslocamento é dado pelo mesmo vetor $\vec{A}$. Note que o vetor deslocamento não é associado com a *distância* total da trajetória descrita. Caso a partícula continuasse a se deslocar até o ponto P_2 e depois retornasse ao ponto P_1, seu deslocamento na trajetória fechada seria igual a *zero* (Figura 1.9c).

Vetores **paralelos** são aqueles que possuem a mesma direção e o mesmo sentido. Se dois vetores possuem o mesmo módulo *e* a mesma direção e sentido eles são *iguais*, independentemente do local onde se encontram no espaço. Na Figura 1.10 o vetor $\vec{A}$ que liga o ponto P_1 ao ponto P_2 possui o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido do vetor $\vec{A}'$ que liga o ponto P_3 com o ponto P_4. Estes dois deslocamentos são iguais, embora eles comecem em pontos diferentes. Na Figura 1.10, vemos que $\vec{A}' = \vec{A}$ e estamos usando negrito no sinal de igual para enfatizar que esta igualdade envolve dois vetores, e não duas grandezas escalares. Duas grandezas vetoriais são iguais somente quando elas possuem o mesmo módulo *e* a mesma direção e sentido.

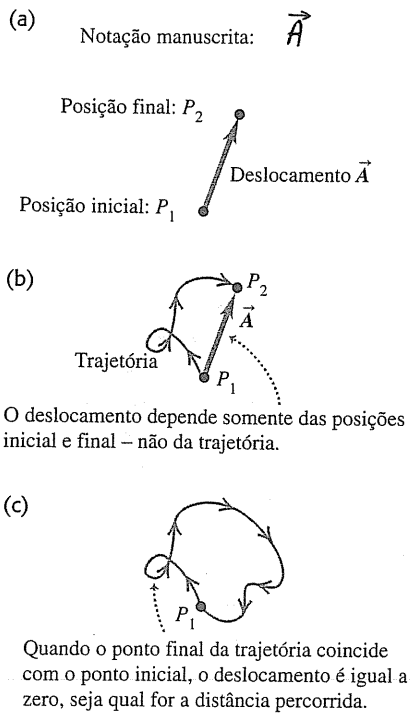


Figura 1.9 O deslocamento é um vetor cuja direção é sempre traçada do ponto inicial até o ponto final, mesmo no caso de uma trajetória curva.

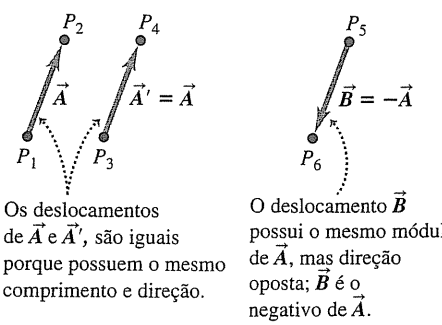


Figura 1.10 O significado de vetores que possuem o mesmo módulo e a mesma direção ou direção oposta.

Contudo, o vetor $\vec{B}$ na Figura 1.10 não é igual a $\vec{A}$, porque possui sentido *contrário* ao do deslocamento $\vec{A}$. Definimos um **vetor negativo** como um vetor que possui mesmo módulo e direção do vetor dado, mas possui sentido *contrário* ao sentido deste vetor. O valor negativo de um vetor $\vec{A}$ é designado por $-\vec{A}$, onde usamos um sinal negativo em negrito para enfatizar sua natureza vetorial. Caso $\vec{A}$ seja um vetor de 87 m apontando do norte para o sul, então $-\vec{A}$ será um vetor de 87 m apontando do sul para o norte. Logo, a relação entre o vetor $\vec{A}$ e o vetor $\vec{B}$ na Figura 1.10 pode ser escrita como $\vec{A} = -\vec{B}$ ou $\vec{B} = -\vec{A}$, Quando dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ possuem a mesma direção, mas sentidos contrários, possuindo ou não o mesmo módulo, dizemos que eles são **antiparalelos**.

Normalmente representamos o *módulo* de uma grandeza vetorial (o comprimento, no caso do vetor deslocamento) usando a mesma letra do vetor, porém com um *tipo itálico* sem negrito e sem flecha em cima. O uso de barras verticais laterais é uma notação alternativa para o módulo de um vetor:

$$(\text{Módulo de } \vec{A}) = A = |\vec{A}| \qquad (1.1)$$

Por definição, o módulo de um vetor é uma grandeza escalar (um número), sendo *sempre positivo*. Note que um vetor nunca pode ser igual a um escalar porque eles representam grandezas diferentes. A expressão "$\vec{A}$ = 6 m" é tão errada quanto dizer '2 laranjas = 3 maçãs' ou '6 lb = 7 km'!

Quando desenhamos diagramas contendo vetores, geralmente adotamos uma escala semelhante à usada em mapas. Por exemplo, um deslocamento de 5 km pode ser representado por um vetor com 1 cm de comprimento e um deslocamento de 10 km por um vetor com 2 cm de comprimento. Quando consideramos outras grandezas vetoriais como a de velocidade, devemos usar uma escala em que um vetor com um comprimento de 1 cm represente uma velocidade de módulo de 5 metros por segundo (5 m/s). Uma velocidade de 20 m/s seria então representada por um vetor de 4 cm, com a direção apropriada.

Soma vetorial

Suponha agora que uma partícula sofra um deslocamento $\vec{A}$, seguido de outro deslocamento $\vec{B}$ (Figura 1.11a). O resultado final é igual a um único deslocamento $\vec{C}$, começando no mesmo ponto inicial e terminando no mesmo ponto final, conforme indicado. Dizemos que o deslocamento $\vec{C}$ é a **resultante** ou **soma vetorial** dos deslocamentos $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Esta soma é expressa simbolicamente por

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \qquad (1.2)$$

Usamos negrito no sinal de soma para enfatizar que a soma de dois vetores é uma operação diferente da soma de grandezas escalares, tal como 2 + 3 = 5. Na soma vetorial, normalmente desenhamos o *início* do *segundo* vetor a partir da *extremidade* do *primeiro* (Figura 1.11a).

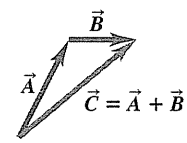
Caso você faça a soma, primeiro $\vec{A}$ e depois $\vec{B}$, ou, na ordem inversa, primeiro $\vec{B}$ e depois $\vec{A}$, o resultado será o mesmo (Figura 1.11b). Logo

$$\vec{C} = \vec{B} + \vec{A} \quad \text{e} \quad \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \qquad (1.3)$$

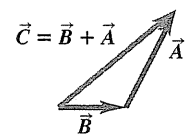
Donde se conclui que a ordem da soma vetorial não importa. Em outras palavras, dizemos que a soma vetorial é uma operação comutativa.

A Figura 1.11c mostra uma representação alternativa para a soma vetorial. Quando desenhamos o início de $\vec{A}$ e

(a) Podemos somar dois vetores desenhando a extremidade de um com o início do outro.



(b) Somá-los em ordem inversa produz o mesmo resultado.



(c) Podemos também somá-los construindo um paralelogramo.

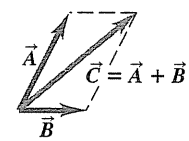
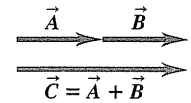


Figura 1.11 Três modos de somar dois vetores. Como se vê em (b), a ordem da soma vetorial não importa; a soma vetorial é comutativa.

(a) A soma de dois vetores paralelos



(b) A soma de dois vetores antiparalelos

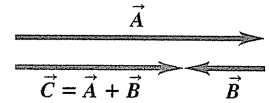


Figura 1.12 (a) Somente quando os dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são paralelos, o módulo da sua soma é igual à soma dos seus módulos: $C = A + B$. (b) Quando $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são antiparalelos, o módulo da sua soma é igual à *diferença* dos seus módulos: $C = |A - B|$.

de $\vec{B}$ no mesmo ponto, o vetor $\vec{C}$ é a diagonal de um paralelogramo construído de tal modo que os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ sejam seus lados adjacentes.

ATENÇÃO Módulos na soma vetorial Sendo $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, é um erro comum concluir que o módulo C é dado pela soma do módulo A com o módulo B. A Figura 1.11 mostra que em geral essa conclusão está *errada*; você pode notar pelo desenho que $C < A + B$. Note que o módulo da soma vetorial $\vec{A} + \vec{B}$ depende dos módulos de $\vec{A}$ e de $\vec{B}$ *e* do ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$ (veja o Problema 1.92). Somente no caso particular de $\vec{A}$ e $\vec{B}$ serem *paralelos* é que o módulo de $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ é dado pela soma dos módulos de $\vec{A}$ e de $\vec{B}$ (Figura 1.12a). Ao contrário, quando $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são *antiparalelos*, o módulo de $\vec{C}$ é dado pela *diferença* entre os módulos de $\vec{A}$ e de $\vec{B}$ (Figura 1.12b). Os estudantes que não tomam o cuidado de distinguir uma grandeza escalar de uma grandeza vetorial freqüentemente cometem erros sobre o módulo da soma vetorial.

Quando você precisar somar dois ou mais vetores, primeiro poderá fazer a soma vetorial de dois destes vetores, a seguir somar vetorialmente a resultante com o terceiro vetor e assim por diante. A Figura 1.13a mostra três vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$. Na Figura 1.13b, os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são inicialmente somados, obtendo-se a soma vetorial $\vec{D}$; a seguir os vetores $\vec{C}$ e $\vec{D}$ são somados pelo mesmo método, obtendo-se a soma vetorial $\vec{R}$:

$$\vec{R} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{D} + \vec{C}$$

Como alternativa, inicialmente podem ser somados os dois vetores $\vec{B}$ e $\vec{C}$, obtendo-se a soma vetorial $\vec{E}$ (Figura 1.13c), a seguir somados os vetores $\vec{A}$ e $\vec{E}$ para obter a soma vetorial $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} + \vec{E}$$

Não é nem mesmo necessário desenhar os vetores $\vec{D}$ e $\vec{E}$; basta desenhar os sucessivos vetores com o início de cada vetor na extremidade do vetor precedente e o vetor $\vec{R}$ ligando o início do primeiro vetor com a extremidade do último vetor (Figura 1.13d). A ordem é indiferente, a Figura 1.13e mostra outra ordem, e convidamos você a fazer outras variações. Vemos que a soma vetorial obedece à lei da associatividade.

Podemos também *subtrair* vetores. Lembrem-se de que mencionamos anteriormente que $-\vec{A}$ é um vetor que possui o mesmo módulo e a mesma direção, mas sentido contrário ao do vetor $\vec{A}$. Definimos a diferença $\vec{A} - \vec{B}$ entre dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ como sendo a soma vetorial de $\vec{A}$ com o vetor $-\vec{B}$:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \qquad (1.4)$$

A Figura 1.14 mostra um exemplo de subtração vetorial.

Uma grandeza vetorial como o deslocamento pode ser multiplicada por uma grandeza escalar (um número comum). O deslocamento $2\vec{A}$ é também um deslocamento (grandeza vetorial) com as mesmas características do vetor $\vec{A}$, porém com o dobro do seu módulo; isto corresponde a somar o vetor $\vec{A}$ com ele mesmo (Figura 1.15a). Em geral, quando um vetor $\vec{A}$ é multiplicado por um escalar c, o resultado $c\vec{A}$ possui módulo $|c|A$ (o valor absoluto de

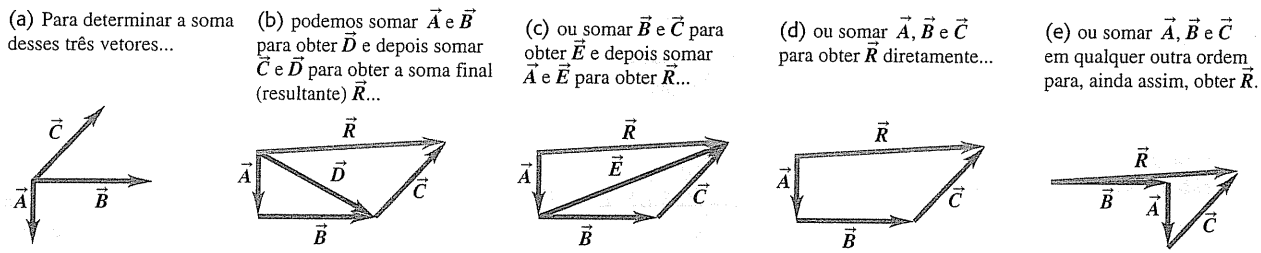


Figura 1.13 Diversas construções para achar a soma vetorial $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

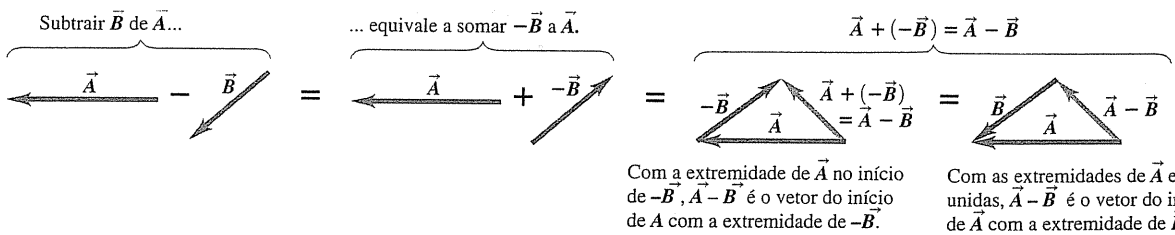


Figura 1.14 Para construir a subtração vetorial $\vec{A} - \vec{B}$, você pode ou inserir a extremidade de $-\vec{B}$ na ponta de $\vec{A}$ ou colocar os dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ ponta com ponta.

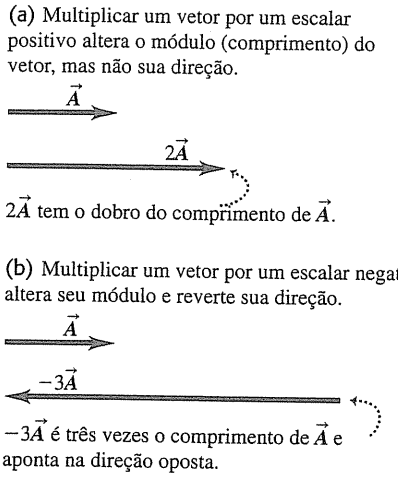


Figura 1.15 Multiplicação de um vetor (a) por um escalar positivo e (b) por um escalar negativo.

c multiplicado pelo módulo do vetor $\vec{A}$). Supondo que c seja um número positivo, o vetor $c\vec{A}$ é um vetor que possui a mesma direção e sentido do vetor $\vec{A}$; caso c seja um número negativo, o vetor $c\vec{A}$ é um vetor que possui a mesma direção, mas um sentido contrário ao do vetor $\vec{A}$. Logo, $3\vec{A}$ é um vetor paralelo a $\vec{A}$, enquanto $-3\vec{A}$ é um vetor antiparalelo a $\vec{A}$ (Figura 1.15b).

A grandeza escalar usada para multiplicar um vetor pode ser uma grandeza física que possua unidades. Por exemplo, você pode estar familiarizado com a relação $\vec{F} = m\vec{a}$; a força resultante $\vec{F}$ (uma grandeza vetorial) que atua sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo m (uma grandeza escalar positiva) pela sua aceleração $\vec{a}$ (uma grandeza vetorial). A direção e o sentido de $\vec{F}$ coincidem com a direção e o sentido da aceleração $\vec{a}$ porque m é uma grandeza positiva e o módulo da força resultante $\vec{F}$ é igual ao produto da massa m (um valor positivo igual ao seu próprio módulo) pelo módulo da aceleração $\vec{a}$. A unidade do módulo de uma força é igual ao produto da unidade de massa pela unidade do módulo da aceleração.

Exemplo 1.5

SOMA VETORIAL

Uma esquiadora percorre 1,0 km do sul para o norte e depois 2,0 km de oeste para leste em um campo horizontal coberto de neve. A que distância ela está do ponto de partida e em que direção?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o problema envolve combinação de deslocamentos, por isso podemos resolvê-lo com a soma vetorial. As variáveis-alvo são a distância e a direção total da esquiadora em relação ao seu ponto de partida. A distância é somente o módulo do vetor de deslocamento da esquiadora a partir do ponto de origem até onde ela pára, e a direção que desejamos saber é aquela resultante do vetor de deslocamento.

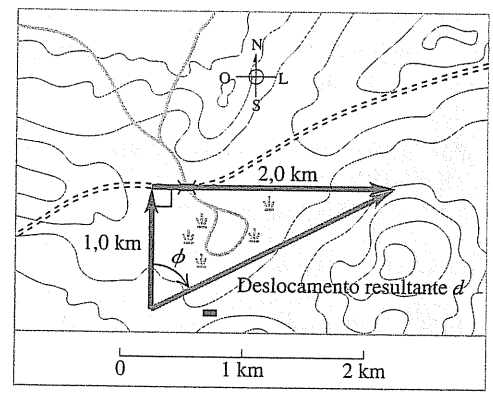


Figura 1.16 O diagrama vetorial, desenhado em escala, para um percurso de esqui.

PREPARAR: na Figura 1.16 mostramos um diagrama em escala dos deslocamentos da esquiadora. Descrevemos a direção do ponto de partida pelo ângulo ϕ (a letra grega fi). Por meio de medidas cuidadosas verificamos que a distância do ponto de partida ao ponto de chegada é aproximadamente igual a 2,2 km e o ângulo ϕ é aproximadamente de 63°. Contudo, podemos *calcular* com mais acurácia o resultado, somando os vetores de deslocamento 1,0 km e 2,0 km.

EXECUTAR: os vetores nesse diagrama formam um triângulo retângulo; a distância do ponto de partida ao ponto de chegada é igual ao comprimento da hipotenusa, que pode ser determinado usando-se o teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{(1{,}0\text{ km})^2 + (2{,}0\text{ km})^2} = 2{,}24\text{ km}$$

O ângulo ϕ pode ser calculado usando-se trigonometria. Para uma revisão, incluímos no Apêndice B um resumo de funções e identidades trigonométricas, bem como outras relações matemáticas úteis. Pela definição de tangente:

$$\text{tg}\,\phi = \frac{\text{lado oposto}}{\text{lado adjacente}} = \frac{2{,}0\text{ km}}{1{,}0\text{ km}}$$

$$\phi = 63{,}4°$$

Podemos descrever a direção como 63,4° do norte para o leste ou 90° − 63,4° = 26,6° do leste para o norte. A escolha é sua!

AVALIAR: é uma boa prática conferir os resultados de um problema de soma vetorial por meio de medidas tomadas em um desenho da situação. Felizmente, as respostas que encontramos a partir do cálculo (2,24 km e ϕ = 63,4°) são bem próximas das obtidas pelas medidas (cerca de 2,2 km e 63°). Se fossem substancialmente diferentes, teríamos que identificar os erros.

Teste sua compreensão da Seção 1.7 Dois vetores de deslocamentos, $\vec{S}$ e $\vec{T}$, possuem módulos S = 3 m e T = 4 m. Qual das seguintes alternativas poderia corresponder ao módulo do vetor da diferença $\vec{S} - \vec{T}$? (Pode haver mais de uma resposta correta.) i) 9 m; ii) 7 m; iii) 5 m; iv) 1 m; v) 0 m; vi) −1 m. ∎

1.8 Componentes de vetores

Na Seção 1.7 somamos vetores mediante um diagrama em escala e usamos as propriedades de um triângulo retângulo. A medida direta feita no diagrama oferece uma acurácia muito pequena, e os cálculos envolvendo um triângulo retângulo só funcionam quando os vetores são ortogonais. Logo, é necessário usar um método simples e geral para a soma vetorial. Este procedimento é o método dos *componentes*.

Para definir os componentes de um vetor $\vec{A}$, começamos com um sistema (cartesiano) de coordenadas (Figura 1.17a). A seguir desenhamos o vetor considerado com o início em O a origem do sistema de coordenadas. Podemos representar qualquer vetor no plano xy como a soma de um vetor paralelo ao eixo Ox com um vetor paralelo ao eixo Oy. Esses vetores são designados por $\vec{A}_x$ e $\vec{A}_y$ na Figura 1.17a; eles se denominam **vetores componentes** do vetor $\vec{A}$, e sua soma vetorial é igual a $\vec{A}$. Simbolicamente,

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \tag{1.5}$$

Por definição, a direção de cada componente do vetor coincide com a direção do eixo das coordenadas x. Logo, precisamos de apenas um número para descrever cada componente. Quando o componente $\vec{A}_x$ aponta no sentido positivo do eixo x, definimos o número A_x como igual ao módulo de $\vec{A}_x$. Quando o componente $\vec{A}_x$ aponta no sentido negativo do eixo Ox, definimos o número A_x como um valor negativo daquele módulo, lembrando que o módulo de um vetor nunca pode ser negativo. Definimos o número A_y de modo análogo. Os números A_x e A_y são os **componentes** do vetor $\vec{A}$ (Figura 1.17b).

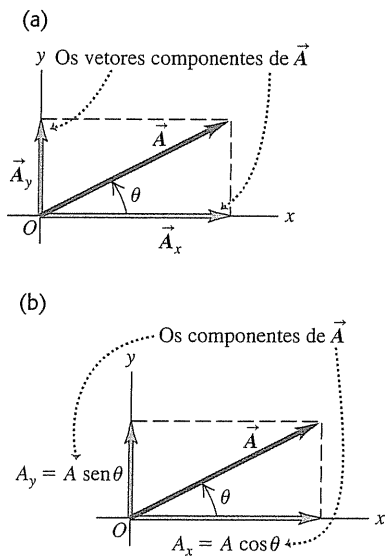


Figura 1.17 Representamos um vetor $\vec{A}$ em termos de (a) os vetores dos componentes $\vec{A}_x$ e $\vec{A}_y$ e (b) os componentes A_x e A_y (que neste caso são positivos).

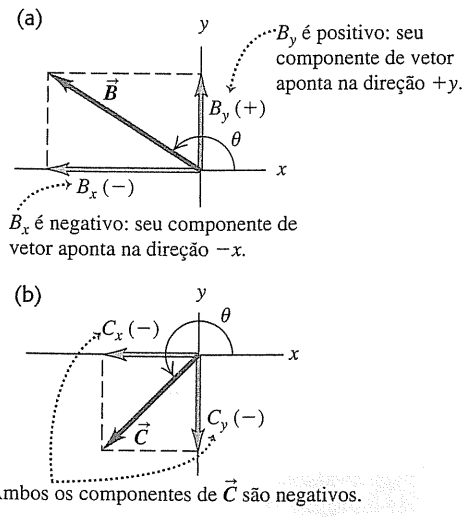


Figura 1.18 Os componentes de um vetor podem ser números positivos ou negativos.

ATENÇÃO Componentes não são vetores Os componentes A_x e A_y de um vetor $\vec{A}$ são apenas números; eles *não* são vetores. Por esta razão estamos usando tipos itálicos para designá-los, em vez de usar um tipo itálico negrito com uma flecha sobre a letra, notação reservada para vetores.

Podemos calcular os componentes do vetor $\vec{A}$ conhecendo seu módulo A e sua direção. Descrevemos a direção de um vetor mediante o ângulo que ele faz com alguma direção de referência. Na Figura 1.17b essa referência é o eixo positivo Ox, e o ângulo entre este vetor $\vec{A}$ e o sentido positivo do eixo Ox é θ (a letra grega teta). Imagine que o vetor $\vec{A}$ estivesse sobre o eixo $+Ox$ e que você o girasse de um ângulo θ no sentido indicado pela flecha na Figura 1.17b. Quando esta rotação ocorre no sentido do eixo $+Ox$ para $+Oy$, dizemos que o ângulo θ é *positivo*; quando esta rotação ocorre no sentido do eixo $+Ox$ para $-Oy$, dizemos que o ângulo θ é *negativo*. Logo, o eixo $+Oy$ faz um ângulo de 90°, o eixo $-Ox$ faz um ângulo de 180° e o eixo $-Oy$ faz um ângulo de 270° (ou −90°). Medindo-se deste modo, e usando-se as definições das funções trigonométricas:

$$\frac{A_x}{A} = \cos\theta \quad \text{e} \quad \frac{A_y}{A} = \operatorname{sen}\theta$$
$$A_x = A\cos\theta \quad \text{e} \quad A_y = A\operatorname{sen}\theta \tag{1.6}$$

(medindo-se θ supondo uma rotação no sentido do eixo $+Ox$ para $+Oy$)

Na Figura 1.17b, o componente A_x é positivo porque seu sentido coincide com o sentido do eixo $+Ox$, e A_y é positivo porque seu sentido coincide com o sentido do eixo $+Oy$. Isto está de acordo com as Equações (1.6); o ângulo θ está no primeiro quadrante (entre 0° e 90°) e tanto o seno como o co-seno são positivos neste quadrante. Porém, na Figura 1.18a, o componente B_x é negativo;

seu sentido é oposto ao do eixo $+Ox$. Novamente, isto está de acordo com as Equações (1.6); o co-seno de um ângulo no segundo quadrante é negativo. O componente B_y é positivo (sen θ é positivo no segundo quadrante). Na Figura 1.18b os componentes C_x e C_y são negativos (sen θ e cos θ são negativos no terceiro quadrante).

ATENÇÃO Relação do módulo e direção de um vetor com seus componentes As Equações (1.6) são válidas *somente* quando o ângulo θ for medido considerando-se uma rotação no sentido $+Ox$, como mencionado acima. Se o ângulo do vetor for medido considerando-se outra direção de referência ou outro sentido de rotação, as relações são diferentes. Tome cuidado! O Exemplo 1.6 ilustra essa questão.

Exemplo 1.6

CÁLCULO DOS COMPONENTES

a) Quais são os componentes x e y do vetor $\vec{D}$ na Figura 1.19a? O seu módulo é $D = 3{,}0$ m e o ângulo $\alpha = 45°$. b) Quais são os componentes x e y do vetor $\vec{E}$ na Figura 1.19b? Seu módulo é $E = 4{,}50$ m e o ângulo $\beta = 37{,}0°$.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: em cada caso, temos o módulo e a direção de um vetor e devemos determinar seus componentes.

PREPARAR: aparentemente tudo que necessitamos são as Equações (1.6). Entretanto, devemos ser cautelosos porque os ângulos na Figura 1.19 *não* são medidos no sentido do eixo $+Ox$ para o eixo $+Oy$.

EXECUTAR: a) O ângulo entre o vetor $\vec{D}$ e o sentido positivo do eixo Ox é α (a letra grega alfa), mas este ângulo é medido no sentido *negativo* do eixo Oy. Logo, o ângulo que devemos usar nas Equações (1.6) é $\theta = -\alpha = -45°$. Encontramos

$$D_x = D\cos\theta = (3{,}0\text{ m})(\cos(-45°)) = +2{,}1\text{ m}$$
$$D_y = D\,\text{sen}\,\theta = (3{,}0\text{ m})(\text{sen}(-45°)) = -2{,}1\text{ m}$$

O vetor possui componente positivo x e componente negativo y, como indicado na figura. Caso você substituísse $\theta = +45°$ nas Equações (1.6), você acharia um sentido errado para D_y.

b) Na Figura 1.19b, o eixo Ox não é horizontal e o eixo Oy não é vertical. Em geral, podemos supor *qualquer* orientação para o eixo Ox e para o eixo Oy, visto que esses eixos são ortogonais. (No capítulo 5, usaremos eixos semelhantes a esses para estudar o movimento de objetos ao longo de um plano inclinado; um dos eixos será orientado ao longo do plano e o outro eixo será ortogonal ao plano.)

Aqui, o ângulo β (a letra grega beta) é considerado o ângulo entre o vetor $\vec{E}$ e o sentido positivo do eixo Oy, e *não* o do eixo Ox, de modo que *não* podemos usar este ângulo nas Equações (1.6). Note que $\vec{E}$ representa a hipotenusa de um triângulo retângulo; e os outros dois lados deste triângulo são E_x e E_y, os componentes x e y de $\vec{E}$. O seno de β é igual ao lado oposto (o módulo de E_x) dividido pela hipotenusa (o módulo E), e o coseno de β é igual ao lado adjacente (o módulo de E_y) dividido pela hipotenusa (novamente o módulo E). Ambos os componentes de $\vec{E}$ são positivos; logo.

$$E_x = E\,\text{sen}\,\beta = (4{,}50\text{ m})(\text{sen}\,37{,}0°) = +2{,}71\text{ m}$$
$$E_y = E\cos\beta = (4{,}50\text{ m})(\cos 37{,}0°) = +3{,}59\text{ m}$$

Caso você tivesse usado as Equações (1.6) diretamente e escrevesse $E_x = E\cos 37{,}0°$ e $E_y = E\,\text{sen}\,37{,}0°$, suas respostas para E_x e E_y seriam invertidas!

Caso insista em usar as Equações (1.6), você deve inicialmente achar o ângulo entre o vetor $\vec{E}$ e o sentido positivo do eixo Ox, considerando-se a rotação no sentido positivo do eixo Oy; ou seja, $\theta = 90{,}0° - \beta = 90{,}0° - 37{,}0° = 53{,}0°$. A seguir, $E_x = E\cos\theta$ e $E_y = E\,\text{sen}\,\theta$. Você pode substituir os valores de E e de θ nas Equações (1.6) e mostrar que os resultados para E_x e E_y são iguais aos obtidos anteriormente.

AVALIAR: observe que as respostas do item (b) possuem três algarismos significativos, porém as respostas do item (a) possuem somente dois. Você é capaz de explicar por quê?

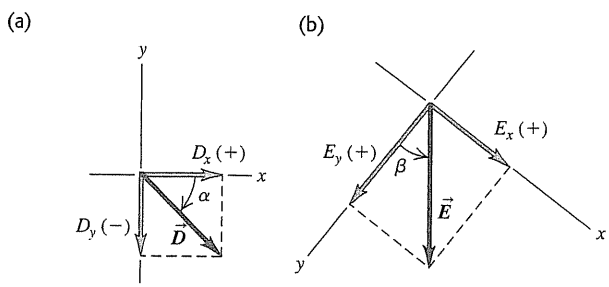


Figura 1.19 Cálculo dos componentes x e y de vetores.

Cálculos de vetor com o uso de componentes

O uso de componentes facilita bastante a execução de vários cálculos envolvendo vetores. Vamos analisar três exemplos importantes.

1. Como determinar o módulo e a direção de um vetor a partir de seus componentes. Podemos descrever completamente um vetor especificando seu módulo, sua direção e seu sentido ou, então, mediante os seus componentes x e y. As Equações (1.6) mostram como calcular os componentes conhecendo-se o módulo, a direção e o sentido. Podemos também inverter o processo: calcular o módulo, a direção e o sentido conhecendo os componentes. Aplicando o teorema de Pitágoras na Figura 1.17b, obtemos o módulo do vetor $\vec{A}$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad (1.7)$$

onde devemos considerar somente o valor positivo da raiz quadrada. A Equação (1.7) é válida para qualquer escolha do eixo Ox e do eixo Oy, desde que eles sejam mutuamente ortogonais. A direção e o sentido decorrem da definição da tangente de um ângulo. Medindo-se θ supondo uma rotação no sentido do eixo $+Ox$ para o eixo $+Oy$ (como na Figura 1.17b), temos:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{A_y}{A_x} \quad \text{e} \quad \theta = \text{arctg}\frac{A_y}{A_x} \qquad (1.8)$$

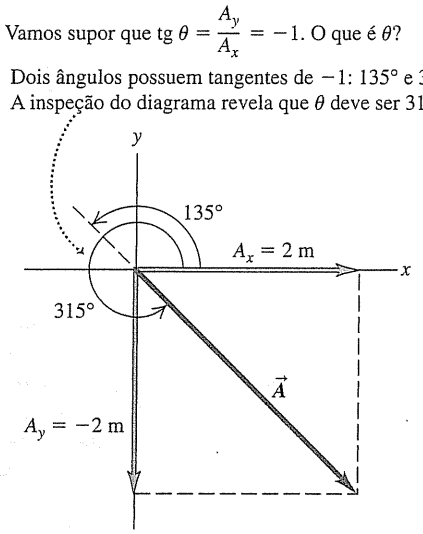


Figura 1.20 A ilustração de um vetor revela os sinais de seus componentes *x* e *y*.

Sempre usaremos o símbolo arctg para a função inversa da função tangente. A notação tg^{-1} também é muito usada, e a sua calculadora poderá possuir uma tecla INV ou 2ND junto com a mesma tecla TAN.

ATENÇÃO Como determinar a direção de um vetor a partir de seus componentes Existe uma pequena complicação para o uso das Equações (1.8) para calcular θ. Suponha que $A_x = 2$ m e que $A_y = -2$ m, como ilustra a Figura 1.20; então tg $\theta = -1$. Porém, existem dois ângulos que possuem tangente igual a −1: 135° e 315° (ou −45°). Em geral, dois ângulos que diferem de 180° possuem a mesma tangente. Para decidir qual é o valor correto, devemos pesquisar cada componente. Como A_x é positivo e A_y é negativo, o ângulo deve estar no quarto quadrante; logo, $\theta = 315°$ (ou −45°) é o valor correto. Muitas calculadoras de bolso fornecem arctg (−1) = −45°. Nesse caso, isso é correto; mas caso você tenha $A_x = -2$ m e $A_y = 2$ m, então o ângulo correto é 135°. Analogamente, supondo A_x e A_y negativos, a tangente é positiva e o ângulo está no terceiro quadrante. Você deve *sempre* desenhar um esquema como na Figura 1.20, para verificar qual é o valor correto.

2. Como multiplicar uma grandeza vetorial por uma grandeza escalar. Se multiplicarmos um vetor $\vec{A}$ por uma grandeza escalar c, cada componente do produto de $\vec{D} = c\vec{A}$ é igual ao produto de c e o componente correspondente de $\vec{A}$:

$$D_x = cA_x \qquad D_y = cA_y$$
$$(\text{componentes de } \vec{D} = c\vec{A}) \tag{1.9}$$

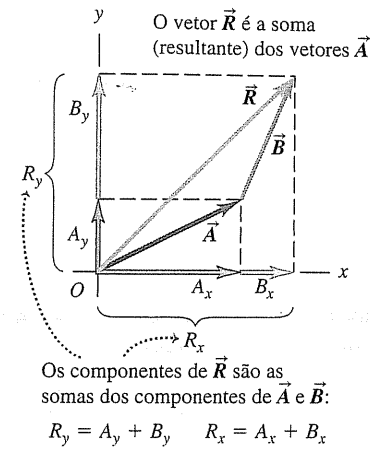


Figura 1.21 Como determinar a soma (resultante) dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ usando componentes.

Por exemplo, segundo a Equação (1.9), cada componente do vetor $2\vec{A}$ é duas vezes maior que o componente correspondente do vetor $\vec{A}$, portanto $2\vec{A}$ está na mesma direção de $\vec{A}$, mas possui o dobro do módulo. Cada componente do vetor $-3\vec{A}$ é três vezes maior que o componente correspondente do vetor $\vec{A}$, mas possui o sinal oposto, portanto $-3\vec{A}$ está na direção oposta de $\vec{A}$ e possui três vezes o módulo. Logo, a Equação (1.9) está de acordo com a nossa discussão na Seção 1.7 relativa à multiplicação de um vetor por um escalar (Figura 1.15).

3. Como usar componentes para calcular uma soma vetorial (resultante) de dois vetores. A Figura 1.21 mostra dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e a resultante $\vec{R}$, juntamente com os componentes x e y destes três vetores. Podemos ver do diagrama que o componente R_x da resultante é simplesmente a soma $(A_x + B_x)$ dos componentes x dos vetores que estão sendo somados. O mesmo resultado é válido para os componentes y. Em símbolos,

$$R_x = A_x + B_x \qquad R_y = A_y + B_y$$
$$(\text{componentes de } \vec{R} = \vec{A} + \vec{B}) \tag{1.10}$$

A Figura 1.21 mostra este resultado para o caso no qual todos os componentes A_x, A_y, B_x e B_y são positivos. Você pode desenhar outros diagramas para verificar que as Equações (1.10) são válidas para *qualquer* sinal dos componentes dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

Se conhecermos os componentes de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, talvez pelo uso da Equação (1.6), poderemos calcular os componentes da resultante $\vec{R}$. Se desejarmos especificar o módulo, a direção e o sentido de $\vec{R}$, poderemos usar as equações (1.7) e (1.8), substituindo os diversos valores de A pelos respectivos valores de R.

Esse procedimento da soma de dois vetores pode ser facilmente estendido para a soma de qualquer número de

vetores. Seja $\vec{R}$ a soma dos vetores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E}, \ldots$ Então, os componentes de $\vec{R}$ são

$$R_x = A_x + B_x + C_x + D_x + E_x + \cdots$$
$$R_y = A_y + B_y + C_y + D_y + E_y + \cdots \qquad (1.11)$$

Mencionamos somente vetores situados no plano xy, porém o método dos componentes é válido para qualquer vetor no espaço. Introduzimos um eixo Oz ortogonal ao plano xy; sendo assim, em geral, todo vetor $\vec{A}$ em três dimensões possui os componentes A_x, A_y e A_z.

O módulo A é dado por:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (1.12)$$

Novamente, devemos considerar somente o valor positivo da raiz quadrada. As Equações (1.11) para os componentes de $\vec{R}$ devem possuir mais um componente:

$$R_z = A_z + B_z + C_z + D_z + E_z + \cdots$$

Finalmente, embora nossa discussão sobre soma vetorial esteve centrada somente na soma de *deslocamentos*, o método se aplica a qualquer tipo de grandeza vetorial. Estudaremos o conceito de força no Capítulo 4 e mostraremos que para a soma de forças usaremos as mesmas regras adotadas para os deslocamentos. Outras grandezas vetoriais surgirão em capítulos futuros.

Estratégia para a solução de problemas 1.3

SOMA VETORIAL

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* defina a variável alvo. Pode ser o módulo da soma vetorial, a direção ou ambos.

PREPARAR *o problema:* desenhe inicialmente o sistema de coordenadas e todos os vetores que deverão ser somados. Coloque o início do primeiro vetor na origem do sistema de coordenadas, o início do segundo vetor na extremidade do primeiro vetor e assim sucessivamente. Desenhe a resultante $\vec{R}$ ligando o início do primeiro vetor com a extremidade do último. Use o desenho para estimar a grosso modo o módulo e a direção de $\vec{R}$; você usará essas aproximações mais adiante, para conferir seus cálculos.

EXECUTAR *a solução* desta forma:

1. Ache os componentes x e y de cada vetor e registre os cálculos numa tabela. Caso o vetor seja descrito pelo módulo A e pelo ângulo θ, supondo uma rotação no sentido do eixo $+Ox$ para o eixo $+Oy$, então os componentes são dados por:

$$A_x = A\cos\theta \qquad A_y = A\,\text{sen}\,\theta$$

Alguns componentes podem ser números positivos ou negativos, dependendo da orientação dos respectivos vetores (isto é, do quadrante onde se encontra o ângulo θ). Você poderá usar a seguinte tabela para conferir os sinais:

Quadrante	I	II	III	IV
A_x	+	−	−	+
A_y	+	+	−	−

Caso os ângulos sejam medidos usando-se outras convenções, talvez usando direções distintas, converta-os supondo uma rotação a partir do sentido positivo do eixo Ox, conforme descrito anteriormente. Tome bastante cuidado com os sinais.

2. Para achar o componente R_x da soma vetorial, some os seus componentes algebricamente, levando em conta os respectivos sinais. Proceda de modo análogo para achar o componente R_y da soma vetorial.
3. A seguir, o módulo R da soma vetorial e a direção θ do vetor resultante são dados por

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad \theta = \text{arctg}\,\frac{R_y}{R_x}$$

AVALIAR *sua resposta*: confira seus resultados de módulo e direção da soma vetorial, comparando-os com as aproximações que fez a partir do seu desenho. Lembre que o módulo R é *sempre* positivo e o ângulo θ é medido com o sentido positivo do eixo Ox. O valor do ângulo θ obtido com uma calculadora pode estar correto ou então defasado de 180°. Você poderá decidir pelo seu desenho.

Se o seu cálculo diferir totalmente das suas aproximações, verifique se sua calculadora está programada no modo 'radiano' ou 'graus'. Se estiver no modo 'radiano', inserir ângulos em graus produzirá respostas sem sentido.

Exemplo 1.7

SOMA DE VETORES USANDO COMPONENTES

As três finalistas de uma competição encontram-se no centro de um campo plano e grande. Cada uma das competidoras recebe uma barra de um metro, uma bússola, uma calculadora, uma pá e (em ordens diferentes para cada competidora) os três deslocamentos seguintes:

72,4 m, 32,0° do norte para o leste
57,3 m, 36,0° do oeste para o sul
17,8 m do norte para o sul

Os três deslocamentos levam a um ponto onde as chaves de um Porsche novo foram enterradas. Duas competidoras começam imediatamente a fazer medidas, porém a vencedora foi a que realizou *cálculos* antes das medidas. O que ela calculou?

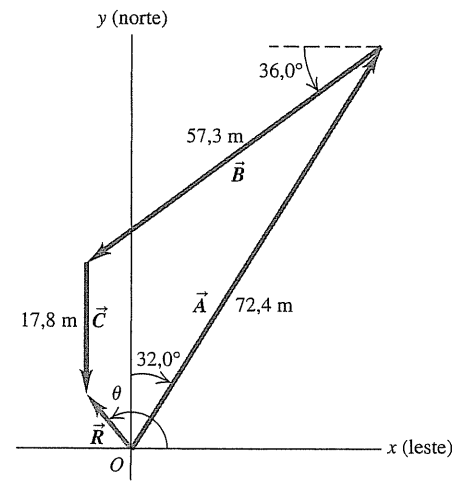


Figura 1.22 Três deslocamentos sucessivos $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ e a resultante (ou soma vetorial) $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o objetivo é determinar a soma (resultante) dos três deslocamentos, portanto trata-se de um problema de soma vetorial.

PREPARAR: a situação é descrita na Figura 1.22. Escolhemos o eixo $+Ox$ orientado de oeste para leste e o eixo $+Oy$ orientado do sul para o norte, a escolha usual adotada em mapas. Seja $\vec{A}$ o primeiro deslocamento, $\vec{B}$ o segundo e $\vec{C}$ o terceiro. Pelo diagrama podemos estimar que o vetor $\vec{R}$ possui módulo aproximadamente igual a 10 m e está situado a 40° do norte para o oeste.

EXECUTAR: os ângulos dos vetores, medidos considerando-se uma rotação do eixo $+Ox$ para o eixo $+Oy$, são $(90,0° - 32,0°) = 58,0°$, $(180,0° + 36,0°) = 216,0°$ e 270,0°. Devemos achar cada um dos seus componentes. Por causa da escolha dos eixos, podemos usar as Equações (1.6), de modo que os componentes de $\vec{A}$ são:

$$A_x = A\cos\theta_A = (72,4\text{ m})(\cos 58,0°) = 38,37\text{ m}$$
$$A_y = A\,\text{sen}\,\theta_A = (72,4\text{ m})(\text{sen } 58,0°) = 61,40\text{ m}$$

Note que usamos um algarismo significativo a mais para os componentes calculados; devemos aguardar o resultado final para arredondar o número correto de algarismos significativos. A tabela a seguir mostra os componentes dos deslocamentos, a soma dos componentes e os demais cálculos. Convém que você agrupe os componentes de modo sistemático, análogo a este.

Distância	Ângulo	Componente x	Componente y
A = 72,4 m	58,0°	38,37 m	61,40 m
B = 57,3 m	216,0°	−46,36 m	−33,68 m
C = 17,8 m	270,0°	0,00 m	−17,80 m
		$R_x = -7,99$ m	$R_y = 9,92$ m

$$R = \sqrt{(-7,99\text{ m})^2 + (9,92\text{ m})^2} = 12,7\text{ m}$$
$$\theta = \text{arctg}\frac{9,92\text{ m}}{-7,99\text{ m}} = 129° = 39°\text{ do norte para o oeste}$$

As perdedoras mediram três ângulos e três distâncias totalizando 147,5 m, medidas de um em um metro. A vencedora mediu apenas um ângulo e uma distância muito menor.

AVALIAR: nossos cálculos para R e θ não diferem muito das nossas estimativas de 10 m e 40° do norte para o oeste! Note que $\theta = -51°$ ou 51° do leste para o sul também satisfaz a equação envolvendo θ. Contudo, visto que a vencedora fez um desenho dos vetores deslocamentos (Figura 1.22), ela notou que somente $\theta = 129°$ é a solução correta para o ângulo.

Exemplo 1.8

SOMA DE VETORES EM TRÊS DIMENSÕES Depois da decolagem, um avião viaja 10,4 km do leste para oeste, 8,7 km do sul para norte e 2,1 km de baixo para cima. Qual é a sua distância do ponto de partida?

SOLUÇÃO

Escolhemos o eixo $+Ox$ orientado de oeste para leste, o eixo $+Oy$ orientado do sul para o norte e o eixo Oz orientado de baixo para cima. Então, $A_x = -10,4$ km, $A_y = 8,7$ km e $A_z = 2,1$ km; a Equação (1.12) fornece:

$$A = \sqrt{(-10,4\text{ km})^2 + (8,7\text{ km})^2 + (2,1\text{ km})^2} = 13,7\text{ km}$$

Teste sua compreensão da Seção 1.8 Considere dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ no plano xy. (a) É possível $\vec{A}$ possuir o mesmo módulo de $\vec{B}$, mas diferentes componentes? (b) É possível $\vec{A}$ possuir os mesmos componentes de $\vec{B}$, mas diferir no módulo? ■

1.9 Vetores unitários

Um **vetor unitário** é aquele que possui módulo igual a 1, não possuindo nenhuma unidade. Seu único objetivo é *apontar*, ou seja, descrever uma direção e um sentido no espaço. Os vetores unitários fornecem uma notação conveniente para cálculos que envolvem os componentes de vetores. Sempre usaremos acento circunflexo ou 'chapéu' (^) para simbolizar um vetor unitário e distingui-lo de um vetor comum cujo módulo pode ser igual a 1 ou diferente de 1.

Em um sistema de coordenadas xy, definimos um vetor unitário $\hat{\imath}$ apontando no sentido positivo do eixo Ox e um vetor unitário $\hat{\jmath}$ apontando no sentido positivo do eixo Oy (Figura 1.23a). Podemos então expressar as relações entre os vetores componentes e os componentes, descritos no início da Seção 1.8, como segue:

$$\vec{A}_x = A_x\hat{\imath}$$
$$\vec{A}_y = A_y\hat{\jmath} \qquad (1.13)$$

Analogamente, podemos expressar um vetor $\vec{A}$ em termos dos seus componentes como

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} \qquad (1.14)$$

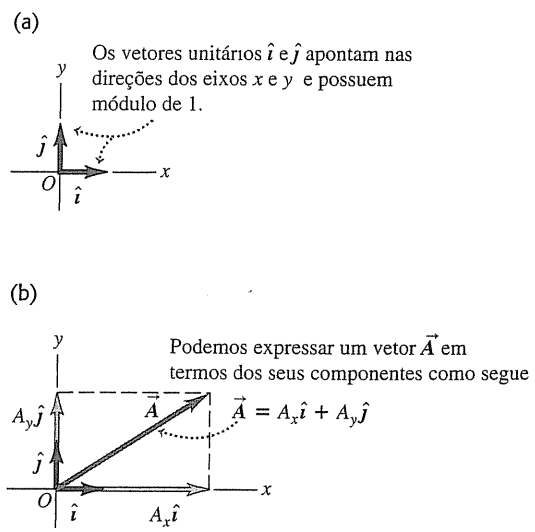


Figura 1.23 (a) Os vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$. (b) Podemos expressar um vetor $\vec{A}$ em termos dos seus componentes.

As equações (1.13) e (1.14) são equações vetoriais; cada termo, tal qual $A_x\hat{\imath}$, é uma grandeza vetorial (Figura 1.23b). O sinal de igual e o sinal de soma estão em negrito para designar soma vetorial e igualdade entre vetores.

Quando dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são representados em termos dos seus componentes, podemos escrever a soma vetorial $\vec{R}$ usando vetores unitários do seguinte modo:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}\\ \vec{B} &= B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath}\\ \vec{R} &= \vec{A} + \vec{B}\\ &= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}) + (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath})\\ &= (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath}\\ &= R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath}\end{aligned} \qquad (1.15)$$

A Equação (1.15) reproduz o conteúdo das Equações (1.10) sob forma de uma única equação vetorial, em vez de usar duas equações para os componentes dos vetores.

Quando os vetores não estão contidos no plano xy, torna-se necessário usar um terceiro componente. Introduzimos um terceiro vetor unitário $\hat{k}$ apontando no sentido positivo do eixo Oz (Figura 1.24). Neste caso, a forma geral das equações (1.14) e (1.15) é

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\\ \vec{B} &= B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}\end{aligned} \qquad (1.16)$$

$$\begin{aligned}\vec{R} &= (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k}\\ &= R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} + R_z\hat{k}\end{aligned} \qquad (1.17)$$

Exemplo 1.9

USO DE VETORES UNITÁRIOS Dados os dois deslocamentos

$\vec{D} = (6\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k})$ m e $\vec{E} = (4\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 8\hat{k})$ m

encontre o módulo de deslocamento $2\vec{D} - \vec{E}$.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: devemos multiplicar o vetor $\vec{D}$ por 2 (uma grandeza escalar) e subtrair o vetor $\vec{E}$ do resultado.

PREPARAR: segundo a Equação (1.9), para multiplicar $\vec{D}$ por 2, devemos simplesmente multiplicar cada um dos seus componentes por 2. Por sua vez, a Equação (1.17) demonstra que, para subtrair $\vec{E}$ de $2\vec{D}$, simplesmente subtraímos os componentes de $\vec{E}$ dos componentes de $2\vec{D}$. (Recapitulando a Seção 1.7, subtrair um vetor é o mesmo que somar o negativo desse vetor.) Em cada uma dessas operações matemáticas, os vetores unitários $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, e $\hat{k}$ permanecem inalterados.

EXECUTAR: seja $\vec{F} = 2\vec{D} - \vec{E}$, temos

$$\begin{aligned}\vec{F} &= 2(6\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k})\text{ m} - (4\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 8\hat{k})\text{ m}\\ &= [(12 - 4)\hat{\imath} + (6 + 5)\hat{\jmath} + (-2 - 8)\hat{k}]\text{ m}\\ &= (8\hat{\imath} + 11\hat{\jmath} - 10\hat{k})\text{ m}\end{aligned}$$

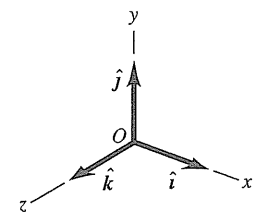


Figura 1.24 Os vetores unitários $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, e $\hat{k}$.

As unidades de $\vec{D}$, $\vec{E}$, e $\vec{F}$ são dadas em metros, de modo que os componentes desses vetores também são em metros. Pela Equação (1.12):

$$\begin{aligned}F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\\ &= \sqrt{(8\text{ m})^2 + (11\text{ m})^2 + (-10\text{ m})^2} = 17\text{ m}\end{aligned}$$

AVALIAR: os vetores unitários tornam a soma e a subtração vetoriais tão simples quanto somar e subtrair números comuns. Mesmo assim, é recomendável conferir se não há erros aritméticos simples.

Teste sua compreensão da Seção 1.9 Disponha os seguintes vetores ordenando-os de acordo com seus módulos, a partir do maior módulo.

(i) $\vec{A} = (3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 2\hat{k})$ m;

(ii) $\vec{B} = (-3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 2\hat{k})$ m;

(iii) $\vec{C} = (3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 2\hat{k})$ m;

(iv) $\vec{D} = (3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 2\hat{k})$ m. ∎

1.10 Produtos de vetores

Vimos como a soma vetorial evoluiu naturalmente a partir da combinação de deslocamentos, e mais adiante usaremos a soma vetorial para calcular outras grandezas vetoriais. Podemos também escrever concisamente muitas outras relações entre grandezas físicas usando *produtos* de vetores. Os vetores não são números comuns, de modo que o produto comum não é diretamente aplicado para vetores. Vamos definir dois tipos de produtos de vetores. O primeiro, denominado *produto escalar*, fornece um resultado que é uma grandeza escalar. O segundo, denominado *produto vetorial*, fornece outra grandeza vetorial.

Produto escalar

O **produto escalar** de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é designado por $\vec{A} \cdot \vec{B}$. Devido a essa notação, o produto escalar também é chamado de **produto com ponto interno**. Embora $\vec{A}$ e $\vec{B}$ sejam vetores, a grandeza $\vec{A} \cdot \vec{B}$ é escalar.

Para definir o produto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, desenhamos o início destes vetores no mesmo ponto (Figura 1.25a). O ângulo entre os vetores é designado por ϕ (a letra grega fi) e está sempre compreendido entre 0° e 180°. A Figura 1.25b mostra a projeção do vetor $\vec{B}$ na direção de $\vec{A}$; esta projeção é o componente de $\vec{B}$ na direção de $\vec{A}$ e é dada por $B\cos\phi$. (Podemos obter componentes

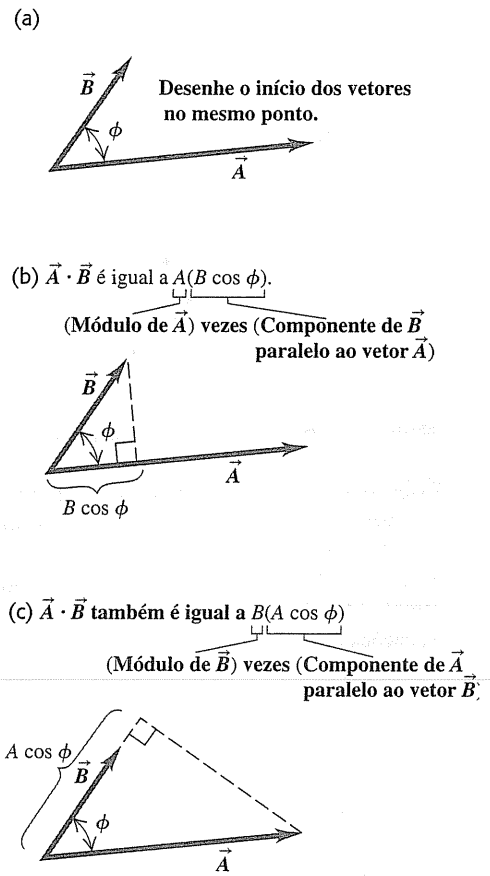


Figura 1.25 Cálculo do produto escalar de dois vetores $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \phi$.

ao longo de qualquer direção conveniente e não somente nas direções dos eixos Ox e Oy.) Definimos $\vec{A} \cdot \vec{B}$ como sendo o módulo de $\vec{A}$ multiplicado pelo componente de $\vec{B}$ paralelo ao vetor $\vec{A}$. Ou seja

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos\phi = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\phi$$

(definição do produto escalar) (1.18)

Como alternativa, podemos definir $\vec{A} \cdot \vec{B}$ como o produto do módulo de $\vec{B}$ multiplicado pelo componente de $\vec{A}$ na direção do vetor $\vec{B}$, como indicado na Figura 1.25c. Logo, $\vec{A} \cdot \vec{B} = B(A \cos \phi) = AB \cos \phi$, que é o mesmo que a Equação (1.18).

O produto escalar é uma grandeza escalar, não um vetor, possuindo um valor positivo, negativo ou zero. Quando ϕ está compreendido entre 0° e 90°, $\cos \phi > 0$ e o produto escalar é positivo (Figura 1.26a). Quando ϕ está compreendido entre 90° e 180°, de modo que $\cos \phi < 0$, o componente de $\vec{B}$ paralelo ao vetor $\vec{A}$ é negativo, e $\vec{A} \cdot \vec{B}$ é negativo (Figura 1.26b). Finalmente, quando $\phi = 90°$, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ (Figura 1.26c). *O produto escalar de dois vetores ortogonais é sempre igual a zero.* Para dois vetores arbitrários, $\vec{A}$ e $\vec{B}$, $AB\cos\phi = AB \cos\phi$.

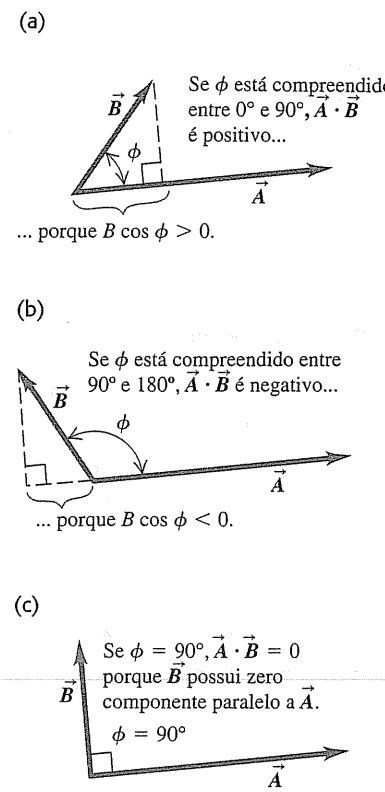


Figura 1.26 O produto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \phi$ pode ser positivo, negativo ou zero, dependendo do ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

Isto significa que $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$. O produto escalar obedece à lei comutativa da multiplicação; a ordem dos dois vetores não importa.

Usaremos o produto escalar no Capítulo 6 para definir o trabalho realizado por uma força. Quando uma força constante $\vec{F}$ é aplicada a um corpo que sofre um deslocamento $\vec{s}$, o trabalho W (uma grandeza escalar) realizado por esta força é dado por

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

O trabalho realizado por uma força é positivo quando o ângulo entre $\vec{F}$ e $\vec{s}$ estiver compreendido entre 0° e 90°, negativo se este ângulo estiver compreendido entre 90° e 180° e igual a zero quando $\vec{F}$ e $\vec{s}$ forem dois vetores ortogonais. (Este é outro exemplo de um termo que possui significado especial na física; na linguagem cotidiana, um 'trabalho' não pode ser nem negativo nem positivo.) Em capítulos posteriores usaremos o produto escalar para diversas finalidades, desde o cálculo de um potencial elétrico até a determinação dos efeitos produzidos pela variação de campos magnéticos em circuitos elétricos.

Cálculo do produto escalar usando componentes

Podemos calcular o produto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ diretamente quando os componentes x, y e z dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$

forem conhecidos. Para ver como isto é feito, vamos calcular o produto escalar dos vetores unitários. Isto é fácil, visto que $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, e $\hat{k}$ possuem todos módulo 1 e são ortogonais uns aos outros.

Usando a Equação (1.18), encontramos:

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{k}\cdot\hat{k} = (1)(1)\cos 0° = 1$$
$$\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\imath}\cdot\hat{k} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = (1)(1)\cos 90° = 0 \qquad (1.19)$$

Agora expressamos $\vec{A}$ e $\vec{B}$ em termos dos respectivos componentes, expandimos o produto e usamos os produtos entre os vetores unitários:

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k})\\ &= A_x\hat{\imath}\cdot B_x\hat{\imath} + A_x\hat{\imath}\cdot B_y\hat{\jmath} + A_x\hat{\imath}\cdot B_z\hat{k}\\ &\quad + A_y\hat{\jmath}\cdot B_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}\cdot B_y\hat{\jmath} + A_y\hat{\jmath}\cdot B_z\hat{k}\\ &\quad + A_z\hat{k}\cdot B_x\hat{\imath} + A_z\hat{k}\cdot B_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\cdot B_z\hat{k} \qquad (1.20)\\ &= A_xB_x\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} + A_xB_y\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} + A_xB_z\hat{\imath}\cdot\hat{k}\\ &\quad + A_yB_x\hat{\jmath}\cdot\hat{\imath} + A_yB_y\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} + A_yB_z\hat{\jmath}\cdot\hat{k}\\ &\quad + A_zB_x\hat{k}\cdot\hat{\imath} + A_zB_y\hat{k}\cdot\hat{\jmath} + A_zB_z\hat{k}\cdot\hat{k}\end{aligned}$$

Pelas Equações (1.19) vemos que seis destes nove componentes se anulam, e os três que sobram fornecem simplesmente:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (1.21)$$

(produto escalar em termos dos componentes)

Logo, o *produto escalar entre dois vetores é igual à soma dos produtos escalares entre seus respectivos componentes.*

O produto escalar fornece um método direto para o cálculo do ângulo ϕ entre dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ cujos componentes sejam conhecidos. Nesse caso, a Equação (1.21) deve ser usada para o cálculo do produto escalar de $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Pela Equação (1.18) o produto escalar é igual a $AB\cos\phi$. Os módulos A e B podem ser encontrados a partir dos componentes conforme a Equação (1.12), obtendo-se $\cos\phi$, portanto, o ângulo ϕ pode ser calculado (veja o Exemplo 1.11).

Exemplo 1.10

CÁLCULO DO PRODUTO ESCALAR Ache o produto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ dos vetores indicados na Figura 1.27. Os módulos dos vetores são $A = 4{,}0$ e $B = 5{,}0$.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: temos os módulos e as direções de $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e desejamos calcular seu produto escalar.

PREPARAR: existem dois métodos para calcular o produto escalar: o primeiro usa os módulos dos vetores e os ângulos entre eles, usando a Equação (1.18); o segundo usa os componentes dos vetores utilizando a Equação (1.21).

EXECUTAR: usando o primeiro método, o ângulo entre os vetores é $\phi = 130{,}0° - 53{,}0° = 77{,}0°$, então:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi = (4{,}0)(5{,}0)\cos 77{,}0° = 4{,}50$$

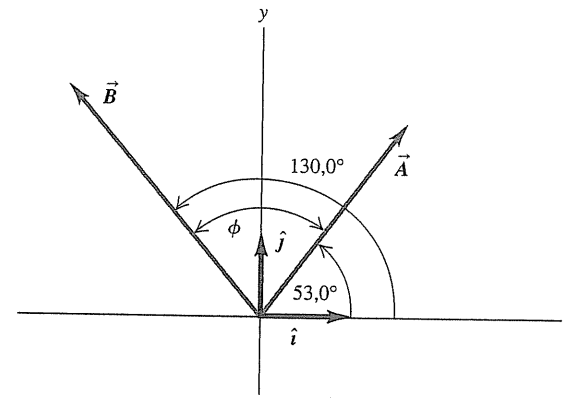


Figura 1.27 Dois vetores em duas dimensões.

Esse é positivo porque o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$ está entre 0° e 90°.

Para usar o segundo método, precisamos primeiro encontrar os componentes dos dois vetores. Como os ângulos de $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são dados em relação ao eixo $+Ox$, e esses ângulos são medidos no sentido do eixo $+Ox$ para o eixo $+Oy$, podemos usar as Equações (1.6):

$$A_x = (4{,}0)\cos 53{,}0° = 2{,}407$$
$$A_y = (4{,}0)\,\text{sen}\,53{,}0° = 3{,}195$$
$$A_z = 0$$
$$B_x = (5{,}0)\cos 130{,}0° = -3{,}214$$
$$B_y = (5{,}0)\,\text{sen}\,130{,}0° = 3{,}830$$
$$B_z = 0$$

Os componentes z dos vetores são nulos porque estão contidos no plano xy. Como no Exemplo 1.7, estamos considerando algarismos demais nos cálculos dos componentes; esses valores serão arredondados no final para o número correto. Pela Equação (1.21) o produto escalar é:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$
$$= (2{,}407)(-3{,}214) + (3{,}195)(3{,}830) + (0)(0) = 4{,}50$$

AVALIAR: como era de se esperar, por meio dos dois métodos encontramos o mesmo resultado para o cálculo do produto escalar.

Exemplo 1.11

CÁLCULO DE ÂNGULOS USANDO O PRODUTO ESCALAR Ache o ângulo entre os dois vetores.

$$\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \hat{k} \quad \text{e} \quad \vec{B} = -4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$$

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: temos os componentes x, y e z de dois vetores. Nossa variável-alvo é o ângulo ϕ entre eles.

PREPARAR: os vetores são indicados na Figura 1.28. O produto escalar entre os dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ está relacionado ao ângulo ϕ entre eles e aos módulos de A e B pela Equação (1.18). O produto escalar também está relacionado aos componentes dos dois vetores pela Equação (1.21). Se nos são dados os componentes dos vetores (como no caso deste exemplo), primeiro determinamos o produto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ e os valores de A e B para depois determinarmos a variável-alvo ϕ.

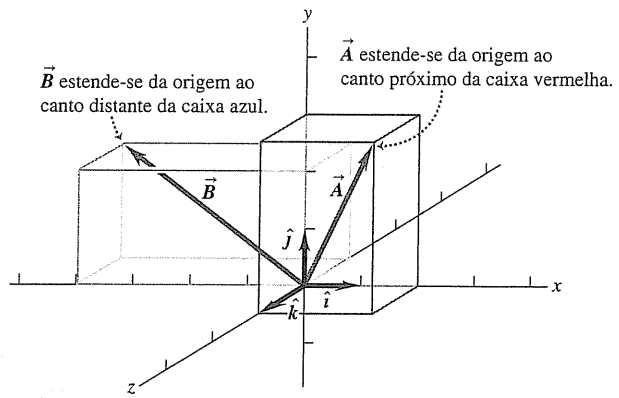


Figura 1.28 Dois vetores em três dimensões.

EXECUTAR: o produto escalar pode ser calculado pela Equação (1.8) ou pela Equação (1.21). Igualando estas duas relações e reagrupando, achamos

$$\cos\phi = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}$$

Esta fórmula pode ser usada para determinar o ângulo entre dois vetores *arbitrários* $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Nesse exemplo, os componentes de $\vec{A}$ são $A_x = 2$, $A_y = 3$ e $A_z = 1$, e os componentes de $\vec{B}$ são $B_x = -4$, $B_y = 2$ e $B_z = -1$. Logo,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$
$$= (2)(-4) + (3)(2) + (1)(-1) = -3$$
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$
$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(-4^2) + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$$
$$\cos\phi = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB} = \frac{-3}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = -0{,}175$$
$$\phi = 100°$$

AVALIAR: para conferir este resultado, note que o produto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ é negativo. Isto significa que o ângulo ϕ está compreendido entre 90° e 180° (Figura 1.26), o que está de acordo com nossa resposta.

Produto vetorial

O **produto vetorial** de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, também chamado de **cross product,** é designado por $\vec{A}\times\vec{B}$. Como sugere o nome, o produto vetorial é um vetor em si. Usaremos este produto no Capítulo 10 para descrever o torque e o momento angular; nos capítulos 27 e 28 seu uso também será freqüente para descrever campos e forças magnéticas.

Para definir o produto vetorial $\vec{A}\times\vec{B}$ de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ desenhamos os dois vetores com início em um mesmo ponto (Figura 1.29a). Assim, os dois vetores ficam situados em um mesmo plano. Definimos o produto vetorial como uma grandeza vetorial ortogonal a este plano (isto é, ortogonal tanto ao vetor $\vec{A}$ quanto ao vetor $\vec{B}$) e possuindo módulo dado por AB sen ϕ. Isto é, se $\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$, então:

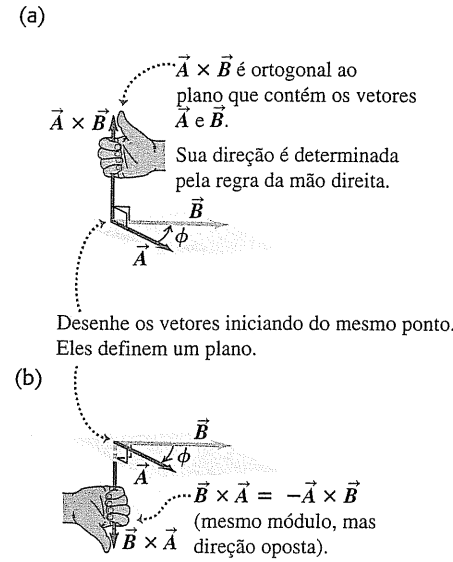


Figura 1.29 a) O produto vetorial $\vec{A}\times\vec{B}$ determinado pela regra da mão direita. b) $\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B}$; o produto vetorial de dois vetores é anticomutativo.

$$C = AB \text{ sen } \phi \qquad (1.22)$$

(módulo do produto vetorial de $\vec{A}$ e $\vec{B}$).

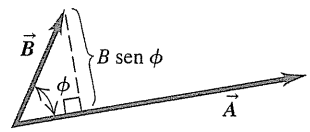
Medimos o ângulo ϕ entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$ como sendo o menor ângulo entre estes dois vetores, ou seja, o ângulo ϕ está compreendido entre 0° e 180°. Logo, sen $\phi \geq 0$ e C na Equação (1.22) nunca possui valor negativo, como deve ser para o módulo de um vetor. Note também que quando $\vec{A}$ e $\vec{B}$ forem dois vetores paralelos ou antiparalelos, $\phi = 0°$ ou 180° e $C = 0$. Ou seja, *o produto vetorial de dois vetores paralelos ou antiparalelos é sempre igual a zero.* Em particular, *o produto vetorial de qualquer vetor com ele mesmo é igual a zero.*

ATENÇÃO Produto vetorial *versus* produto escalar Recomenda-se cautela para distinguir entre a expressão AB sen f para o módulo do produto vetorial $\vec{A}\times\vec{B}$ e a expressão semelhante AB cos f para o produto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$. Para avaliar o contraste entre essas duas expressões, imagine que o ângulo entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ possa variar enquanto seus módulos permanecem constantes. Quando $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são paralelos, o módulo do produto vetorial é igual a zero e o produto escalar será máximo. Quando $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares, o módulo do produto vetorial será máximo e o produto escalar será zero.

Existem sempre *dois* sentidos para uma direção ortogonal a um plano, um para cima e outro para baixo do plano. Escolhemos qual desses sentidos nos dá a direção de $\vec{A}\times\vec{B}$ do seguinte modo: imagine que o vetor $\vec{A}$ sofra uma rotação em torno de um eixo ortogonal ao plano até que ele se superponha com o vetor $\vec{B}$, escolhendo nesta

(a)

a) B sen ϕ é o componente de $\vec{B}$ em uma direção perpendicular à direção de $\vec{A}$, e o módulo de $\vec{A} \times \vec{B}$ é igual ao produto do módulo de $\vec{A}$ por este componente.



(b)

b) O módulo de $\vec{A} \times \vec{B}$ é também igual ao módulo de $\vec{B}$ multiplicado pelo componente de $\vec{A}$ em uma direção perpendicular à direção de $\vec{B}$.

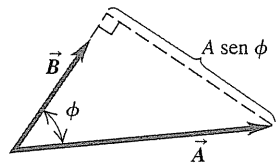


Figura 1.30 Cálculo do módulo AB sen ϕ do produto vetorial de dois vetores, $\vec{A} \times \vec{B}$.

rotação o menor ângulo entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Faça uma rotação dos quatro dedos da mão direita neste sentido; o dedo polegar apontará no sentido de $\vec{A} \times \vec{B}$. A **regra da mão direita** é indicada na Figura 1.29a.

Analogamente, determinamos o sentido de $\vec{B} \times \vec{A}$ fazendo uma rotação de $\vec{B}$ para $\vec{A}$ como indicado na Figura 1.29b. O resultado é um vetor *oposto* ao vetor $\vec{A} \times \vec{B}$. O produto vetorial *não* é comutativo! De fato, para dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \tag{1.23}$$

Assim como fizemos para o caso do produto escalar, podemos fazer uma interpretação geométrica para o módulo do produto vetorial. Na Figura 1.30a, B sen ϕ é o componente do vetor $\vec{B}$ em uma direção *ortogonal* à direção do vetor $\vec{A}$. Pela Equação (1.22) vemos que o módulo de $\vec{A} \times \vec{B}$ é igual ao módulo de $\vec{A}$ multiplicado pelo componente de $\vec{B}$ em uma direção ortogonal à direção de $\vec{A}$. A Figura 1.30b mostra que o módulo de $\vec{A} \times \vec{B}$ é também igual ao módulo de $\vec{B}$ multiplicado pelo componente de $\vec{A}$ em uma direção ortogonal à direção de $\vec{B}$. Note que a Figura 1.30 mostra um caso no qual ϕ está compreendido entre 0° e 90°; você deve desenhar um diagrama semelhante para ϕ compreendido entre 90° e 180° para verificar que a mesma interpretação geométrica vale para o módulo de $\vec{A} \times \vec{B}$.

Cálculo do produto vetorial usando componentes

Quando conhecemos os componentes de $\vec{A}$ e $\vec{B}$, podemos calcular os componentes do produto vetorial mediante procedimento análogo ao adotado para o produto escalar. Inicialmente, convém fazer uma tabela de multiplicação vetorial para os vetores unitários $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$, todos os três perpendiculares entre si (Figura 1.31a). O produto vetorial de um vetor com ele mesmo é igual a zero, logo

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = \mathbf{0}$$

O zero em negrito é para lembrar que este produto fornece um *vetor* nulo, isto é, aquele cujos componentes são nulos e não possui direção definida. Usando as equações (1.22) e (1.23) e a regra da mão direita, encontramos:

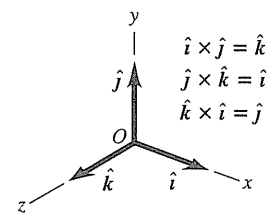
$$\begin{aligned} \hat{\imath} \times \hat{\jmath} &= -\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = \hat{k} \\ \hat{\jmath} \times \hat{k} &= -\hat{k} \times \hat{\jmath} = \hat{\imath} \\ \hat{k} \times \hat{\imath} &= -\hat{\imath} \times \hat{k} = \hat{\jmath} \end{aligned} \tag{1.24}$$

Pode-se verificar essas equações pela Figura 1.31a.

A seguir escrevemos $\vec{A}$ e $\vec{B}$ em termos dos respectivos componentes e vetores unitários e desenvolvemos a expressão para o produto vetorial:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}) \\ &= A_x\hat{\imath} \times B_x\hat{\imath} + A_x\hat{\imath} \times B_y\hat{\jmath} + A_x\hat{\imath} \times B_z\hat{k} \\ &\quad + A_y\hat{\jmath} \times B_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} \times B_y\hat{\jmath} + A_y\hat{\jmath} \times B_z\hat{k} \\ &\quad + A_z\hat{k} \times B_x\hat{\imath} + A_z\hat{k} \times B_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \times B_z\hat{k} \end{aligned} \tag{1.25}$$

(a) Um sistema de coordenadas com orientação da mão direita.



(b) Um sistema de coordenadas com orientação da mão esquerda: não será usado.

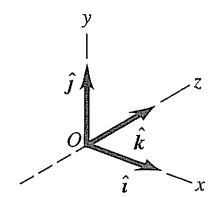


Figura 1.31 (a) Sempre usaremos um sistema de coordenadas com orientação da mão direita, como este. (b) Nunca usaremos um sistema de coordenadas com orientação da mão esquerda (para o qual $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -\hat{k}$, e assim por diante).

Os termos individuais também podem ser reescritos na Equação (1.25) como $A_x\hat{\imath} \times B_y\hat{\jmath} = (A_xB_y)\hat{\imath} \times \hat{\jmath}$, e assim por diante. Usando a tabela de multiplicação para vetores unitários nas Equações (1.24) e então reagrupando os termos, encontramos:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k} \tag{1.26}$$

Portanto, os componentes de $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ são:

$$C_x = A_yB_z - A_zB_y \quad C_y = A_zB_x - A_xB_z \quad C_z = A_xB_y - A_yB_x \quad \text{(componentes de } \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}\text{)} \tag{1.27}$$

O produto vetorial também pode ser expresso sob forma de um determinante do seguinte modo

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Se você não está familiarizado com determinantes, não se preocupe com esta fórmula.

Se for invertido o sentido do eixo Oz do sistema de coordenadas da Figura 1.31a, obteremos o sistema de coordenadas da Figura 1.31b. Logo, como você pode verificar, a definição do produto vetorial fornece $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -\hat{k}$ em vez de $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$. De fato, todos os produtos vetoriais dos vetores unitários $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ teriam sinais opostos aos indicados nas Equações (1.24). Vemos que existem dois tipos de sistemas de coordenadas, diferenciados pelos sinais dos produtos vetoriais dos respectivos vetores unitários. Um sistema de coordenadas para o qual $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$, como o indicado na Figura 1.31a, denomina-se **sistema da mão direita**. A prática normal aconselha a usar *somente* sistemas com orientação da mão direita. Neste livro seguiremos esta prática.

Exemplo 1.12

CÁLCULO DE UM PRODUTO VETORIAL

O vetor $\vec{A}$ possui módulo igual a 6 unidades e está contido no eixo $+Ox$. O vetor $\vec{B}$ possui módulo igual a 4 unidades e está contido no plano xy, formando um ângulo de 30° com o eixo $+Ox$ (Figura 1.32). Calcule o produto vetorial $\vec{A} \times \vec{B}$.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: temos o módulo e a direção para cada vetor e queremos determinar seu produto vetorial.

PREPARAR: podemos calcular o produto vetorial por dois métodos diferentes. No primeiro, usamos a Equação (1.22) para determinar o módulo de $\vec{A} \times \vec{B}$ e a seguir aplicamos a regra da mão direita para achar o sentido do produto vetorial. No segundo, por meio da Equação (1.27), usamos os componentes de $\vec{A}$ e $\vec{B}$ para determinar os componentes do produto vetorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$.

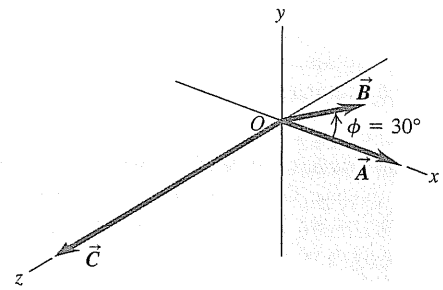


Figura 1.32 Os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e seu produto vetorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. O vetor $\vec{B}$ está contido no plano xy.

EXECUTAR: usando o primeiro método, pela Equação (1.22), o módulo do produto vetorial é dado por:

$$AB\,\text{sen}\,\phi = (6)(4)(\text{sen}\,30°) = 12$$

De acordo com a regra da mão direita, o sentido de $\vec{A} \times \vec{B}$ é o mesmo sentido do eixo $+Oz$, de modo que $\vec{A} \times \vec{B} = 12\hat{k}$. Para usar o segundo método, primeiramente escrevemos os componentes de $\vec{A}$ e de $\vec{B}$:

$$A_x = 6 \qquad A_y = 0 \qquad A_z = 0$$

$$B_x = 4\cos 30° = 2\sqrt{3} \qquad B_y = 4\,\text{sen}\,30° = 2 \qquad B_z = 0$$

Definindo $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, pelas Equações (1.27), obtemos

$$C_x = (0)(0) - (0)(2) = 0$$

$$C_y = (0)(2\sqrt{3}) - (6)(0) = 0$$

$$C_z = (6)(2) - (0)(2\sqrt{3}) = 12$$

O produto vetorial $\vec{C}$ possui apenas o componente z, e ele está sobre o eixo $+Oz$. O seu módulo é igual ao obtido usando-se o primeiro método, como era esperado.

AVALIAR: para este exemplo, o primeiro método é mais direto porque conhecemos os módulos de cada vetor e o ângulo entre eles; além disto, ambos os vetores estão contidos em um dos planos do sistema de coordenadas. Contudo, em muitos casos você terá de achar o produto vetorial de dois vetores que não estão orientados de modo tão conveniente ou para os quais são dados apenas os componentes. Em tais casos, o segundo método, usando componentes, é o mais direto.

Teste sua compreensão da Seção 1.10 O vetor $\vec{A}$ possui módulo 2 e o vetor $\vec{B}$ possui módulo 3. O ângulo ϕ entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$ está compreendido entre 0°, 90° e 180°. Para cada uma dessas situações, defina o valor de ϕ. (Em cada situação, pode haver mais de uma resposta correta.) a) $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$; b) $\vec{A} \times \vec{B} = 0$; c) $\vec{A} \cdot \vec{B} = 6$; d) $\vec{A} \cdot \vec{B} = -6$; e) (módulo de $\vec{A} \times \vec{B} = 6$. ■

Resumo

Grandezas físicas e unidades: as grandezas físicas fundamentais da mecânica são massa, comprimento e tempo. As unidades SI correspondentes são quilograma, metro e segundo. As unidades derivadas para outras grandezas físicas são produtos ou quocientes dessas unidades básicas. As equações devem ser dimensionalmente coerentes; dois termos só podem ser somados quando possuírem as mesmas unidades (exemplos 1.1 e 1.2)

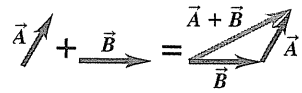
Algarismos significativos: a acurácia de uma medida pode ser indicada pelo número de algarismos significativos ou pela incerteza estipulada. O resultado da multiplicação ou da divisão em geral não possui número de algarismos significativos maior do que o número de algarismos significativos dos dados fornecidos. Quando dispomos apenas de estimativas grosseiras, normalmente podemos fazer estimativas úteis de ordem de grandeza (exemplos 1.3 e 1.4)

Algarismos significativos destacados

$$\pi = \frac{C}{2r} = \frac{0{,}424\ \text{m}}{2(0{,}06750\ \text{m})} = 3{,}14$$

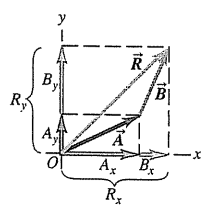
$$123{,}62 + 8{,}9 = 132{,}5$$

Grandezas escalares, grandezas vetoriais e soma vetorial: as grandezas escalares são números que devem ser combinados, usando-se as regras normais da aritmética. As grandezas vetoriais possuem módulo, direção e sentido e devem ser combinadas usando-se as regras da soma vetorial. O negativo de um vetor possui o mesmo módulo, mas aponta na direção oposta. (Exemplo 1.5)



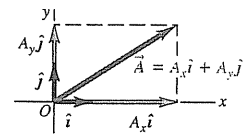
Componentes vetoriais e soma vetorial: a soma vetorial pode ser feita usando-se os componentes dos vetores. O componente x- de $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ é a soma dos componentes x- de $\vec{A}$ e $\vec{B}$, o mesmo ocorrendo com os componentes de y- e z-. (exemplos 1.6–1.8)

$$\begin{aligned} R_x &= A_x + B_x \\ R_y &= A_y + B_y \\ R_z &= A_z + B_z \end{aligned} \qquad (1.10)$$



Vetores unitários: os vetores unitários descrevem direções no espaço. Um vetor unitário possui módulo igual a 1, sem unidades. Especialmente úteis são os vetores unitários $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$, alinhados aos eixos x, y e z, de um sistema retangular de coordenadas. (Exemplo 1.9)

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \qquad (1.16)$$

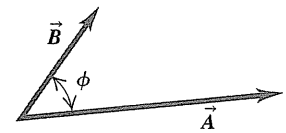


Produto escalar: o produto escalar $C = \vec{A} \cdot \vec{B}$ de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é uma grandeza escalar. Pode ser expressa em termos dos módulos de $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e o ângulo ϕ, entre os dois vetores ou em termos dos componentes dos dois vetores. O produto escalar é comutativo; $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$. O produto escalar de dois vetores ortogonais é igual a zero. (exemplos 1.10 e 1.11)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\phi = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\phi \qquad (1.18)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (1.21)$$

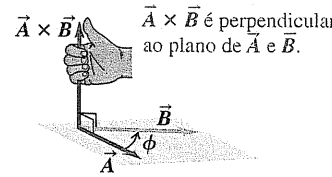
Produto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \phi$



Produto vetorial: o produto vetorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é um outro vetor $\vec{C}$. O módulo de $\vec{A} \times \vec{B}$ depende dos módulos de $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e o ângulo ϕ entre os dois vetores. A direção do produto vetorial é perpendicular ao plano dos dois vetores que estão sendo multiplicados, conforme a regra da mão direita. Os componentes de $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ podem ser expressos em termos dos componentes de $\vec{A}$ e de $\vec{B}$. O produto vetorial não é comutativo; $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$. O produto vetorial de dois vetores paralelos ou antiparalelos é igual a zero. (Exemplo 1.12)

$$C = AB\,\text{sen}\,\phi \qquad (1.22)$$

$$\begin{aligned} C_x &= A_yB_z - A_zB_y \\ C_y &= A_zB_x - A_xB_z \\ C_z &= A_xB_y - A_yB_x \end{aligned} \qquad (1.27)$$



(Módulo de $\vec{A} \times \vec{B}$) $= AB$ sen ϕ

Principais termos

Acurácia, 8
Algarismos significativos, 8
Componentes, 15
Definição operacional, 4
Deslocamento, 11
Coerência dimensional, 6
Erro fracionário, 8
Erro percentual, 8
Estimativas de ordem de grandeza, 10
Grandeza escalar, 10

Grandeza física, 4
Grandeza vetorial, 10
Incerteza (erro), 8
Limite de validade, 2
Metro, 5
Modelo, 3
Módulo, 10
Negativo de um vetor, 12
Notação científica (potências de 10), 9
Partícula, 3
Precisão, 9
Prefixo, 5
Produto escalar (dot), 20
Produto vetorial (cross), 23
Quilograma, 5
Regra da mão direita, 24
Segundo, 4
Sistema Internacional (SI), 4
Sistema orientado pela mão direita, 25
Soma vetorial (resultante), 12
Unidade, 4
Variável-alvo, 3
Vetor unitário, 19
Vetores antiparalelos, 12
Vetores componentes, 15
Vetores paralelos, 11

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Tome o eixo $+Ox$ apontado para leste e o eixo $+Oy$ apontado para norte. O que estamos tentando determinar é o componente y do vetor de velocidade, que possui módulo $v = 20$ km/h e está a um ângulo $= 53°$, medido do eixo $+x$ para o eixo $+Oy$. Pela Equação (1.6) temos $v_y = v$ sen ϕ = (20 km/h) sen 53° = 16 km/h. Logo, o furacão move-se a 16 km rumo ao norte em 1 hora.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

1.5 Resposta: ii) Densidade = (1,80 kg)/(6,0 × 10^{-4} m^3) = 3,0 × 10^3 kg/m^3. Quando multiplicamos ou dividimos, o número com menos algarismos significativos controla o número de algarismos significativos no resultado.

1.6 Resposta: A resposta depende da forma como muitos alunos são matriculados no seu campus.

1.7 Respostas: para ii), iii) e iv). O vetor $-\vec{T}$ possui o mesmo módulo do vetor $\vec{T}$, portanto $\vec{S} - \vec{T} = \vec{S} + (-\vec{T})$ é a *soma* de um vetor de módulo 3 m e outro de módulo 4 m. Essa soma resulta no módulo 7 m, se $\vec{S}$ e $-\vec{T}$ forem paralelos, e no módulo 1 m, se $\vec{S}$ e $-\vec{T}$ forem antiparalelos. O módulo de $\vec{S} - \vec{T}$ é 5 m, se $\vec{S}$ and $-\vec{T}$ forem ortogonais, de modo que os vetores $\vec{S}$, $\vec{T}$, e $\vec{S} - \vec{T}$ formem um triângulo retângulo 3-4-5. A resposta para i) é impossível porque o módulo da soma de dois vetores não pode ser maior do que a soma dos módulos; a resposta para v) é impossível porque a soma de dois vetores poderá ser nula, somente se os dois vetores forem antiparalelos e tiverem o mesmo módulo; e a resposta para vi) é impossível porque o módulo de um vetor não pode ser negativo.

1.8 Respostas: a) sim, b) não. Os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ podem ter o mesmo módulo, mas diferentes componentes se apontam para diferentes direções. Se, contudo, possuírem os mesmos componentes, serão o mesmo vetor $(\vec{A} = \vec{B})$ e, portanto, deverão ter o mesmo módulo

1.9 Resposta: todos possuem o mesmo módulo. Os quatro vetores, $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, e $\vec{D}$ apontam para direções opostas, mas todos possuem o mesmo módulo:

$$A = B = C = D = \sqrt{(\pm 3\text{ m})^2 + (\pm 5\text{ m})^2 + (\pm 2\text{ m})^2}$$

$$= \sqrt{9\text{ m}^2 + 25\text{ m}^2 + 4\text{ m}^2} = \sqrt{38\text{ m}^2} = 6{,}2\text{ m}$$

1.10 Respostas: a) $\phi = 90°$, b) $\phi = 0°$ ou $\phi = 180°$, c) $\phi = 0°$, d) $\phi = 180°$, e) $\phi = 90°$. a) O produto escalar é zero, somente se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ forem perpendiculares b) O produto vetorial é zero, somente se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ forem paralelos ou antiparalelos. c) O produto escalar é igual ao produto dos módulos $(\vec{A} \cdot \vec{B} = AB)$ somente se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ forem paralelos. d) O produto escalar é igual à negativa do produto dos módulos $(\vec{A} \cdot \vec{B} = -AB)$, somente se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ forem antiparalelos. e) O módulo do produto vetorial é igual ao produto dos módulos [(módulo de $\vec{A} \times \vec{B}$) = AB], somente se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ forem ortogonais.

Questões para discussão

Q1.1 Quantas experiências corretas são necessárias para se refutar uma teoria? Quantas são necessárias para se aprovar uma teoria? Explique.

Q1.2 Um manual para guias descreve a inclinação de um atalho para a escalada de uma montanha como sendo de 120 metros por quilômetro. Como isto pode ser expresso sem o uso de unidades?

Q1.3 Alguém pede para você calcular a tangente de 5,0 metros. Isto é possível? Explique.

Q1.4 Um empreiteiro que está construindo uma ponte afirma que precisou injetar 250 metros de concreto. O que ele quer dizer com isto?

Q1.5 Qual é sua altura em centímetros? Qual é seu peso em newtons?

Q1.6 Suponha que um Instituto Brasileiro de Ciências mantenha diversas cópias acuradas do padrão internacional de quilograma. Mesmo após a limpeza minuciosa, estes padrões nacionais de quilograma ganham massa a uma taxa média de aproximadamente 1 $\mu g/y$ (1 y = 1 ano) quando comparado com o padrão internacional de quilograma a cada dez anos. Esta variação aparente é importante? Explique.

Q1.7 Além de um pêndulo ou de um relógio de césio, que fenômeno físico poderia ser usado para definir um padrão de tempo?

Q1.8 Descreva como você poderia estimar a espessura de uma folha de papel usando uma régua.

Q1.9 O número π = 3,14159... é um número sem dimensão, visto que ele pode ser calculado como a razão entre dois comprimentos. Descreva mais duas ou três grandezas físicas e geométricas que não possuem dimensões.

Q1.10 Quais são as unidades de volume? Suponha que um aluno diga que o volume de um cilindro com altura h e raio r seja dado por $\pi r^3 h$. Explique por que isto está errado.

Q1.11 Em uma competição com três arqueiros, cada arqueiro atira quatro flechas. As quatro flechas de José ficam a 10 cm para a direita, 10 cm para a esquerda, 10 cm abaixo e 10 cm acima do

alvo. Todas as quatro flechas de Mário ficam dentro de um círculo de 1 cm de raio com centro a 20 cm do alvo central. Todas as quatro flechas de Flávio ficam a 1 cm do alvo central. O juiz afirma que um dos arqueiros é acurado, mas não é preciso, outro é simultaneamente preciso e acurado, e o outro é preciso, mas não é acurado. Identifique os arqueiros que se enquadram nessas descrições e explique seu raciocínio.

Q1.12 Uma ciclovia circular possui raio igual a 500 m. Qual a distância percorrida por uma ciclista que percorre a pista da extremidade norte para a extremidade sul? E quando ela faz uma volta completa no círculo? Explique.

Q1.13 Dois vetores cujos comprimentos sejam diferentes podem possuir uma soma vetorial igual a zero? Qual a restrição para os comprimentos a fim de que eles possuam uma soma vetorial igual a zero? Explique.

Q1.14 Algumas vezes falamos de 'um sentido para o tempo' que evolui do passado para o futuro. Isto significa que o tempo é uma grandeza vetorial? Explique seu raciocínio.

Q1.15 Os controladores de tráfego aéreo fornecem instruções para os pilotos informando em que direção e sentido eles devem voar. Estas instruções são chamadas de 'vetores'. Se estas forem as únicas informações dadas aos pilotos, o nome de 'vetor' está sendo ou não usado corretamente? Explique por que sim ou por que não.

Q1.16 Você pode achar uma grandeza vetorial que possua módulo igual a zero, tendo, porém, componentes diferentes de zero? Explique. É possível o módulo de um vetor ser menor que o módulo de qualquer de seus componentes? Explique.

Q1.17 a) Faz sentido afirmar que um vetor é *negativo*? Por quê? b) Faz sentido afirmar que um vetor é o negativo de outro? Por quê? Esta sua resposta contradiz o que afirmou na parte a)?

Q1.18 Se $\vec{C}$ é a soma vetorial de $\vec{A}$ e $\vec{B}$, $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, o que deve ser verdadeiro, se $C = A + B$? O que deve ser verdadeiro, se $C = 0$?

Q1.19 Se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são vetores diferentes de zero, é possível que $\vec{A} \cdot \vec{B}$ e $\vec{A} \times \vec{B}$ sejam *ambos* zero? Explique.

Q1.20 O que resulta de $\vec{A} \cdot \vec{A}$, o produto escalar de um vetor consigo mesmo? E no caso de $\vec{A} \times \vec{A}$, o produto vetorial de um vetor consigo mesmo?

Q1.21 Seja $\vec{A}$ um vetor diferente de zero. Por que $\vec{A}/A$ é um vetor unitário e qual sua direção e sentido? Seja ϕ o ângulo entre $\vec{A}$ e o eixo Ox, explique por que $(\vec{A}/A) \cdot \hat{\imath}$ é denominado *co-seno diretor* deste eixo.

Q1.22 Quais das seguintes operações são legítimas:
a) $\vec{A} \cdot (\vec{B} - \vec{C})$; b) $(\vec{A} - \vec{B}) \times \vec{C}$; c) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$;
d) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$; e) $\vec{A} \times (\vec{B} \cdot \vec{C})$? Forneça a razão da resposta em cada caso.

Q1.23 Considere os dois produtos vetoriais repetidos $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ e $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$. Forneça um exemplo para mostrar que estes dois vetores normalmente não possuem nem módulos nem direções iguais. Você pode escolher os três vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$, and $\vec{C}$ de modo que esses dois produtos vetoriais sejam iguais? Em caso afirmativo, forneça um exemplo.

Q1.24 Demonstre que, não importa o que sejam, $\vec{A}$ e $\vec{B}$, $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$. (*Sugestão:* não procure uma prova matemática elaborada. Em vez disso, examine a definição da direção do *cross product*.)

Q1.25 a) Se $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, é necessariamente verdadeiro que $A = 0$ ou $B = 0$? Explique. b) Se $\vec{A} \times \vec{B} = \mathbf{0}$, é necessariamente verdadeiro que $A = 0$ ou $B = 0$? Explique.

Q1.26 Se $\vec{A} = 0$ para um vetor no plano xy, é verdadeiro que $A_x = -A_y$? O que se *pode* afirmar sobre A_x e A_y?

Exercícios

Seção 1.3 Padrões e unidades
Seção 1.4 Coerência e conversão de unidades

1.1 Usando a definição 1 milha = 1,61 km, calcule o número de quilômetros em 5 milhas.

1.2 De acordo com o rótulo de um frasco de molho para salada, o volume do conteúdo é de 0,473 litros (L). Usando a conversão 1 L = 1000 cm^3, expresse este volume em milímetros cúbicos.

1.3 Calcule o tempo em nanossegundos que a luz leva para percorrer uma distância de 1,0 km no vácuo. (Este resultado é uma grandeza importante de se lembrar.)

1.4 A densidade do chumbo é 11,3 g/cm^3. Qual é este valor em quilogramas por metro cúbico?

1.5 O cilindro de um potente automóvel Chevrolet Corvette 1963 possui um volume de 5,3 L. Sabendo que 1 decâmetro (dam) é igual a 10 m, expresse este volume em decâmetros cúbicos.

1.6 Um campo quadrado que mede 100,0 m por 100,0 m possui uma área de 1,0 hectare. Um acre corresponde a uma área de 4.046,84 m^2. Se um terreno possui uma área de 12,0 acres, qual é a área em hectares?

1.7 Qual será sua idade daqui a 1,0 bilhão de segundos? (Considere um ano de 365 dias.)

1.8 Ao dirigir em um país exótico você vê um aviso de limite máximo de velocidade de 100 mi/h na auto-estrada. Expresse este limite em km/h e em m/s.

1.9 O consumo de gasolina de um carro pequeno é aproximadamente igual a 15,0 km/L. Expresse este consumo em dam/cm^3.

1.10 As seguintes conversões ocorrem com freqüência em Física e são muito úteis. a) Considere 1 mi = 5280 pés e 1 h = 3600 s para converter 60 mph em unidades de pés/s. b) A aceleração de um objeto em queda livre é de 32 $pés/s^2$. Considere 1 pé = 30,48 cm para expressar essa aceleração em unidades de m/s^2. c) A densidade da água é 1,0 g/cm^3. Converta essa densidade em unidades de kg/m^3.

1.11 Neptúnio. No outono de 2002, um grupo de cientistas do Los Alamos National Laboratory determinou que a massa crítica do neptúnio-237 é de aproximadamente 60 kg. A massa crítica de um material passível de desintegração nuclear é a quantidade mínima que deve ser acumulada para se iniciar uma reação em cadeia. Esse elemento possui densidade de 19,5 g/cm^3. Qual seria o raio de uma esfera desse material que possui massa crítica?

Seção 1.5 Incerteza e algarismos significativos

1.12 Um modo útil de saber quantos segundos existem em um ano é dizer que um ano é aproximadamente igual a $\pi \times 10^7$ segundos. Calcule o erro percentual deste valor aproximado. (Em um ano existem 365,24 dias.)

1.13 A Figura 1.7 mostra o resultado de um desastre provocado pelo erro inaceitável na posição final de parada de um trem. a) Suponha que o trem tenha percorrido 890 km de Berlim até Paris e tenha ultrapassado em 10 m o limite final do trilho. Qual o erro percentual na distância total percorrida? b) Seria correto dizer que ele percorreu uma distância total de 890010 m? Explique.

1.14 Usando uma régua de madeira, você mede o comprimento de uma placa metálica retangular e encontra 12 mm. Usando um micrômetro para medir a largura da placa você encontra 5,98 mm. Forneça as respostas dos seguintes itens com o número correto de algarismos significativos. a) Qual a área do retângulo? b) Qual a razão entre a largura do retângulo e o seu comprimento? c) Qual o perímetro do retângulo? d) Qual a diferença entre o comprimento do retângulo e a sua largura? e) Qual a razão entre o comprimento do retângulo e a sua largura?

1.15 Estime o erro percentual ao medir: a) a distância de 75 cm usando uma régua de 1 m; b) a massa de 12 g com uma balança química; c) o intervalo de tempo de 6 min com um cronômetro.

1.16 Uma placa retangular de alumínio possui comprimento de 5,60 ± 0,01 cm e largura de 1,90 ± 0,01 cm. a) Ache a área do retângulo e a incerteza na área. b) Verifique se a incerteza fracionária na área é igual à soma das incertezas fracionárias do comprimento e da largura. (Este resultado é geral; ver o Problema Desafiador 1.98.)

1.17 Um biscoito fino de chocolate possui diâmetro igual a 8,50 ± 0,02 cm e espessura igual a 0,050 ± 0,005 cm. a) Ache o volume e a incerteza no volume. b) Ache a razão entre o diâmetro e a espessura e a incerteza desta razão.

Seção 1.6 Estimativas e ordens de grandeza

1.18 Faça uma estimativa do volume da gasolina consumida no Brasil durante um ano.

1.19 Um homem normal de meia idade vai ao hospital para fazer exames de rotina. A enfermeira anota a quantidade de 200 na sua ficha médica, mas esquece de incluir as unidades. Qual das seguintes grandezas esse número de 200 pode representar? a) a massa dele em quilogramas; b) a altura dele em metros; c) a altura dele em centímetros; d) a altura dele em milímetros; e) a idade dele em meses.

1.20 Quantas laranjas você deve espremer para obter 2 l de suco de laranja?

1.21 Estime a ordem de grandeza do número de palavras deste livro.

1.22 Qual é o volume de ar que uma pessoa respira em toda sua vida? Compare este volume com o volume de um apartamento de dois quartos. (Estime que para cada respiração o volume de ar aspirado é aproximadamente igual a 500 cm^3.)

1.23 Quantas vezes uma pessoa normal pisca os olhos em toda sua vida?

1.24 Quantas vezes o coração de uma pessoa bate em toda sua vida? Quantos litros de sangue ele bombeia neste período? (Estime que em cada batida do coração o volume de sangue bombeado é aproximadamente igual a 50 cm^3.)

1.25 Na ópera de Wagner O anel dos nibelungos, a deusa Freia é resgatada em troca de uma pilha de ouro com largura e altura suficientes para escondê-la. Estime o valor desta pilha de ouro. A densidade do ouro é 19,3 g/cm e seu valor é aproximadamente R$10 por grama (sujeito a variação).

1.26 Você está usando gotas de água para diluir pequenas quantidades de um produto químico no laboratório. Quantas gotas de água há em uma garrafa de 10 l? (*Sugestão:* comece estimando o diâmetro de uma gota de água.)

1.27 Quantas pizzas são consumidas durante um ano acadêmico em sua faculdade?

1.28 Quantas notas de um dólar seriam necessárias para fazer uma pilha de notas com uma altura igual à distância entre a Terra e a Lua? Este total seria maior ou menor do que o valor gasto em um projeto para construir e lançar uma nave até a Lua? (*Sugestão:* comece dobrando uma nota de um dólar para verificar qual espessura perfaz 1,0 mm.)

1.29 Quantas notas de um dólar seriam necessárias para cobrir a área total dos Estados Unidos (incluindo o Alasca e o Havaí)? Quanto isto custaria para cada americano?

Seção 1.7 Vetores e soma vetorial

1.30 Ouvindo o ruído de uma serpente, você faz dois deslocamentos rápidos com módulos de 1,8 m e 2,4 m. Usando diagramas (aproximadamente em escala), mostre como esses deslocamentos deveriam ser efetuados para que a resultante tivesse módulo igual a: a) 4,2 m, b) 0,6 m, c) 3,0 m.

1.31 Um empregado do Correio dirige um caminhão de entrega e faz o trajeto indicado na Figura 1.33. Determine o módulo, a direção e o sentido do deslocamento resultante usando diagramas em escala. (Veja o Exercício 1.38 para usar um método alternativo na solução deste problema.)

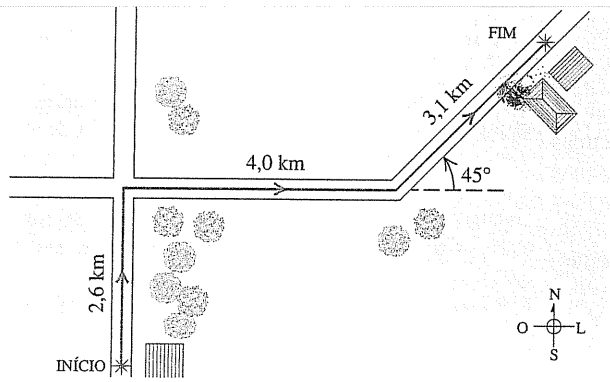


Figura 1.33 Exercícios 1.31 e 1.38.

1.32 Para os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ indicados na Figura 1.34 use diagramas em escala para determinar a) a soma vetorial $\vec{A} + \vec{B}$; b) a diferença vetorial $\vec{A} - \vec{B}$. Use suas respostas para encontrar o módulo e a direção de c) $-\vec{A} - \vec{B}$ e (d) $\vec{B} - \vec{A}$. (Veja também o Exercício 1.39 para usar um método alternativo na solução deste problema.)

1.33 Uma espeleóloga está pesquisando (sugestão: talvez seja mais interessante dizer 'pesquisadora estudando uma caverna') uma caverna. Ela percorre 180 m em linha reta de leste para oeste, depois caminha 210 m em uma direção formando 45° com a direção anterior e em sentido do sul para o leste; a seguir, percorre 280 m a 30° no sentido do norte para o oeste. Depois de um quarto deslocamento não medido, ela retorna ao

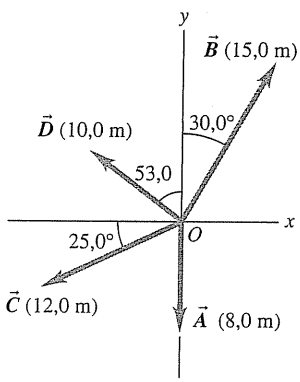


Figura 1.34 Exercícios 1.32, 1.35, 1.39, 1.47, 1.53 e 1.57 e Problema 1.72.

ponto de partida. Use um diagrama em escala para determinar o módulo, a direção e o sentido do quarto deslocamento. (Veja o Problema 1.73 para usar um método alternativo na solução de um problema semelhante a este.)

Seção 1.8 Componentes de vetores

1.34 Use um diagrama em escala para determinar os componentes x e y dos vetores seguintes. Para cada vetor, os números indicam o módulo do vetor e o ângulo que ele faz com o eixo $+Ox$ medido supondo-se uma rotação no sentido do eixo $+Ox$ para o eixo $+Oy$. Ache para a) módulo 9,3 m ângulo 60,0°; b) módulo 22,0 km, ângulo 135°; c) módulo 6,35 cm, ângulo 307°.

1.35 Determine os componentes x e y dos vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, e $\vec{D}$ indicados na Figura 1.34.

1.36 Tomemos o ângulo ϕ como o ângulo que o vetor $\vec{A}$ forma com o eixo $+Ox$, medido no sentido anti-horário desse eixo. Determine o ângulo ϕ para um vetor que possui os seguintes componentes: a) $A_x = 2{,}0$ m, $A_y = -1{,}0$ m; b) $A_x = 2{,}0$ m, $A_y = 1{,}0$ m; c) $A_x = -2{,}0$m, $A_y = 1{,}0$ m; d) $A_x = -2{,}0$m, $A_y = -1{,}0$ m.

1.37 Um foguete aciona dois motores simultaneamente. Um produz um impulso de 725 N diretamente para frente, enquanto o outro fornece um impulso de 513 N a 32,4° acima da direção para frente. Determine o módulo e a direção (em relação à direção para frente) da força resultante que esses motores exercem sobre o foguete.

1.38 Um empregado do serviço postal dirige um caminhão de entrega e faz o trajeto indicado na Figura 1.33. Use o método dos componentes para determinar o módulo, a direção e o sentido do deslocamento resultante. Mediante um diagrama vetorial (aproximadamente em escala), mostre que o deslocamento resultante obtido com este diagrama concorda aproximadamente com o resultado obtido pelo método dos componentes.

1.39 Para os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, indicados na Figura 1.34, use o método dos componentes para determinar o módulo, a direção e o sentido a) da soma vetorial $\vec{A} + \vec{B}$; b) da soma vetorial $\vec{B} + \vec{A}$; c) da diferença vetorial $\vec{A} - \vec{B}$; d) da diferença vetorial $\vec{B} - \vec{A}$.

1.40 Determine o módulo, a direção e o sentido dos vetores representados pelos seguintes pares de componentes: a) $A_x = -8{,}60$ cm, $A_y = 5{,}20$ cm; b) $A_x = -9{,}70$ m, $A_y = -2{,}45$ m; c) $A_x = 7{,}75$ km, $A_y = -2{,}70$ km.

1.41 Um professor de física desorientado dirige 3,25 km do sul para o norte, depois 4,75 km de leste para oeste e a seguir 1,50 km do norte para o sul. Determine o módulo, a direção e o sentido do deslocamento resultante, usando o método dos componentes. Usando diagramas (aproximadamente em escala), mostre que o deslocamento resultante encontrado em seu diagrama concorda aproximadamente com o resultado obtido pelo método dos componentes.

1.42 O vetor $\vec{A}$ possui componentes $A_x = 1{,}30$ cm, $A_y = 2{,}25$ cm; o vetor B possui componentes $B_x = 4{,}10$ cm, $B_y = -3{,}75$ cm.

Ache a) os componentes da soma vetorial $\vec{A} + \vec{B}$; b) o módulo e a direção de $\vec{A} + \vec{B}$; c) os componentes da diferença vetorial $\vec{B} - \vec{A}$; d) o módulo e a direção de $\vec{B} - \vec{A}$.

1.43 O vetor $\vec{A}$ possui comprimento igual a 2,80 cm e está no primeiro quadrante a 60,0° acima do eixo Ox. O vetor $\vec{B}$ possui comprimento igual a 1,90 cm e está no quarto quadrante a 60,0° abaixo do eixo Ox (Figura 1.35). Use componentes para encontrar o módulo e a direção de a) $\vec{A} + \vec{B}$; b) $\vec{A} - \vec{B}$; c) $\vec{B} - \vec{A}$; Em cada caso faça um diagrama da soma ou da diferença e mostre que os resultados concordam aproximadamente com as respostas numéricas obtidas.

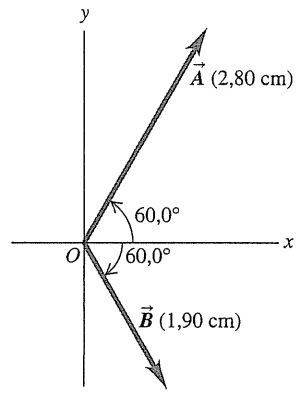


Figura 1.35 Exercícios 1.43 e 1.59.

1.44 Um rio corre do sul para o norte a 5,0 km/h. Nesse rio, um barco segue na direção leste para oeste, perpendicularmente à corrente, a 7,0 km/h. Do ponto de vista de uma águia pairando no ar sobre a margem, qual a velocidade e em que direção esse barco está seguindo?

1.45 Use componentes de vetores para determinar o módulo e a direção do vetor necessários para equilibrar os dois vetores demonstrados na Figura 1.36. Considere o vetor 625-N ao longo do eixo $-Oy$ e considere o eixo $+Ox$ ortogonal a ele, no sentido da direita.

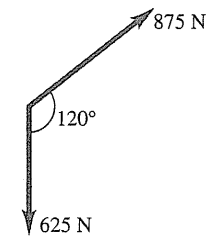


Figura 1.36 Exercício 1.45.

1.46 Duas cordas em um plano vertical exercem as mesmas forças de módulo sobre um peso suspenso, mas a tração entre elas possui um ângulo de 86,0°. Qual é a força de tração que cada uma exerce, se a tração resultante é de 372 N diretamente para cima?

Seção 1.9 Vetores unitários

1.47 Escreva cada vetor indicado na Figura 1.34 em termos dos vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$.

1.48 Em cada caso, determine os componentes de x- e y- do vetor $\vec{A}$: a) $\vec{A} = 5{,}0\hat{\imath} - 6{,}3\hat{\jmath}$; (b) $\vec{A} = 11{,}2\hat{\jmath} - 9{,}91\hat{\imath}$; (c) $\vec{A} = -15{,}0\hat{\imath} + 22{,}4\hat{\jmath}$; (d) $\vec{A} = 5{,}0\hat{B}$, onde $\hat{B} = 4\hat{\imath} - 6\hat{\jmath}$.

1.49 a) Escreva cada vetor indicado na Figura 1.37 em termos dos vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$. b) Use vetores unitários para escrever o vetor $\vec{C}$, onde $\vec{C} = 3{,}0\vec{A} - 4{,}0\vec{B}$. c) Encontre o módulo e a direção de $\vec{C}$.

1.50 Dados dois vetores $\vec{A} = 4{,}0\hat{\imath} + 3{,}0\hat{\jmath}$ e $\vec{B} = 5{,}0\hat{\imath} - 2{,}0\hat{\jmath}$, a) ache o módulo de cada vetor; b) escreva uma expressão para a diferença vetorial $\vec{A} - \vec{B}$ usando vetores unitários; c) ache o módulo e a direção diferença vetorial $\vec{A} - \vec{B}$; d) faça um diagrama vetorial para $\vec{A}$, $\vec{B}$, e $\vec{A} - \vec{B}$, e mostre que os resultados concordam aproximadamente com a resposta do item c).

1.51 a) O vetor $(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})$ é um vetor unitário? Justifique sua resposta. b) Um vetor unitário pode ter algum componente com módulo maior que a unidade? Pode ter algum componente negativo? Em cada caso, justifique sua resposta. c) Se $\vec{A} = a(3{,}0\hat{\imath} + 4{,}0\hat{\jmath})$, onde a é uma constante, determine o valor de a que torne $\vec{A}$ um vetor unitário.

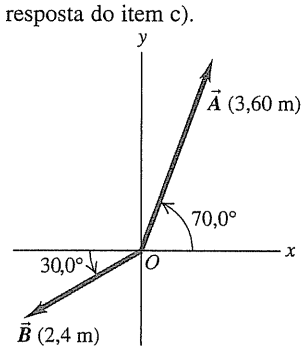


Figura 1.37 Exercício 1.49 e Problema 1.86.

Seção 1.10 Produtos e vetores

1.52 a) Use componentes de vetores para provar que dois vetores são comutativos tanto para soma quanto para produto escalar. b) Prove que os dois vetores são *anticomutativos* para o produto vetorial; ou seja, prove que $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$.

1.53 Para os vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$, e $\vec{C}$ indicados na Figura 1.34, ache os produtos escalares a) $\vec{A} \cdot \vec{B}$; (b) $\vec{B} \cdot \vec{C}$; (c) $\vec{A} \cdot \vec{C}$.

1.54 a) Ache o produto escalar dos dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ mencionados no Exercício 1.50. b) Ache o ângulo entre estes dois vetores.

1.55 Ache o ângulo entre cada par de vetores:

(a) $\vec{A} = -2{,}0\hat{\imath} + 6{,}0\hat{\jmath}$ e $\vec{B} = 2{,}0\hat{\imath} - 3{,}0\hat{\jmath}$

(b) $\vec{A} = 3{,}0\hat{\imath} + 5{,}0\hat{\jmath}$ e $\vec{B} = 10{,}0\hat{\imath} + 6{,}0\hat{\jmath}$

(c) $\vec{A} = -4{,}0\hat{\imath} + 2{,}0\hat{\jmath}$ e $\vec{B} = 7{,}0\hat{\imath} + 14{,}0\hat{\jmath}$

1.56 Por meio de desenhos simples dos produtos vetoriais apropriados, demonstre que a) $\vec{A} \cdot \vec{B}$ pode ser interpretado como o produto do módulo de $\vec{A}$ vezes o componente de $\vec{B}$ em relação a $\vec{A}$, ou o módulo de $\vec{B}$ vezes o componente de $\vec{A}$ em relação a $\vec{B}$; b) $|\vec{A} \times \vec{B}|$ pode ser interpretado como o produto do módulo de $\vec{A}$ vezes o componente de $\vec{B}$ perpendicular a $\vec{A}$, ou o módulo de $\vec{B}$ vezes o componente de $\vec{A}$ perpendicular a $\vec{B}$.

1.57 Para os vetores $\vec{A}$ e $\vec{D}$ indicados na Figura 1.34, a) ache o módulo e a direção do produto vetorial $\vec{A} \times \vec{D}$; b) ache o módulo e a direção do produto vetorial $\vec{D} \times \vec{A}$.

1.58 Encontre o produto vetorial $\vec{A} \times \vec{B}$ (expresso em termos dos vetores unitários) dos vetores indicados no Exercício 1.50. Qual o módulo deste produto vetorial?

1.59 Para os vetores indicados na Figura 1.35, a) ache o módulo e a direção do produto vetorial $\vec{A} \times \vec{B}$; b) ache o módulo e a direção do produto vetorial $\vec{B} \times \vec{A}$.

Problemas

1.60 A milha ainda é uma unidade de comprimento muito usada nos Estados Unidos e na Europa. Sabendo que 1 mi é aproximadamente igual a 1,61 km, calcule a) o número de metros quadrados existentes em uma milha quadrada, b) o número de decímetros cúbicos existentes em uma milha cúbica.

1.61 Um planeta semelhante à Terra. Em janeiro de 2006, astrônomos relataram a descoberta de um planeta comparável em tamanho à Terra, na órbita de outra estrela e com massa aproximadamente 5,5 vezes a massa da Terra. Acredita-se que consista de um misto de rocha e gelo, semelhante a Netuno. Se esse planeta possui a mesma densidade de Netuno (1,76 g/cm^3), qual é o seu raio expresso a) em quilômetros e b) como múltiplo do raio da Terra? Consulte o Apêndice F para obter dados de astronomia.

1.62 O maser de hidrogênio. As ondas de rádio geradas por um maser de hidrogênio podem ser usadas como um padrão de freqüência. A freqüência destas ondas é igual a 1.420.405.751,786 hertz. (Um hertz significa o mesmo que um ciclo por segundo.) Um relógio controlado por um maser de hidrogênio pode atrasar ou adiantar apenas 1 s em 100.000 anos. Para as respostas das perguntas seguintes, use apenas três algarismos significativos. (O grande número de algarismos significativos nesta freqüência ilustra a impressionante acurácia de sua medida.) a) Qual é o intervalo de tempo de um ciclo desta onda de rádio? b) Quantos ciclos ocorrem em 1 h? c) Quantos ciclos poderiam ter ocorrido durante a idade da Terra, estimada em $4{,}6 \times 10^9$ anos? d) Quantos segundos um relógio controlado por um maser de hidrogênio poderia atrasar ou adiantar em um intervalo igual à idade da Terra?

1.63 Estime o número de átomos existentes em seu corpo. (Sugestão: com base em seus conhecimentos de biologia e de química, diga quais os tipos mais comuns de átomos existentes em seu corpo. Qual a massa de cada um destes átomos? O Apêndice D apresenta uma relação das massas dos diferentes elementos, expressas em unidades de massa atômica; você encontrará o valor de uma unidade de massa atômica, 1 u, no Apêndice F.)

1.64 Tecidos biológicos são tipicamente compostos de 98% de água. Considerando-se a densidade da água de $1{,}0 \times 10^3$ kg/m^3, estime a massa a) do coração de um adulto humano; b) uma célula com diâmetro de 0,5μm; c) uma abelha.

1.65 O ferro possui propriedade tal que um volume de 1,0 m^3 possui massa de $7{,}86 \times 10^3$ kg (densidade igual a $7{,}86 \times 10^3$ kg/m^3). Você deseja fabricar cubos e esferas de ferro. Determine a) o comprimento da face de um cubo de ferro que possui massa de 200,0 g e b) o raio de uma esfera sólida de ferro com massa de 200,0g.

1.66 Estrelas no universo. Os astrônomos afirmam freqüentemente que há mais estrelas no universo do que grãos de areia em todas as praias do planeta. a) Considerando-se que um típico grão de areia tem aproximadamente 0,2 mm de diâmetro, estime o número de grãos de areia em todas as praias do planeta, e a partir daí o número aproximado de estrelas no universo. Será útil consultar um atlas e fazer alguns cálculos de medição. b) Considerando-se que uma galáxia típica contém cerca de 100 bilhões de estrelas e que há mais de 100 bilhões de galáxias no universo conhecido, estime o número de estrelas no universo e compare esse número com seu resultado da parte a).

1.67 Matemáticos, físicos e outros pesquisadores geralmente trabalham com números grandes. Os matemáticos inventaram o nome extravagante de *googol* para designar 10^{100}. Vamos comparar alguns números grandes existentes na física com *o googol*. (*Nota:* Este problema necessita do uso de alguns valores numéricos existentes nos apêndices deste livro, com os quais seria conveniente você se familiarizar.) a) Estime o número aproximado de átomos existentes em nosso planeta. Para facilitar, considere a massa atômica dos átomos igual a 14 g/mol. O número de Avogadro fornece o número de átomos existentes em um mol. b) Estime o número aproximado de nêutrons existentes em uma estrela de nêutrons. Uma estrela de nêutrons é constituída quase que exclusivamente de nêutrons e possui massa igual a duas vezes a massa do Sol. c) Na teoria principal acerca da origem do universo, todo o universo observável ocupava em tempos primordiais um raio igual à atual distância entre a Terra e o Sol. Naquela época, o universo possuía densidade (massa/ volume) de 10^{15} g/cm^3. Estime o número de partículas que constituíram o universo supondo que naquela época a composição das partículas era: 1/3 de prótons, 1/3 de elétrons e 1/3 de nêutrons.

1.68 Três cordas horizontais puxam uma pedra enorme encravada no solo, produzindo as forças vetoriais $\vec{A}$, $\vec{B}$, e $\vec{C}$, demonstradas na Figura 1.38. Encontre o módulo e a direção de uma quarta força que produzirá a soma vetorial zero para as quatro forças.

1.69 Dois operários puxam horizontalmente uma pesada caixa, mas um deles exerce o dobro de força do outro. A tração mais forte está direcionada a 25,0° do oeste para o norte, e a resultante dessas duas trações é 350,0 N diretamente no sentido norte. Use componentes de vetores para determinar o módulo de cada uma dessas trações e a direção da tração mais fraca.

1.70 Aterrissagem de emergência. Um avião parte do aeroporto de Galisteo e voa a 170 km, a 68° do leste para o norte e depois muda de direção, passando a voar a 230 km e 48° do sul para o leste, fazendo na sequência um pouso de emergência em um pasto. Quando o aeroporto envia uma equipe de resgate, em qual direção e a que distância essa equipe voará para seguir diretamente até esse avião?

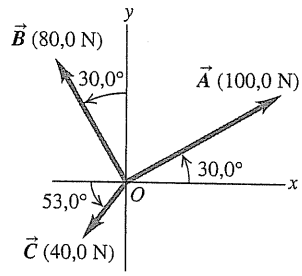


Figura 1.38 Problema 1.68.

1.71 Você deseja programar o movimento do braço de um robô em uma linha de montagem para se mover no plano xy. Seu primeiro deslocamento é $\vec{A}$; seu segundo deslocamento é $\vec{B}$, cujo módulo é igual a 6,40 cm, formando um ângulo de 63,0°, medido considerando-se uma rotação do eixo $+Ox$ para o eixo $-Oy$. A resultante $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ dos dois deslocamentos deve também possuir módulo igual a 6,40 cm, porém formando um ângulo de 22,0°, medido considerando-se uma rotação do eixo $+Ox$ para o eixo $+Oy$. a) Desenhe um diagrama em escala aproximada para estes vetores. b) Ache os componentes de $\vec{A}$. c) Ache o módulo e a direção de $\vec{A}$.

1.72 a) Ache o módulo e a direção do vetor $\vec{R}$ que é a soma dos três vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$, e $\vec{C}$ indicados na Figura 1.34. Desenhe um diagrama para mostrar como $\vec{R}$ é formado com esses três vetores . b) Ache o módulo e a direção do vetor $\vec{S} = \vec{C} - \vec{A} - \vec{B}$. Desenhe um diagrama para mostrar como $\vec{S}$ é formado com esses três vetores.

1.73 Como dissemos no Exercício 1.33, uma pesquisadora está estudando uma caverna. Ela percorre 180 m em linha reta de leste para oeste, depois caminha 210 m em uma direção que forma 45° com a direção anterior e em sentido do sul para o leste, a seguir percorre 280 m a 30° no sentido do norte para o leste. Depois de um quarto deslocamento não medido, ela retorna ao ponto de partida. Use o método dos componentes para determinar o módulo, a direção e o sentido do quarto deslocamento. Verifique se a solução obtida usando-se um diagrama em escala é aproximadamente igual ao resultado obtido pelo método dos componentes.

1.74 Uma velejadora encontra ventos que impelem seu pequeno barco a vela. Ela veleja 2,0 km de oeste para leste, a seguir 3,50 km para sudeste e depois, a certa distância em direção desconhecida. No final do trajeto ela está a 5,80 km diretamente a leste de seu ponto de partida (Figura 1.39). Determine o módulo e a direção do terceiro deslocamento. Faça um diagrama em escala da soma vetorial dos deslocamentos e mostre que ele concorda aproximadamente com o resultado obtido mediante a solução numérica.

1.75 Equilíbrio Afirmamos que um objeto está em *equilíbrio*, se todas as forças sobre ele estão equilibradas (resultam em zero). A Figura 1.40 mostra um raio de luz que pesa 124 N e é mantido em equilíbrio por uma tração de 100,0 N e uma força $\vec{F}$ no chão. A terceira força sobre o raio de luz é o peso de 124-N que age verticalmente para baixo. a) Use componentes de vetores para encontrar o módulo e a direção de $\vec{F}$. b) Usando uma solução gráfica aproximadamente em escala, verifique se a sua resposta na parte a) é razoável.

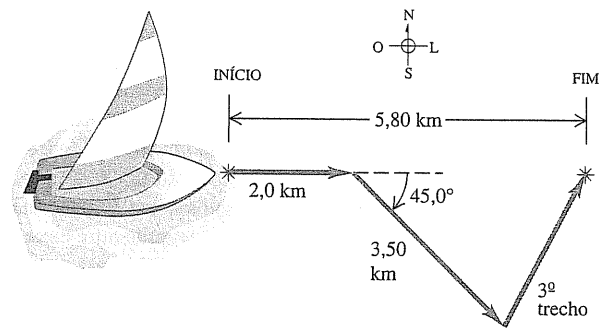


Figura 1.39 Problema 1.74.

1.76 Em um vôo de treinamento, uma aprendiz de piloto voa de Lincoln, no Estado de Nebraska, até Clarinda, no Iowa; a seguir até St. Joseph, no Missouri; depois até Manhattan, no Kansas (Figura 1.41). Os ângulos formados pelos deslocamentos são medidos em relação ao norte: 0° significa o sentido do sul para o norte, 90° é o leste, 180° é o sul e 270° é o oeste. Use o método dos componentes para achar a) a distância que ela terá de voar para voltar para Lincoln; b) a direção (em relação ao norte) que ela deverá voar para voltar ao ponto de partida. Ilustre a solução fazendo um diagrama vetorial.

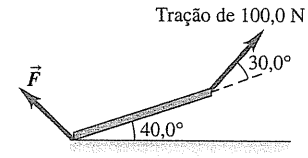


Figura 1.40 Problema 1.75.

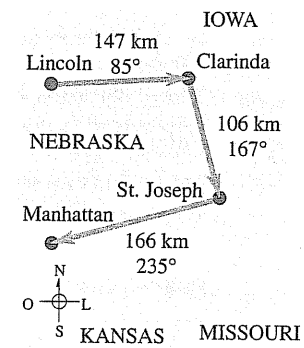


Figura 1.41 Problema 1.76.

1.77 Uma artista está criando um novo logotipo para a página de sua companhia na Internet. No programa gráfico que ela está usando, cada pixel em um arquivo de imagem possui coordenadas (x, y), onde a origem (0, 0) está situada no canto superior esquerdo da imagem, o eixo $+Ox$ aponta para a direita e o eixo $+Oy$ aponta para baixo. As distâncias são medidas em pixels. a) A artista desenha uma linha ligando o local do pixel (10, 20) com o local (210, 200). Ela deseja desenhar uma segunda linha que começa em (10, 20), tem comprimento de 250 pixels e forma um ângulo de 30° medido no sentido dos ponteiros do relógio a partir da direção inicial. Qual o local do pixel no qual esta segunda linha deve terminar? Dê a resposta com os algarismos significativos do pixel indicado. b) A artista desenha agora uma flecha ligando a extremidade direita inferior da primeira linha com a extremidade direita inferior da segunda linha. Determine o módulo e a direção desta flecha. Faça um diagrama mostrando as três linhas.

1.78 O retorno. Um explorador de uma densa floresta na África equatorial deixa sua cabana. Ele dá 40 passos no sentido nordeste, depois 80 passos em uma direção que forma um ângulo de 60° considerando a rotação no sentido do oeste para o norte, a seguir

50 passos diretamente para o sul. Considerando-se que os seus passos têm o mesmo comprimento a) Faça um diagrama aproximadamente em escala dos três vetores e da resultante da soma vetorial. b) Ajude-o a evitar se perder na floresta fornecendo-lhe o vetor deslocamento, calculado pelo método dos componentes, necessário para que ele retorne para sua cabana.

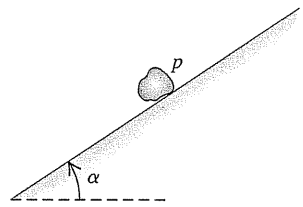


Figura 1.42 Problema 1.80.

1.79 Um barco parte da ilha de Guam e navega a 285 km e 40,0° do norte para oeste. Em qual direção deve seguir agora e qual a distância a percorrer de modo que o seu deslocamento resultante seja 115 km diretamente a leste da ilha?

1.80 Uma pedra arredondada de peso p está na encosta de uma colina que se ergue a um ângulo constante α em relação ao plano horizontal, como demonstra a Figura 1.42. Seu peso exerce uma força sobre a pedra no sentido verticalmente para baixo. a) Em termos de α e p, qual é o componente do peso da pedra na direção paralela à superfície da colina? b) qual é o componente do peso na direção perpendicular à superfície da colina? c) Um aparelho de ar-condicionado é preso a um teto que se inclina a um ângulo de 35,0°. Para que o aparelho não escorregue pelo teto, o componente do peso da unidade paralela ao teto não pode exceder 550 N. Qual é o peso máximo permitido do aparelho?

1.81 Ossos e músculos. O braço de um paciente em tratamento pesa 20,5 N e ergue-se a um peso de 112,0-N. Essas duas forças têm direção verticalmente para baixo. As únicas outras forças significativas no braço dele vêm do músculo do bíceps (que age perpendicularmente ao braço) e do cotovelo. Se o bíceps produz uma tração de 232 N, quando o braço é levantado a 43° em relação ao plano horizontal, descubra o módulo e a direção da força que o cotovelo exerce sobre o braço. (A soma das forças do cotovelo e do bíceps deve equilibrar o peso do braço e o peso que ele carrega, de modo que a soma vetorial deve ser 132,5 N, para cima.)

1.82 Você está com fome e decide ir à sua lanchonete favorita na vizinhança. Você sai do apartamento e toma o elevador para descer 10 andares (cada andar tem 3,0 m) e depois segue 15 m ao sul, até a saída do prédio. Então, caminha 0,2 km a leste, vira para o norte e segue 0,1 km até a entrada da lanchonete. a) Determine o deslocamento do seu apartamento até a lanchonete. Use a notação do vetor unitário na sua resposta, certificando-se de deixar clara a sua escolha das coordenadas. b) Qual distância você percorreu do seu apartamento até a lanchonete e qual é o módulo do deslocamento que você calculou na parte a)?

1.83 Ao seguir um mapa do tesouro, você parte de um velho carvalho. Primeiro, caminha 825 m diretamente para o sul, depois vira e segue 1,25 km a 30,0° do oeste para o norte e, finalmente, caminha 1,0 km a 40,0° do norte para o leste, onde encontra o tesouro: uma biografia de Isaac Newton! a) Para retornar ao velho carvalho, em que direção deve ir e qual distância deve percorrer? Use os componentes para resolver este problema. b) Para conferir o seu cálculo na parte a), desenhe uma solução gráfica aproximada em escala.

1.84 Você está acampando com dois amigos, José e Carlos. Como os três gostam de privacidade, vocês não montam as barracas perto uma das outras. A barraca de José está a 21,0 m da sua, na direção 23,0° do sul para leste. A de Carlos está a 32,0 da sua, na direção 37,0° do norte para leste. Qual é a distância entre a barraca de Carlos e a de José?

1.85 Os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são desenhados a partir de um mesmo ponto. O vetor $\vec{A}$ possui módulo A e forma um ângulo θ_A medido supondo-se uma rotação no sentido do eixo $+Ox$ para o eixo $+Oy$. As grandezas correspondentes do vetor $\vec{B}$ são o módulo B e o ângulo θ_B. Logo, $\vec{A} = A\cos\theta_A\hat{\imath} + A\,\text{sen}\,\theta_A\hat{\jmath}$, $\vec{B} = B\cos\theta_B\hat{\imath} + B\,\text{sen}\,\theta_B\hat{\jmath}$ e $\phi = |\theta_B - \theta_A|$ é o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$. a) Deduza a Equação 1.18 partindo da Equação 1.21. b) Deduza a Equação 1.22 partindo da Equação 1.27.

1.86 Para os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ desenhados na Figura 1.37, a) ache o produto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$, b) determine o módulo e a direção do produto vetorial $\vec{A}\times\vec{B}$.

1.87 A Figura 1.11c mostra um paralelogramo cujos lados são os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$. a) Mostre que o módulo do produto vetorial destes vetores é igual à área deste paralelogramo. (Sugestão: área = base × altura.) b) Qual é o ângulo entre o produto vetorial e o plano deste paralelogramo?

1.88 O vetor $\vec{A}$ possui comprimento de 3,50 cm e aponta para o interior desta página. O vetor $\vec{B}$ aponta do canto direito inferior desta página para o canto esquerdo superior desta página. Defina um sistema apropriado de coordenadas com orientação da mão direita e ache os três componentes do produto vetorial $\vec{A}\times\vec{B}$, medidos em cm^2. Faça um diagrama mostrando o sistema de coordenadas e os vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$, e $\vec{A}\times\vec{B}$.

1.89 Dados dois vetores $\vec{A} = -2{,}0\hat{\imath} + 3{,}0\hat{\jmath} + 4{,}0\hat{k}$ e $\vec{B} = 3{,}0\hat{\imath} + 1{,}0\hat{\jmath} - 3{,}0\hat{k}$, determine: a) o módulo de cada vetor; b) uma expressão para a diferença vetorial $\vec{A} - \vec{B}$, usando vetores unitários; c) o módulo da diferença vetorial $\vec{A} - \vec{B}$. Este valor é igual ao módulo da diferença vetorial $\vec{B} - \vec{A}$? Explique.

1.90 Ângulo da ligação no metano. Na molécula do metano, CH_4, cada átomo de hidrogênio ocupa o vértice de um tetraedro regular em cujo centro se encontra o átomo de carbono. Usando coordenadas de tal modo que uma das ligações C — H esteja na direção $\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$, uma ligação C — H adjacente estará na direção $\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}$. Calcule o ângulo entre estas duas ligações.

1.91 Os dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são desenhados a partir de um mesmo ponto e $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$. a) Mostre que quando $C^2 = A^2 + B^2$, o ângulo entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é 90°. b) Mostre que quando $C^2 < A^2 + B^2$, o ângulo entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é maior do que 90°. c) Mostre que quando $C^2 > A^2 + B^2$, o ângulo entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ está compreendido entre 0° e 90°.

1.92 Quando dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são desenhados a partir de um mesmo ponto, o ângulo entre eles é ϕ. a) Usando técnicas vetoriais, mostre que o módulo da soma destes vetores é dado por

$$\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\phi}$$

b) Se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ possuem o mesmo módulo, qual deve ser o valor de ϕ para que o módulo da soma destes vetores seja igual ao módulo de $\vec{A}$ ou de $\vec{B}$?

1.93 Um cubo é colocado de modo que um dos seus vértices esteja na origem e três arestas coincidam com os eixos x, y e z de um sistema de coordenadas (Figura 1.43). Use vetores para calcular: a) o ângulo entre a aresta ao longo do eixo z (linha *ab*) e a diagonal da origem até o vértice oposto (linha *ad*); b) o ângulo entre a linha *ac* (a diagonal de uma das faces) e a linha *ad*.

1.94 Obtenha um *vetor unitário* ortogonal aos dois vetores indicados no Problema 1.89.

1.95 Você tem os vetores $\vec{A} = 5{,}0\hat{\imath} - 6{,}5\hat{\jmath}$ e $\vec{B} = -3{,}5\hat{\imath} + 7{,}0\hat{\jmath}$. Um terceiro vetor $\vec{C}$ está no plano xy. O vetor $\vec{C}$ é ortogonal ao vetor $\vec{A}$, e o produto escalar de $\vec{C}$ com $\vec{B}$ é 15,0. A partir dessa informação, determine os componentes do vetor $\vec{C}$.

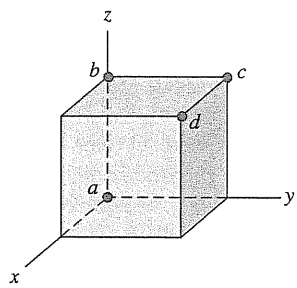


Figura 1.43 Problema 1.93.

1.96 Dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ possuem módulo de $A = 3{,}0$ e de $B = 3{,}0$. Seu produto vetorial é $\vec{A} \times \vec{B} = -5{,}0\hat{k} + 2{,}0\hat{\imath}$. Qual é o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$?

1.97 Mais tarde em nossos estudos de física encontraremos grandezas representadas por $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$. a) Quaisquer que sejam os vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$, e $\vec{C}$, prove que $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$. b) Calcule $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$ para os três vetores seguintes: $\vec{A}$ com módulo $A = 5{,}0$ e ângulo $\theta_A = 26{,}0°$ medido supondo-se uma rotação no sentido do eixo $+Ox$ para o eixo $+Oy$, $\vec{B}$ com módulo $B = 4{,}0$ e ângulo $\theta_B = 63{,}0°$ e $\vec{C}$ com módulo $C = 6{,}0$ e orientado ao longo do eixo $+Oz$. Os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ estão sobre o plano xy.

Problemas desafiadores

1.98 O comprimento de um retângulo é dado por $L \pm l$ e sua largura é $W \pm p$. a) Mostre que a incerteza na área A é dada por $a = Lp + lW$. Suponha que as incertezas l e p sejam pequenas, de modo que o produto lp é muito pequeno e pode ser desprezado. b) Mostre que a incerteza fracionária na área é igual à soma da incerteza fracionária do comprimento com a incerteza fracionária da largura. c) Um paralelepípedo possui dimensões $L \pm l$, $W \pm p$ e $H \pm h$. Ache a incerteza fracionária do seu volume e mostre que ela é igual à soma das incertezas fracionárias do comprimento, da largura e da altura.

1.99 Passe completo. Na Enormous State University (ESU), o time de futebol americano registra suas jogadas usando deslocamentos de vetores, sendo a origem a posição da bola no momento do início da partida. Em um certo passe, o recebedor parte de $+1{,}0\hat{\imath} - 5{,}0\hat{\jmath}$, onde as unidades são em jardas, $\hat{\imath}$ está à direita e $\hat{\jmath}$ está para baixo do campo. Deslocamentos subseqüentes do recebedor são $+9{,}0\hat{\imath}$ (em movimento antes do *snap*), $+11{,}0\hat{\jmath}$ (parte campo abaixo), $-6{,}0\hat{\imath} + 4{,}0\hat{\jmath}$ (*zigs*) e $+12{,}0\hat{\imath} + 18{,}0\hat{\jmath}$ (*zags*). Enquanto isso, o arremessador recua para uma posição $-7{,}0\hat{\jmath}$. A que distância e em que direção deve o arremessador passar a bola? (Como o técnico, você será aconselhado a diagramar a situação, antes de resolvê-la numericamente.)

1.100 Navegando no sistema solar. A espaçonave *Mars Polar Lander* (explorador do pólo de Marte) foi lançada em 3 de janeiro de 1999. No dia 3 de dezembro de 1999 ela pousou na superfície de Marte, ocasião em que as posições de Marte e da Terra eram dadas pelas coordenadas:

	x	y	z
Terra	0,3182 UA	0,9329 UA	0,0000 UA
Marte	1,3087 UA	−0,4423 UA	−0,0414 UA

Nessas coordenadas, o Sol está na origem e o plano da órbita da Terra é o plano xy. A Terra corta o eixo $+Ox$ uma vez por ano no equinócio do outono, o primeiro dia do outono no Hemisfério Norte (ou primavera no Hemisfério Sul, o que ocorre em torno do dia 22 de setembro). Uma UA, ou *unidade astronômica,* equivale a $1{,}496 \times 10^8$ km, a distância média entre a Terra e o Sol. a) Em um diagrama, mostre as posições da Terra, de Marte e do Sol no dia 3 de dezembro de 1999. b) Calcule as seguintes distâncias em UA no dia 3 de dezembro de 1999: i) entre o Sol e a Terra, ii) entre o Sol e Marte, iii) entre a Terra e Marte. c) Observando-se da Terra, qual era o ângulo entre a reta que unia a Terra a Marte e a reta que unia a Terra ao Sol no dia 3 de dezembro de 1999? d) Verifique e explique se Marte era visível à meia-noite no seu local no dia 3 de dezembro de 1999. (Quando é meia-noite no seu local, o Sol está do lado oposto da Terra em relação a você.)

1.101 Navegando na Ursa Maior. As sete estrelas principais da Ursa Maior parecem estar sempre situadas a uma mesma distância da Terra, embora elas estejam muito afastadas entre si. A Figura 1.44 indica a distância entre a Terra e cada uma dessas estrelas. As distâncias são dadas em anos-luz (al), um ano-luz é a distância percorrida pela luz durante um ano. Um ano-luz equivale a $9{,}461 \times 10^{15}$ m. a) Alcaide e Méraque estão separadas de 25,6° no céu. Em um diagrama, mostre as posições do Sol, de Alcaide e Méraque. Calcule a distância em anos-luz entre Alcaide e Méraque. b) Para um habitante de um planeta que orbita Méraque, qual seria a separação angular entre o Sol e Alcaide?

1.102 O vetor $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, denomina-se vetor posição e aponta da origem do sistema (0, 0, 0) até um ponto arbitrário do espaço cujas coordenadas são (x, y, z). Use seus conhecimentos sobre vetores para provar o seguinte: todos os pontos (x, y, z) que satisfazem a equação $Ax + By + Cz = 0$, onde A, B e C são constantes, estão situados em um plano que passa na origem e é perpendicular ao vetor $A\hat{\imath} + B\hat{\jmath} + C\hat{k}$.

Faça um esquema deste vetor e do plano.

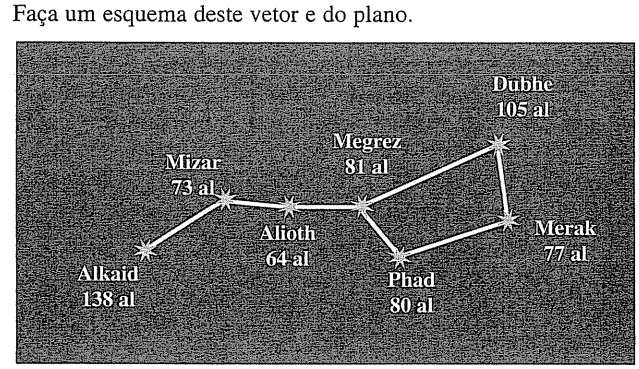
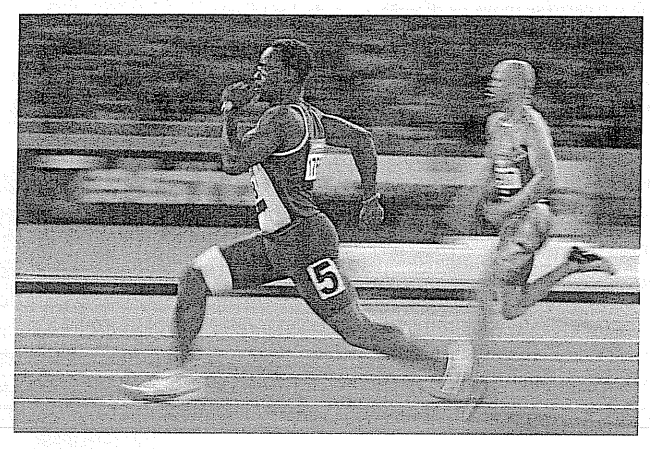


Figura 1.44 Problema desafiador 1.101.

MOVIMENTO RETILÍNEO 2



Um velocista normalmente acelera no primeiro terço de uma corrida e desacelera gradualmente no restante do percurso. É exato afirmar que um velocista está *acelerando* enquanto diminui a velocidade nos dois terços finais da corrida?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Como descrever o movimento retilíneo em termos de velocidade média, velocidade instantânea, aceleração média e aceleração instantânea.
- Como interpretar gráficos de posição *versus* tempo, velocidade *versus* tempo e aceleração *versus* tempo para o movimento retilíneo.
- Como solucionar problemas relacionados ao movimento retilíneo com aceleração constante, incluindo questões de queda livre.
- Como analisar o movimento retilíneo em caso de aceleração não constante.

Qual distância um avião deve percorrer em uma pista antes de atingir a velocidade de decolagem? Quando você lança uma bola diretamente de baixo para cima, que altura ela atinge? Quando um copo escorrega de sua mão, de quanto tempo você dispõe para segurá-lo antes que ele atinja o solo? São estes os tipos de perguntas que você aprenderá a responder neste capítulo. Estamos iniciando o estudo da física com a *mecânica*, o estudo das relações entre movimento, massa e força. O objetivo deste e do próximo capítulo é o estudo da *cinética*, a parte da mecânica que trata do movimento. Mais tarde, estudaremos a *dinâmica*, a relação entre o movimento e suas causas.

Neste capítulo estudaremos o tipo mais simples de movimento: uma partícula se deslocando ao longo de uma linha reta. Para descrever esse movimento, introduziremos as grandezas físicas de *velocidade* e *aceleração*. Essas grandezas possuem definições simples na física; contudo, essas definições são mais precisas e um pouco diferentes das usadas na linguagem cotidiana. Uma observação importante nas definições de velocidade e de aceleração dadas por um físico é que essas grandezas são *vetores*. Como você aprendeu no Capítulo 1, isso significa que elas possuem módulo, direção e sentido. Neste capítulo estamos apenas interessados em descrever o movimento em uma linha reta, de modo que não necessitamos por enquanto do tratamento matemático completo dos vetores. Porém, no Capítulo 3, abordaremos o movimento em duas e em três dimensões, casos em que o uso de vetores é essencial.

Desenvolveremos equações simples para descrever o movimento no caso especialmente importante em que a aceleração permanece constante.

Um exemplo é a queda livre de um corpo. Também consideraremos casos nos quais a aceleração varia durante o movimento; para essa situação necessitamos do uso da integração para descrever o movimento. (Caso você ainda não tenha estudado integração, a Seção 2.6 é opcional.)

2.1 Deslocamento, tempo e velocidade média

Suponha que em uma corrida de carros uma competidora dirija seu carro em um trecho retilíneo (Figura 2.1). No estudo do movimento precisamos de um sistema de coordenadas. Escolhemos o eixo Ox para nosso sistema de coordenadas ao longo do trecho retilíneo, com a origem O

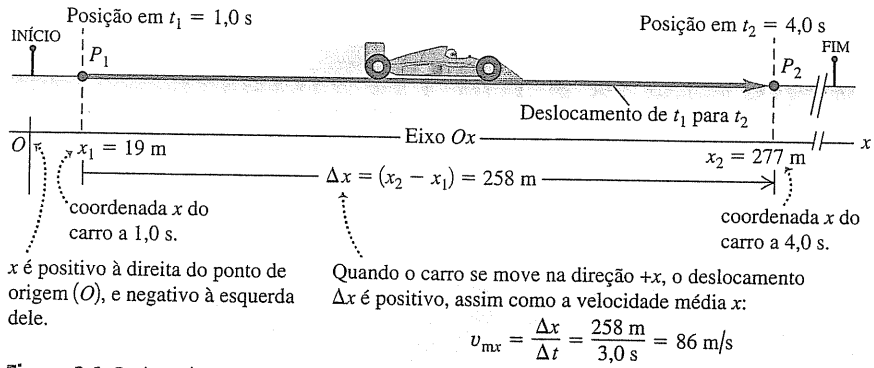


Figura 2.1 Posição de um carro de corrida em dois instantes de sua trajetória.

situada no início da linha reta. Descreveremos a posição do carro em função da posição de seu ponto representativo, como, por exemplo, sua extremidade dianteira. Ao fazer isso, o carro todo é representado por esse ponto, razão pela qual o consideramos uma **partícula**.

A posição da extremidade dianteira do carro, ou seja, a posição da partícula, é dada pela coordenada x, que varia com o tempo à medida que o carro se move. Um modo útil para a descrição do movimento do carro consiste em dizer como x varia em um intervalo de tempo. Suponha que 1,0 s depois do início do movimento a extremidade dianteira do carro esteja no ponto P_1, a 19 m da origem, e que 4,0 s depois do início do movimento esse ponto se desloque para P_2, a 277 m da origem. O *deslocamento* da partícula é um vetor que aponta de P_1 para P_2 (Seção 1.7). A Figura 2.1 mostra que esse vetor se posiciona ao longo do eixo Ox. O componente x do deslocamento é simplesmente a variação no valor de x, (277 m − 19 m) = 258 m, em um intervalo de tempo (4,0 s − 1,0 s) = 3,0 s. Definimos a **velocidade média** do carro nesse intervalo de tempo como uma grandeza *vetorial* cujo componente x é a variação de x dividida por esse intervalo de tempo: (258 m)/(3,0 s) = 86 m/s.

Em geral, a velocidade média depende do intervalo específico de tempo escolhido. Para um intervalo de tempo de 3,0 s *antes* do início da corrida, a velocidade média seria zero, porque o carro estaria em repouso na linha de partida e seu deslocamento seria nulo.

Vamos generalizar o conceito de velocidade média. Em um instante t_1, o carro se encontra no ponto P_1, cuja coordenada é x_1, e no instante t_2, ele se encontra no ponto P_2, cuja coordenada é x_2. O deslocamento do carro no intervalo de tempo entre t_1 e t_2 é o vetor que liga o ponto P_1 ao ponto P_2. O componente x do deslocamento do carro, designado como Δx, é simplesmente a variação da coordenada x:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \tag{2.1}$$

O carro se move somente pelo eixo Ox, logo os componentes y e z do deslocamento são iguais a zero.

ATENÇÃO O significado de Δx Note que Δx não é o produto de Δ vezes x; esse símbolo significa simplesmente 'variação da grandeza x'. Sempre usamos a letra grega maiúscula Δ (delta) para representar a *variação* de uma grandeza, calculada como a diferença entre o valor *final* e o valor *inicial* da grandeza — nunca o contrário. Analogamente, escrevemos o intervalo de tempo entre t_1 e t_2 como Δt e a variação na grandeza t: $\Delta t = t_2 - t_1$ (a diferença entre o valor final e o valor inicial).

O componente x da velocidade média, ou **velocidade média**, é o componente x do deslocamento, Δx, dividido pelo intervalo de tempo Δt durante o qual o deslocamento ocorre. Representaremos essa grandeza pelo símbolo v_{mx} (em que o 'm' subscrito significa valor médio e o 'x' subscrito indica que esse é o componente x):

$$v_{mx} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.2}$$

(velocidade média, movimento retilíneo)

Para o exemplo anterior, para o carro x_1 = 19 m, x_2 = 277 m, t_1 = 1,0 s e t_2 = 4,0 s, a Equação (2.2) fornece

$$v_{mx} = \frac{277\text{ m} - 19\text{ m}}{4{,}0\text{ s} - 1{,}0\text{ s}} = \frac{258\text{ m}}{3{,}0\text{ s}} = 86\text{ m/s}$$

A velocidade média do carro de corrida é positiva. Isso significa que durante o intervalo de tempo a coordenada x cresce e o carro se move no sentido positivo do eixo Ox (da esquerda para a direita na Figura 2.1).

Quando a partícula se move no sentido *negativo* do eixo Ox durante o intervalo de tempo, sua velocidade média para esse intervalo de tempo é negativa. Por exemplo, suponha que uma caminhonete se mova da direita para a esquerda ao longo da pista (Figura 2.2). A caminhonete se encontra no ponto x_1 = 277 m em um instante t_1 = 16,0 s e em x_2 = 19 m no instante t_2 = 25,0 s. Logo, Δx = (19 m − 277 m) = −258 m e Δt = (25,0 s − 16,0 s) = 9,0 s. O componente x da velocidade média será v_{mx} = $\Delta x/\Delta t$ = (−258 m) / (9,0 s) = −29 m/s.

Apresentamos algumas regras simples para a velocidade média. **Quando x é positivo e crescente ou negativo**

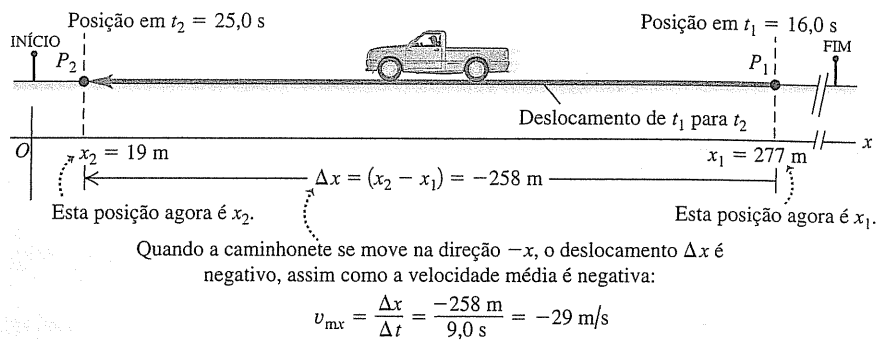


Figura 2.2 Posições de uma caminhonete em dois instantes durante seu movimento. Os pontos P_1 e P_2 referem-se agora ao deslocamento da caminhonete, de modo que eles são diferentes dos pontos da Figura 2.1.

e se tornar menos negativo, a partícula se move no sentido do eixo +*Ox* e v_{mx} é positiva (Figura 2.1). **Quando *x* é positivo e decrescente ou negativo e se tornar mais negativo, a partícula se move no sentido do eixo –*Ox* e v_{mx} é negativa** (Figura 2.2).

ATENÇÃO Escolha da direção positiva de *x* Você poderá ser tentado a concluir que a velocidade média positiva necessariamente implica um deslocamento para a direita como na Figura 2.1, e que a velocidade média negativa necessariamente implica um deslocamento para a esquerda como na Figura 2.2. Porém essas conclusões estão corretas *somente* quando o eixo *Ox* é orientado da esquerda para a direita, como foi escolhido nas figuras 2.1 e 2.2. Poderíamos também ter orientado o eixo *Ox* da direita para a esquerda, com origem no ponto final. Nesse caso, o carro de corrida teria uma velocidade média negativa e a caminhonete teria uma velocidade média positiva. Você deve escolher o sentido do eixo ao resolver quase todos os problemas. Uma vez feita essa escolha, é *necessário* considerar esse sentido ao interpretar os sinais de v_{mx} e de outras grandezas que descrevem o movimento!

No caso do movimento retilíneo, Δx em geral indica simplesmente o deslocamento e v_{mx}, a velocidade média. Contudo, lembre-se de que essas grandezas indicam simplesmente os componentes x de grandezas vetoriais que, nesse caso particular, possuem *apenas* componentes x. No Capítulo 3, o deslocamento, a velocidade e a aceleração serão considerados com dois ou três componentes.

A Figura 2.3 mostra um gráfico da posição do carro de corrida em função do tempo, ou seja, é um **gráfico *xt***. A curva dessa figura *não* representa a trajetória do carro no espaço; como indicado na Figura 2.1, essa trajetória é uma linha reta. Em vez da trajetória, o gráfico mostra as variações da posição do carro com o tempo. Os pontos designados por p_1 e p_2 correspondem aos pontos P_1 e P_2 da trajetória do carro. A linha reta $p_1 p_2$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo, cujo lado vertical é $\Delta x = x_2 - x_1$ e cujo lado horizontal é $\Delta t = t_2 - t_1$. A velocidade média do carro $v_{mx} = \Delta x/\Delta t$ é a *inclinação* da linha reta $p_1 p_2$, ou seja, a razão entre o lado vertical Δx do triângulo retângulo e o lado horizontal Δt.

A velocidade média depende apenas do deslocamento $\Delta x = x_2 - x_1$, que ocorre durante o intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, e não nos detalhes ocorridos durante esse intervalo. Suponha que uma motocicleta ultrapasse o carro de corrida no ponto P_1 da Figura 2.1 no mesmo instante t_1 e a seguir diminua a velocidade para passar pelo ponto P_2 no mesmo instante t_2 do carro. Os dois veículos possuem o mesmo deslocamento no mesmo intervalo de tempo e, portanto, apresentam a mesma velocidade média.

Quando as distâncias são medidas em metros e os tempos em segundos, a velocidade média é dada em metros por segundo (m/s). Outras unidades de velocidade

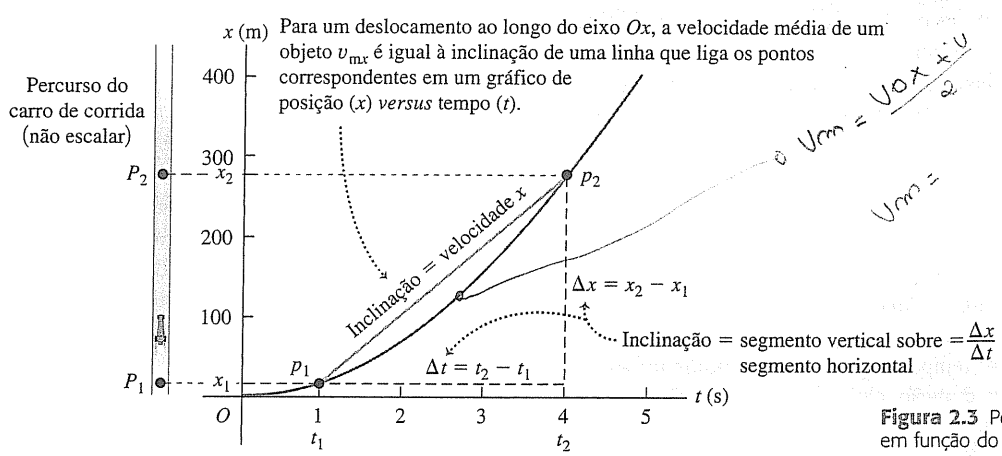


Figura 2.3 Posição de um carro de corrida em função do tempo.

são quilômetros por hora (km/h), pés por segundo (pés/s), milhas por hora (mi/h) e nós (1 nó = 1 milha náutica/h = 6080 pés/h). A Tabela 2.1 mostra algumas ordens de grandeza típicas de velocidades.

Tabela 2.1 Ordens de grandeza de algumas velocidades

O rastejar de uma cobra	10^{-3} m/s
Uma caminhada rápida	2 m/s
Homem mais veloz	11 m/s
Leopardo correndo	35 m/s
Carro mais veloz	341 m/s
Movimento aleatório de moléculas do ar	500 m/s
Avião mais veloz	1000 m/s
Satélite de comunicação em órbita	3000 m/s
Elétron na órbita de um átomo de hidrogênio	2×10^6 m/s
A luz deslocando-se no vácuo	3×10^8 m/s

Teste sua compreensão da Seção 2.1 Cada uma das seguintes viagens de automóvel leva uma hora. A direção $+x$ é do oeste para leste. (i) O automóvel *A* segue a 50 km para leste. (ii) O automóvel *B* segue a 50 km para oeste. (iii) O automóvel *C* segue a 60 km para leste, dá meia-volta e segue a 10 km para oeste. (iv) O automóvel *D* segue a 70 km para leste. (v) O automóvel *E* segue a 20 km para oeste, dá meia-volta e segue a 20 km para leste. (a) Classifique as cinco viagens por ordem de velocidade média, da mais positiva para a mais negativa. (b) Há viagens com a mesma velocidade média? (c) Há alguma viagem com velocidade média igual a zero? ▮

2.2 Velocidade instantânea

Às vezes, a velocidade média é tudo que precisamos para conhecer o movimento de uma partícula. Por exemplo, uma corrida em movimento retilíneo é realmente uma competição para se saber de quem é a velocidade média, v_{mx}, com o maior módulo. O prêmio vai para o competidor capaz de percorrer o deslocamento Δx do início ao fim no menor intervalo de tempo Δt (Figura 2.4).

Mas a velocidade média de uma partícula durante um intervalo de tempo não pode nos informar nem o módulo, nem o sentido do movimento em cada instante do intervalo de tempo. Para isso, é necessário definir a velocidade em um instante ou em um ponto específico ao longo da trajetória. Tal velocidade denomina-se **velocidade instantânea** e precisa ser definida cuidadosamente.

ATENÇÃO Qual é a duração de um instante? Note que a palavra 'instante' possui um significado físico diferente do seu significado na vida cotidiana. Você poderia usar a frase 'durou um breve instante' para designar um fato ocorrido em um curto intervalo de tempo. Contudo, em física, um instante não possui nenhuma duração; ele se refere a um único valor definido para o tempo.

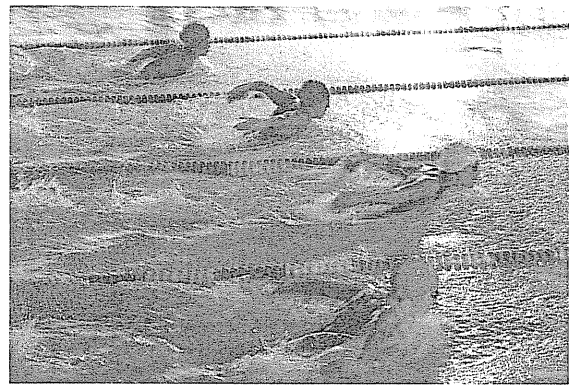


Figura 2.4 O vencedor de uma competição de natação de 50 m é aquele que possui uma velocidade média cujo módulo é o maior de todos, ou seja, o nadador que percorrer a distância Δx de 50 m no menor intervalo de tempo Δt.

Para achar a velocidade instantânea do carro no ponto P_1 indicado na Figura 2.1, imaginamos que o ponto P_2 se aproxima continuamente do ponto P_1 e calculamos a velocidade média $v_{mx} = \Delta x/\Delta t$ nos deslocamentos e nos intervalos de tempo cada vez menores. Tanto Δx quanto Δt tornam-se muito pequenos, mas a razão entre eles não se torna necessariamente muito pequena. Em linguagem matemática, o limite de $\Delta x/\Delta t$ quando Δt tende a zero denomina-se **derivada** de x em relação a t e é escrito como dx/dt. *A velocidade instantânea é o limite da velocidade média quando o intervalo de tempo tende a zero; ela é igual à taxa de variação da posição com o tempo.* Usaremos o símbolo v_x, sem nenhum 'm' subscrito, para designar a velocidade instantânea ao longo do eixo Ox:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (2.3)$$

(velocidade instantânea, movimento retilíneo).

Sempre supomos que o intervalo de tempo Δt é positivo, de modo que v_x possui o mesmo sinal de Δx. Quando o sentido positivo do eixo Ox é orientado da esquerda para a direita, um valor positivo de v indica que x é crescente e que o movimento ocorre da esquerda para a direita; um valor negativo de v indica que x é decrescente e que o movimento ocorre da direita para a esquerda. Um corpo pode ter valores de v e de x positivo ou negativo; x indica onde o corpo se encontra, enquanto v nos informa como ele se move (Figura 2.5).

A velocidade instantânea, assim como a velocidade média, é uma grandeza vetorial. A Equação (2.3) define seu componente x. No movimento retilíneo, todos os demais componentes da velocidade instantânea são nulos e, neste caso, costumamos dizer que v é simplesmente a velocidade instantânea. (No Capítulo 3, abordaremos o caso geral em que a velocidade instantânea pode ter componentes x, y e z não nulos.) Quando empregamos a palavra 'velocidade', normalmente queremos dizer velocidade instantânea, e não velocidade média, a menos que haja alguma especificação diferente.

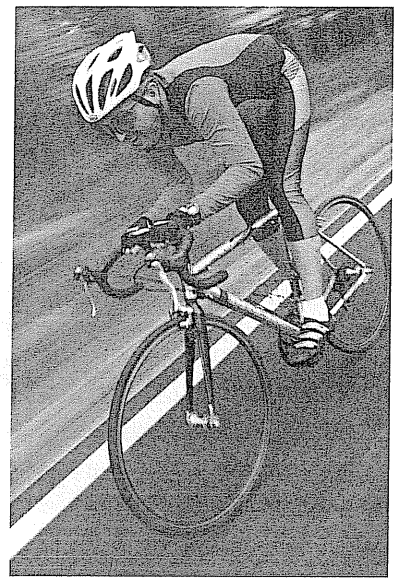


Figura 2.5 Mesmo quando se move para a frente, a velocidade instantânea deste ciclista pode ser negativa – caso ele se desloque em relação a um eixo orientado no sentido negativo do eixo *Ox*. Ao resolver um problema, a escolha de qual sentido é positivo depende exclusivamente de você.

Os termos 'vetor velocidade', 'velocidade' e 'velocidade escalar' são usados quase como sinônimos na linguagem cotidiana, mas na física estes termos possuem definições completamente diferentes. Usamos a expressão **velocidade escalar** para designar uma distância percorrida dividida pelo tempo, tanto no caso instantâneo quanto se considerando a média. Usamos o símbolo v sem *nenhum* subscrito para designar velocidade instantânea. Enquanto a *velocidade escalar* instantânea indica se o movimento é rápido ou lento, o *vetor velocidade* instantânea indica se o movimento é rápido ou lento *e* em qual direção e sentido ele ocorre. Por exemplo, suponha que duas partículas se movam na mesma direção, mas em sentidos contrários, uma com velocidade instantânea $v_x = 25$ m/s e a outra com $v_x = -25$ m/s. A velocidade escalar instantânea dessas partículas é a mesma, ou seja, 25 m/s. Como a velocidade escalar instantânea é o módulo do vetor velocidade instantânea, a velocidade escalar instantânea nunca pode ser negativa.

ATENÇÃO Velocidade escalar e velocidade média A velocidade escalar média *não* é igual ao módulo da velocidade média. Em 1994, Alexander Popov estabeleceu um recorde de velocidade na natação ao nadar 100,0 m em 46,74 s. A velocidade escalar média deste nadador foi (100,0 m/46,74 s) = 2,139 m/s. Porém, como ele nadou dois trechos de ida e volta em uma piscina de 50 m, seu vetor deslocamento total e o *vetor velocidade* média foram iguais a zero! Tanto a velocidade escalar média quanto a velocidade escalar instantânea são grandezas escalares, não vetoriais, visto que essas grandezas não informam nem a direção nem o sentido do movimento.

Exemplo 2.1

VELOCIDADE MÉDIA E VELOCIDADE INSTANTÂNEA Um leopardo africano está de tocaia a 20 m a leste de um jipe blindado de observação (Figura 2.6a). No instante $t = 0$, o leopardo começa a perseguir um antílope situado a 50 m a leste do observador. O leopardo corre ao longo de uma linha reta. A análise posterior de um vídeo mostra que durante os 2,0 s iniciais do ataque, a coordenada x do leopardo varia com o tempo de acordo com a equação $x = 20\text{ m} + (5{,}0\text{ m/s}^2)t^2$. a) Determine o deslocamento do leopardo durante o intervalo entre $t_1 = 1{,}0$ s e $t_2 = 2{,}0$ s. b) Ache a velocidade instantânea durante o mesmo intervalo de tempo. c) Ache a velocidade instantânea no tempo $t_1 = 1{,}0$ s, considerando $\Delta t = 0{,}1$ s, logo $\Delta t = 0{,}01$ s e, a seguir, $\Delta t = 0{,}001$ s. d) Deduza uma expressão geral para a velocidade instantânea em função do tempo e, a partir dela, calcule a velocidade para $t = 1{,}0$ s e $t = 2{,}0$ s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: usamos as definições de deslocamento, velocidade média e velocidade instantânea. A aplicação das duas primeiras envolve álgebra; a última requer o uso de cálculo para se extrair uma derivativa.

PREPARAR: a Figura 2.6b mostra nosso desenho do movimento do leopardo. Para analisar esse problema, usamos a Equação (2.1) para deslocamento, a Equação (2.2) para velocidade média e a Equação (2.3) para velocidade instantânea.

EXECUTAR: a) No instante $t_1 = 1{,}0$ s, a posição x_1 do leopardo é

$$x_1 = 20\text{ m} + (5{,}0\text{ m/s}^2)(1{,}0\text{ s})^2 = 25\text{ m}$$

No instante $t_2 = 2{,}0$ s, sua posição x_2 é

$$x_2 = 20\text{ m} + (5{,}0\text{ m/s}^2)(2{,}0\text{ s})^2 = 40\text{ m}$$

O deslocamento durante esse intervalo é

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 40\text{ m} - 25\text{ m} = 15\text{ m}$$

b) A velocidade média durante esse intervalo de tempo é

$$v_{mx} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{40\text{ m} - 25\text{ m}}{2{,}0\text{ s} - 1{,}0\text{ s}} = \frac{15\text{ m}}{1{,}0\text{ s}} = 15\text{ m/s}$$

c) Para $\Delta t = 0{,}1$ s, o intervalo de tempo é de $t_1 = 1{,}0$ s a $t_2 = 1{,}1$ s. No instante t_2, a posição é

$$x_2 = 20\text{ m} + (5{,}0\text{ m/s}^2)(1{,}1\text{ s})^2 = 26{,}05\text{ m}$$

A velocidade média durante esse intervalo de tempo é

$$v_{mx} = \frac{26{,}05\text{ m} - 25\text{ m}}{1{,}1\text{ s} - 1{,}0\text{ s}} = 10{,}5\text{ m/s}$$

Convidamos você a seguir o mesmo raciocínio e refazer os cálculos para os intervalos $t = 0{,}01$ s e $t = 0{,}001$ s. Os resultados são 10,05 m/s e 10,005 m/s, respectivamente. À medida que Δt se torna menor, a velocidade média fica cada vez mais próxima do valor 10,0 m/s. Logo, concluímos que a velocidade instantânea para $t = 1{,}0$ s é igual a 10,0 m/s.

d) Achamos a velocidade instantânea em função do tempo ao derivar a expressão de x em relação a t. Para qualquer n, a derivada de t^n é dada por nt^{n-1}, de modo que a derivada de t^2 é $2t$. Logo,

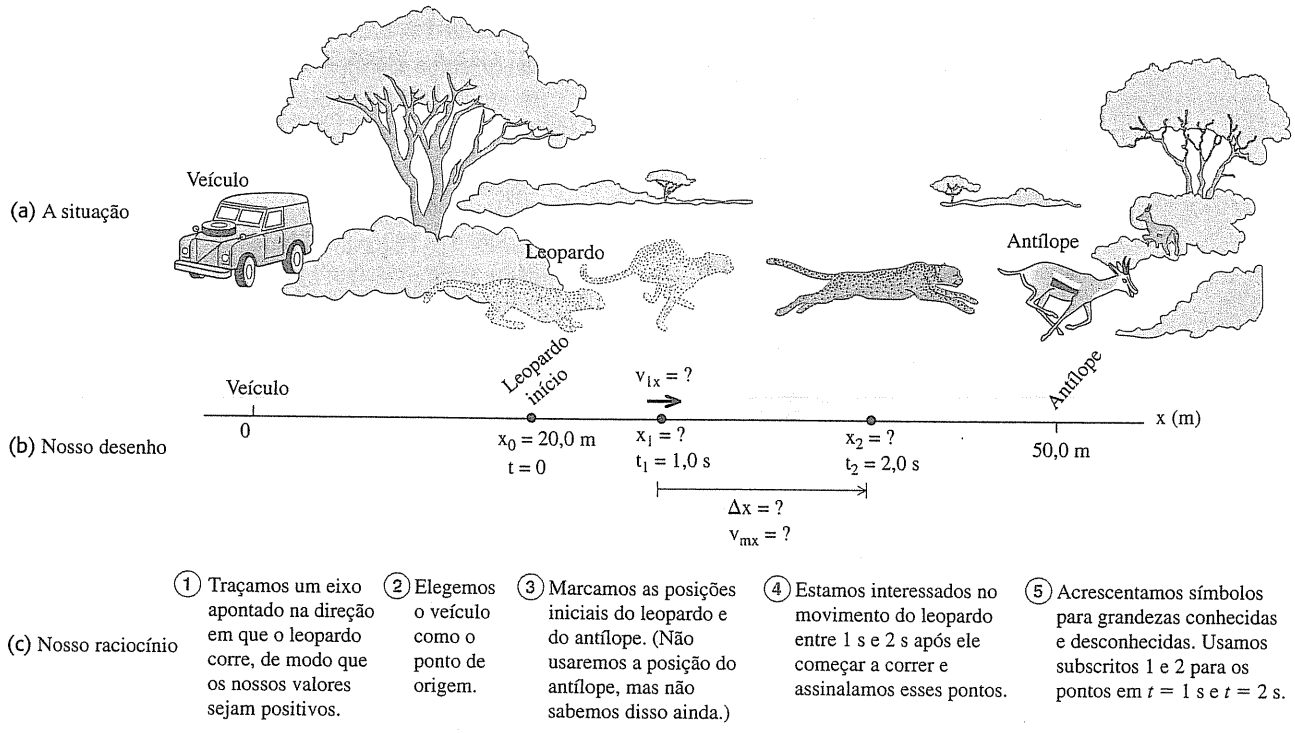


Figura 2.6 Leopardo atacando um antílope a partir de uma tocaia. Os animais não estão desenhados na mesma escala do eixo.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (5{,}0\ \text{m/s}^2)(2t) = (10\ \text{m/s}^2)t$$

No instante $t = 1{,}0$ s, $v_x = 10$ m/s, de acordo com o resultado obtido no item (c). No instante $t = 2{,}0$ s, $v_x = 20$ m/s.

AVALIAR: nossos resultados demonstram que o leopardo ganhou velocidade a partir de $t = 0$ (quando em repouso) para $t = 1{,}0$ s ($v_x = 10$ m/s) para $t = 2{,}0$ s ($v_x = 20$ m/s). Isso faz sentido; o leopardo percorreu apenas 5 m no intervalo $t = 0$ para $t = 1{,}0$ s, mas percorreu 15 m no intervalo $t = 1{,}0$ s para $t = 2{,}0$ s.

Cálculo da velocidade usando um gráfico *xt*

A velocidade de uma partícula também pode ser achada a partir de um gráfico da posição da partícula em função do tempo. Suponha que você deseja calcular a velocidade do carro de corrida no ponto P_1 indicado na Figura 2.1. Quando o ponto P_2 dessa figura se aproxima do ponto P_1, o ponto p_2 nos gráficos *xt* indicados nas figuras 2.7a e 2.7b se aproxima do ponto p_1 e a velocidade média é calculada em intervalos de tempo Δt cada vez menores. No limite $\Delta t \to 0$, indicado na Figura 2.7c, a inclinação da linha reta $p_1 p_2$ torna-se igual à inclinação da tangente da curva no ponto p_1. *Em um gráfico da posição da partícula em função do tempo no movimento retilíneo, a velocidade instantânea em qualquer ponto é igual à inclinação da tangente da curva nesse ponto.*

Quando a tangente é inclinada para cima e para a direita, como no gráfico *xt* da Figura 2.7c, sua inclinação e velocidade são positivas e o movimento ocorre no sentido positivo do eixo *Ox*. Quando a tangente é inclinada para baixo e para a direita, sua inclinação e velocidade são negativas e o movimento ocorre no sentido negativo do eixo *Ox*. Quando a tangente é horizontal, a inclinação é igual a zero e a velocidade é nula. A Figura 2.8 ilustra essas três possibilidades.

Note que a Figura 2.8 ilustra o movimento de uma partícula de dois modos. A Figura 2.8a mostra um gráfico *xt* e a Figura 2.8b mostra um exemplo de **diagrama do movimento**. Um diagrama do movimento indica a posição da partícula em diversos instantes do seu movimento (como se fosse um filme ou vídeo do movimento da partícula), bem como apresenta flechas para indicar as velocidades da partícula em cada instante. Tanto o gráfico *xt* quanto o diagrama do movimento são valiosas ferramentas para a compreensão do movimento. Você verificará que é conveniente usar ambos os recursos na solução de problemas que envolvem movimentos.

Teste sua compreensão da Seção 2.2 A Figura 2.9 é um gráfico *xt* do movimento de uma partícula. a) Classifique os valores da velocidade v_x da partícula nos pontos *P*, *Q*, *R* e *S*, do mais positivo para o mais negativo. b) Em quais pontos v_x é positiva? c) Em quais pontos v_x é negativa? d) Em quais pontos v_x é nula? e) Classifique os valores da velocidade escalar da partícula nos pontos *P*, *Q*, *R* e *S*, do mais rápido para o mais lento. ∎

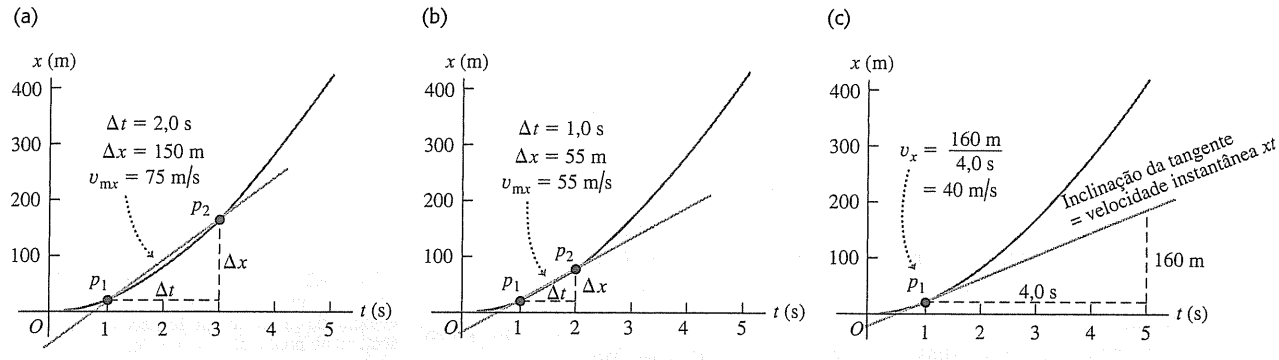


Figura 2.7 Usamos um gráfico *xt* para ir de (a) e (b), velocidade média, para (c), velocidade instantânea v_x. Em (c) achamos a inclinação da tangente para a curva *xt*, dividindo qualquer intervalo vertical (em unidades de distância) ao longo da tangente pelo intervalo horizontal correspondente (em unidades de tempo).

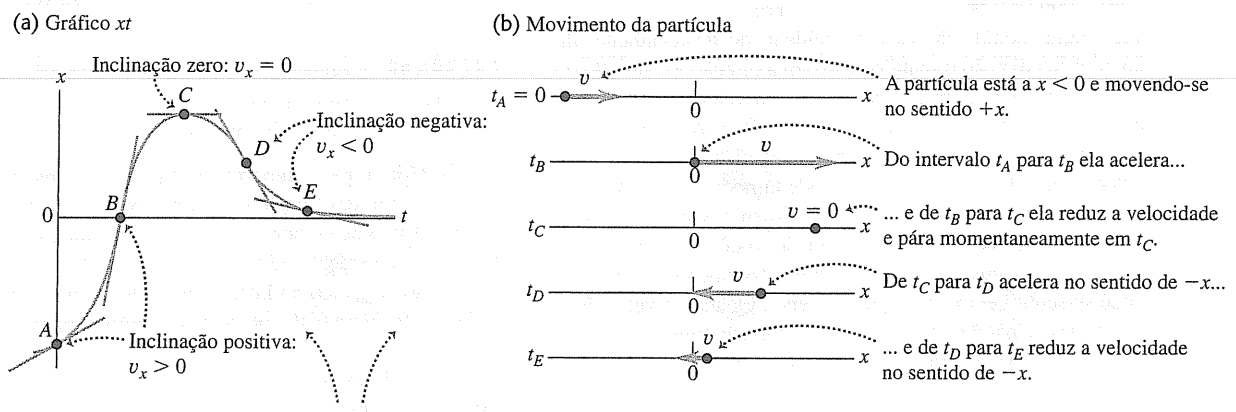


Figura 2.8 (a) Gráfico *xt* do movimento de uma certa partícula. A inclinação da tangente da curva em qualquer ponto fornece a velocidade nesse ponto. (b) Diagrama do movimento mostrando a posição e a velocidade da partícula em cada um dos cinco instantes indicados no gráfico *xt*.

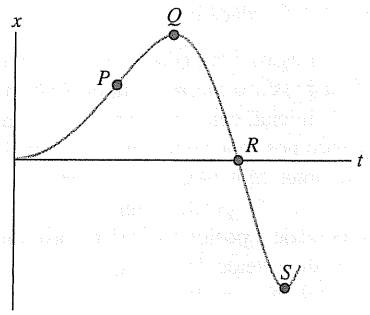


Figura 2.9 Gráfico *xt* para uma partícula.

2.3 Aceleração instantânea e aceleração média

Assim como a velocidade indica uma taxa de variação da posição com o tempo, a *aceleração* descreve uma taxa de variação da velocidade com o tempo. Como a velocidade, a aceleração também é uma grandeza vetorial. No movimento retilíneo, seu único componente diferente de zero está sobre o eixo ao longo do qual o movimento ocorre. Como veremos, a aceleração em um movimento retilíneo pode referir-se tanto ao aumento quanto à redução da velocidade.

Aceleração média

Vamos considerar novamente o movimento de uma partícula ao longo do eixo *Ox*. Suponha que em dado instante t_1 a partícula esteja em um ponto P_1 e possua um componente *x* da velocidade (instantânea) v_{1x}, e que em outro instante t_2 a partícula esteja em um ponto P_2 e possua um componente *x* da velocidade v_{2x}. Logo, a variação do componente *x* da velocidade é $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$ em um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

Definimos a **aceleração média** a_{mx} da partícula que se move de P_1 a P_2 como uma grandeza vetorial cujo

componente x é dado pela razão entre Δv_x, a variação do componente x da velocidade e o intervalo de tempo Δt

$$a_{mx} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad (2.4)$$

(aceleração média, movimento retilíneo).

Para o movimento retilíneo ao longo do eixo Ox chamamos a_{mx} simplesmente de aceleração média. (No Capítulo 3, encontraremos outros componentes do vetor aceleração média.)

Quando a velocidade é expressa em metros por segundo e o tempo em segundos, a aceleração média é expressa em metros por segundo por segundo, ou (m/s)/s. Normalmente escrevemos isso como m/s^2 e lemos 'metro por segundo ao quadrado'.

ATENÇÃO Aceleração versus velocidade Tome cuidado para não confundir aceleração com velocidade! A velocidade indica como a posição de um corpo varia com o tempo; é um vetor cujo módulo indica a velocidade do deslocamento do corpo e sua direção e sentido mostram a direção e o sentido do movimento. A aceleração indica como a velocidade e a direção do movimento variam com o tempo. Pode ser útil lembrar-se da frase: 'a aceleração está para a velocidade assim como a velocidade está para a posição.' Pode também ser útil se imaginar movendo com o corpo em movimento. Quando o corpo acelera para a frente e ganha velocidade, você se sentirá empurrado para trás; quando ele acelera para trás e perde velocidade, você se sentirá empurrado para a frente. Quando a velocidade é constante e não há aceleração, você não terá nenhuma dessas sensações. (Explicaremos essas sensações no Capítulo 4.)

Exemplo 2.2

ACELERAÇÃO MÉDIA Uma astronauta saiu de um ônibus espacial em órbita no espaço para testar uma nova unidade de manobra pessoal. À medida que ela se move em linha reta, seu companheiro a bordo do ônibus espacial mede sua velocidade a cada intervalo de 2,0 s, começando em $t = 1,0$ s, do seguinte modo:

t	v_x	t	v_x
1,0 s	0,8 m/s	9,0 s	−0,4 m/s
3,0 s	1,2 m/s	11,0 s	−1,0 m/s
5,0 s	1,6 m/s	13,0 s	−1,6 m/s
7,0 s	1,2 m/s	15,0 s	−0,8 m/s

Calcule a aceleração média e verifique se a velocidade da astronauta aumenta ou diminui para cada um dos seguintes intervalos de tempo: a) $t_1 = 1,0$ s até $t_2 = 3,0$ s; b) $t_1 = 5,0$ s até $t_2 = 7,0$ s; c) $t_1 = 9,0$ s até $t_2 = 11,0$ s; d) $t_1 = 13,0$ s até $t_2 = 15,0$ s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: necessitaremos da definição de aceleração média a_{mx}. Para determinar as variações em velocidade, usaremos o conceito de que a velocidade v é o módulo da velocidade instantânea v_x.

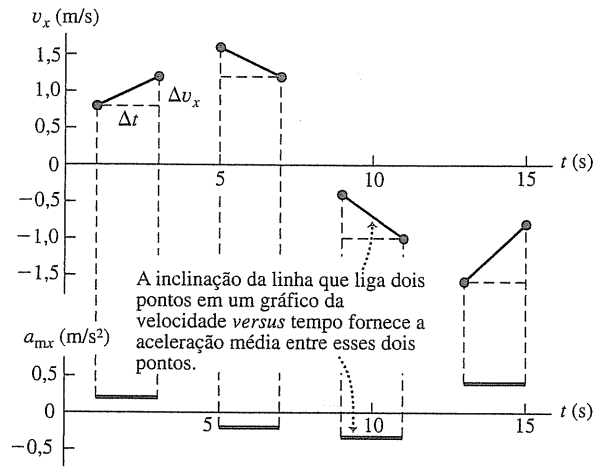


Figura 2.10 Nossos gráficos de velocidade *versus* tempo (parte superior) e aceleração média *versus* tempo (parte inferior) para a astronauta.

PREPARAR: a Figura 2.10 mostra os nossos gráficos. Usamos a Equação (2.4) para encontrar o valor de a_{mx} a partir da variação em *velocidade* para cada intervalo de tempo.

EXECUTAR: a parte superior da Figura 2.10 mostra um gráfico da velocidade em função do tempo. No gráfico v_x, a inclinação da linha que une os pontos do início e do final de cada intervalo fornece a aceleração média $a_{mx} = \Delta v_x/\Delta t$ para cada intervalo. Os valores de a_{mx} são indicados no gráfico na parte inferior da Figura 2.10. Para cada intervalo de tempo, temos:

a) $a_{mx} = (1,2 \text{ m/s} - 0,8 \text{ m/s})/(3,0 \text{ s} - 1,0 \text{ s}) = 0,2 \text{ m/s}^2$. A velocidade escalar (o módulo da velocidade instantânea) aumenta de 0,8 m/s para 1,2 m/s.

b) $a_{mx} = (1,2 \text{ m/s} - 1,6 \text{ m/s})/(7,0 \text{ s} - 5,0 \text{ s}) = -0,2 \text{ m/s}^2$. A velocidade diminui de 1,6 m/s para 1,2 m/s.

c) $a_{mx} = [-1,0 \text{ m/s} - (-0,4 \text{ m/s})]/(11,0 \text{ s} - 9,0 \text{ s}) = -0,3 \text{ m/s}^2$. A velocidade aumenta de 0,4 m/s para 1,0 m/s.

d) $a_{mx} = [-0,8 \text{ m/s} - (-1,6 \text{ m/s})]/(15,0 \text{ s} - 13,0 \text{ s}) = 0,4 \text{ m/s}^2$. A velocidade diminui de 1,6 m/s para 0,8 m/s.

AVALIAR: nossos resultados demonstram que quando a aceleração média possui o *mesmo* sentido (mesmo sinal algébrico) da velocidade inicial, como nos intervalos a) e c), a astronauta acelera; quando possui sentido *contrário* (sinal algébrico contrário), como nos intervalos b) e d), a astronauta diminui a aceleração. Logo, a aceleração positiva implica velocidade crescente, quando a velocidade é positiva [intervalo a)], mas redução da velocidade, quando a velocidade é negativa [intervalo d)]. Da mesma forma, a aceleração negativa implica velocidade crescente, quando a velocidade é negativa [intervalo c)], mas velocidade decrescente, quando a velocidade é positiva [intervalo b)].

Aceleração instantânea

Podemos agora definir a **aceleração instantânea** seguindo o mesmo procedimento adotado quando definimos velocidade instantânea. Considere a situação: um piloto de um carro de corrida acaba de entrar na reta final

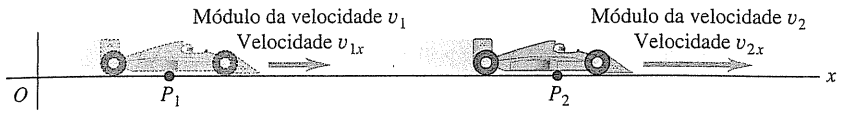


Figura 2.11 Um carro de corrida do Grande Prêmio na reta final.

do *Grand Prix* como ilustra a Figura 2.11. Para definir a aceleração instantânea no ponto P_1, imaginamos que o ponto P_2 da Figura 2.11 se aproxima continuamente do ponto P_1, de modo que a aceleração média seja calculada em intervalos de tempo cada vez menores. *A aceleração instantânea é o limite da aceleração média quando o intervalo de tempo tende a zero.* Na linguagem do cálculo diferencial, *a aceleração instantânea é igual à taxa de variação da velocidade com o tempo.* Logo:

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \qquad (2.5)$$

(aceleração instantânea, movimento retilíneo).

Note que a_x na Equação (2.5) é de fato o componente x do vetor **aceleração instantânea**; no movimento retilíneo, todos os demais componentes deste vetor são iguais a zero. A partir de agora, quando usarmos o termo 'aceleração' estaremos designando a aceleração instantânea, não a aceleração média.

Exemplo 2.3

ACELERAÇÃO MÉDIA E ACELERAÇÃO INSTANTÂNEA Suponha que a velocidade v_x do carro na Figura 2.11 em qualquer instante t seja dada pela equação

$$v_x = 60\ \text{m/s} + (0{,}50\ \text{m/s}^3)t^2$$

a) Ache a variação da velocidade média do carro no intervalo de tempo entre $t_1 = 1{,}0$ s e $t_2 = 3{,}0$ s. b) Ache a aceleração média do carro nesse intervalo de tempo. c) Ache a aceleração instantânea do carro para $t_1 = 1{,}0$ s, considerando $\Delta t = 0{,}1$ s, $\Delta t = 0{,}01$ s e $\Delta t = 0{,}001$ s. d) Deduza uma expressão geral para a aceleração instantânea em função do tempo e, a partir dela, calcule a aceleração para $t = 1{,}0$ s e $t = 3{,}0$ s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este exemplo é análogo ao Exemplo 2.1 da Seção 2.2. (Este é um bom momento para revisar aquele exemplo.) Naquele caso, encontramos a velocidade média ao longo de intervalos cada vez mais curtos a partir da variação da posição e determinamos a velocidade instantânea pela diferenciação da posição como uma função do tempo. Neste caso, encontramos a aceleração *média* da variação na velocidade em um intervalo de tempo. Da mesma forma, encontramos a aceleração *instantânea* pela diferenciação da velocidade como uma função do tempo.

PREPARAR: usaremos a Equação (2.4) para aceleração média e a Equação (2.5) para aceleração instantânea.

EXECUTAR: a) inicialmente achamos a velocidade em cada instante substituindo cada valor de t na equação. Para $t_1 = 1{,}0$ s,

$$v_{1x} = 60\ \text{m/s} + (0{,}50\ \text{m/s}^3)(1{,}0\ \text{s})^2 = 60{,}5\ \text{m/s}$$

Para $t_2 = 3{,}0$ s,

$$v_{2x} = 60\ \text{m/s} + (0{,}50\ \text{m/s}^3)(3{,}0\ \text{s})^2 = 64{,}5\ \text{m/s}$$

A variação da velocidade Δv_x é dada por

$$\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x} = 64{,}5\ \text{m/s} - 60{,}5\ \text{m/s} = 4{,}0\ \text{m/s}$$

O intervalo de tempo é de $\Delta t = 3{,}0\ \text{s} - 1{,}0\ \text{s} = 2{,}0$ s.

b) A aceleração média durante esse intervalo de tempo é

$$a_{mx} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{4{,}0\ \text{m/s}}{2{,}0\ \text{s}} = 2{,}0\ \text{m/s}^2$$

Durante o intervalo de tempo de $t_1 = 1{,}0$ s a $t_2 = 3{,}0$ s, a velocidade e a aceleração média possuem o mesmo sinal (nesse caso, positivo) e o carro acelera.

c) Quando $\Delta t = 0{,}1$ s, $t_2 = 1{,}1$ s e nós encontramos:

$$v_{2x} = 60\ \text{m/s} + (0{,}50\ \text{m/s}^3)(1{,}1\ \text{s})^2 = 60{,}605\ \text{m/s}$$

$$\Delta v_x = 0{,}105\ \text{m/s}$$

$$a_{mx} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{0{,}105\ \text{m/s}}{0{,}1\ \text{s}} = 1{,}05\ \text{m/s}^2$$

Convidamos você a seguir o mesmo raciocínio e refazer os cálculos para os intervalos $\Delta t = 0{,}01$ s e $\Delta t = 0{,}001$ s; os resultados são $a_{mx} = 1{,}005\ \text{m/s}^2$ e $a_{mx} = 1{,}0005\ \text{m/s}^2$, respectivamente. À medida que Δt se torna cada vez menor, a aceleração média fica cada vez mais próxima do valor $1{,}0\ \text{m/s}^2$. Logo, concluímos que a aceleração instantânea para $t = 1{,}0$ s é igual a $1{,}0\ \text{m/s}^2$.

d) A aceleração instantânea é $a_x = dv_x/dt$, a derivada de uma constante é igual a zero e a derivada de t^2 é $2t$. Usando estes valores, obtemos:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}[60\ \text{m/s} + (0{,}50\ \text{m/s}^3)t^2]$$

$$= (0{,}50\ \text{m/s}^3)(2t) = (1{,}0\ \text{m/s}^3)t$$

Para $t = 1{,}0$ s,

$$a_x = (1{,}0\ \text{m/s}^3)(1{,}0\ \text{s}) = 1{,}0\ \text{m/s}^2$$

Para $t = 3{,}0$ s,

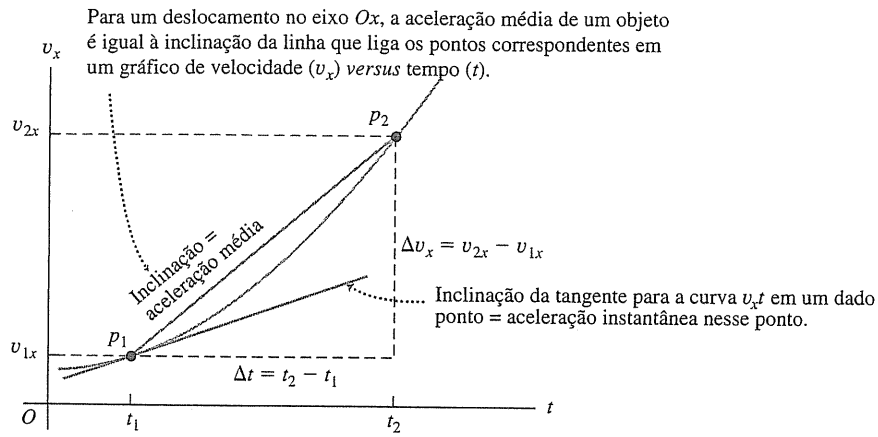
$$a_x = (1{,}0\ \text{m/s}^3)(3{,}0\ \text{s}) = 3{,}0\ \text{m/s}^2$$

AVALIAR: note que nenhuma dessas acelerações possui valor igual ao da aceleração média obtida no item b). Isso porque a aceleração instantânea desse carro varia com o tempo. A taxa de variação da aceleração com o tempo é às vezes denominada 'solavanco'.

Cálculo da aceleração usando um gráfico $v_x t$ ou um gráfico xt

Na Seção 2.2 interpretamos a velocidade média e a velocidade instantânea de uma partícula em termos da inclinação em um gráfico de posição em função do tempo.

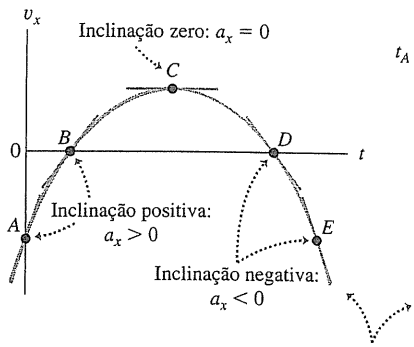
Figura 2.12 Gráfico $v_x t$ do movimento indicado na Figura 2.11.



Analogamente, podemos ter melhor noção dos conceitos de aceleração média e de aceleração instantânea usando um gráfico com a velocidade instantânea v_x no eixo vertical e o tempo t no eixo horizontal, ou seja, um **gráfico $v_x t$** (Figura 2.12). Os pontos nesse gráfico designados por p_1 e p_2 correspondem aos pontos P_1 e P_2 indicados na Figura 2.11. A aceleração média $a_{mx} = \Delta v_x / \Delta t$ durante esse intervalo é a inclinação da linha $p_1 p_2$. À medida que o ponto P_2 da Figura 2.11 se aproxima do ponto P_1, o ponto p_2 no gráfico $v_x t$ indicado na Figura 2.12 se aproxima do ponto p_1 e a inclinação da linha reta $p_1 p_2$ torna-se igual à inclinação da tangente da curva no ponto p_1. Portanto, *em um gráfico da velocidade em função do tempo, a aceleração instantânea em qualquer ponto é igual à inclinação da tangente da curva nesse ponto.* Na Figura 2.12, tangentes traçadas em diferentes pontos ao longo da curva possuem diferentes inclinações, de modo que a aceleração instantânea varia com o tempo.

ATENÇÃO Os sinais de aceleração e velocidade Note que o sinal algébrico da aceleração *não* é suficiente para informar a você se um corpo está em movimento acelerado ou retardado. Você deve comparar o sinal da velocidade com o sinal da aceleração. Quando v_x e a_x possuem o *mesmo* sinal, o movimento do corpo está sendo acelerado. Quando ambos forem positivos, o corpo estará se movendo no sentido positivo com uma velocidade crescente. Quando ambos forem negativos, o corpo estará se movendo no sentido negativo com uma velocidade que se torna cada vez mais negativa, e novamente a velocidade é crescente. Quando v_x e a_x possuem sinais *opostos*, o movimento do corpo é retardado. Quando v_x é positivo e a_x é negativo, o corpo se desloca no sentido positivo com velocidade decrescente; quando v_x é negativo e a_x é positivo, ele se desloca no sentido negativo com uma velocidade que se torna menos negativa, e novamente o movimento do corpo é retardado. A Figura 2.13 ilustra algumas dessas possibilidades.

(a) Gráfico $v_x t$ para o deslocamento de um objeto pelo eixo Ox



Quanto maior a inclinação (positiva ou negativa) do gráfico $v_x t$ de um objeto, maior a aceleração do objeto no sentido positivo ou negativo de x.

(b) Posição, velocidade e aceleração do objeto no eixo x

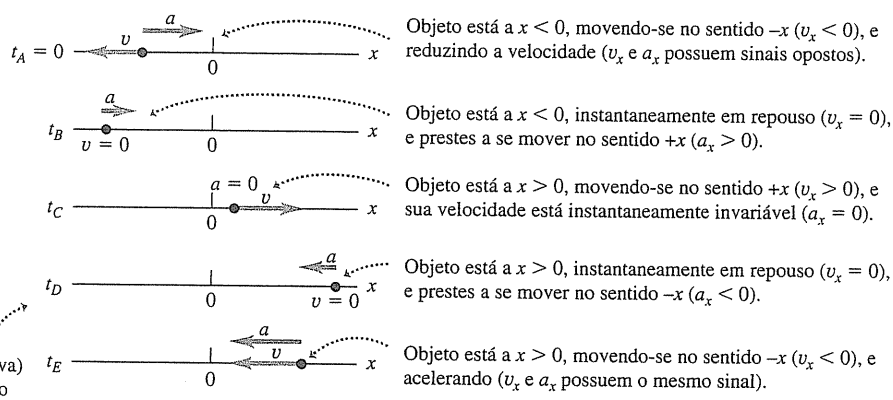


Figura 2.13 (a) Gráfico $v_x t$ do movimento de uma partícula diferente daquela mostrada na Figura 2.8. A inclinação da tangente em qualquer ponto é igual à aceleração do ponto considerado. (b) Diagrama do movimento mostrando a posição, a velocidade e a aceleração da partícula em cada um dos instantes indicados no gráfico $v_x t$. As posições estão de acordo com o gráfico $v_x t$; por exemplo, de t_A a t_B a velocidade é negativa, de modo que em t_B a partícula possui um valor de x mais negativo do que em t_A.

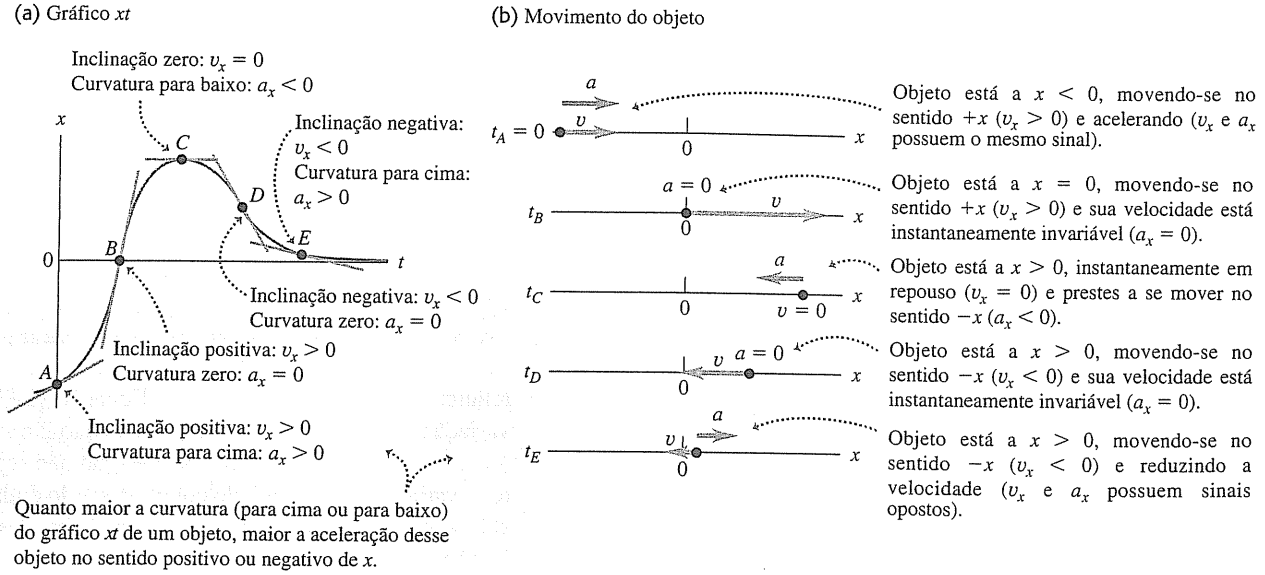


Figura 2.14 a) O mesmo gráfico *xt* indicado na Figura 2.8a. A velocidade é igual à inclinação do gráfico, e a aceleração é dada pela *concavidade* ou *curvatura* do gráfico. b) Diagrama do movimento mostrando a posição, a velocidade e a aceleração da partícula em cada um dos instantes indicados no gráfico *xt*.

O termo '*desaceleração*' é algumas vezes usado para designar diminuição de velocidade. Como isso pode corresponder a um valor de a_x positivo ou negativo, dependendo do sinal de v_x, evitamos esse termo.

Podemos também estudar a aceleração de uma partícula a partir do gráfico de sua *posição versus* tempo. Como $a_x = dv_x/dt$ e $v_x = dx/dt$, podemos escrever:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (2.6)$$

Ou seja, a_x é a derivada de segunda ordem de x em relação a t. A derivada de segunda ordem de qualquer função é relacionada com a *concavidade* ou *curvatura* do gráfico dessa função. Em um ponto no qual o gráfico *xt* seja côncavo para cima (encurvado para cima), a aceleração é positiva e v_x é crescente. Em um ponto no qual o gráfico *xt* seja côncavo para baixo (encurvado para baixo), a aceleração é negativa e v_x é decrescente. Em um ponto no qual o gráfico *xt* não possui nenhuma curvatura, como, por exemplo, em um ponto de inflexão, a aceleração é igual a zero e a velocidade é constante. Essas três possibilidades são indicadas na Figura 2.14.

Examinando a curvatura de um gráfico *xt* torna-se fácil determinar o *sinal* da aceleração. Essa técnica é menos útil para a determinação do módulo da aceleração, visto que a curvatura de um gráfico é difícil de ser determinada com exatidão.

Teste sua compreensão da Seção 2.3 Analise novamente o gráfico *xt* na Figura 2.9, ao final da Seção 2.2. a) Em quais dos pontos *P, Q, R* e *S* a aceleração a_x é positiva? b) Em quais dos pontos a aceleração é negativa? c) Em quais pontos a aceleração parece ser zero? d) Em cada ponto afirme se a velocidade está aumentando, diminuindo ou constante. ▮

2.4 Movimento com aceleração constante

O movimento acelerado mais simples é o movimento retilíneo com aceleração *constante*. Neste caso, a velocidade varia com a mesma taxa durante o movimento. É um caso especial, embora ocorra freqüentemente na natureza. Um corpo em queda livre possui uma aceleração constante quando os efeitos da resistência do ar são desprezados. O mesmo ocorre quando um corpo escorrega ao longo de um plano inclinado ou ao longo de uma superfície horizontal com atrito. Um movimento retilíneo com aceleração quase constante também ocorre em situações artificiais ou tecnológicas, como no caso do movimento de um caça a jato sendo lançado pela catapulta de um porta-aviões.

A Figura 2.15 é um diagrama do movimento que mostra a posição, a velocidade e a aceleração para uma partícula que se move com aceleração constante. Nas figuras 2.16 e 2.17 mostramos esse mesmo diagrama por meio de gráficos. Como a aceleração a é constante, o **gráfico *at*** (gráfico da aceleração *versus* o tempo) indicado na Figura 2.16 é uma linha horizontal. O gráfico da velocidade versus o tempo possui uma *inclinação* constante, e, portanto, o gráfico *vt* é uma linha reta (Figura 2.16). O gráfico da velocidade *versus* tempo, ou $v_x t$, tem *inclinação* constante porque a aceleração é constante, então seu gráfico é uma linha reta (Figura 2.17).

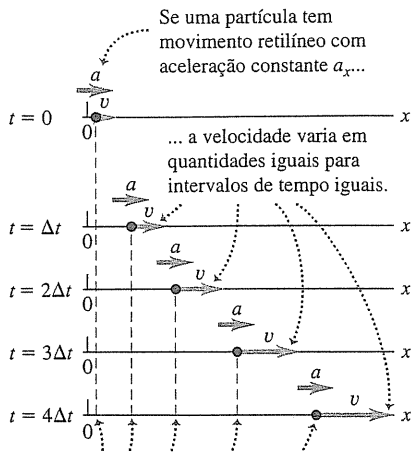


Figura 2.15 Diagrama do movimento para uma partícula que se move em linha reta na direção positiva de x com aceleração constante positiva a. A posição, a velocidade e a aceleração são indicadas em cinco intervalos de tempo iguais.

Quando a aceleração a_x é constante, a aceleração média a_{mx} para qualquer intervalo de tempo é a mesma que a_x. Assim é fácil deduzir equações para a posição x e para a velocidade v_x em função do tempo. Para encontrar uma expressão para v_x, primeiro substituímos a_{mx} na Equação (2.4) por a_x:

$$a_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} \tag{2.7}$$

Agora faça $t_1 = 0$ e suponha que t_2 seja um instante posterior arbitrário t. Usamos o símbolo v_{0x} para a velocidade no instante $t = 0$; a velocidade para qualquer instante t é v_x. Então, a Equação (2.7) torna-se:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0} \quad \text{ou}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t \tag{2.8}$$

(somente para aceleração constante)

Podemos interpretar essa equação do seguinte modo: a aceleração a_x é a taxa constante da variação da velocidade, isto é, a variação da velocidade por unidade de tempo. O termo $a_x t$ é o produto da variação da velocidade por unidade de tempo, a_x, multiplicada pelo tempo t. Portanto, indica a variação *total* da velocidade desde o instante inicial $t = 0$ até um instante posterior t. A velocidade v_x em qualquer instante t é igual à velocidade inicial v_{0x} (para $t = 0$) mais a variação da velocidade $a_x t$ (Figura 2.17).

Outra interpretação da Equação (2.8) é que a variação da velocidade $v_x - v_{0x}$ da partícula desde $t = 0$ até um instante posterior t é igual à *área* sob a curva entre esses limites em um gráfico $a_x t$. Na Figura 2.16, a área sob a curva no gráfico de aceleração *versus* o tempo é indicada pelo retângulo com altura a_x e comprimento t. A área desse

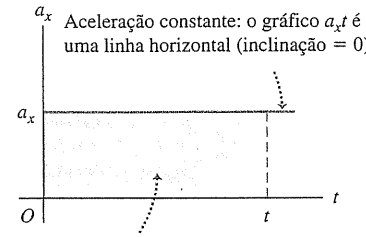


Figura 2.16 Gráfico da aceleração *versus* tempo (*at*) para uma partícula que se move em linha reta com aceleração constante positiva a_x.

retângulo é igual a $a_x t$, que pela Equação (2.8) é igual à variação da velocidade $v_x - v_{0x}$. Na Seção 2.6 verificamos que mesmo no caso em que a aceleração não seja constante, a variação da velocidade continua sendo dada pela área sob a curva em um gráfico $a_x t$, embora nesse caso a Equação (2.8) não seja válida.

A seguir queremos deduzir uma expressão para a posição x da partícula que se move com aceleração constante. Para isso usaremos duas diferentes expressões para a velocidade média v_{mx} da partícula desde $t = 0$ até um instante posterior t. A primeira expressão resulta da definição de v_{mx}, Equação (2.2), que permanece válida tanto no caso de aceleração constante quanto no caso de aceleração variável. Denominamos a posição no instante $t = 0$ de *posição inicial* e a representamos por x_0. Designamos simplesmente por x a posição em um instante posterior t. Para o intervalo de tempo $\Delta t = t - 0$ e para o deslocamento correspondente $\Delta x = x - x_0$, a Equação (2.2) fornece

$$v_{mx} = \frac{x - x_0}{t} \tag{2.9}$$

Podemos também deduzir uma segunda expressão para v_{mx} válida somente no caso de aceleração constante, de modo que o gráfico $v_x t$ seja uma linha reta (como na Figura 2.17) e a velocidade varie com uma taxa constante. Nesse caso, a velocidade média durante qualquer intervalo de tempo é simplesmente a média aritmética desde o início até o instante final. Para o intervalo de tempo de 0 a t,

$$v_{mx} = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \tag{2.10}$$

(somente para aceleração constante)

(Essa equação *não* vale quando a aceleração varia e o gráfico $v_x t$ é uma curva, como indica a Figura 2.13.) Sabemos também que no caso de aceleração constante, a velocidade v_x em qualquer instante t é dada pela Equação (2.8). Substituindo esta expressão por v_x na Equação (2.10), encontramos:

$$v_{mx} = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_{0x} + a_x t)$$

$$= v_{0x} + \frac{1}{2} a_x t \tag{2.11}$$

(somente para aceleração constante)

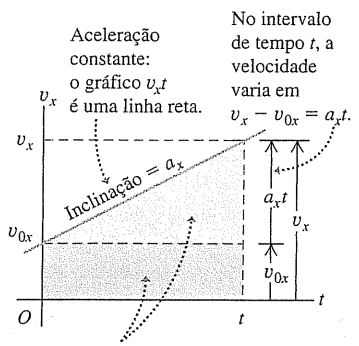


Figura 2.17 Gráfico da velocidade *versus* tempo ($v_x t$) para uma partícula que se move em linha reta com aceleração constante positiva a_x. A velocidade inicial v_{0x} também é positiva neste caso.

Finalmente, igualando a Equação (2.9) com a Equação (2.11) e simplificando o resultado, obtemos:

$$v_{0x} + \frac{1}{2}a_x t = \frac{x - x_0}{t} \qquad \text{ou}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad (2.12)$$

(somente para aceleração constante).

Esta equação (2.12) mostra que, se para um instante inicial $t = 0$ a partícula está em uma posição x_0 e possui velocidade v_{0x}, sua nova posição em qualquer instante t é dada pela soma de três termos — a posição inicial x_0, mais a distância $v_{0x}t$ que ela percorreria caso a velocidade permanecesse constante, mais uma distância adicional $\frac{1}{2}a_x t^2$ produzida pela variação da velocidade.

Um gráfico da Equação (2.12), que é um gráfico xt para movimento com aceleração constante (Figura 2.18a), é sempre uma *parábola*. A Figura 2.18b mostra esse gráfico. A curva intercepta o eixo vertical (eixo Ox) em x_0, na posição $t = 0$. A inclinação da tangente em $t = 0$ é igual a v_{0x}, a velocidade inicial, e a inclinação da tangente para qualquer tempo t é igual à velocidade v_x em qualquer tempo. A inclinação e a velocidade são continuamente crescentes, de modo que a aceleração a_x é positiva; também se pode verificar isso porque o gráfico na Figura 2.18b é côncavo para cima (encurvado para cima). Se a_x é negativo, o gráfico xt é uma parábola que é côncava para baixo (encurvada para baixo).

Quando a aceleração é zero, o gráfico xt é uma linha reta; quando a aceleração é constante, o termo adicional $\frac{1}{2}a_x t^2$ na Equação (2.12) para x em função de t encurva o gráfico para formar uma parábola (Figura 2.19a). Podemos analisar o gráfico $v_x t$ da mesma forma. Quando a aceleração é zero, esse gráfico é uma linha horizontal (a velocidade é constante); acrescentando-se uma aceleração constante, temos uma inclinação para o gráfico $v_x t$ (Figura 2.19b).

Do mesmo modo que a velocidade é dada pela área sob um gráfico $a_x t$, o deslocamento — isto é, a variação da posição — é igual à área sob um gráfico $v_x t$. Ou seja, o deslocamento $x - x_0$ de uma partícula desde $t = 0$ até um instante posterior t é igual à área sob um gráfico $v_x t$ entre esses dois limites de tempo. Na Figura 2.17, a área sob o gráfico é composta pela soma da área do retângulo de lado vertical v_{0x} e lado horizontal t e com a área do triângulo retângulo com um lado vertical $a_x t$ e um lado horizontal t. A área do retângulo é $v_{0x}t$ e a área do triângulo é $\frac{1}{2}(a_x t)(t) = \frac{1}{2}a_x t^2$, de modo que a área total sob gráfico $v_x t$ é:

$$x - x_0 = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

de acordo com a Equação (2.12).

O deslocamento durante um dado intervalo de tempo pode ser sempre calculado pela área sob a curva $v_x t$. Isso é verdade mesmo quando a aceleração *não* é constante, embora para esses casos a Equação (2.12) não possa ser aplicada. (Isso será demonstrado na Seção 2.6.)

Podemos testar as equações (2.8) e (2.12) para verificar se elas estão coerentes com a hipótese da aceleração constante derivando a Equação (2.12). Encontramos

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x} + a_x t$$

que é a Equação (2.8). Derivando mais uma vez, encontramos simplesmente

(a) Um carro de corrida se desloca na direção de x com uma aceleração constante.

(b) O gráfico xt

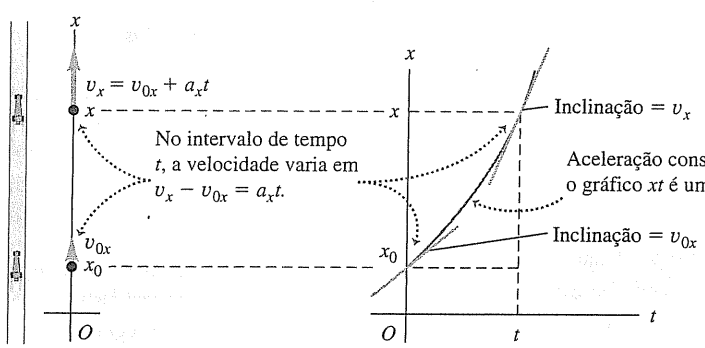


Figura 2.18 a) Movimento em linha reta com aceleração constante. b) Gráfico de posição *versus* tempo (xt) para esse movimento (o mesmo que o mostrado nas figuras 2.15, 2.16 e 2.17). Para esse movimento, a posição inicial x_0, a velocidade inicial v_{0x} e a aceleração a_x são todas positivas.

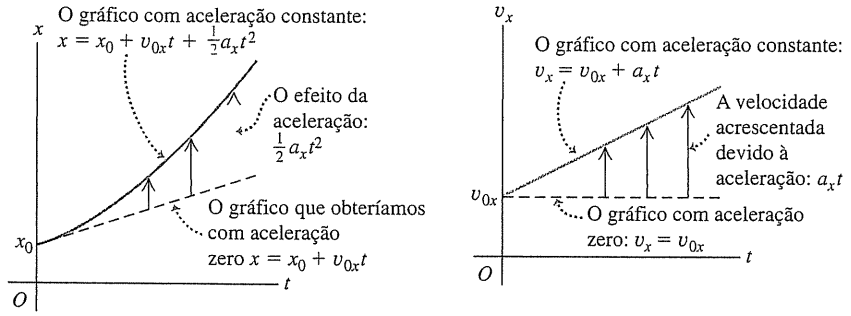


Figura 2.19 como uma aceleração constante afeta a) o gráfico xt e b) o gráfico v_xt de um corpo.

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x$$

que concorda com a definição de aceleração instantânea.

Em muitos problemas, é conveniente usar uma equação que envolva a posição, a velocidade e a (constante) aceleração que não leve em conta o tempo. Para obtê-la, inicialmente explicitamos t na Equação (2.8); a seguir, a expressão obtida deve ser substituída na Equação (2.12) e simplificada:

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$$

$$x = x_0 + v_{0x}\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right) + \tfrac{1}{2}a_x\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right)^2$$

Transferindo o termo x_0 para o membro esquerdo e multiplicando por $2a_x$:

$$2a_x(x - x_0) = 2v_{0x}v_x - 2v_{0x}^2 + v_x^2 - 2v_{0x}v_x + v_{0x}^2$$

Finalmente, ao simplificar obtemos

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \qquad (2.13)$$

(somente para aceleração constante).

Podemos obter uma outra equação útil igualando as duas expressões de v_{mx}, dadas pelas equações (2.9) e (2.10), e multiplicando os dois membros por t. Ao fazer isto, encontramos

$$x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right)t \qquad (2.14)$$

(somente para aceleração constante).

Note que a Equação (2.14) não contém a aceleração a_x. Essa equação pode ser útil quando a_x possuir um valor constante, porém desconhecido.

As equações (2.8), (2.12), (2.13) e (2.14) são as *equações do movimento com aceleração constante*. Usando essas equações, podemos resolver *qualquer* problema que envolva o movimento retilíneo com aceleração constante.

Para o caso específico do movimento com aceleração constante esquematizado na Figura 2.15 e cujos gráficos são apresentados nas figuras 2.16, 2.17 e 2.18, os valores x_0, v_{0x} e a_x são todos positivos. Convidamos você a refazer essas figuras considerando um, dois ou três desses valores negativos.

Um caso especial de movimento com aceleração constante ocorre quando a aceleração é igual a *zero*. Nesse caso, a velocidade é constante e as equações do movimento tornam-se simplesmente

$$v_x = v_{0x} = \text{constante}$$
$$x = x_0 + v_xt$$

Estratégia para a solução de problemas 2.1

MOVIMENTO COM ACELERAÇÃO CONSTANTE

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: na maioria dos problemas de movimento retilíneo, você pode usar as equações de aceleração constante. Mas, eventualmente, você encontrará uma situação em que a aceleração *não é* constante. Nesse caso, necessitará de uma abordagem diferente (Seção 2.6).

PREPARAR *o problema* seguindo estes passos:

1. Primeiro você deve decidir a origem e a direção do eixo, assinalando qual é seu sentido positivo. Em geral, é mais simples colocar a partícula na origem para $t = 0$; então $x_0 = 0$. É sempre útil fazer um diagrama do movimento mostrando essas escolhas e algumas posições posteriores da partícula.
2. Lembre-se de que sua escolha do sentido positivo do eixo automaticamente determina o sentido positivo da velocidade e da aceleração. Se o eixo x for orientado para a direita da origem, então v_x e a_x também serão positivos quando tiverem esse sentido.
3. Reformule o problema em palavras e traduza essa descrição em símbolos e equações. *Quando* uma partícula atinge um dado ponto (ou seja, qual é o valor de t)? Onde está a partícula quando sua velocidade possui um valor específico (ou seja, qual é o valor de x quando o valor de v_x é especificado)? O exemplo 2.4 pergunta 'Onde está o motociclista quando sua velocidade é de 25 m/s?' Traduzindo em símbolos, a pergunta é 'Qual é o valor de x quando $v_x = 25$ m/s?'
4. Faça uma lista de grandezas tais como x, x_0, v_x, v_{0x}, a_x e t. Em geral, algumas delas serão conhecidas e outras desconhecidas. Escreva os valores das conhecidas e decida quais das

desconhecidas são incógnitas. Procure informações implícitas. Por exemplo, 'um carro pára em um semáforo' normalmente significa $v_{0x} = 0$.

EXECUTAR *a solução:* escolha uma dentre as equações (2.8), (2.12), (2.13) e (2.14) que contenha apenas uma das incógnitas. Usando somente símbolos, resolva a equação explicitando o valor da incógnita. Então substitua os valores conhecidos e calcule o valor da incógnita. Algumas vezes você terá de resolver um sistema de duas equações com duas incógnitas.

AVALIAR *sua resposta:* faça uma análise rigorosa dos resultados para verificar se eles fazem sentido. Estão dentro dos limites de valores que você esperava?

Exemplo 2.4

CÁLCULOS ENVOLVENDO ACELERAÇÃO CONSTANTE Um motociclista se dirige para o leste ao longo de uma cidade do Estado de São Paulo e acelera a moto depois de passar pela placa que indica os limites da cidade (Figura 2.20). Sua aceleração é constante e igual a 4,0 m/s^2. No instante $t = 0$ ele está a 5,0 m a leste do sinal, movendo-se para leste a 15 m/s. a) Determine sua posição e velocidade para $t = 2,0$ s. b) Onde está o motociclista quando sua velocidade é de 25 m/s?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o enunciado do problema revela que a aceleração é constante, portanto podemos usar as equações de aceleração constante.

PREPARAR: escolhemos o sinal demarcador do limite da cidade como origem das coordenadas ($x = 0$) e orientamos o eixo $+Ox$ de oeste para leste (veja a Figura 2.20, que também funciona como um diagrama do movimento). No instante inicial $t = 0$, a posição inicial é $x_0 = 5,0$ m e a velocidade inicial é $v_{0x} = 15$ m/s. A aceleração constante é $a_x = 4,0$ m/s^2. As incógnitas na parte a) são a posição x e a velocidade v_x em um instante posterior $t = 2,0$ s; a incógnita na parte b) é o valor de x quando $v_x = 25$ m/s.

EXECUTAR: a) podemos determinar a posição x em $t = 2,0$ s usando a Equação (2.12), que fornece a posição x em função do tempo t:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ &= 5,0\text{ m} + (15\text{ m/s})(2,0\text{ s}) + \frac{1}{2}(4,0\text{ m/s}^2)(2,0\text{ s})^2 \\ &= 43\text{ m} \end{aligned}$$

Podemos achar a velocidade v_x no mesmo instante, usando a Equação (2.8), que fornece a velocidade v_x em função do tempo t:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t \\ &= 15\text{ m/s} + (4,0\text{ m/s}^2)(2,0\text{ s}) = 23\text{ m/s} \end{aligned}$$

b) Queremos encontrar o valor de x para $v_x = 25$ m/s, mas não sabemos quando a motocicleta possui essa velocidade. Então usamos a Equação (2.13), que envolve x, v_x e a_x, mas não envolve t:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

Explicitando x e substituindo os valores numéricos conhecidos, obtemos

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x} \\ &= 5,0\text{ m} + \frac{(25\text{ m/s})^2 - (15\text{ m/s})^2}{2(4,0\text{ m/s}^2)} \\ &= 55\text{ m} \end{aligned}$$

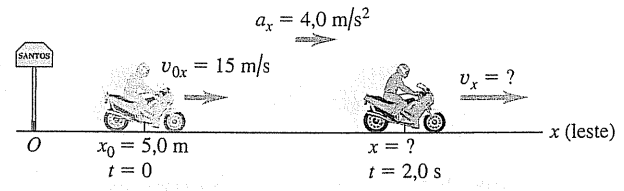


Figura 2.20 Motociclista deslocando-se com aceleração constante.

Como alternativa, podemos usar a Equação (2.8) para achar o tempo quando $v_x = 25$ m/s:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad \text{então}$$

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{25\text{ m/s} - 15\text{ m/s}}{4,0\text{ m/s}^2} = 2,5\text{ s}$$

Tendo obtido o tempo t, podemos encontrar x usando a Equação (2.12):

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ &= 5,0\text{ m} + (15\text{ m/s})(2,5\text{ s}) + \frac{1}{2}(4,0\text{ m/s}^2)(2,5\text{ s})^2 \\ &= 55\text{ m} \end{aligned}$$

AVALIAR: esses resultados fazem sentido? De acordo com a solução da parte (a), o motociclista acelera de 15 m/s (cerca de 54 km/h) para 23 m/s (cerca de 83 km/h) em 2,0 s e percorre uma distância de 38 m. Trata-se de uma aceleração rápida, mas totalmente dentro da capacidade de uma motocicleta com alto desempenho.

Comparando nossos resultados na parte b) aos da parte a), podemos concluir que a motocicleta atinge uma velocidade $v_x = 25$ m/s em um instante posterior ao instante $t = 2,0$ s e após percorrer uma distância maior do que quando estava a $v_x = 23$ m/s. Esse resultado é plausível, já que a motocicleta possui aceleração positiva e, portanto, sua velocidade é crescente.

Exemplo 2.5

DOIS CORPOS COM ACELERAÇÕES DIFERENTES Um motorista dirige a uma velocidade constante de 15 m/s quando passa em frente a uma escola, onde a placa de limite de velocidade indica 10 m/s. Um policial que estava parado no local da placa acelera sua motocicleta e persegue o motorista com uma aceleração constante de 3,0 m/s^2 (Figura 2.21a). a) Qual o intervalo de tempo desde o início da perseguição até o momento em que o policial alcança o motorista? b) Qual é a velocidade do policial nesse instante? c) Que distância cada veículo percorreu até esse momento?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o policial e o motorista se movem com aceleração constante (que é igual a zero para o motorista), de modo que podemos usar as equações deduzidas anteriormente.

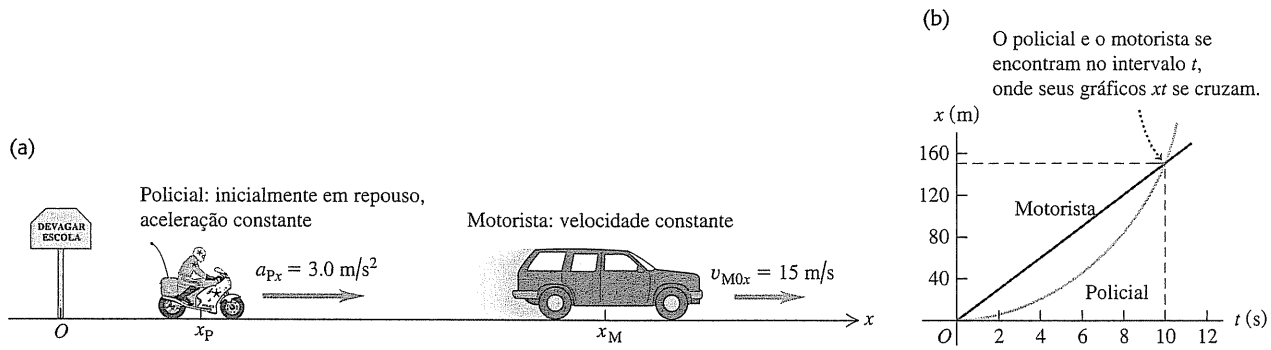


Figura 2.21 (a) Movimento com aceleração constante concomitante a um movimento com velocidade constante. (b) Gráfico de x em função de t para cada veículo.

PREPARAR: escolhemos o sentido positivo para a direita e a origem coincidindo com o sinal da escola, de modo que $x_0 = 0$ para ambos os veículos. Sejam x_P a posição do policial e x_M a posição do motorista em qualquer instante. As velocidades iniciais são $v_{M0x} = 15$ m/s para o motorista e $v_{P0x} = 0$ para o policial; as acelerações constantes são $a_{Mx} = 0$ para o motorista e $a_{Px} = 3{,}0\ m/s^2$ para o policial. Nossa incógnita na parte (a) corresponde ao momento em que o policial alcança o motorista — ou seja, quando os dois veículos estão na mesma posição. Na parte (b) queremos calcular o módulo da velocidade v_{px} do policial no instante calculado em (a). Na parte (c) queremos calcular a posição de cada veículo nesse mesmo instante. Logo, usamos a Equação (2.12) (que relaciona a posição ao tempo) nas partes (a) e (c), e a Equação (2.8) (que relaciona a velocidade ao tempo) na parte (b).

EXECUTAR: a) Para calcular o tempo t no momento em que o motorista e o policial estão na mesma posição, aplicamos a Equação (2.12), $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_xt^2$, para cada veículo:

$$x_M = 0 + v_{M0x}t + \frac{1}{2}(0)t^2 = v_{M0x}t$$

$$x_P = 0 + (0)t + \frac{1}{2}a_{Px}t^2 = \frac{1}{2}a_{Px}t^2$$

Como $x_M = x_P$ no instante t, igualamos as duas expressões anteriores e obtemos a seguinte solução para t:

$$v_{M0x}t = \frac{1}{2}a_{Px}t^2$$

$$t = 0 \qquad \text{ou} \qquad t = \frac{2v_{M0x}}{a_{Px}} = \frac{2(15\ m/s)}{3{,}0\ m/s^2} = 10\ s$$

Existem *dois* instantes nos quais os dois veículos possuem o mesmo valor de x. O primeiro, $t = 0$, corresponde ao ponto em que o motorista passa pela placa onde o policial estava. O segundo, $t = 10$ s, corresponde ao momento em que o policial alcança o motorista.

b) Queremos o módulo da velocidade do policial v_{Px} no instante t encontrado na parte a). Sua velocidade em qualquer instante é dada pela Equação (2.8):

$$v_{Px} = v_{P0x} + a_{Px}t = 0 + (3{,}0\ m/s^2)t$$

Logo, quando $t = 10$ s, achamos $v_{Px} = 30$ m/s. No momento em que o policial alcança o motorista, sua velocidade é o dobro da do motorista.

c) Em 10 s, a distância percorrida pelo motorista é

$$x_M = v_{M0x}t = (15\ m/s)(10\ s) = 150\ m$$

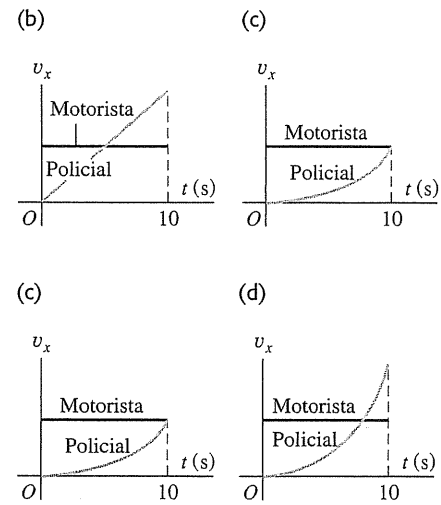
e a distância percorrida pelo policial é

$$x_P = \frac{1}{2}a_{Px}t^2 = \frac{1}{2}(3{,}0\ m/s^2)(10\ s)^2 = 150\ m$$

Isso confirma que, no momento em que o policial alcança o motorista, eles percorreram distâncias iguais.

AVALIAR: a Figura 2.21b mostra gráficos de x *versus* t para ambos os veículos. Vemos novamente que existem dois instantes em que os veículos possuem a mesma coordenada (onde as curvas se cruzam). Em nenhum desses pontos eles possuem a mesma velocidade (ou seja, nos pontos onde as curvas se cruzam, elas possuem inclinações diferentes). Para $t = 0$, o policial está em repouso; para $t = 10$ s, a sua velocidade é o dobro da velocidade do motorista.

Teste sua compreensão da Seção 2.4 O Exemplo 2.5 mostra quatro gráficos v_xt para dois veículos. Qual gráfico está correto?



2.5 Queda livre de corpos

O exemplo mais familiar de um movimento com aceleração (aproximadamente) constante é a queda livre de um corpo atraído pela força gravitacional da Terra. Tal movimento despertou a atenção de filósofos e cientistas desde tempos remotos. No século IV a.C., Aristóteles pensou (erroneamente) que objetos mais pesados caíam mais rapidamente do que objetos leves, com velocidades proporcionais aos respectivos pesos. Dezenove séculos mais tarde, Galileu (veja a Seção 1.1) afirmou que um corpo deveria cair com aceleração constante independentemente do seu peso.

Experiências demonstram que, quando os efeitos do ar podem ser desprezados, Galileu está correto; todos os corpos em um dado local caem com a mesma aceleração, independentemente das suas formas e dos seus respectivos pesos. Além disso, quando a distância da queda livre é pequena em comparação com o raio da Terra, e ignoramos os pequenos efeitos exercidos pela rotação da Terra, a aceleração é constante. O movimento ideal resultante de todos esses pressupostos denomina-se **queda livre**, embora ele inclua também a ascensão de um corpo. (No Capítulo 3 estenderemos a discussão da queda livre para incluir o movimento de projéteis, que possuem componentes do movimento na horizontal e na vertical.)

A Figura 2.22 é uma fotografia de múltipla exposição da queda livre de uma bola feita com auxílio de um estroboscópio luminoso que produz uma série de *flashes* com intervalos de tempo iguais. Para cada *flash* disparado, a imagem da bola fica gravada no filme neste instante. Como o intervalo entre dois *flashes* consecutivos é sempre o mesmo, a velocidade média da bola é proporcional à distância das imagens da bola correspondentes a dois *flashes* consecutivos. A distância crescente entre duas imagens consecutivas mostra que a velocidade está aumentando e que a bola acelera para baixo. Medidas cuidadosas mostram que a variação da velocidade é sempre a mesma entre os intervalos, de modo que a aceleração de uma bola em queda livre é constante.

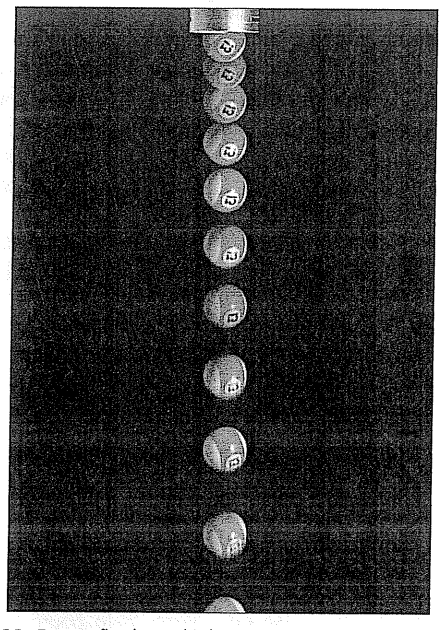


Figura 2.22 Fotografia de múltipla *exposição* de uma bola em queda livre.

A aceleração constante de um corpo em queda livre denomina-se **aceleração da gravidade**, e seu módulo é designado por g. Sempre usaremos o valor aproximado de g na superfície terrestre ou próximo a ela:

$$g = 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 980 \text{ cm/s}^2$$

(valor aproximado próximo à superfície terrestre)

O valor exato varia de um local para outro, de modo que normalmente fornecemos o valor de g na superfície terrestre com somente dois algarismos significativos. Como g é o módulo de uma grandeza vetorial, ele é sempre um número *positivo*. Na superfície da Lua, como a atração gravitacional é da Lua e não da Terra, $g = 1{,}6 \text{ m/s}^2$. Próximo à superfície do Sol, $g = 270 \text{ m/s}^2$.

Nos exemplos seguintes usaremos as equações do movimento com aceleração constante da Seção 2.4. Sugerimos que, antes de resolver esses exemplos, você leia novamente a Estratégia para a solução de problemas 2.1 dessa seção.

Exemplo 2.6

UMA MOEDA EM QUEDA LIVRE Uma moeda de 1 euro é largada da Torre de Pisa. Ela parte do repouso e se move em queda livre. Calcule sua posição e sua velocidade nos instantes 1,0 s, 2,0 s e 3,0 s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: 'queda livre' significa 'possuir uma aceleração constante devido à gravidade', portanto podemos usar as equações de aceleração constante para determinar nossas incógnitas.

PREPARAR: o lado direito da Figura 2.23 demonstra nosso diagrama do movimento para a moeda. Como o eixo é vertical, vamos chamá-lo de y em vez de x. Todos os valores de x das equações serão substituídos por y. Consideramos a origem O como o ponto inicial e escolhemos um eixo vertical orientado com sentido positivo de baixo para cima. A coordenada inicial y_0 e a velocidade inicial v_{0y} são iguais a zero. A aceleração está orientada para baixo (no sentido negativo do eixo Oy), de modo que $a_y = -g = -9{,}8 \text{ m/s}^2$. (Lembre-se de que, por definição, g é *sempre* positivo.) As incógnitas são y e v_y nos três instantes especificados. Para determiná-las, usamos as equações (2.8) e (2.12), substituindo-se x por y.

EXECUTAR: em um instante t após a moeda ser largada, sua posição e velocidade são:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}(-g)t^2 = (-4{,}9 \text{ m/s}^2)t^2$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t = 0 + (-g)t = (-9{,}8 \text{ m/s}^2)t$$

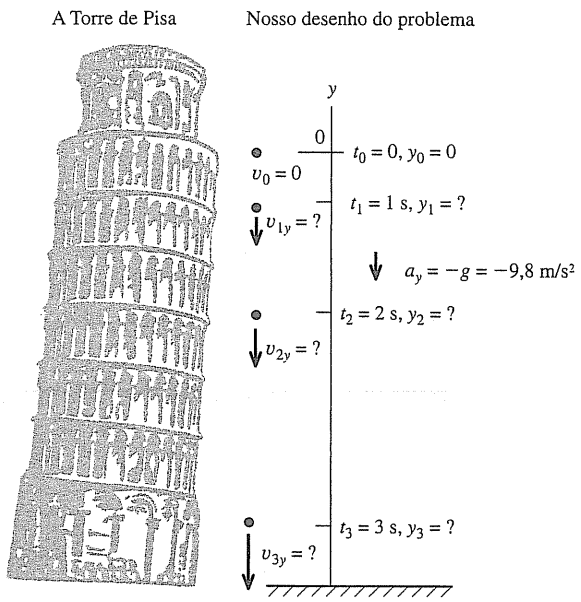


Figura 2.23 Uma moeda em queda livre a partir do repouso.

Quando $t = 1{,}0$ s, $y = (-4{,}9\ \text{m/s}^2)(1{,}0\ \text{s})^2 = -4{,}9$ m e $v_y = (-9{,}8\ \text{m/s}^2)\,(1{,}0\ \text{s}) = -9{,}8$ m/s; depois de 1 s, a moeda está a 4,9 m abaixo da origem (y é negativo) e possui uma velocidade orientada para baixo (v_y é negativa) com módulo igual a 9,8 m/s.

A posição e a velocidade nos instantes 2,0 s e 3,0 s são encontradas da mesma forma. Você poderia demonstrar que $y = -19{,}6$ m e $v_y = -19{,}6$ m/s em $t = 2{,}0$ s, e que $y = -44{,}1$ m e $v_y = -29{,}4$ m/s em $t = 3{,}0$ s?

AVALIAR: todas as respostas para v_y são negativas porque optamos por direcionar para cima o eixo $0y$ positivo. Mas poderíamos também ter escolhido a direção para baixo. Nesse caso, a aceleração teria sido $a_y = +g$ e todas as respostas para v_y seriam positivas. Qualquer escolha do eixo serve; apenas se certifique de explicitar sua escolha na solução e confirmar que a aceleração possui o sinal correto.

Exemplo 2.7

MOVIMENTO PARA CIMA E PARA BAIXO EM QUEDA LIVRE Você arremessa uma bola de baixo para cima do topo de um edifício alto. A bola deixa sua mão com velocidade de 15 m/s em um ponto que coincide com a extremidade superior do parapeito do edifício; a seguir ela passa a se mover em queda livre. Quando a bola volta, ela passa raspando pelo parapeito e continua a queda. No local do edifício, $g = 9{,}8$ m/s². Calcule a) a posição e a velocidade da bola 1,0 s e 4,0 s depois que ela deixa sua mão; b) a velocidade quando a bola está a 5,0 m acima do parapeito; c) a altura máxima atingida e o tempo que ela leva para atingir essa altura; e d) a aceleração da bola quando ela se encontra na altura máxima.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: as palavras 'queda livre' no enunciado do problema significam que a aceleração é constante e se deve à gravidade. Nossas incógnitas são posição [nas partes a) e c)], velocidade [nas partes a) e b)] e aceleração [na parte d)].

PREPARAR: na Figura 2.24 (que também é um diagrama de movimento para a bola), a trajetória para baixo está ligeiramente deslocada para a direita para maior clareza. Tome a origem na extremidade superior do parapeito, no ponto onde a bola deixa sua mão e considere o sentido positivo como sendo de baixo para cima. A posição inicial y_0 é igual a zero, a velocidade inicial é $v_{0y} = +15{,}0$ m/s e a aceleração é $a_y = -g = -9{,}8$ m/s². Usaremos novamente as equações (2.12) e (2.8) para achar a posição e a velocidade em função do tempo. Na parte b), necessitamos encontrar a velocidade em uma certa *posição* em vez de um certo *instante*, por isso nessa parte usaremos a Equação (2.13).

EXECUTAR: a) A posição y e a velocidade v_y em qualquer instante t depois de a bola deixar sua mão são dadas pelas equações (2.8) e (2.12), substituindo-se x por y, portanto:

$$y = y_0 = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$
$$= (0) + (15{,}0\ \text{m/s})t + \frac{1}{2}(-9{,}80\ \text{m/s}^2)t^2$$
$$v_y = v_{0y} + a_y t = v_{0y} + (-g)t$$
$$= 15{,}0\ \text{m/s} + (-9{,}80\ \text{m/s}^2)t$$

Quando $t = 1{,}0$ s, essas equações fornecem

$$y = +10{,}1\ \text{m} \qquad v_y = +5{,}2\ \text{m/s}$$

A bola está a 10,1 m acima da origem (y é positivo) e se move de baixo para cima (v_y é positiva) com um módulo igual a 5,2 m/s. Esse valor é menor do que a velocidade inicial, já que a bola perde velocidade conforme ascende.

Quando $t = 4{,}0$ s, as equações para y e v_y em função de t fornecem

$$y = -18{,}4\ \text{m} \qquad v_y = -24{,}2\ \text{m/s}$$

A bola já passou pela altura máxima e está 18,4 m *abaixo* da origem (y é negativo). Ela possui uma velocidade *orientada de cima para baixo* (v_y é negativa), cujo módulo é igual a 24,2 m/s. A bola perde velocidade enquanto sobe e depois ganha velocidade enquanto desce; ela se move na velocidade inicial de 15,0 m/s enquanto se move de cima para baixo, passando pelo ponto de lançamento (a origem), e continua a ganhar velocidade enquanto desce abaixo desse ponto.

b) A velocidade v_y em qualquer posição y é dada pela Equação (2.13), substituindo-se x por y, portanto:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0) = v_{0y}^2 + 2(-g)(y - 0)$$
$$= (15{,}0\ \text{m/s})^2 + 2(-9{,}80\ \text{m/s}^2)y$$

Quando a bola está 5,0 m acima da origem, y = + 5,0 m, logo

$$v_y^2 = (15{,}0\ \text{m/s})^2 + 2(-9{,}80\ \text{m/s}^2)(5{,}0\ \text{m}) = 127\ \text{m}^2/\text{s}^2$$
$$v_y = \pm 11{,}3\ \text{m/s}$$

Obtivemos *dois* valores de v_y, um positivo e outro negativo porque a bola passa duas vezes pelo ponto $y = +5{,}0$ m (Figura 2.24), uma vez durante a ascensão, quando v_y é positivo, e a outra durante a queda, quando v_y é negativo.

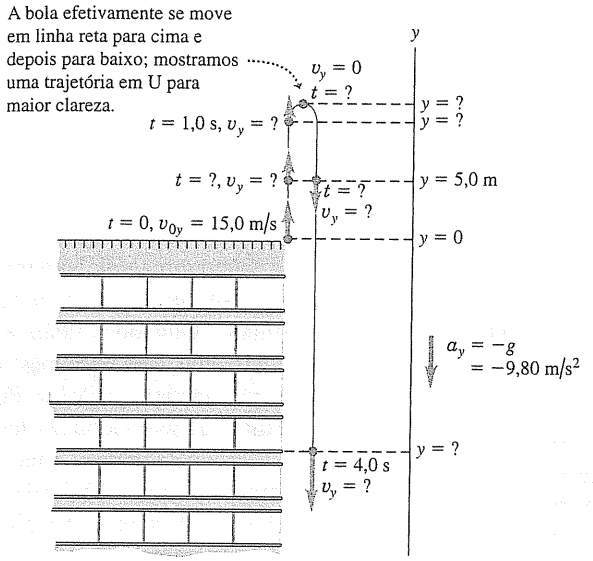


Figura 2.24 Posição e velocidade de uma bola lançada verticalmente de baixo para cima.

c) No exato instante em que ela atinge seu ponto mais elevado, $v_y = 0$. A altura máxima y_1 pode então ser calculada de dois modos. O primeiro modo consiste em usar a Equação (2.13) e substituir os valores $v_y = 0$, $y_0 = 0$ e $a_y = -g$:

$$0 = v_{0y}^2 + 2(-g)(y_1 - 0)$$

$$y_1 = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(15{,}0\ \text{m/s})^2}{2(9{,}80\ \text{m/s}^2)} = +11{,}5\ \text{m}$$

O segundo modo consiste em achar o tempo para o qual $v_y = 0$ usando a Equação (2.8), $v_y = v_{0y} + a_y t$ e, a seguir, substituir esse valor de t na Equação (2.12) para obter a posição nesse instante. Pela Equação (2.8), o tempo t_1 para a bola atingir seu ponto mais elevado é dado por:

$$v_y = 0 = v_{0y} + (-g)t_1$$

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{15{,}0\ \text{m/s}}{9{,}80\ \text{m/s}^2} = 1{,}53\ \text{s}$$

Substituindo esse valor de t na Equação (2.12), encontramos

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = (0) + (15\ \text{m/s})(1{,}53\ \text{s})$$

$$+ \frac{1}{2}(-9{,}8\ \text{m/s}^2)(1{,}53\ \text{s})^2 = +11{,}5\ \text{m}$$

Note que pelo primeiro método da determinação da altura máxima não é necessário calcular o tempo antes.

ATENÇÃO Um erro conceitual de queda livre É um erro comum supor que no ponto da altura máxima a velocidade seja zero *e* a aceleração também seja zero. Caso isso fosse verdade, a bola ficaria suspensa nesse ponto para sempre! Para entender a razão, lembre-se de que a aceleração é a variação da velocidade. Caso a aceleração fosse nula no ponto mais elevado, a velocidade da bola não poderia variar e, uma vez que ela entrasse em repouso instantâneo, deveria permanecer em repouso eternamente.

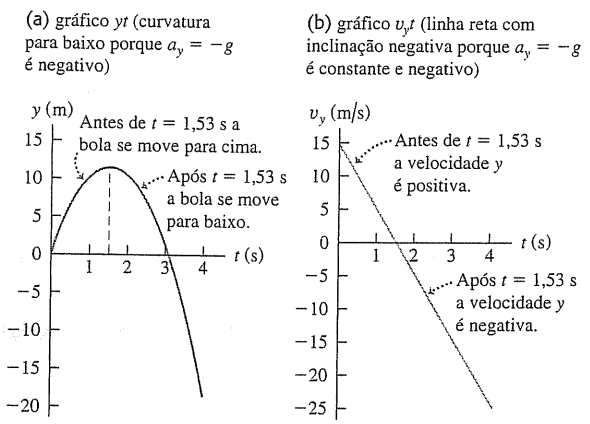


Figura 2.25 a) Posição e b) velocidade em função do tempo para uma bola lançada verticalmente de baixo para cima com velocidade inicial de 15 m/s.

No ponto mais elevado, a aceleração continua sendo $a_y = -g = -9{,}80\ \text{m/s}^2$, o mesmo valor tanto na ascensão quanto na queda da bola. No ponto mais elevado, a bola pára instantaneamente, mas sua velocidade varia continuamente mudando valores positivos para zero e depois passando para valores negativos.

AVALIAR: uma forma útil de conferir qualquer problema de movimento é desenhar dois gráficos de posição e velocidade em função do tempo, como mostra a Figura 2.25. Como a aceleração é constante e negativa, o gráfico yt é uma parábola com curvatura orientada para baixo e o gráfico $v_y t$ é uma linha reta com inclinação negativa.

Exemplo 2.8

DUAS SOLUÇÕES OU UMA? Calcule o instante para o qual a bola do Exemplo 2.7 está a 5,0 m abaixo do parapeito do edifício.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: novamente este é um problema de aceleração constante. A incógnita é o instante em que a bola está em uma determinada posição.

PREPARAR: escolhemos novamente o eixo Oy como na Figura 2.24, de modo que y_0, v_{0y} e $a_y = -g$ possuam os mesmos valores do Exemplo 2.7. A posição y em função do tempo t é novamente dada pela Equação (2.12):

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

Desejamos resolver essa equação calculando t quando $y = -5{,}0$ m. Visto que essa equação envolve t^2, é uma equação do *segundo grau* em t.

EXECUTAR: inicialmente reagrupamos os termos desta equação para ficar na forma padronizada de uma equação do segundo grau x, $Ax^2 + Bx + C = 0$:

$$\left(\frac{1}{2}g\right)t^2 + (-v_{0y})t + (y - y_0) = At^2 + Bt + C = 0$$

logo, $A = g/2$, $B = -v_{0y}$ e $C = y - y_0$. Usando a fórmula da solução de uma equação do segundo grau (Apêndice B), verificamos que esta equação possui *duas* soluções:

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$
$$= \frac{-(-v_{0y}) \pm \sqrt{(-v_{0y})^2 - 4(g/2)(y - y_0)}}{2(g/2)}$$
$$= \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)}}{g}$$

Substituindo os valores $y_0 = 0$, $v_{0y} = +15{,}0$ m/s, $g = 9{,}80$ m/s^2 e $y = -5{,}0$ m, encontramos:

$$t = \frac{(15{,}0\ \text{m/s}) \pm \sqrt{(15{,}0\ \text{m/s})^2 - 2(9{,}80\ \text{m/s}^2)(-5{,}00\ \text{m} - 0)}}{9{,}80\ \text{m/s}^2}$$

$t = +3{,}36$ s ou $t = -0{,}30$ s

Para decidir qual dessas soluções é a correta, a pergunta crucial que devemos fazer é 'Estas soluções são razoáveis?' A segunda solução, $t = -0{,}30$ s não é aceitável; ela se refere a um tempo *anterior* ao lançamento da bola! A resposta correta é $t = +3{,}36$ s. A bola está a 5,0 m abaixo do parapeito, 3,36 s *depois* de ela ter sido lançada.

AVALIAR: de onde surgiu a 'solução' errada $t = -0{,}30$ s? Lembre-se de que a equação $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$ é fundamentada no princípio de que a aceleração é constante para *todos* os valores de t, sejam eles positivos, negativos ou nulos. Interpretando-a literalmente, essa equação nos mostra que a bola estaria se movendo para cima em queda livre desde tempos remotos; ela eventualmente passaria pela sua mão em $y = 0$, no instante especial que optamos por denominar $t = 0$ e depois continuaria em queda livre. Contudo, qualquer coisa que essa equação possa descrever antes de $t = 0$ é pura ficção, visto que a bola só começou a queda livre depois que ela saiu da sua mão no instante $t = 0$; a 'solução' $t = -0{,}30$ s é uma parte dessa ficção.

Convidamos você a repetir esses cálculos para achar os tempos para os quais a bola está a 5,0 m *acima* da origem ($y = +5{,}0$ m). As duas respostas são $t = +0{,}38$ s e $t = +2{,}68$ s; esses valores correspondem a valores positivos de t e ambos referem-se ao movimento real da bola depois que você a arremessou. O tempo menor corresponde ao instante em que ela passa pelo ponto $y = +5{,}0$ m no movimento de ascensão, e o tempo maior, ao instante em que ela passa por esse ponto durante a queda. [Compare esse resultado com a solução da parte b) do Exemplo 2.7.]

Você também deve obter as soluções para os tempos correspondentes a $y = +15{,}0$ m. Nesse caso, as duas soluções envolvem a raiz quadrada de um número negativo, de modo que *não* existe nenhuma solução real. Isso tem sentido; achamos na parte c) do Exemplo 2.7 que a altura máxima atingida é somente $y = +11{,}5$ m, de modo que a bola jamais poderia atingir uma altura $y = +15{,}0$ m. Embora uma equação do segundo grau, como a Equação (2.12), sempre possua duas soluções, em algumas situações uma delas ou as duas podem deixar de ser fisicamente possíveis.

Teste sua compreensão da Seção 2.5 Se você arremessa uma bola de baixo para cima com certa velocidade inicial, ela cai livremente e atinge uma altura máxima h em um instante t, após deixar sua mão. a) Se você jogar a bola para cima com o dobro da velocidade inicial, que nova altura máxima e bola atingirá? i) $h\sqrt{2}$; ii) $2h$; iii) $4h$; iv) $8h$; v) $16h$. b) Se você jogar a bola para cima com o dobro da velocidade inicial, quanto tempo levará para ela atingir a sua nova altura máxima? i) $t/2$; ii) $t/\sqrt{2}$; iii) t; iv) $t\sqrt{2}$; v) $2t$. ∎

2.6 *Velocidade e posição por integração

Esta seção opcional destina-se a estudantes que já tenham aprendido um pouco de cálculo integral. Na Seção 2.4 analisamos o caso especial do movimento retilíneo com aceleração constante. Quando a_x não é constante, como ocorre freqüentemente, as equações que foram deduzidas nessa seção não são mais válidas (Figura 2.26). Contudo, mesmo quando a_x varia com o tempo, ainda podemos usar a relação $v_x = dx/dt$ para achar a velocidade v_x em função do tempo quando a posição x da partícula for conhecida em função do tempo. E ainda podemos usar a relação $a_x = dv_x/dt$ para achar a aceleração a_x em função do tempo quando a velocidade v_x for conhecida em função do tempo.

Entretanto, em muitas situações, embora sabendo a aceleração em função do tempo, não conhecemos nem a posição nem a velocidade em função do tempo. Como determinar a posição e a velocidade a partir da aceleração em função do tempo $a_x(t)$? Esse problema pode ser ilustrado pela viagem de uma aeronave entre os Estados Unidos e a Europa (Figura 2.27). A tripulação da aeronave deve conhecer sua posição com precisão em todos os instantes, mas, sobre o oceano, em geral uma aeronave fica fora do alcance dos radiofaróis de terra ou do radar das torres de controle de tráfego aéreo. Para determinar a posição da aeronave, os pilotos usam um instrumento conhecido pela sigla INS (*inertial navigation system* = sistema de navegação inercial), que mede a aceleração da aeronave. A forma como isso é feito se parece muito com o modo pelo qual você sente as mudanças de aceleração de um automóvel quando viaja nele, mesmo estando de olhos fechados. (No Capítulo 4 discutiremos como seu corpo pode detectar a aceleração.) Conhecendo essa informação, juntamente com a posição inicial da aeronave (digamos, um dado portão no Aeroporto Internacional de Miami), o INS calcula e

Figura 2.26 Quando você pisa até o fundo no pedal do acelerador do seu carro, a aceleração resultante *não* é constante: quanto maior a velocidade do carro, mais lentamente ele ganha velocidade adicional. Para um carro comum, o tempo para acelerar de 50 km/h a 100 km/h é igual ao dobro do tempo necessário para acelerar de 0 a 50 km/h.

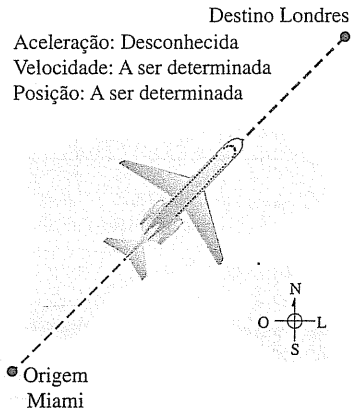


Figura 2.27 A posição e a velocidade de uma aeronave atravessando o Atlântico são obtidas integrando-se sua aceleração em relação ao tempo.

indica no mostrador para a tripulação a velocidade e a posição da aeronave em cada instante durante o vôo. (As aeronaves também usam o GPS — *Global Positioning System* — para navegação, de forma complementar ao INS e não em substituição a ele.) Nosso objetivo no restante desta seção é verificar como esses cálculos são feitos para o simples caso de um movimento retilíneo com uma aceleração que varia com o tempo.

Inicialmente apresentaremos um método gráfico. A Figura 2.28 mostra um gráfico de aceleração *versus* tempo para um corpo cuja aceleração não é constante. Podemos dividir o intervalo de tempo entre t_1 e t_2 em intervalos muito menores e designar por Δt cada um deles. Seja a_{mx} a aceleração média durante Δt. Pela Equação (2.4), a variação da velocidade Δv_x durante Δt é dada por

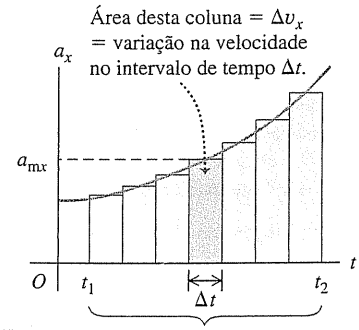
$$\Delta v_x = a_{mx}\,\Delta t$$

Graficamente, Δv_x é a área sombreada do retângulo que possui altura a_{mx} e largura Δt, ou seja, a área sob a curva entre a extremidade esquerda e a extremidade direita de Δt. A variação total da velocidade em qualquer intervalo de tempo (digamos, de t_1 a t_2) é a soma das variações de Δv_x de todos os pequenos intervalos. Logo, a variação total da velocidade é dada graficamente pela área *total* sob a curva $a_x t$ delimitada entre t_1 até t_2. (Na Seção 2.4 mostramos que isso é verdade para o caso específico do movimento com aceleração constante.)

No limite em que todos os intervalos Δt tornam-se muito pequenos e muito numerosos, o valor de a_{mx} para o intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$ se aproxima da aceleração a_x no tempo t. Nesse limite, a área sob a curva $a_x t$ é dada pela *integral* de a_x (que geralmente é função de t) de t_1 a t_2. Se v_{1x} for a velocidade do corpo no tempo t_1 e v_{2x} for a velocidade no tempo t_2, então

$$v_{2x} - v_{1x} = \int_{v_{1x}}^{v_{2x}} dv_x = \int_{t_1}^{t_2} a_x\,dt \qquad (2.15)$$

A variação da velocidade v_x é obtida pela integrada da aceleração a_x em relação ao tempo.



Área total sob a curva em um gráfico xt entre os tempos t_1 e t_2 = a variação da velocidade que ocorre entre esses limites.

Figura 2.28 Um gráfico $a_x t$ para um corpo cuja aceleração t não é constante.

Podemos fazer exatamente o mesmo procedimento com a curva da velocidade *versus* tempo, onde v é uma função arbitrária de t. Se x_1 for a posição do corpo no tempo t_1 e x_2 for a posição no tempo t_2, pela Equação (2.2) o deslocamento Δx durante um pequeno intervalo de tempo Δt será igual a $v_{mx}\,\Delta t$, onde v_{mx} é a velocidade média durante Δt. O deslocamento total $x_2 - x_1$ durante o intervalo $t_2 - t_1$ é dado por:

$$x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v_x\,dt \qquad (2.16)$$

A variação da posição x — isto é, o deslocamento — é dada pela integral da velocidade v_x em relação ao tempo. Graficamente, o deslocamento durante o intervalo t_1 e t_2 é dado pela área sob a curva $v_x t$ entre esses dois limites. [Este resultado é semelhante ao obtido na Seção 2.4 para o caso específico no qual v_x era dada pela Equação (2.8).]

Quando $t_1 = 0$ e t_2 for t em algum instante posterior, e quando x_0 e v_{0x} corresponderem, respectivamente, à posição e à velocidade, para $t = 0$, então podemos reescrever as equações (2.15) e (2.16) do seguinte modo:

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x\,dt \qquad (2.17)$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\,dt \qquad (2.18)$$

Aqui, x e v_x são, respectivamente, a posição e a velocidade para um tempo t. Conhecendo a aceleração a_x em função do tempo e a velocidade inicial v_{0x}, podemos usar a Equação (2.17) para achar a velocidade v_x em qualquer tempo; em outras palavras, podemos achar v_x em função do tempo. Conhecendo essa função e sabendo a posição inicial x_0, podemos usar a Equação (2.18) para achar a posição x em qualquer tempo.

Exemplo 2.9

MOVIMENTO COM ACELERAÇÃO VARIÁVEL Sueli está dirigindo um carro em um trecho retilíneo de uma estrada. No tempo $t = 0$, quando está se movendo a 10 m/s no sentido positivo do eixo Ox, ela passa por um poste de sinalização a uma distância $x = 50$ m. Sua aceleração em função do tempo é dada por:

$$a_x = 2{,}0\ \text{m/s}^2 - (0{,}10\ \text{m/s}^3)t$$

a) Deduza uma expressão para a posição e a velocidade em função do tempo. b) Qual é o instante em que sua velocidade atinge o valor máximo? c) Qual é a velocidade máxima? d) Onde está o carro quando a velocidade atinge seu valor máximo?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a aceleração é uma função do tempo, por isso não podemos usar as fórmulas de aceleração constante da Seção 2.4.

PREPARAR: usamos as equações (2.17) e (2.18) para determinar a velocidade e a posição em função do tempo. Quando obtivermos essas funções, poderemos responder a uma variedade de perguntas sobre o movimento.

EXECUTAR: a) No tempo $t = 0$, a posição de Sueli é $x_0 = 50$ m e sua velocidade é $v_{0x} = 10$ m/s. Como é dada a aceleração a_x em função do tempo, inicialmente usamos a Equação (2.17) para achar a velocidade v_x em função do tempo t. A integral de t^n é $\int t^n\,dt = \frac{1}{n+1}t^{n+1}$, considerando $n \neq -1$, de modo que

$$\begin{aligned} v_x &= 10\ \text{m/s} + \int_0^t [2{,}0\ \text{m/s}^2 - (0{,}10\ \text{m/s}^3)t]\,dt \\ &= 10\ \text{m/s} + (2{,}0\ \text{m/s}^2)t - \frac{1}{2}(0{,}10\ \text{m/s}^3)t^2 \end{aligned}$$

A seguir, usamos a Equação (2.18) para achar x em função do tempo t:

$$\begin{aligned} x &= 50\ \text{m} + \int_0^t \left[10\ \text{m/s} + (2{,}0\ \text{m/s}^2)t - \frac{1}{2}(0{,}10\ \text{m/s}^3)t^2\right] dt \\ &= 50\ \text{m} + (10\ \text{m/s})t + \frac{1}{2}(2{,}0\ \text{m/s}^2)t^2 - \frac{1}{6}(0{,}10\ \text{m/s}^3)t^3 \end{aligned}$$

A Figura 2.29 mostra gráficos de a_x, v_x e x em função do tempo. Note que para qualquer tempo t a inclinação do gráfico $v_x t$ fornece o valor de a_x e a inclinação do gráfico xt fornece o valor de v_x.

b) O valor máximo de v_x ocorre quando v pára de crescer e começa a decrescer. Para esse instante, $dv_x/dt = a_x = 0$. Igualando a zero a expressão de a_x, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= 2{,}0\ \text{m/s}^2 - (0{,}10\ \text{m/s}^3)t \\ t &= \frac{2{,}0\ \text{m/s}^2}{0{,}10\ \text{m/s}^3} = 20\ \text{s} \end{aligned}$$

c) Para achar a velocidade máxima, substituímos $t = 20$ s (quando a velocidade é máxima) na equação para v_x da parte a):

$$\begin{aligned} v_{\text{máx-}x} &= 10\ \text{m/s} + (2{,}0\ \text{m/s}^2)(20\ \text{s}) - \frac{1}{2}(0{,}10\ \text{m/s}^3)(20\ \text{s})^2 \\ &= 30\ \text{m/s} \end{aligned}$$

d) O valor máximo de v_x ocorre para $t = 20$ s. Obtemos a posição do carro (isto é, o valor de x) nesse instante substituindo $t = 20$ s na equação geral de x da parte a):

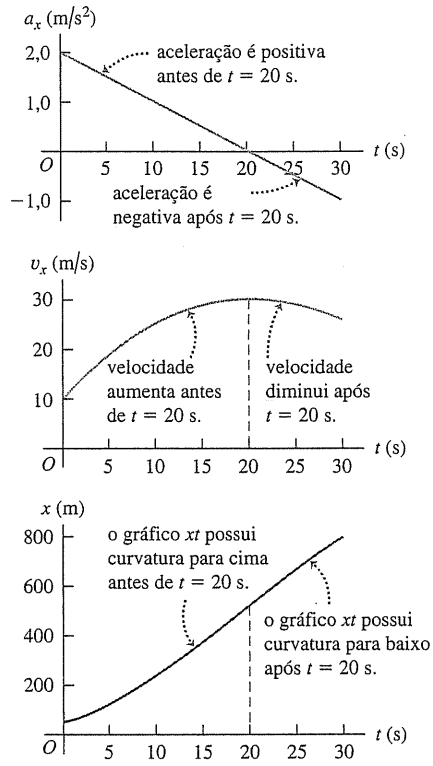


Figura 2.29 A posição, a velocidade e a aceleração do carro do Exemplo 2.9 em função do tempo. Você é capaz de mostrar que, se esse movimento continuasse, o carro pararia no instante $t = 44{,}5$ s?

$$\begin{aligned} x &= 50\ \text{m} + (10\ \text{m/s})(20\ \text{s}) + \frac{1}{2}(2{,}0\ \text{m/s}^2)(20\ \text{s})^2 \\ &\quad - \frac{1}{6}(0{,}10\ \text{m/s}^3)(20\ \text{s})^3 \\ &= 517\ \text{m} \end{aligned}$$

AVALIAR: a Figura 2.29 nos ajuda a interpretar nossos resultados. O gráfico no topo dessa figura indica que a_x é positiva entre $t = 0$ e $t = 20$ s e negativa a partir daí. É nula em $t = 20$ s, o tempo no qual v_x atinge seu valor máximo (o ponto mais alto no gráfico do meio). O carro acelera até $t = 20$ s (porque v_x e a_x possuem o mesmo sinal) e passa a diminuir de velocidade depois de $t = 20$ s (porque v_x e a_x possuem sinais contrários).

Uma vez que o valor máximo de v_x ocorre para $t = 20$ s, o gráfico xt possui sua inclinação máxima nesse instante. Note que xt possui concavidade para cima (curvado para cima) de $t = 0$ até $t = 20$ s, quando a_x é positiva. O gráfico possui concavidade para baixo (curvado para baixo) após $t = 20$ s, quando a_x é negativa.

Exemplo 2.10

FÓRMULAS DO MOVIMENTO COM ACELERAÇÃO CONSTANTE OBTIDAS POR INTEGRAÇÃO Use as equações (2.17) e (2.18) para achar v_x e x em função do tempo no caso de um movimento com aceleração constante.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este exemplo serve para conferir as equações derivadas nesta seção. Se estiverem corretas, chegaremos às

mesmas equações de aceleração constante derivadas na Seção 2.4, sem usar a integração.

PREPARAR: seguiremos as mesmas etapas do Exemplo 2.9. A única diferença é que a_x é constante.

EXECUTAR: pela Equação (2.17), a velocidade x é dada por

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x\,dt = v_{0x} + a_x\int_0^t dt = v_{0x} + a_x t$$

Podemos colocar a_x para fora do sinal de integral porque é constante. Substituindo essa expressão para v_x na Equação (2.18), obtemos

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\,dt = x_0 + \int_0^t (v_{0x} + a_x t)\,dt$$

Podemos colocar v_{0x} e a_x para fora do sinal de integral porque são constantes. Logo

$$x = x_0 + v_{0x}\int_0^t dt + a_x\int_0^t t\,dt = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

AVALIAR: nossos resultados são os mesmos das equações (2.8) e (2.12), que foram deduzidas na Seção 2.4, como já era esperado! Embora tenhamos desenvolvido as equações (2.17) e (2.18) para lidar com casos em que a aceleração depende do tempo, elas também podem ser aplicadas quando a aceleração é constante.

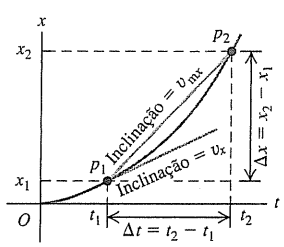
Teste sua compreensão da Seção 2.6 Se a aceleração a_x cresce com o tempo, o gráfico $v_x t$ será i) uma linha reta; ii) côncava para cima (encurvada para cima); iii) côncava para baixo (encurvada para baixo)? ▮

Resumo

Movimento retilíneo, velocidade média e velocidade instantânea: quando uma partícula se move em linha reta, descrevemos sua posição em relação à origem O especificando uma coordenada tal como x. A velocidade média da partícula v_{mx} em um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ é igual ao seu deslocamento $\Delta x = x_2 - x_1$ dividido por Δt. A velocidade instantânea v_x em qualquer instante t é igual à velocidade média para o intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$ até o limite em que Δt seja zero. Da mesma forma, v_x é a derivativa da função posição em relação ao tempo. (Exemplo 2.1.)

$$v_{mx} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.2)$$

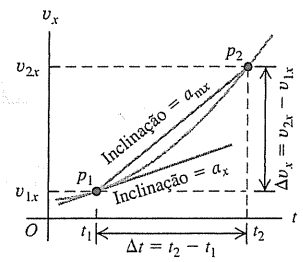
$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (2.3)$$



Aceleração média e instantânea: a aceleração média a_{mx} em um intervalo de tempo Δt é igual à variação em velocidade $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$ no intervalo de tempo dividido por Δt. A aceleração instantânea a_x é o limite de a_{mx} conforme Δt tende a zero, ou a derivativa de v_x em relação a t. (Exemplos 2.2 e 2.3.)

$$a_{mx} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad (2.4)$$

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \qquad (2.5)$$



Movimento retilíneo com aceleração constante: quando a aceleração é constante, quatro equações relacionam a posição x e a velocidade v_x, em qualquer instante t, à posição inicial x_0, à velocidade inicial v_{0x} (ambas medidas no instante $t = 0$) e à aceleração a_x. (exemplos 2.4 e 2.5.)

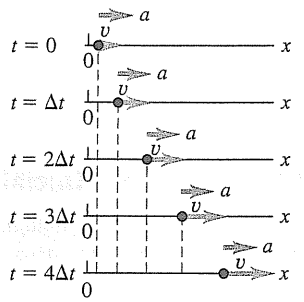
Aceleração constante somente:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad (2.8)$$

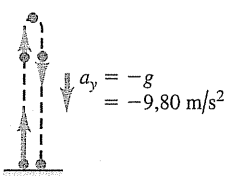
$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad (2.12)$$

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \qquad (2.13)$$

$$x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right)t \qquad (2.14)$$



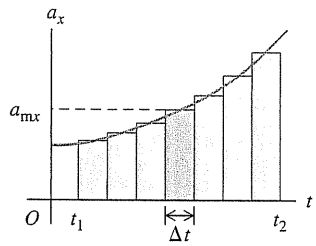
Corpos em queda livre: a queda livre é um caso particular de movimento com aceleração constante. O módulo da aceleração da gravidade é uma grandeza positiva, g. A aceleração de um corpo em queda livre é sempre orientada de cima para baixo. (exemplos 2.6 a 2.8.)



Movimento retilíneo com aceleração variada: quando a aceleração não é constante, mas é conhecida em função do tempo, podemos determinar a velocidade e a posição em função do tempo, integrando a função aceleração (exemplos 2.9 e 2.10.)

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x\,dt \tag{2.17}$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\,dt \tag{2.18}$$



Principais termos

aceleração instantânea, 42
aceleração da gravidade, 51
aceleração média, 41
aceleração instantânea, 43
aceleração média, 41
derivada, 38
diagrama do movimento, 40
gráfico $a_x t$, 45
gráfico $v_x t$, 44
gráfico xt, 37
partícula, 36
queda livre, 51
velocidade escalar, 39
velocidade instantânea, 38
velocidade média, 36
velocidade instantânea, 38
velocidade média, 36

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Sim. A aceleração se refere a *qualquer* variação na velocidade, incluindo tanto o seu aumento quanto a sua redução.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

2.1 Respostas para a): iv), i) e iii) (empate), v), ii); resposta para b): i) e iii); resposta para c): v) Em a) a velocidade média é $v_{mx} = \Delta x/\Delta t$. Para todas as cinco viagens, Δt = 1h. Para cada uma das viagens, temos i) $\Delta x = +50$ km, $v_{mx} = +50$ km/h; ii) $\Delta x = -50$ km, $v_{mx} = -50$ km/h; iii) $\Delta x = 60$ km $- 10$ km $= +50$ km, $v_{mx} = +50$ km/h; iv) $\Delta x = +70$ km, $v_{mx} = +70$ km/h; v) $\Delta x = -20$ km $+ 20$ km $= 0$, $v_{mx} = 0$. Em b) ambos possuem $v_{mx} = +50$ km/h.

2.2 Respostas: a) ***P, Q e S* (empatadas), *R*;** a velocidade é **b)** positiva, quando a inclinação do gráfico xt é positiva ***(P)***; **c)** negativa, quando a inclinação é negativa ***(R);*** e **d)** zero, quando a inclinação é zero **(Q)** e **(S)**; **e) R, P, Q e S (empatadas)**. A velocidade é maior quando a inclinação do gráfico xt é a máxima (seja positiva ou negativa) e zero, quando a inclinação é zero.

2.3 Respostas: a) ***S***, onde o gráfico xt tem curvatura para cima; **b)** ***Q***, onde o gráfico xt tem curvatura para baixo; **c)** ***P*** e ***R***, onde o gráfico xt não é encurvado nem para cima nem para baixo; **d)** em P, $v_x > 0$ e $a_x = 0$ (velocidade **não varia**); em Q, $v_x > 0$ e $a_x < 0$ (velocidade está **diminuindo**); em R, $v_x < 0$ e $a_x = 0$ (velocidade **não varia**); em S, $v_x < 0$ e $a_x > 0$ (velocidade está **diminuindo**).

2.4 Resposta: b) A aceleração do policial é constante, logo o seu gráfico $v_x t$ é uma linha reta, e a motocicleta do policial está se movendo mais rapidamente do que o carro do motorista, quando os dois veículos se encontram em t = 10 s.

2.5 Respostas: a) iii) Use a Equação (2.13) substituindo x por y e $a_y = g$, $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$. A altura inicial é $y_0 = 0$ e a velocidade na altura máxima $y = h$ é $v_y = 0$, portanto $0 = v_{0y}^2 - 2gh$ e $h = v_{0y}^2/2g$. Se a velocidade inicial é aumentada por um fator de 2, a altura máxima aumenta por um fator de $2^2 = 4$ e a bola vai à altura de $4h$. **b) v)** Use a Equação (2.8) substituindo x por y e $a_y = g$; $v_y = v_{0y} - gt$. Se a velocidade inicial é aumentada por um fator de 2, o tempo para se atingir a altura máxima aumenta por um fator de 2 e torna-se $2t$.

2.6 Resposta: ii) A aceleração a_x é igual à inclinação do gráfico v_x-t. Quando a_x está aumentando, a inclinação do gráfico $v_x t$ também aumenta e o gráfico tem curvatura para cima.

Questões para discussão

Q2.1 O velocímetro de um automóvel mede a velocidade escalar ou o vetor velocidade? Explique.

Q2.2 A Figura 2.30 mostra uma série de fotografias em alta velocidade de um inseto voando em linha reta, no sentido da esquerda para a direita (na direção positiva do eixo x). Quais dos gráficos na Figura 2.31 descreve de forma mais plausível o movimento desse inseto?

Figura 2.30 Questão Q2.2.

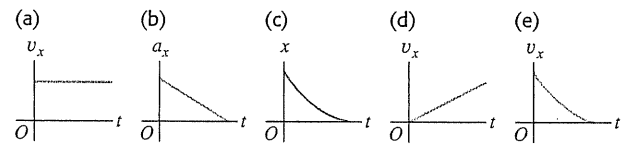


Figura 2.31 Questão Q2.2.

Q2.3 Um objeto com aceleração constante pode reverter a direção do seu percurso? *Duas vezes*? Em cada caso, explique seu raciocínio.

Q2.4 Em que condições uma velocidade média pode ser igual a uma velocidade instantânea?

Q2.5 É possível um objeto a) reduzir a velocidade enquanto o módulo da sua aceleração cresce? b) aumentar a velocidade enquanto sua aceleração é reduzida? Em cada caso, explique seu raciocínio.

Q2.6 Sob quais condições o módulo do vetor velocidade média é igual ao módulo da velocidade escalar?

Q2.7 Quando um Dodge Viper está no lava-rápido situado na Consolação, uma BMW Z3 está na Alameda Santos com a Paulista. Mais tarde, quando o Dodge chega à Alameda Santos com a Paulista, a BMW chega ao lava-rápido na Consolação. Como estão relacionadas as velocidades médias dos carros entre esses dois intervalos de tempo?

Q2.8 Um motorista em Curitiba foi submetido a julgamento por excesso de velocidade. A evidência contra o motorista foi o depoimento de um policial que notou que o carro do acusado estava emparelhado com um segundo carro que o ultrapassou. Conforme o policial, o segundo carro já havia ultrapassado o limite de velocidade. O motorista acusado se defendeu alegando que 'o segundo carro me ultrapassou, portanto eu não estava acelerando'. O juiz deu a sentença contra o motorista, alegando que, 'se dois carros estavam emparelhados, ambos estavam acelerando'. Se você fosse o advogado de defesa do motorista acusado, como contestaria?

Q2.9 É possível ter deslocamento nulo e velocidade média diferente de zero? E uma velocidade instantânea? Ilustre suas respostas usando um gráfico xt.

Q2.10 Pode existir uma aceleração nula e uma velocidade diferente de zero? Ilustre suas respostas usando um gráfico $v_x t$.

Q2.11 É possível ter uma velocidade nula e uma aceleração média diferente de zero? Velocidade nula e uma aceleração instantânea diferente de zero? Ilustre suas respostas usando um gráfico $v_x t$ e exemplifique tal movimento.

Q2.12 Um automóvel está se deslocando de leste para oeste. Ele pode ter uma velocidade orientada para oeste e ao mesmo tempo uma aceleração orientada para leste? Em que circunstâncias?

Q2.13 A caminhonete da Figura 2.2 está em $x_1 = 277$ m para $t_1 = 16{,}0$ s e em $x_2 = 19$ m para $t_2 = 25{,}0$ s. a) Desenhe *dois* diferentes gráficos xt possíveis para o movimento da caminhonete. b) As duas velocidades médias v_{mx} durante os intervalos de tempo de t_1 até t_2 possuem o mesmo valor nos dois gráficos? Explique.

Q2.14 Em movimento com aceleração constante, a velocidade de uma partícula é igual à metade da soma da velocidade inicial com a velocidade final. Isto é verdade quando a aceleração *não* é constante? Explique.

Q2.15 Você lança uma bola de beisebol verticalmente para cima e ela atinge uma altura máxima maior do que sua altura. O módulo da aceleração é maior enquanto ela está sendo lançada ou logo depois que ela deixa a sua mão? Explique.

Q2.16 Prove as seguintes afirmações: a) Desprezando os efeitos do ar, quando você lança qualquer objeto verticalmente para cima, ele possui a mesma velocidade em seu ponto de lançamento tanto durante a ascensão quanto durante a queda. b) O tempo total da trajetória é igual ao dobro do tempo que o objeto leva para atingir sua altura máxima.

Q2.17 Uma torneira mal fechada libera uma gota a cada 1,0 s. Conforme essas gotas caem, a distância entre elas aumenta, diminui ou permanece a mesma? Prove.

Q2.18 A posição inicial e a velocidade inicial de um veículo são conhecidas e faz-se um registro da aceleração a cada instante. Pode a posição do veículo depois de certo tempo ser determinada a partir destes dados? Caso seja possível, explique como isto poderia ser feito.

Q2.19 Do topo de um edifício alto, você joga uma bola de baixo para cima com velocidade v_0 e outra bola de cima para baixo com velocidade v_0. a) Qual das bolas possui maior velocidade ao atingir o chão? b) Qual das bolas chega primeiro ao chão? c) Qual das bolas possui maior deslocamento ao atingir o chão? d) Qual das bolas percorreu a maior distância ao atingir o chão?

Q2.20 Uma bola que está em repouso é solta do alto de um edifício com altura h. Ao mesmo tempo, uma segunda bola é projetada verticalmente para cima a partir do nível do chão, de tal modo que possui velocidade zero quando atinge o topo do edifício. Quando uma bola passa pela outra, qual delas possui maior velocidade ou a velocidade delas é a mesma? Explique. Onde as duas bolas estarão quando ficarem lado a lado: na altura $h/2$ acima do chão, abaixo dessa altura ou acima dessa altura? Explique.

Exercícios

Seção 2.1 Deslocamento, tempo e velocidade média

2.1 Um foguete transportando um satélite é acelerado verticalmente a partir da superfície terrestre. Após 1,15 s de seu lançamento, o foguete atravessa o topo de sua plataforma de lançamento a 63 m acima do solo. Depois de 4,75 s adicionais ele se encontra a 1,0 km acima do solo. Calcule o módulo da velocidade média do foguete para a) O trecho do vôo correspondente ao intervalo de 4,75 s; b) Os primeiros 5,90 s do seu vôo.

2.2 Em uma experiência, um pombo-correio foi retirado de seu ninho, levado para um local a 5150 km do ninho e libertado. Ele retorna ao ninho depois de 13,5 dias. Tome a origem no ninho e estenda um eixo $+Ox$ até o ponto onde ele foi libertado. Qual a velocidade média do pombo-correio em m/s para: a) O vôo de retorno ao ninho? b) O trajeto todo, desde o momento em que ele é retirado do ninho até seu retorno?

2.3 De volta para casa. Normalmente, você faz uma viagem de carro de San Diego a Los Angeles com uma velocidade média de 105 km/h, em 2h20 min. Em uma tarde de sexta-feira, contudo, o trânsito está muito pesado e você percorre a mesma distância com uma velocidade média de 70 km/h. Calcule o tempo que você leva nesse percurso.

2.4 De um pilar até um poste. Começando em um pilar, você corre 200 m de oeste para leste (o sentido do eixo $+Ox$) com uma velocidade média de 5,0 m/s e, a seguir, corre 280 m de leste para oeste com uma velocidade média de 4,0 m/s até um poste. Calcule a) Sua velocidade escalar do pilar até o poste; b) O módulo do vetor velocidade média do pilar até o poste.

2.5 Dois corredores partem simultaneamente do mesmo ponto de uma pista circular de 200 m e correm em direções *opostas*. Um corre a uma velocidade constante de 6,20 m/s e o outro corre a uma velocidade constante de 5,50 m/s. Quando eles se cruzam pela primeira vez, a) Por quanto tempo estão correndo? b) Qual a distância percorrida por cada um deles?

2.6 Suponha que os dois corredores do Exercício 2.5 partem ao mesmo tempo, do mesmo ponto, mas correm na *mesma* direção. a) Quando o mais rápido ultrapassará o mais lento e a que distância do ponto de largada cada um estará? b) Quando o mais rápido ultrapassará o mais lento pela *segunda* vez e, nesse instante, a que distância cada um estará do ponto de largada?

2.7 Análise de um terremoto. Terremotos produzem vários tipos de ondas de vibração. As mais conhecidas são as ondas P (ou *primárias*) e as ondas S (ou *secundárias*). Na crosta terrestre as ondas P se propagam a aproximadamente 6,5 km/s, enquanto as ondas S, a aproximadamente 3,5 km/s. As velocidades reais

variam de acordo com o tipo de material pelo qual atravessam. A defasagem no tempo de chegada dessas ondas a uma estação de registros sísmicos informa aos geólogos a que distância o terremoto ocorreu. Se a defasagem no tempo é de 33 s, a que distância da estação sísmica o terremoto ocorreu?

2.8 Um carro percorre um trecho retilíneo ao longo de uma estrada. Sua distância a um sinal de parada é uma função do tempo t dada por $x(t) = \alpha t^2 - \beta t^3$, onde $\alpha = 1{,}50\ \text{m/s}^2$ e $\beta = 0{,}0500\ \text{m/s}^3$. Calcule a velocidade média do carro para os seguintes intervalos de tempo: a) $t = 0$ até $t = 2{,}0$ s; b) $t = 0$ até $t = 4{,}0$ s; c) $t = 2{,}0$ s até $t = 4{,}0$ s.

Seção 2.2 Velocidade instantânea

2.9 Um carro pára em um semáforo. A seguir ele percorre um trecho retilíneo de modo que sua distância ao sinal é dada por $x(t) = bt^2 - ct^3$, onde $b = 2{,}40\ \text{m/s}^2$ e $c = 0{,}120\ \text{m/s}^3$. a) Calcule a velocidade média do carro para o intervalo de tempo $t = 0$ até $t = 10{,}0$ s. b) Calcule a velocidade instantânea do carro para i) $t = 0$; ii) $t = 5{,}0$ s; iii) $t = 10{,}0$ s. c) Quanto tempo após partir do repouso o carro retorna novamente ao repouso?

2.10 Uma professora de física sai de sua casa e se dirige a pé para o campus. Depois de 5 min começa a chover e ela retorna para casa. Sua distância da casa em função do tempo é indicada pelo gráfico da Figura 2.32. Em qual dos pontos indicados sua velocidade é: a) zero? b) constante e positiva? c) constante e negativa? d) crescente em módulo? e) decrescente em módulo?

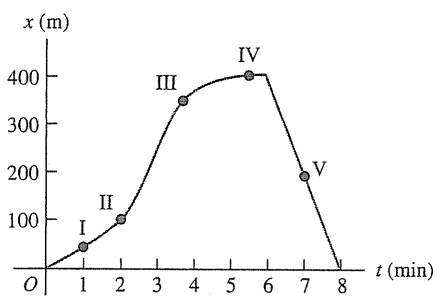


Figura 2.32 Exercício 2.10.

2.11 Uma bola se move em linha reta (eixo Ox). O gráfico na Figura 2.33 mostra a velocidade dessa bola em função do tempo. a) Qual é a velocidade escalar média e a velocidade média nos primeiros 3,0 s? b) Suponha que a bola se mova de tal modo que o gráfico após 2,0 s seja −3,0 m/s em vez de +3,0 m/s. Determine a velocidade escalar média e a velocidade média da bola nesse caso.

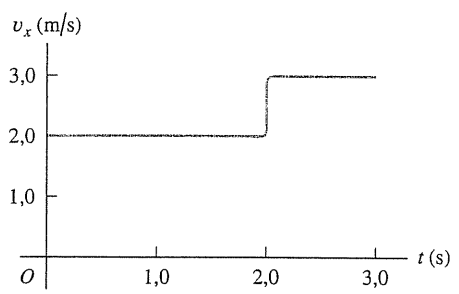


Figura 2.33 Exercício 2.11.

Seção 2.3 Aceleração instantânea e aceleração média

2.12 Em um teste de um novo modelo de automóvel da empresa Motores Incríveis, o velocímetro é calibrado para ler m/s em vez de km/h. A série de medidas a seguir foi registrada durante o teste ao longo de uma estrada retilínea muito longa:

Tempo (s)	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Velocidade (m/s)	0	0	2	6	10	16	19	22	22

a) Calcule a aceleração média durante cada intervalo de 2,0 s. A aceleração é constante? Ela é constante em algum trecho do teste? b) Faça um gráfico $v_x t$ dos dados tabelados usando escalas de 1 cm = 1 s no eixo horizontal e de 1 cm = 2 m/s no eixo vertical. Desenhe uma curva entre os pontos plotados. Medindo a inclinação dessa curva, calcule a aceleração instantânea para os tempos $t = 9$ s, $t = 13$ s e $t = 15$ s.

2.13 O carro mais rápido (e mais caro)! A tabela mostra dados de teste para o Bugatti Veyron, o carro mais veloz já fabricado. O carro se move em linha reta (eixo Ox).

Tempo (s)	0	2,1	20,0	53
Velocidade (m/s)	0	60	200	253

a) Desenhe um gráfico $v_x t$ da velocidade desse carro (em km/h). A aceleração é constante? b) Calcule a aceleração média (em m/s^2) entre i) 0 e 2,1 s; ii) 2,1 s e 20,0 s; iii) 20,0 s e 53 s. Esses resultados são compatíveis com seu gráfico na parte a)? (Antes de você decidir comprar esse carro, talvez devesse saber que apenas 300 serão fabricados, consome todo o combustível em 12 minutos na velocidade máxima e custa US$ 1,25 milhão!)

2.14 A Figura 2.34 mostra a velocidade em função do tempo de um carro movido a energia solar. O motorista acelera a partir de um sinal de parada e se desloca durante 20 s com velocidade constante de 60 km/h, e a seguir pisa no freio e pára 40 s após sua partida do sinal. a) Calcule sua aceleração média para os seguintes intervalos de tempo: i) $t = 0$ até $t = 10$ s; ii) $t = 30$ s até $t = 40$ s; iii) $t = 10$ s até $t = 30$ s; iv) $t = 0$ até $t = 40$ s; b) Qual é a aceleração instantânea a $t = 20$ s e a $t = 35$ s?

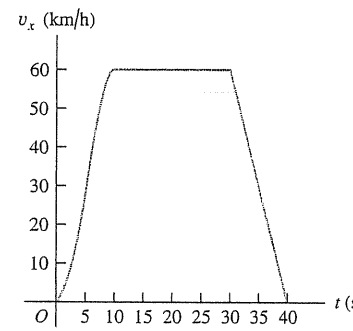


Figura 2.34 Exercício 2.14.

2.15 Uma tartaruga se arrasta em linha reta, à qual chamaremos de eixo Ox com a direção positiva para a direita. A equação para a posição da tartaruga em função do tempo é $x(t) = 50{,}0\ \text{cm} + (2{,}0\ \text{cm/s})t - (0{,}0625\ \text{cm/s}^2)t^2$. a) Determine a velocidade inicial, a posição inicial e a aceleração inicial da tartaruga. b) Em qual instante t a velocidade da tartaruga é zero? c) Quanto tempo do ponto inicial a tartaruga leva para retornar ao ponto de partida? d) Em qual instante t a tartaruga está a uma distância de 10,0 cm do ponto inicial? Qual é a velocidade (módulo e direção) da tartaruga em cada um desses instantes? e) Desenhe um gráfico de x *versus* t, v_x *versus* t e a_x *versus* t, para o intervalo de tempo $t = 0$ até $t = 40$ s.

2.16 Um astronauta saiu da Estação Espacial Internacional para testar um novo veículo espacial. Seu companheiro permanece a bordo e registra as seguintes variações de velocidade, cada uma ocorrendo em intervalos de 10 s. Determine o módulo, a direção e o sentido da aceleração média em cada intervalo. Suponha que o sentido positivo seja da esquerda para a direita. a) No início do intervalo o astronauta se move para a direita ao longo do eixo Ox com velocidade de 15,0 m/s e no final do intervalo ele se move para a direita com velocidade de 5,0 m/s. b) No início do intervalo o astronauta move-se a 5,0 m/s para a esquerda e no final move-se para a esquerda com velocidade de 15,0 m/s. c) No início do intervalo ele se move para a direita com velocidade de 15,0 m/s e no final move-se para a esquerda com velocidade de 15,0 m/s.

2.17 Aceleração automotiva. Com base em sua experiência de dirigir um automóvel, estime o módulo da aceleração média de um carro quando a) acelera em uma estrada do repouso até 65 mi/h e b) pisa forte no freio até uma parada repentina. c) Explique por que essa aceleração média poderia ser considerada positiva ou negativa.

2.18 A velocidade de um carro em função do tempo é dada por $v_x(t) = \alpha + \beta t^2$, onde $\alpha = 3{,}0\ \text{m/s}$ e $\beta = 0{,}100\ \text{m/s}^3$. a) Calcule a aceleração média do carro para o intervalo de tempo de $t = 0$ a $t = 5{,}0$ s. b) Calcule a aceleração instantânea para i) $t = 0$; ii) $t = 5{,}0$ s. c) Desenhe gráficos acurados $v_x t$ e $a_x t$ para o movimento do carro entre $t = 0$ e $t = 5{,}0$ s.

2.19 A Figura 2.35 mostra a coordenada de uma aranha que se desloca lentamente ao longo do eixo Ox. a) Faça um gráfico de sua velocidade e aceleração em função do tempo. b) Faça um diagrama do movimento (como o da Figura 2.13b ou o da Figura 2.14b) mostrando a posição, a velocidade e a aceleração da aranha para cinco tempos: $t = 2{,}5$ s, $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 30$ s e $t = 37{,}5$ s.

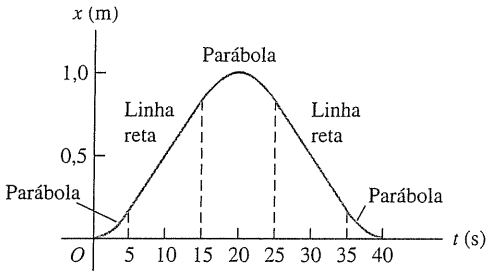


Figura 2.35 Exercício 2.19.

2.20 Um microprocessador controla a posição do pára-choque dianteiro de um carro usado em um teste. A posição é dada por $x(t) = 2{,}17\ \text{m} + (4{,}80\ \text{m/s}^2)t^2 - (0{,}100\ \text{m/s}^6)t^6$. a) Determine sua posição e aceleração para os instantes em que o carro possui velocidade zero. b) Desenhe gráficos xt, $v_x t$ e $a_x t$ para o movimento do pára-choque entre $t = 0$ e $t = 2{,}0$ s.

Seção 2.4 Movimento com aceleração constante

2.21 Um antílope que se move com aceleração constante leva 7,0 s para percorrer uma distância de 70,0 m entre dois pontos. Ao passar pelo segundo ponto, sua velocidade é de 15,0 m/s. a) Qual era sua velocidade quando passava pelo primeiro ponto? b) Qual era sua aceleração?

2.22 Ao ser lançado pela catapulta da plataforma de um porta-aviões, um caça a jato atinge a velocidade de decolagem de 270 km/h em uma distância aproximada de 90 m. Suponha aceleração constante. a) Calcule a aceleração do caça em m/s^2. b) Calcule o tempo necessário para o caça atingir essa velocidade de decolagem.

2.23 Um arremesso rápido. O arremesso mais rápido já medido de uma bola de beisebol saiu da mão do arremessador a uma velocidade de 45,0 m/s. Se o arremessador estava em contato com a bola a uma distância de 1,50 m e produziu aceleração constante, a) qual aceleração ele deu à bola e b) quanto tempo ele levou para arremessá-la?

2.24 Um saque no tênis. No saque mais rápido já medido de tênis, a bola deixou a raquete a 73,14 m/s. O saque de uma bola de tênis normalmente está em contato com a raquete por 30,0 m/s e parte do repouso. Suponha que a aceleração seja constante. a) Qual foi a aceleração da bola nesse saque? b) Qual foi a distância percorrida pela bola durante o saque?

2.25 *Air bag* de automóvel. O corpo humano pode sobreviver a um trauma por acidente com aceleração negativa (parada súbita) quando o módulo de aceleração é menor do que $250\ \text{m/s}^2$ (cerca de 25 g). Suponha que você sofra um acidente de automóvel com velocidade inicial de 105 km/h e seja amortecido por um *air bag* que infla automaticamente. Qual deve ser a distância que o *air bag* se deforma para que você consiga sobreviver?

2.26 Entrando na auto-estrada. Um carro está parado na rampa de acesso de uma auto-estrada, esperando uma diminuição do tráfego. O motorista se move a uma aceleração constante ao longo da rampa, para entrar na auto-estrada. O carro parte do repouso, move-se ao longo de uma linha reta e atinge uma velocidade de 20 m/s no final da rampa de 120 m de comprimento. a) Qual é a aceleração do carro? b) Quanto tempo ele leva para percorrer a rampa? c) O tráfego na auto-estrada se move com uma velocidade constante de 20 m/s. Qual é o deslocamento do tráfego enquanto o carro atravessa a rampa?

2.27 Lançamento de nave espacial. No lançamento, a nave espacial pesa 4,5 milhões de libras. Quando lançada a partir do repouso, leva 8,0 s para atingir 161 km/h e, ao final do primeiro minuto, sua velocidade é 1610 km/h. a) Qual é a aceleração média (em m/s^2) da nave i) durante os primeiros 8,0 s e ii) entre 8,0 s e o final do primeiro minuto? b) Supondo que a aceleração seja constante, durante cada intervalo de tempo (mas não necessariamente a mesma em ambos os intervalos), que distância a nave viajou i) durante os primeiros 8,0 s e ii) durante o intervalo entre 8,0 s e 1,0 min?

2.28 De acordo com dados de testes recentes, um automóvel percorre 0,250 mi em 19,9 s, a partir do repouso. O mesmo carro, ao frear a 60,0 mi/h em um piso seco, pára a 146 p. Supondo uma aceleração constante em cada trecho do movimento, mas não necessariamente a mesma aceleração ao reduzir ou ao acelerar. a) Determine a aceleração desse carro quando aumenta a velocidade e quando freia. b) Se a aceleração é constante, a que velocidade (em mi/h) o carro deve estar se movendo após 0,250 mi de aceleração? A velocidade real medida é 70,0 mi/h; o que isso diz sobre o movimento? c) Quanto tempo esse carro leva para parar ao frear a 60,0 mi/h?

2.29 Um gato anda em uma linha reta, à qual chamaremos de eixo Ox com a direção positiva para a direita. Como um físico observador, você mede o movimento desse gato e desenha um gráfico da velocidade do felino em função do tempo (Figura 2.36). a) Determine a velocidade do gato a $t = 4{,}0$ s e a $t = 7{,}0$ s. b) Qual é a aceleração do gato a $t = 3{,}0$ s? A $t = 6{,}0$ s? A $t = 7{,}0$ s?

c) Qual é a distância percorrida pelo gato nos primeiros 4,5 s? De $t = 0$ até $t = 7{,}5$ s? d) Desenhe gráficos claros da aceleração e da posição do gato em função do tempo, supondo que ele partiu da origem.

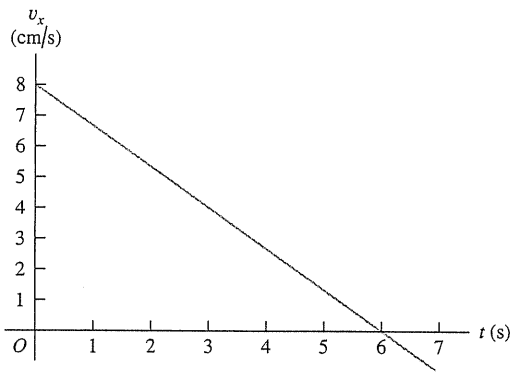


Figura 2.36 Exercício 2.29.

2.30 Para $t = 0$ um carro pára em um semáforo. Quando a luz fica verde, o carro começa a acelerar com uma taxa constante, elevando sua velocidade para 20 m/s, 8 s depois de a luz ficar verde. Ele se move com essa nova velocidade por uma distância de 60 m. A seguir, o motorista avista uma luz vermelha no cruzamento seguinte e começa a diminuir a velocidade com uma taxa constante. O carro pára no sinal vermelho a 180 m da posição para $t = 0$. a) Para o movimento do carro, desenhe gráficos acurados de xt, v_xt e a_xt. b) Faça um diagrama do movimento (como o da Figura 2.13b ou o da Figura 2.14b) mostrando a posição, a velocidade e a aceleração do carro.

2.31 O gráfico da Figura 2.37 mostra a velocidade da motocicleta de um policial em função do tempo. a) Calcule a aceleração instantânea para $t = 3$ s, $t = 7$ s e $t = 11$ s. b) Qual foi o deslocamento do policial nos 5 s iniciais? E nos 9 s iniciais? E nos 13 s iniciais?

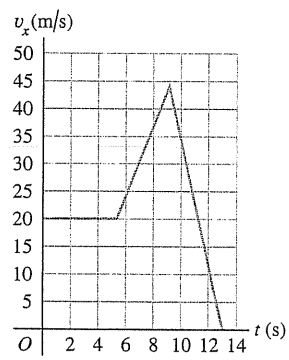


Figura 2.37 Exercício 2.31.

2.32 O gráfico da Figura 2.38 mostra a aceleração de um modelo de locomotiva que se move no eixo Ox. Faça um gráfico da velocidade e da posição sabendo que $x = 0$ e $v_x = 0$ para $t = 0$.

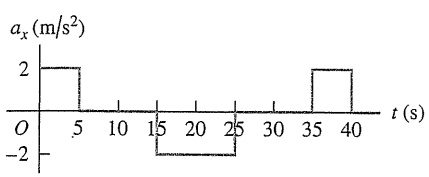


Figura 2.38 Exercício 2.32.

2.33 Uma espaçonave dirige-se em linha reta para a Base Lunar I, situada a uma distância de 384.000 km da Terra. Suponha que ela acelere 20,0 m/s² durante os primeiros 15,0 min da viagem e a seguir viaje com velocidade constante até os últimos 15,0 min, quando acelera a 20,0 m/s², atingindo o repouso exatamente quando toca a Lua. a) Qual foi a velocidade máxima atingida? b) Qual foi a fração do percurso total durante o qual ela viajou com velocidade constante? c) Qual foi o tempo total da viagem?

2.34 Um trem de metrô parte do repouso em uma estação e acelera com uma taxa constante de 1,60 m/s² durante 14,0 s. Ele viaja com velocidade constante durante 70,0 s e reduz a velocidade com uma taxa constante de 3,50 m/s² até parar na estação seguinte. Calcule a distância *total* percorrida.

2.35 Dois carros, A e B, movem-se no eixo Ox. O gráfico da Figura 2.39 mostra as posições de A e B em função do tempo. a) Faça um diagrama do movimento (como o da Figura 2.13b ou o da Figura 2.14b) mostrando a posição, a velocidade e a aceleração do carro para $t = 0$, $t = 1$ s e $t = 3$ s. b) Para que tempo(s), caso exista algum, A e B possuem a mesma posição? c) Faça um gráfico da velocidade *versus* tempo para A e B. d) Para que tempo(s), caso exista algum, A e B possuem a mesma velocidade? e) Para que tempo(s), caso exista algum, o carro B ultrapassa o carro A?

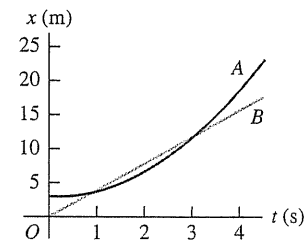


Figura 2.39 Exercício 2.35.

2.36 No momento em que um sinal luminoso fica verde, um carro que estava parado começa a mover-se com aceleração constante de 3,20 m/s². No mesmo instante, um caminhão que se desloca com velocidade constante de 20,0 m/s ultrapassa o carro. a) Qual a distância percorrida a partir do sinal para que o carro ultrapasse o caminhão? b) Qual é a velocidade do carro no momento em que ultrapassa o caminhão? c) Faça um gráfico xt dos movimentos desses dois veículos. Considere $x = 0$ o ponto de intersecção inicial. d) Faça um gráfico v_xt dos movimentos desses dois veículos.

2.37 Pouso em Marte. Em janeiro de 2004, a NASA pousou módulos de exploração em Marte. Parte da descida consistiu nas seguintes etapas:

Etapa A: a fricção com a atmosfera reduziu a velocidade de 19.300 km/h para 1600 km/h em 4,0 min.

Etapa B: um pára-quedas se abriu para reduzir a velocidade a 321 km/h em 94 s.

Etapa C: foguetes de retropropulsão foram acionados para reduzir a velocidade a zero em uma distância de 75 m.

Suponha que uma etapa sucedeu imediatamente a anterior e que a aceleração em cada etapa foi constante. a) Determine a aceleração do foguete (em m/s²) por etapa. b) Qual a distância total (em km) percorrida pelo foguete nas etapas A, B e C?

Seção 2.5 Queda livre de corpos

2.38 Gotas de chuva. Se a resistência do ar sobre as gotas de chuva pudesse ser desprezada, poderíamos considerar essas gotas objetos em queda livre. a) As nuvens que dão origem a chuvas estão em alturas típicas de algumas centenas de metros acima do solo. Estime a velocidade de uma gota de chuva ao cair no solo, se ela pudesse ser considerada um corpo em queda livre. Forneça essa estimativa em m/s e km/h. b) Estime (pela sua experiência pessoal sobre chuva) a velocidade real de uma gota de chuva ao cair no solo. c) Com base nos resultados de a) e b), verifique se é uma boa aproximação desprezar a resistência do ar sobre as gotas de chuva. Explique.

2.39 a) Se uma pulga pode dar um salto e atingir uma altura de 0,440 m, qual seria sua velocidade inicial ao sair do solo? b) Durante quanto tempo ela permanece no ar?

2.40 Descida na Lua. Um módulo explorador da Lua está pousando na Base Lunar I (Figura 2.40). Ele desce lentamente sob a ação dos retropropulsores do motor de descida. O motor se separa do módulo quando ele se encontra a 5,0 m da superfície lunar e possui uma velocidade para baixo igual a 0,8 m/s. Ao se separar do motor, o módulo inicia uma queda livre. Qual é a velocidade do módulo no instante em que ele toca a superfície? A aceleração da gravidade na Lua é igual a 1,6 m/s^2.

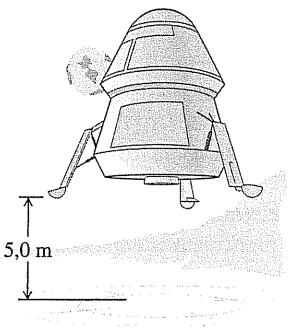


Figura 2.40 Exercício 2.40.

2.41 Um teste simples para o tempo de reação. Uma régua de medição é mantida verticalmente acima de sua mão com a extremidade inferior entre o polegar e o indicador. Ao ver a régua sendo largada, você a segura com esses dois dedos. Seu tempo de reação pode ser calculado pela distância percorrida pela régua, medida diretamente pela posição dos seus dedos na escala da régua. a) Deduza uma relação para seu tempo de reação em função da distância d. b) Calcule o tempo de reação supondo uma distância medida igual a 17,6 cm.

2.42 Um tijolo é largado (velocidade inicial nula) do alto de um edifício. Ele atinge o solo em 2,50 s. A resistência do ar pode ser desprezada, de modo que o tijolo está em queda livre. a) Qual é a altura do edifício? b) Qual é o módulo da velocidade quando ele atinge o solo? c) Faça gráficos $a_y t$, $v_y t$ e yt para o movimento do tijolo.

2.43 Falha no lançamento. Um foguete de 7.500 kg é lançado verticalmente da plataforma com uma aceleração constante no sentido de baixo para cima de 2,25 m/s^2 e não sente nenhuma resistência significativa do ar. Ao atingir uma altura de 525 m, seus motores falham repentinamente, de modo que a única força atuando sobre ele nesse momento é a gravidade. a) Qual é a altura máxima que esse foguete atingirá a partir da plataforma de lançamento? b) A partir da falha no motor, quanto tempo decorrerá antes que o foguete caia sobre a plataforma de lançamento e qual será sua velocidade instantes antes da queda? c) Faça gráficos $a_y t$, $v_y t$ e yt do movimento do foguete, do instante do lançamento até o instante da queda.

2.44 Um balonista de ar quente que se desloca verticalmente para cima com velocidade constante de módulo igual a 5,0 m/s deixa cair um saco de areia no momento em que ele está a uma distância de 40,0 m acima do solo (Figura 2.41). Após ser largado, o saco de areia, passa a se mover em queda livre. a) Calcule a posição e a velocidade do saco de areia 0,250 s e 1,0 s depois de ser largado. b) Calcule o tempo que o saco de areia leva para atingir o solo desde o momento em que ele foi lançado. c) Qual é a velocidade do saco de areia quando ele atinge o solo? d) Qual é a altura máxima em relação ao solo atingida pelo saco de areia? e) Faça gráficos $a_y t$, $v_y t$ e yt para o movimento do saco de areia.

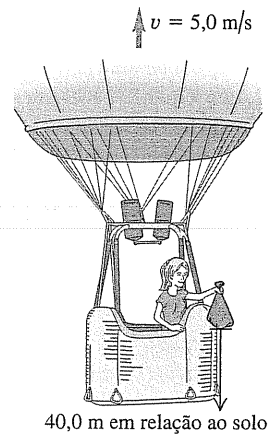


Figura 2.41 Exercício 2.44.

2.45 Um estudante no topo de um edifício joga uma bola com água verticalmente para baixo. A bola deixa a mão do estudante com uma velocidade de 6,0 m/s. A resistência do ar pode ser ignorada e a bola considerada em queda livre após o lançamento. a) Calcule sua velocidade depois de 2,0 s de queda. b) Qual a distância percorrida nesses 2,0 s? c) Qual o módulo da velocidade quando a bola caiu 10,0 m? d) Faça gráficos $a_y t$, $v_y t$ e yt para o movimento.

2.46 Um ovo é atirado verticalmente de baixo para cima de um ponto próximo da cornija na extremidade superior de um edifício alto. Ele passa rente da cornija em seu movimento para baixo, atingindo um ponto a 50,0 m abaixo da cornija 5,0 s após deixar a mão do lançador. Despreze a resistência do ar. a) Calcule a velocidade inicial do ovo. b) Qual a altura máxima atingida acima do ponto inicial do lançamento? c) Qual o módulo da velocidade nessa altura máxima? d) Qual o módulo e o sentido da aceleração nessa altura máxima? e) Faça gráficos de $a_y t$, $v_y t$ e yt para o movimento do ovo.

2.47 O *Sonic Wind (Vento Sônico) No. 2* é uma espécie de trenó movido por um foguete, usado para investigar os efeitos fisiológicos de acelerações elevadas. Ele se desloca em uma pista retilínea com 1070 m de comprimento. Partindo do repouso, pode atingir uma velocidade de 224 m/s em 0,900 s. a) Calcule a aceleração em m/s^2, supondo que ela seja constante. b) Qual a razão entre essa aceleração e a aceleração de um corpo em queda livre (g)?

c) Qual a distância percorrida em 0,900 s? d) Um artigo publicado por uma revista afirma que, no final de uma corrida, a velocidade desse trenó diminui de 283 m/s até zero em 1,40 s e que durante este intervalo de tempo a aceleração é maior que 40 g. Esses valores são coerentes?

2.48 Uma pedra grande é expelida verticalmente de baixo para cima por um vulcão com velocidade inicial de 40,0 m/s. Despreze a resistência do ar. a) Qual é o tempo que a pedra leva, após o lançamento, para que sua velocidade seja de 20,0 m/s de baixo para cima? b) Qual o tempo que a pedra leva, após o lançamento, para que sua velocidade seja de 20,0 m/s de cima para baixo? c) Quando o deslocamento da pedra é igual a zero? d) Quando a velocidade da pedra é igual a zero? e) Qual o módulo e o sentido da aceleração enquanto a pedra i) Está se movendo de baixo para cima? ii) Está se movendo de cima para baixo? iii) Está no ponto mais elevado da sua trajetória? f) Faça gráficos $a_y t$, $v_y t$ e yt para o movimento.

2.49 Uma rocha de 15 kg cai de uma posição de repouso na Terra e atinge o solo em 1,75 s. Quando cai da mesma altura no satélite de Saturno, Enceladus, ela atinge o solo em 18,6 s. Qual é a aceleração da gravidade em Enceladus?

*Seção 2.6 Velocidade e posição por integração

***2.50** A aceleração de um ônibus é dada por $a_x(t) = \alpha t$, onde $\alpha = 1{,}2\ \text{m/s}^3$. a) Se a velocidade do ônibus para $t = 1{,}0$ s é igual a 5,0 m/s, qual é sua velocidade para $t = 2{,}0$ s? b) Se a posição do ônibus para $t = 1{,}0$ s é igual a 6,0 m, qual sua posição para $t = 2{,}0$ s? c) Faça gráficos at, vt e xt para esse movimento.

***2.51** A aceleração de uma motocicleta é dada por $a_x(t) = At - Bt^2$, onde $A = 1{,}5\ \text{m/s}^3$ e $B = 0{,}120\ \text{m/s}^4$. A motocicleta está em repouso na origem no instante $t = 0$. a) Calcule sua velocidade e posição em função do tempo. b) Calcule a velocidade máxima que ela pode atingir.

***2.52 O salto voador de uma pulga.** A Figura 2.42 mostra o gráfico de dados coletados de uma pulga saltitante de 210-μg em um filme de alta velocidade (3500 quadros/segundo). Essa pulga tinha aproximadamente 2 mm de comprimento e saltou a um ângulo de decolagem quase vertical. Use o gráfico para responder a estas perguntas. a) A aceleração da pulga pode chegar a zero? Se sim, quando? Justifique sua resposta. b) Determine a altura máxima que a pulga atingiu nos primeiros 2,5 ms. c) Determine a aceleração da pulga a 0,5 ms, 1,0 ms e 1,5 ms. d) Determine a altura da pulga a 0,5 ms, 1,0 ms e 1,5 ms.

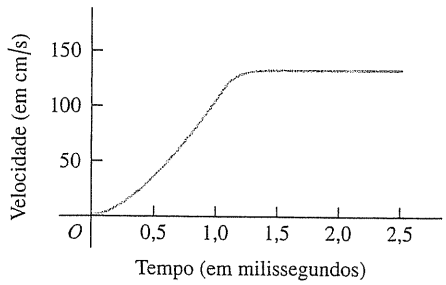


Figura 2.42 Exercício 2.52.

***2.53** O gráfico na Figura 2.43 descreve a aceleração em função do tempo para uma pedra que rola colina abaixo, a partir de uma posição de repouso. a) Determine a variação na velocidade da pedra, entre $t = 2{,}5$ s e $t = 7{,}5$ s. b) Faça um gráfico da velocidade da pedra em função do tempo.

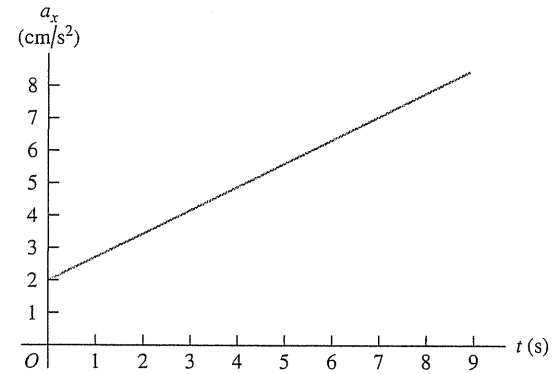


Figura 2.43 Exercício 2.53.

Problemas

2.54 Em uma competição de bicicletas com percurso de 30 km, você percorre os primeiros 15 km com uma velocidade média de 12 km/h. Qual deve ser sua velocidade escalar média nos 15 km restantes para que sua velocidade escalar média no percurso total de 30 km seja de a) 6 km/h? b) 18 km/h? c) Dada a referida velocidade média para os primeiros 15 km, você poderia ou não atingir uma velocidade escalar média de 24 km/h no percurso total de 30 km? Explique.

2.55 A posição de uma partícula entre $t = 0$ e $t = 2{,}0$ s é dada por $x(t) = (3{,}0\ \text{m/s}^3)t^3 - (10{,}0\ \text{m/s}^2)t^2 + (9{,}0\ \text{m/s})t$. a) Faça gráficos de xt, $v_x t$ e $a_x t$ para essa partícula. b) Para que tempo(s) entre $t = 0$ e $t = 2{,}0$ s a partícula está em repouso? O resultado obtido por você está de acordo com o gráfico vt da parte (a)? c) Para qual tempo calculado na parte (b) a aceleração da partícula é positiva ou negativa? Mostre que em cada caso podemos obter a mesma resposta pelo gráfico $v_x t$ ou pela função $a_x(t)$. d) Para que tempo(s) entre $t = 0$ e $t = 2{,}0$ s a velocidade da partícula não varia instantaneamente? Localize esse ponto nos gráficos $a_x t$ e $v_x t$ da parte (a). e) Qual a maior distância entre a partícula e a origem ($x = 0$) no intervalo entre $t = 0$ e $t = 2{,}0$ s? f) Para que tempo(s) entre $t = 0$ e $t = 2{,}0$ s a partícula está *aumentando de velocidade* com a maior taxa? Para que tempo(s) entre $t = 0$ e $t = 2{,}0$ s a partícula está *diminuindo de velocidade* com a maior taxa? Localize esses pontos nos gráficos $a_x t$ e $v_x t$ da parte (a).

2.56 Gincana. Em uma gincana, cada concorrente corre 25,0 m transportando um ovo equilibrado em uma colher, dá a volta e retorna ao ponto de partida. Edite corre os primeiros 25,0 m em 20,0 s. Quando volta, ela se sente mais segura e leva apenas 15,0 s. Qual o módulo do vetor velocidade média para a) Os primeiros 25,0 m? b) A viagem de volta? c) Qual o módulo do vetor velocidade média no percurso todo quando ela volta ao ponto de partida? d) Qual é a velocidade escalar média no percurso todo quando ela volta ao ponto de partida?

2.57 Daniel dirige na Estrada I-80 em Seward, no Estado de Nebraska, e segue por um trecho retilíneo de leste para oeste com uma velocidade média com módulo igual a 88 km/h. Depois de percorrer 76 km, ele atinge a saída de Aurora (Figura 2.44). Percebendo que foi longe demais, ele retorna 34 km de oeste para leste até a saída para York com uma velocidade média com

módulo igual a 72 km/h. Para a viagem total desde Seward até a saída de York, qual é a) Sua velocidade escalar média? B) O módulo do vetor velocidade média?

2.58 Tráfego em uma auto-estrada. De acordo com um artigo da revista *Scientific American* (maio de 1990), circulam normalmente em uma auto-estrada americana cerca de 2400 veículos por hora em cada pista, com velocidade de 96 km/h para um tráfego considerado regular. Depois desse limite o fluxo do tráfego começa a ficar 'turbulento' (com acelerações e paradas). a) Se cada veículo possui comprimento aproximadamente igual a 4,6 m, qual é o espaçamento médio entre os veículos para a densidade do tráfego mencionado? b) Um sistema automático para evitar colisões que opera com sinais de radar ou sonar, e que pode acelerar ou parar um veículo quando necessário, poderia reduzir sensivelmente a distância entre os veículos. Supondo uma distância de 9,2 m (igual a dois comprimentos de carro), quantos veículos por hora poderiam circular em cada pista, com velocidade de 96 km/h?

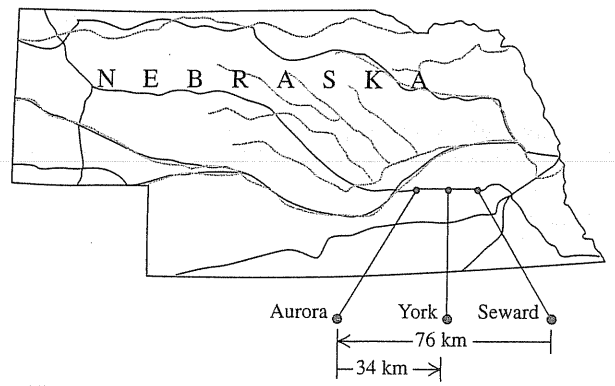


Figura 2.44 Exercício 2.57.

2.59 Um velocista pode acelerar até sua velocidade máxima em 4,0 s. Ele então mantém esta velocidade durante o trajeto restante em uma competição de 100 m, terminando a corrida com um tempo total de 9,1 s. a) Qual a aceleração média do velocista durante os 4,0 s iniciais? b) Qual sua aceleração média durante os últimos 5,1 s? c) Qual sua aceleração média durante a corrida toda? d) Explique por que sua resposta do item (c) não é a média das respostas (a) e (b).

2.60 Um trenó está em repouso no alto de uma montanha e escorrega para baixo com aceleração constante. Em um dado instante está a 14,4 m de distância do topo; 2,0 s mais tarde ele está a 25,6 m de distância do topo; 2,0 s mais tarde está a 40,0 m de distância do topo e 2,0 s mais tarde está a 57,6 m de distância do topo. a) Qual o módulo da velocidade média do trenó durante cada um dos intervalos de 2,0 s depois de passar pelo ponto a 14,4 m de distância do topo? b) Qual a aceleração do trenó? c) Qual a velocidade escalar do trenó quando ele passa pelo ponto a 14,4 m de distância do topo? d) Quanto tempo ele leva para ir do topo até o ponto a 14,4 m de distância do topo? e) Qual a distância percorrida pelo trenó durante o primeiro segundo depois de passar pelo ponto a 14,4 m de distância do topo?

2.61 Uma gazela está correndo em linha reta (o eixo x). O gráfico na Figura 2.45 mostra a velocidade desse animal em função do tempo. Nos primeiros 12,0 s, determine a) A distância total percorrida e b) O deslocamento da gazela. c) Faça um gráfico $a_x t$ demonstrando a aceleração desse animal em função do tempo para os primeiros 12,0 s.

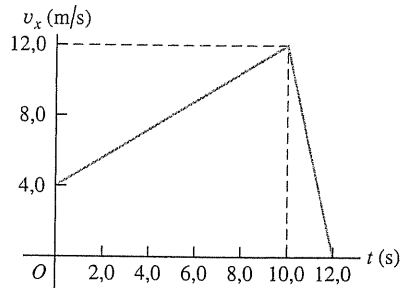


Figura 2.45 Exercício 2.61.

2.62 No ar ou no vácuo, a luz viaja a uma velocidade constante de $3,0 \times 10^8$ m/s. Para responder a algumas das seguintes perguntas, se necessário, consulte os dados astronômicos no Apêndice F. a) Um ano-luz é definido como a distância percorrida pela luz em um ano. Use essa informação para determinar quantos metros há em 1 ano-luz. b) Qual distância em metros a luz viaja em 1 nanossegundo? c) Quando um brilho solar ocorre no nosso Sol, em quanto tempo após sua ocorrência é possível observá-lo? d) Ao lançar raios *laser* de um refletor instalado na lua pelos astronautas da Apollo, os astrônomos podem fazer medições exatas da distância entre a Terra e a Lua. Quanto tempo após ser enviado, um desses raios laser (simplesmente um raio de luz) leva para retornar à Terra? c) A sonda *Voyager*, que passou por Netuno em agosto de 1989, estava a cerca de 3,0 bilhões de milhas da Terra naquela época. Fotografias e outras informações foram enviadas para a Terra através de ondas de rádio, que viajam à velocidade da luz. Quanto tempo essas ondas levaram para chegar à Terra a partir da *Voyager*?

2.63 Use as informações no Apêndice F para responder a estas perguntas. a) Qual é a velocidade das Ilhas Galápagos, localizadas na linha do Equador, em função do giro da Terra sobre o seu próprio eixo? b) Qual é a velocidade da Terra em função da sua rotação em torno do Sol? c) Se a luz seguisse a curvatura da Terra (o que não ocorre), quantas vezes um raio de luz circundaria a linha do Equador em um segundo?

2.64 Uma bola rígida, que se move em linha reta (o eixo x), bate em uma parede e repentinamente ricocheteia por um breve instante. O gráfico $v_x t$ na Figura 2.46 mostra a velocidade dessa bola em função do tempo. Nos primeiros 20,0 s desse movimento, determine a) A distância total percorrida pela bola e b) Seu deslocamento. c) Faça um gráfico $a_x t$ para esse movimento da bola. d) O gráfico apresentado é realmente vertical a 5,0 s? Explique.

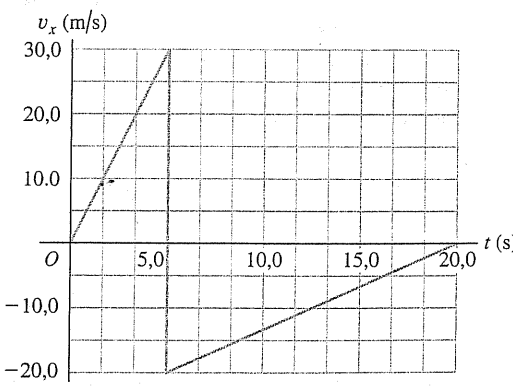


Figura 2.46 Exercício 2.64.

2.65 Uma bola deixa a posição de repouso e rola colina abaixo com aceleração uniforme, percorrendo 150 m no decorrer do segundo intervalo de 5,0 s do seu movimento. Qual a distância percorrida no primeiro intervalo de 5,0 s do movimento?

2.66 Colisão. O maquinista de um trem de passageiros que viaja com velocidade $v_p = 25{,}0$ m/s avista um trem de carga cuja traseira se encontra a 200,0 m de distância da frente do trem de passageiros (Figura 2.47). O trem de carga se desloca no mesmo sentido do trem de passageiros com velocidade $v_c = 15{,}0$ m/s. O maquinista imediatamente aciona o freio, produzindo uma aceleração constante igual a $-0{,}100$ m/s^2, enquanto o trem de carga continua com a mesma velocidade. Considere $x = 0$ como o local onde se encontra a frente do trem de passageiros quando o freio é acionado. a) As vacas das vizinhanças assistirão a uma colisão? b) Caso a resposta anterior seja positiva, em que ponto ocorrerá a colisão? c) Faça um gráfico simples mostrando a posição da frente do trem de passageiros e a traseira do trem de carga.

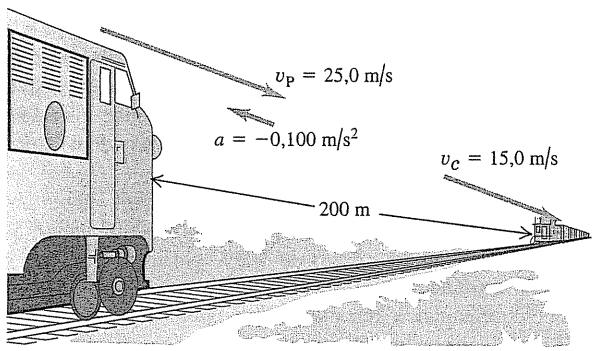


Figura 2.47 Exercício 2.66.

2.67 Uma barata grande pode desenvolver uma velocidade igual a 1,50 m/s em intervalos de tempo curtos. Suponha que, ao acender a lâmpada do quarto de um hotel à beira da estrada, você aviste uma barata que se move com velocidade de 1,50 m/s na mesma direção e sentido que você. Se você está a 0,90 m atrás da barata com velocidade de 0,80 m/s, qual deve ser sua aceleração mínima para que você alcance a barata antes que ela se esconda embaixo de um móvel situado a 1,20 m da posição inicial dela?

2.68 Dois carros estão a 200 m de distância entre si e um se move em direção ao outro a uma velocidade constante de 10 m/s. Da capota de um deles, um vigoroso gafanhoto pula entre os carros (que pernas fortes ele tem!) com uma velocidade horizontal constante de 15 m/s em relação ao solo. O inseto pula no instante em que pousa, ou seja, não se demora sobre qualquer dos carros. Qual a distância total percorrida pelo gafanhoto antes que os carros colidam?

2.69 Um automóvel e um caminhão partem do repouso no mesmo instante, estando o automóvel uma certa distância atrás do caminhão. O caminhão possui aceleração constante de 2,10 m/s^2 e o automóvel de 3,40 m/s^2. O automóvel ultrapassa o caminhão depois que o caminhão se deslocou 40,0 m. a) Qual o tempo necessário para que o automóvel ultrapasse o caminhão? b) Qual era a distância inicial do automóvel em relação ao caminhão? c) Qual a velocidade desses veículos quando eles estão lado a lado? d) Em um único diagrama, desenhe a posição de cada veículo em função do tempo. Considere $x = 0$ como a posição inicial do caminhão.

2.70 Dois motoristas malucos dirigem de encontro um ao outro. No instante $t = 0$, a distância entre os dois carros é D, o carro 1 está em repouso e o carro 2 se move da direita para a esquerda com velocidade v_0. O carro 1 começa a acelerar a partir de $t = 0$ com aceleração constante a_x. O carro 2 continua a se mover com velocidade constante. a) Em que instante ocorrerá a colisão? b) Ache a velocidade do carro 1 imediatamente antes de colidir com o carro 2. c) Faça diagramas xt e v_xt para o carro 1 e para o carro 2. Desenhe curvas para cada veículo usando o mesmo eixo.

2.71 Uma bolinha de gude é solta da borda de uma tigela em formato de meia-lua, com diâmetro de 50,0 cm, rola para baixo e depois para cima, até a borda oposta, em 10,0 s. Determine a) A velocidade escalar média e b) A média do vetor velocidade da bolinha de gude.

2.72 Você já deve ter percebido que a velocidade do seu carro não continua a aumentar, mesmo que você mantenha o pé pisando no acelerador. Isso se dá devido à resistência do ar e à fricção entre as partes em movimento do carro. A Figura 2.48 mostra um gráfico v_xt qualitativo para um carro típico, que parte do repouso na origem e se move em linha reta (eixo x). Faça gráficos qualitativos a_xt e xt para esse carro.

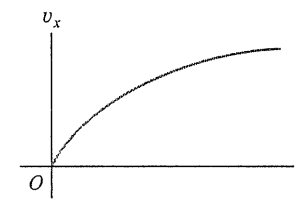


Figura 2.48 Exercício 2.72.

2.73 Ultrapassagem. O motorista de um carro deseja ultrapassar um caminhão que se desloca com velocidade constante de 20,0 m/s (aproximadamente 45 min/h). Inicialmente, o carro também se desloca com velocidade de 20,0 m/s e seu pára-choque dianteiro está 24,0 m atrás do pára-choque traseiro do caminhão. O motorista acelera com taxa constante de 0,600 m/s^2, a seguir volta para a pista do caminhão, quando a traseira de seu carro está a 26,0 m da frente do caminhão. Ele possui comprimento de 4,5 m e o comprimento do caminhão é igual a 21,0 m. a) Qual o tempo necessário para o carro ultrapassar o caminhão? b) Qual a distância percorrida pelo carro nesse intervalo de tempo? c) Qual é a velocidade final do carro?

*__2.74__ A velocidade de um objeto é dada por $v_x(t) = \alpha - \beta t^2$, onde $\alpha = 4{,}0$ m/s e $\beta = 2{,}0$ m/s^3. Para $t = 0$, o objeto está em $x = 0$. a) Calcule a posição e a aceleração do objeto em função do tempo. b) Qual a distância *positiva máxima* entre o objeto e a origem?

*__2.75__ A aceleração de uma partícula é dada por $a_x(t) = -2{,}0$ m/s^2 + (3,0 m/s^3)t. a) Calcule a velocidade inicial v_{0x} de modo que a partícula tenha a mesma coordenada x para $t = 0$ s e $t = 4$ s. b) Qual seria sua velocidade para $t = 4{,}0$ s?

2.76 Tiro ao ovo. Você está sobre o telhado do prédio da Física, 46 m acima do solo (Figura 2.49). Seu professor de física, que possui 1,80 m de altura, está caminhando próximo do edifício com uma velocidade constante de 1,20 m/s. Se você deseja jogar um ovo na cabeça dele, em que ponto ele deve estar quando você largar o ovo? Suponha que o ovo esteja em queda livre.

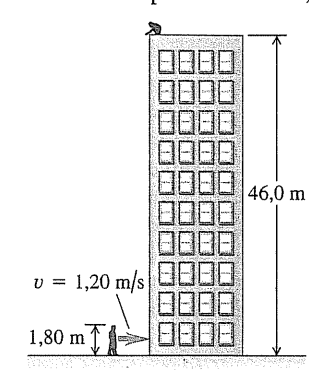


Figura 2.49 Exercício 2.76.

2.77 Um vulcão na Terra pode ejetar rochas verticalmente a uma altura máxima H. a) A que

altura (em termos de H) essas rochas chegariam, se um vulcão em Marte as expelisse com a mesma velocidade inicial? A aceleração da gravidade em Marte é de 3,71 m/s^2, e a resistência do ar pode ser desprezada em ambos os planetas. b) se as rochas ficam suspensas no ar por um intervalo de tempo T, por quanto tempo (em termos de T) elas permanecerão no ar em Marte?

2.78 Uma malabarista joga bolas ao ar enquanto realiza outras atividades. Em um ato, ela joga uma bola verticalmente para cima e, enquanto a bola está no ar, ela corre até uma mesa a 5,50 m de distância, a uma velocidade escalar constante de 2,50 m/s, e retorna bem a tempo de apanhar a bola em queda. a) Qual é a velocidade inicial mínima com que ela deve jogar a bola para cima de modo a realizar esse feito? b) A que altura da sua posição inicial está a bola quando a malabarista chega à mesa?

2.79 Os visitantes de um parque de diversões observam uma mergulhadora saltar de uma plataforma situada a uma altura de 21,3 m de uma piscina. De acordo com o apresentador, a mergulhadora entra na água com velocidade de 25 m/s. Despreze a resistência do ar. a) A afirmação do apresentador está correta? b) É possível a mergulhadora pular diretamente da prancha, em movimento ascendente, de modo que, passando pela prancha já em movimento descendente, ela entre na água a 25,0 m/s? Em caso afirmativo, qual deveria ser sua velocidade inicial para cima? Essa velocidade inicial seria fisicamente atingível?

2.80 Um vaso de flores cai do peitoril de uma janela e passa pela janela de baixo. Despreze a resistência do ar. Ele leva 0,420 s para passar por essa janela, cuja altura é igual a 1,90 m. Qual é a distância entre o topo dessa janela e o peitoril de onde o vaso caiu?

2.81 Alguns rifles podem disparar uma bala com a velocidade escalar de 965 m/s enquanto ela passa pelo cano da arma. Se o cano da arma tem 70,0 cm de comprimento e se a bala acelera de forma uniforme dentro dele a partir do repouso, a) qual é a aceleração (em g) da bala no cano da arma e b) qual é tempo (em m/s) que ela para percorrer o cano? c) Se, quando esse rifle é disparado verticalmente, a bala atinge uma altura máxima H, qual é a altura máxima (em termos de H) para um rifle novo que produza a metade da velocidade no cano desta?

2.82 Um foguete de múltiplos estágios. No primeiro estágio de um foguete de dois estágios, ele é lançado de uma plataforma a partir do repouso, mas com uma aceleração constante de 3,50 m/s^2, no sentido de baixo para cima. Em 25,0 s após o lançamento, o foguete aciona o segundo estágio, que repentinamente aumenta a sua velocidade para 132,5 m/s, no sentido de baixo para cima. Mas essa arrancada consome todo o combustível, e a única força a atuar sobre o foguete passa a ser a gravidade. A resistência ao ar pode ser desprezada. a) Determine a altura máxima atingida pelo foguete de dois estágios, acima da plataforma. b) Quanto tempo após o acionamento do segundo estágio o foguete levará para cair de volta na plataforma? c) Com que velocidade o foguete estará se movendo assim que atingir a plataforma de lançamento?

2.83 Atenção abaixo. Sérgio arremessa uma esfera de chumbo de 7 kg de baixo para cima, aplicando-lhe um impulso que a acelera a partir do repouso até 45,0 m/s^2 para um deslocamento vertical de 64,0 cm. Ela sai da sua mão a 2,20 m acima do solo. Despreze a resistência do ar. a) Qual a velocidade da esfera imediatamente após sair da sua mão? b) Qual a altura máxima atingida pela esfera? c) Qual o tempo de que ele dispõe para sair da vertical antes que a esfera volte até a altura da sua cabeça, situada a 1,83 m acima do solo?

2.84 Uma professora de física faz uma demonstração ao ar livre e, estando em repouso, repentinamente cai da beira de um penhasco alto e ao mesmo tempo grita 'Socorro!'. Após 3,0 s da queda, ela ouve o eco do seu grito, que vem do fundo do vale abaixo dela. A velocidade do som é 340 m/s. a) Qual é a altura do penhasco? B) Desprezando-se a resistência do ar, a qual velocidade ela estará se movendo quando atingir o solo? (A velocidade real será menor, devido à resistência do ar.)

2.85 Malabarismo. Um malabarista se apresenta em uma sala cujo teto está a 3,0 m do nível de suas mãos. Ele joga uma bola para cima, de modo que ela chega ao teto. a) Qual é a velocidade inicial da bola? b) Qual é o tempo necessário para a bola atingir o teto? No instante em que a primeira bola está no teto, o malabarista joga a segunda bola para cima com dois terços da velocidade inicial da primeira. c) Quanto tempo depois que a segunda bola é lançada, as duas bolas se cruzam? d) A que distância das mãos do malabarista elas se cruzam?

2.86 Um helicóptero transportando o Dr. Evil decola com uma velocidade constante e ascendente de 5,0 m/s^2. O agente secreto Austin Powers pula a bordo assim que o helicóptero deixa o solo. Após os dois lutarem por 10,0 s, Powers desliga o motor e salta do helicóptero. Suponha que o helicóptero esteja em queda livre após o motor ser desligado e ignore os efeitos da resistência do ar. a) Qual é a altura máxima sobre o solo que o helicóptero atinge? b) Powers aciona um dispositivo a jato que carrega às costas 7,0 s após deixar o hecóptero e depois se mantém a uma aceleração constante descendente com módulo 2,0 m/s^2. A que distância do solo está Powers quando o helicóptero se espatifa no solo?

2.87 Altura do edifício. O Homem Aranha salta do topo de um edifício alto. Ele cai em queda livre, a partir do repouso até o solo, por uma distância de h. Ele cai uma distância de $h/4$ no último 1,0 s da sua queda. Qual é a altura h do prédio?

2.88 Altura do penhasco. Você está escalando um penhasco quando de repente se vê envolto pela névoa. Para saber a altura em que está, você joga uma pedra do alto e 10,0 s depois ouve o som dela atingindo o solo, ao pé do rochedo. a) Desprezando-se a resistência do ar, a que altura está o penhasco, considerando que a velocidade do som é 330 m/s? b) Suponha que você tenha ignorado o tempo que leva para o som chegar até você. Nesse caso, você teria superestimado ou subestimado a altura do penhasco? Explique seu raciocínio.

2.89 Lata em queda. Um pintor está em pé em um andaime que é içado a uma velocidade escalar constante. Na subida, ele acidentalmente derruba uma lata de tinta do andaime e ela despenca 15,0 m até o chão. Você está observando a cena e mede com o seu cronômetro que leva 3,25 s para a lata atingir o solo. Despreze a resistência do ar. a) Qual é a velocidade escalar da lata quando ela chega ao solo? b) Outro pintor está parado no peitoril com as mãos 4,0 m acima do ponto da queda da lata. Ele tem reflexos rápidos e, se a lata passar por ele, poderá apanhá-la. Existe essa chance?

2.90 Desejando testar a lei da gravidade, um estudante pula de um arranha-céu com altura de 180 m e, munido de um cronômetro, inicia sua queda livre (com velocidade inicial nula). Cinco segundos mais tarde, o Super-Homem entra em cena e mergulha do alto do edifício para salvá-lo. O Super-Homem salta do teto com uma velocidade inicial v_0, produzida por um impulso de cima para baixo com suas pernas de aço. A seguir ele cai com uma aceleração igual à de qualquer corpo em queda livre. a) Qual deve ser o valor de v_0 para que o Super-Homem possa segurar o estudante

imediatamente antes de ele se chocar com o solo? b) Usando o mesmo gráfico, desenhe a posição do Super-Homem e do estudante em função do tempo. Considere a velocidade inicial do Super-Homem calculada no item (a). c) Se a altura do arranha-céu for menor do que um certo limite, nem mesmo o Super-Homem será capaz de salvar o estudante. Qual é essa altura mínima?

2.91 Durante os lançamentos, é comum os foguetes descartarem peças desnecessárias. Um certo foguete parte do repouso da plataforma de lançamento e acelera de baixo para cima a constantes 3,30 m/s^2. Quando está 235 m acima da plataforma, ele descarta um tubo usado de combustível, simplesmente desconectando-o. Uma vez desconectado, a única força que atua sobre o tubo é a gravidade (a resistência do ar pode ser desprezada). a) A que altura estará o foguete, quando o tudo atingir a plataforma, supondo que o foguete não mude sua aceleração? b) Qual é a distância total percorrida pelo tubo entre a soltura e a queda na plataforma?

2.92 Uma bola é lançada do solo diretamente de baixo para cima com velocidade v_0. No mesmo instante, outra bola é largada do repouso a uma altura H, diretamente acima do ponto onde a primeira bola foi lançada para cima. Despreze a resistência do ar. a) Calcule o instante em que as duas bolas colidem. b) Ache o valor de H em termos de v_0 e g, de modo que no momento da colisão a primeira bola atinja sua altura máxima.

2.93 Dois carros, A e B, se deslocam ao longo de uma linha reta. A distância de A ao ponto inicial é dada em função do tempo por $x_A(t) = \alpha t + \beta t^2$, com $\alpha = 2{,}60$ m/s e $\beta = 1{,}2$ m/s^2. A distância de B ao ponto inicial é dada em função do tempo por $x_B(t) = \gamma t^2 - \delta t^3$, onde $\gamma = 2{,}80$ m/s^2 e $\delta = 0{,}20$ m/s^3. a) Qual carro está na frente logo que eles saem do ponto inicial? b) Em que instante(s) os carros estão no mesmo ponto? c) Em que instante(s) a distância entre os carros A e B não aumenta nem diminui? d) Em que instante(s) os carros A e B possuem a mesma aceleração?

2.94 A queda da maçã de uma macieira pode ser considerada uma queda livre. A maçã está inicialmente a uma altura H acima do topo de um gramado espesso, o qual é constituído por camadas de grama de espessura h. Quando a maçã penetra na grama, ela diminui sua velocidade com uma taxa constante e atinge o solo com velocidade igual a zero. a) Ache a velocidade da maçã imediatamente antes de ela penetrar na grama. b) Ache a aceleração da maçã enquanto ela penetra na grama. c) Faça gráficos yt, v_yt e a_yt para o movimento da maçã.

Problemas desafiadores

2.95 Pegando o ônibus. Uma estudante está se deslocando com sua velocidade máxima de 5,0 m/s para pegar um ônibus parado no ponto. Quando a estudante está a uma distância de 40,0 m do ônibus, ele começa a se mover com aceleração constante igual a 0,170 m/s^2. a) Durante quanto tempo e por qual distância a estudante deve correr para que alcance o ônibus? b) Quando a estudante alcança o ônibus, qual é a velocidade do ônibus? c) Faça um gráfico de xt para a estudante e para o ônibus. Considere $x = 0$ como a posição inicial da estudante. d) As equações usadas para calcular o tempo na parte (a) possuem uma segunda solução que corresponde a um tempo posterior para o qual a estudante e o ônibus estão na mesma posição, caso continuem com seus movimentos especificados. Explique o significado desta segunda solução. Qual a velocidade do ônibus neste ponto? e) Caso sua velocidade máxima fosse igual a 3,5 m/s ela poderia alcançar o ônibus? f) Qual seria sua velocidade *mínima* para que ela pudesse alcançar o ônibus? Neste caso, quanto tempo e qual seria a distância percorrida para que a estudante pudesse alcançar o ônibus?

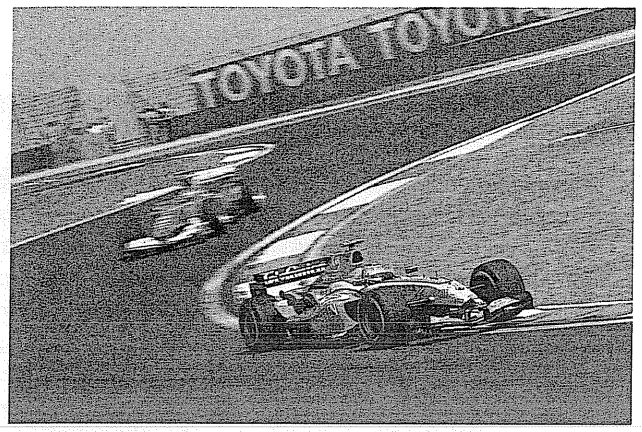
2.96 Estando inicialmente agachado, um atleta dá um salto vertical para atingir a altura máxima possível. Os melhores atletas permanecem cerca de 1,0 s no ar (o 'tempo de suspensão' no ar). Considere o atleta como uma partícula e denomine de $y_{máx}$ sua altura máxima acima do solo. Despreze a resistência do ar. Para explicar por que ele parece estar suspenso no ar, calcule a razão entre o tempo que ele leva para atingir a altura $y_{máx}/2$ e o tempo que ele leva para atingir a altura. Você pode ignorar a resistência do ar.

2.97 Uma bola é atirada de baixo para cima do canto superior do telhado de um edifício. Uma segunda bola é largada do mesmo ponto 1,00 s mais tarde. Despreze a resistência do ar. a) Sabendo que a altura do edifício é igual a 20,0 m, qual deve ser a velocidade inicial da primeira bola para que ambas atinjam o solo no mesmo instante? Em um mesmo gráfico, desenhe a posição de cada bola em função do tempo medido a partir do lançamento da primeira bola. Considere a mesma situação, mas agora suponha que seja conhecida a velocidade inicial v_0 da primeira bola e que a altura h do edifício seja uma incógnita. b) Qual deve ser a altura do edifício para que ambas atinjam o solo no mesmo instante para os seguintes valores de v_0: i) 6,0 m/s; ii) 9,5 m/s? c) Quando v_0 for superior a certo valor máximo $v_{máx}$, não existirá nenhum valor de h que satisfaça a condição de as bolas atingirem o solo no mesmo instante. O valor $v_{máx}$ possui uma interpretação física simples. Qual é ela? d) Quando v_0 for inferior a certo valor mínimo $v_{mín}$, não existirá nenhum valor de h que satisfaça a condição de as bolas atingirem o solo no mesmo instante. O valor $v_{mín}$ também possui uma interpretação física simples. Qual é ela?

2.98 Um excursionista atento vê uma pedra cair do alto de um morro vizinho e nota que ela leva 1,30 s para rolar a última terça parte da sua trajetória até o solo. Despreze a resistência do ar. a) Qual é a altura do morro em metros? b) Se na parte (a) você obtiver duas soluções de uma equação do segundo grau e usar apenas uma na resposta, o que representará a outra solução?

MOVIMENTO EM DUAS OU TRÊS DIMENSÕES

3



Quando um carro faz uma curva a uma velocidade constante, ele está acelerando? Em caso afirmativo, em qual direção ele está acelerando?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Como representar a posição de um corpo em duas ou três dimensões, usando vetores.
- Como determinar a velocidade do vetor de um corpo a partir do que se sabe sobre sua trajetória.
- Como achar a aceleração vetorial de um corpo e por que um corpo tem essa aceleração, mesmo que sua velocidade escalar seja constante.
- Como interpretar os componentes da aceleração de um corpo paralelo e ortogonal à sua trajetória.
- Como descrever a trajetória em curva percorrida por um projétil.
- Os principais conceitos sobre o movimento em uma trajetória curva, seja com velocidade escalar constante, seja com variação na velocidade escalar.
- Como relacionar o vetor velocidade de um corpo em movimento do ponto de vista de dois referenciais distintos.

Quando um jogador de futebol chuta uma bola, o que determina onde a bola vai parar? Como você descreve o movimento do carro de uma montanha-russa ao longo de uma curva ou o vôo de uma águia circulando sobre um campo aberto? Uma bola lançada horizontalmente de uma janela leva o mesmo tempo para atingir o solo que uma bola simplesmente largada do mesmo ponto?

Não podemos responder a essas questões usando as técnicas do Capítulo 2, onde consideramos partículas se movendo somente ao longo de uma linha reta. Em vez disso, é necessário estender a descrição do movimento para duas e três dimensões. Continuaremos a usar as grandezas vetoriais de deslocamento, velocidade e aceleração, porém não vamos mais considerar movimentos ao longo de uma linha reta. Verificaremos que muitos movimentos importantes ocorrem somente em duas dimensões, ou seja, estão contidos em um *plano*. Para esses movimentos necessitamos de duas coordenadas e dois componentes para a velocidade e para a aceleração.

Será necessário também considerar como o movimento de uma partícula é descrito por observadores que possuem movimentos relativos entre si. O conceito de *velocidade relativa* desempenhará um papel importante posteriormente neste livro, quando estudarmos as colisões, explorarmos os fenômenos eletromagnéticos e introduzirmos a teoria da relatividade especial de Einstein.

Este capítulo une a linguagem vetorial que aprendemos no Capítulo 1 com a linguagem cinemática do Capítulo 2. Como antes, estamos interessados em descrever o movimento, e não em analisar suas causas. Porém, a linguagem que você aprenderá aqui será uma ferramenta essencial para capítulos posteriores, quando estudarmos a relação entre força e movimento.

3.1 Vetor posição e vetor velocidade

Para descrever o *movimento* de uma partícula no espaço, necessitamos inicialmente estar aptos a descrever a *posição* da partícula. Considere uma partícula que esteja em um ponto P em dado instante. O **vetor posição** $\vec{r}$ da partícula nesse instante é um vetor que vai da origem do sistema de coordenadas até o ponto P (Figura 3.1).

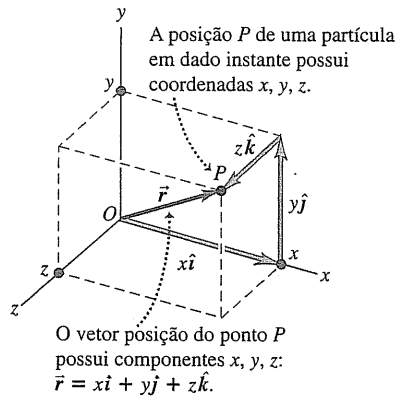


Figura 3.1 O vetor posição $\vec{r}$ da origem até o ponto P possui componentes x, y e z. A trajetória que a partícula segue através do espaço é, em geral, uma curva (Figura 3.2).

As coordenadas cartesianas x, y e z do ponto P são os componentes x, y e z do vetor $\vec{r}$. Usando os vetores unitários introduzidos na Seção 1.9, podemos escrever

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \qquad \text{(vetor posição)} \tag{3.1}$$

Durante um intervalo de tempo Δt, a partícula se move de um ponto P_1, onde o vetor posição é $\vec{r}_1$, até um ponto P_2, onde o vetor posição é $\vec{r}_2$. A variação da posição (o deslocamento) durante esse intervalo de tempo é $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$. Definimos a **velocidade média** $\vec{v}_{\text{m}}$ do mesmo modo que fizemos no Capítulo 2 para um movimento retilíneo: deslocamento dividido pelo intervalo de tempo:

$$\vec{v}_{\text{m}} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad \text{(vetor velocidade média)} \tag{3.2}$$

Note que *dividir* um vetor por um escalar é um caso particular de *multiplicar* o vetor por um escalar, como descrito na Seção 1.7; a velocidade média $\vec{v}_{\text{m}}$ é igual ao vetor deslocamento $\Delta\vec{r}$ multiplicado por $1/\Delta t$, o inverso do intervalo de tempo. Note também que o componente x da equação (3.2) é $v_{\text{m}x} = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1) = \Delta x/\Delta t$. É exatamente a Equação (2.2), a expressão para a velocidade média que encontramos na Seção 2.1 para o movimento unidimensional.

Agora, definimos a **velocidade instantânea** tal como no Capítulo 2: como o limite da velocidade média quando o intervalo de tempo tende a zero, sendo igual à taxa de variação do vetor posição com o tempo. A diferença fundamental é que agora a posição $\vec{r}$ e a velocidade instantânea $\vec{v}$ são vetores:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{3.3}$$

(vetor velocidade instantânea)

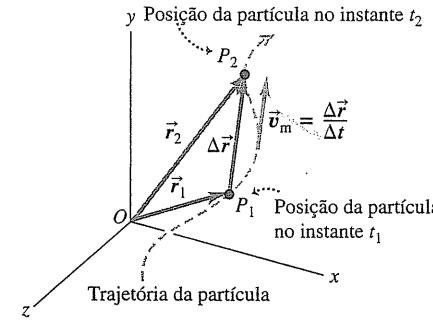


Figura 3.2 A velocidade média $\vec{v}_{\text{m}}$ entre os pontos P_1 e P_2 possui a mesma direção e o mesmo sentido do vetor deslocamento $\Delta\vec{r}$.

O *módulo* do vetor $\vec{v}$ em qualquer instante é a *velocidade escalar* v da partícula no referido instante. A *direção* e o *sentido* de $\vec{v}$ em qualquer instante é a mesma direção e sentido em que ela se move no referido instante.

Note que quando $\Delta t \to 0$, o ponto P_1 da Figura 3.2 fica cada vez mais próximo do ponto P_2. Nesse limite, o vetor $\Delta\vec{r}$ torna-se tangente à curva. A direção e sentido do vetor $\Delta\vec{r}$ nesse limite é também igual à direção e sentido da velocidade instantânea $\vec{v}$. Isto leva a uma conclusão importante: *o vetor velocidade instantânea é tangente à trajetória em cada um dos seus pontos* (Figura 3.3).

Normalmente é mais fácil calcular o vetor velocidade instantânea usando componentes. Durante qualquer deslocamento de $\Delta\vec{r}$, as variações Δx, Δy e Δz das três coordenadas da partícula são os *componentes* de $\Delta\vec{r}$. Daí se conclui que os componentes v_x, v_y e v_z da velocidade instantânea $\vec{v}$ são simplesmente as derivadas das coordenadas x, y e z em relação ao tempo. Ou seja:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{3.4}$$

(componentes da velocidade instantânea)

O componente x de $\vec{v}$ é $v_x = dx/dt$, que é igual à Equação (2.3) — a expressão da velocidade instantânea para o movimento retilíneo que obtivemos na Seção 2.2. Logo, a Equação (3.4) é uma extensão direta do conceito de velocidade instantânea para o movimento em três dimensões.

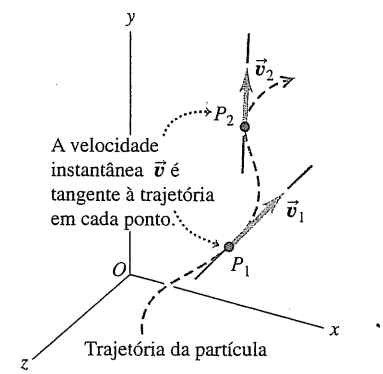


Figura 3.3 Os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são velocidades instantâneas nos pontos P_1 e P_2 mostrados na Figura 3.2.

Podemos também obter esse resultado derivando a Equação (3.1). Os vetores unitários $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ possuem módulo, direção e sentido constantes, logo suas derivadas são nulas, e encontramos

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \tag{3.5}$$

Isso mostra novamente que os componentes de $\vec{v}$ são dx/dt, dy/dt e dz/dt.

O módulo do vetor velocidade instantânea $\vec{v}$ — isto é, a velocidade escalar — é dado em termos dos componentes v_x, v_y e v_z pelo teorema de Pitágoras

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{3.6}$$

A Figura 3.4 mostra a situação quando a partícula se move no plano xy. Nesse caso, z e v_z são nulos. Então, a velocidade escalar (o módulo do vetor $\vec{v}$) é:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

e a direção da velocidade instantânea $\vec{v}$ é dada pelo ângulo α indicado nessa figura. Vemos que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} \tag{3.7}$$

(Usamos sempre letras gregas para designar ângulos. Usamos α para indicar a direção do vetor velocidade instantânea para não confundir com a direção θ do vetor *posição* da partícula.)

O vetor velocidade instantânea geralmente é mais útil do que o vetor velocidade média. A partir de agora, sempre que mencionamos a palavra 'velocidade', queremos nos referir ao vetor velocidade instantânea $\vec{v}$ (em vez do vetor velocidade média). Normalmente, não se costuma dizer que $\vec{v}$ é um vetor; cabe a você lembrar-se de que velocidade é uma grandeza vetorial que possui módulo, direção e sentido.

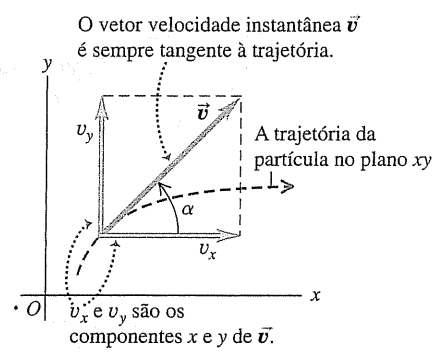


Figura 3.4 Os dois componentes da velocidade para um movimento no plano xy.

Exemplo 3.1

CÁLCULO DA VELOCIDADE INSTANTÂNEA E DA VELOCIDADE MÉDIA Um veículo robótico está explorando a superfície de Marte. O módulo de aterrissagem é a origem do sistema de coordenadas e a superfície do planeta é o plano xy. O veículo, que será representado por um ponto, possui componentes x e y que variam com o tempo de acordo com

$$x = 2{,}0\ \text{m} - (0{,}25\ \text{m/s}^2)t^2$$
$$y = (1{,}0\ \text{m/s})t + (0{,}025\ \text{m/s}^3)t^3$$

a) Calcule as coordenadas do veículo e sua distância do módulo de aterrissagem no instante $t = 2{,}0$ s. b) Calcule o vetor deslocamento e o vetor velocidade média no intervalo de tempo entre $t = 0{,}0$ s e $t = 2{,}0$ s. c) Deduza uma expressão geral para o vetor velocidade instantânea do veículo. Expresse a velocidade instantânea em $t = 2{,}0$ s, usando componentes e também em termos do módulo, direção e sentido.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema se refere ao movimento em duas dimensões — ou seja, em um plano. Logo, devemos usar as expressões dos *vetores* deslocamento, velocidade média e velocidade instantânea obtidos nesta seção. (As expressões mais simples das seções 2.1 e 2.2 não envolvem vetores; elas se aplicam somente ao movimento ao longo de uma linha reta.)

PREPARAR: a Figura 3.5 mostra a trajetória do veículo robótico. Usaremos a Equação (3.1) para a posição $\vec{r}$, a expressão $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ para o deslocamento, a Equação (3.2) para a velocidade média e as equações (3.5) e (3.6) para a velocidade e sua direção e sentido. As incógnitas são enunciadas no problema.

EXECUTAR: a) No instante $t = 2{,}0$ s, as coordenadas do carro são

$$x = 2{,}0\ \text{m} - (0{,}25\ \text{m/s}^2)(2{,}0\ \text{s})^2 = 1{,}0\ \text{m}$$
$$y = (1{,}0\ \text{m/s})(2{,}0\ \text{s}) + (0{,}025\ \text{m/s}^3)(2{,}0\ \text{s})^3 = 2{,}2\ \text{m}$$

A distância entre o veículo e a origem nesse instante é

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1{,}0\ \text{m})^2 + (2{,}2\ \text{m})^2} = 2{,}4\ \text{m}$$

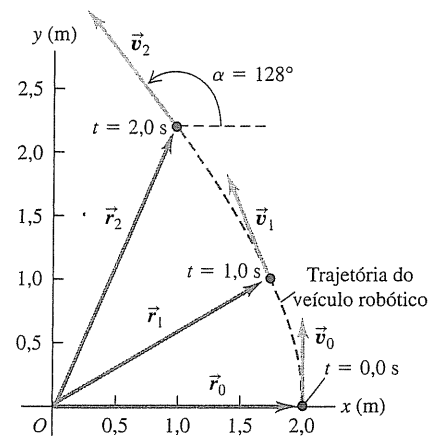


Figura 3.5 Para $t = 0$, o vetor posição do veículo robótico é $\vec{r}_0$ e o vetor velocidade instantânea é $\vec{v}_0$. Analogamente, $\vec{r}_1$ e $\vec{v}_1$ são os vetores para $t = 1{,}0$ s; $\vec{r}_2$ e $\vec{v}_2$ são os vetores para $t = 2{,}0$ s.

b) Para achar o deslocamento e a velocidade média, escrevemos o vetor posição $\vec{r}$ em função do tempo t. Pela Equação (3.1), temos

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \\ &= [2{,}0\ \text{m} - (0{,}25\ \text{m/s}^2)t^2]\hat{\imath} \\ &\quad + [(1{,}0\ \text{m/s})t + (0{,}025\ \text{m/s}^3)t^3]\hat{\jmath}\end{aligned}$$

Para $t = 0{,}0$ s o vetor posição $\vec{r}_0$ é

$$\vec{r}_0 = (2{,}0\ \text{m})\hat{\imath} + (0{,}0\ \text{m})\hat{\jmath}$$

De acordo com a parte a), achamos para $t = 2{,}0$ s a seguinte expressão para o vetor posição $\vec{r}_2$

$$\vec{r}_2 = (1{,}0\ \text{m})\hat{\imath} + (2{,}2\ \text{m})\hat{\jmath}$$

Portanto, o deslocamento entre $t = 0{,}0$ s e $t = 2{,}0$ s é

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_0 = (1{,}0\ \text{m})\hat{\imath} + (2{,}2\ \text{m})\hat{\jmath} - (2{,}0\ \text{m})\hat{\imath} \\ &= (-1{,}0\ \text{m})\hat{\imath} + (2{,}2\ \text{m})\hat{\jmath}\end{aligned}$$

Durante esse intervalo de tempo, o veículo se desloca 1,0 m no sentido negativo do eixo Ox e 2,2 m no sentido positivo do eixo Oy. A velocidade média no intervalo de tempo entre $t = 0{,}0$ s e $t = 2{,}0$ s é o deslocamento dividido pelo intervalo de tempo (Equação 3.2):

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\text{m}} &= \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(-1{,}0\ \text{m})\hat{\imath} + (2{,}2\ \text{m})\hat{\jmath}}{2{,}0\ \text{s} - 0{,}0\ \text{s}} \\ &= (-0{,}50\ \text{m/s})\hat{\imath} + (1{,}1\ \text{m/s})\hat{\jmath}\end{aligned}$$

Os componentes dessa velocidade média são

$$v_{\text{mx}} = -0{,}50\ \text{m/s} \qquad v_{\text{my}} = 1{,}1\ \text{m/s}$$

c) De acordo com a Equação (3.4), os componentes da velocidade instantânea são as derivadas das coordenadas em relação ao tempo:

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{dx}{dt} = (-0{,}25\ \text{m/s}^2)(2t) \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = 1{,}0\ \text{m/s} + (0{,}025\ \text{m/s}^3)(3t^2)\end{aligned}$$

Podemos então escrever o vetor velocidade instantânea $\vec{v}$ como

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = (-0{,}50\ \text{m/s}^2)t\hat{\imath} \\ &\quad + [1{,}0\ \text{m/s} + (0{,}075\ \text{m/s}^3)t^2]\hat{\jmath}\end{aligned}$$

Para $t = 2{,}0$ s os componentes da velocidade instantânea são

$$\begin{aligned}v_x &= (-0{,}50\ \text{m/s}^2)(2{,}0\ \text{s}) = -1{,}0\ \text{m/s} \\ v_y &= 1{,}0\ \text{m/s} + (0{,}075\ \text{m/s}^3)(2{,}0\ \text{s})^2 = 1{,}3\ \text{m/s}\end{aligned}$$

O módulo da velocidade instantânea (isto é, a velocidade escalar) para $t = 2{,}0$ s é

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-1{,}0\ \text{m/s})^2 + (1{,}3\ \text{m/s})^2} \\ &= 1{,}6\ \text{m/s}\end{aligned}$$

Sua direção $\vec{v}$ em relação ao eixo positivo Ox é dada pelo ângulo α, onde, pela Equação (3.7),

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1{,}3\ \text{m/s}}{-1{,}0\ \text{m/s}} = -1{,}3 \qquad \text{então} \qquad \alpha = 128°$$

A sua calculadora informará que a função inversa da tangente de $-1{,}3$ é $-52°$. Porém, como aprendemos na Seção 1.8, você deve examinar o gráfico do vetor para decidir sua direção e seu sentido. A Figura 3.5 mostra que a resposta correta para α é $-52° + 180° = 128°$.

AVALIAR: compare os componentes da velocidade *média* que encontramos no item b) para o intervalo entre $t = 0{,}0$ s e $t = 2{,}0$ s ($v_{\text{mx}} = -0{,}50$ m/s, $v_{\text{my}} = 1{,}1$ m/s) com os componentes de velocidade *instantânea* no instante $t = 2{,}0$ s que encontramos na parte c) ($v_x = -1{,}0$ m/s, $v_y = 1{,}3$ m/s). A comparação revela que, assim como no caso de uma dimensão, o vetor velocidade média $\vec{v}_{\text{m}}$ em dado intervalo de tempo, em geral, é *diferente* do vetor velocidade instantânea $\vec{v}$ no fim do mesmo intervalo de tempo (Exemplo 2.1).

Convidamos você a calcular a posição, o vetor velocidade instantânea, a velocidade escalar, a direção e o sentido do movimento para $t = 0{,}0$ s e para $t = 1{,}0$ s. O vetor posição $\vec{r}$ e o vetor velocidade instantânea $\vec{v}$ para $t = 0{,}0$ s, $t = 1{,}0$ s e $t = 2{,}0$ s estão indicados na Figura 3.5. Note que o vetor velocidade instantânea $\vec{v}$ é tangente à trajetória em cada ponto. O módulo de $\vec{v}$ cresce à medida que o veículo se move, indicando que sua velocidade escalar é crescente.

Teste sua compreensão da Seção 3.1 Em qual dessas situações o vetor velocidade média $\vec{v}_{\text{m}}$ em dado intervalo de tempo *seria* igual à velocidade instantânea $\vec{v}$ no final do intervalo? i) um corpo se movendo ao longo de uma trajetória curva a uma velocidade escalar constante; ii) um corpo se movendo ao longo de uma trajetória curva com velocidade escalar crescente; iii) um corpo se movendo ao longo de uma linha reta a uma velocidade escalar constante; iv) um corpo se movendo ao longo de uma linha reta a uma velocidade escalar crescente. ∎

3.2 Vetor aceleração

Vamos agora considerar o vetor *aceleração* de uma partícula que se move no espaço. Analogamente ao caso do movimento retilíneo, a aceleração indica como a velocidade de uma partícula está variando. Porém, como estamos tratando a velocidade como um vetor, a aceleração descreverá variações do módulo da velocidade (isto é, da velocidade escalar) *e* variações da direção da velocidade (isto é, da direção e do sentido do movimento no espaço).

Na Figura 3.6a, um carro (tratado como uma partícula) está se movendo ao longo de uma trajetória curva. Os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ representam, respectivamente, o vetor velocidade instantânea da partícula no instante t_1 quando ela está no ponto P_1 e o vetor velocidade instantânea da partícula no instante t_2 quando ela está no ponto P_2. As duas velocidades podem possuir módulos e direções diferentes. No intervalo de tempo entre t_1 e t_2, *a variação vetorial da velocidade* é $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta\vec{v}$ (Figura 3.6b). Definimos o vetor **aceleração média** $\vec{a}_{\text{m}}$ da partícula nesse intervalo de tempo como a variação vetorial da velocidade dividida pelo intervalo de tempo $t_2 - t_1 = \Delta t$:

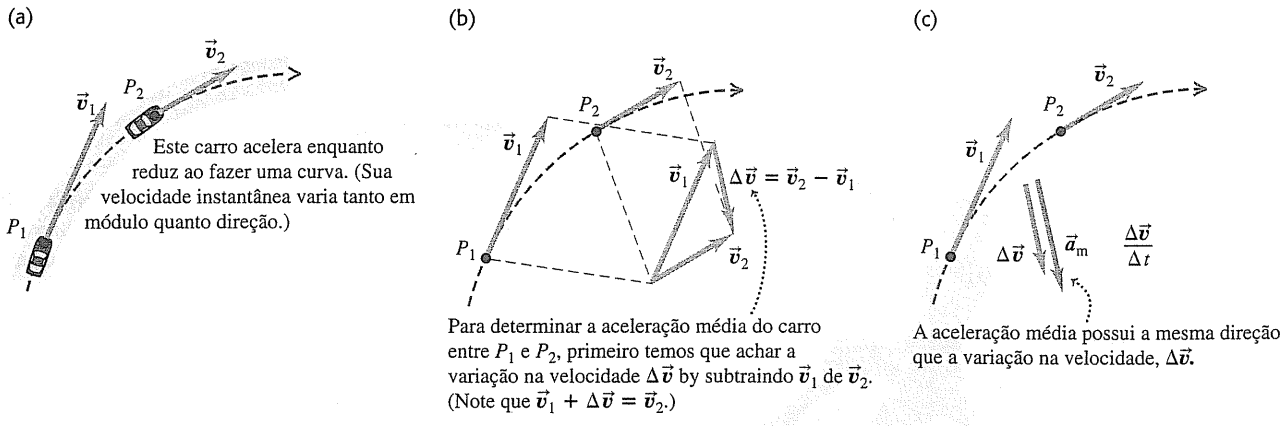


Figura 3.6 (a) Um carro se move ao longo de uma estrada em curva entre os pontos P_1 e P_2. (b) Obtemos $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ por subtração de vetores. (c) O vetor $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$ representa a aceleração média entre P_1 e P_2.

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (3.8)$$

(vetor aceleração média)

A aceleração média é uma grandeza *vetorial* que possui a mesma direção e sentido do vetor $\Delta\vec{v}$ (Figura 3.6c). Observe que $\vec{v}_2$ é a soma vetorial de $\vec{v}_1$ com a variação $\Delta\vec{v}$ (Figura 3.6b). O componente x da Equação (3.8) é $a_{mx} = (v_{2x} - v_{1x})/(t_2 - t_1) = \Delta v_x/\Delta t$, que é exatamente a Equação (2.4) para a aceleração média no movimento retilíneo.

Como no Capítulo 2, definimos a **aceleração instantânea** $\vec{a}$ no ponto P_1 como o limite da aceleração média quando o ponto P_2 se aproxima do ponto P_1 e $\Delta\vec{v}$ e Δt tendem a zero simultaneamente. A aceleração instantânea também é igual à taxa de variação da velocidade instantânea com o tempo. Como não estamos nos restringindo ao movimento retilíneo, a aceleração instantânea é agora uma grandeza vetorial (Figura 3.7):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (3.9)$$

(vetor aceleração instantânea)

Conforme vimos, o vetor velocidade $\vec{v}$ é tangente à trajetória da partícula. Porém, as construções indicadas nas figuras 3.6c e 3.7 mostram que o vetor aceleração instantânea $\vec{a}$ de uma partícula em movimento sempre aponta para o lado côncavo de uma trajetória curva — ou seja, para o lado interno de qualquer volta que a partícula esteja fazendo.

ATENÇÃO Qualquer partícula que segue uma trajetória curva está acelerando Quando uma partícula se move ao longo de uma trajetória curva, sua aceleração é sempre diferente de zero, mesmo quando sua velocidade escalar for constante. Essa conclusão pode parecer contrária à nossa intuição, porém, ela é contrária apenas ao uso cotidiano da palavra 'aceleração' no sentido de aumento de velocidade. A definição mais precisa da Equação (3.9) mostra que pode existir aceleração diferente de zero quando houver qualquer variação do vetor velocidade, incluindo apenas variação da direção desse vetor, sem variação da velocidade escalar ou, então, variação simultânea da direção e da velocidade escalar.

Para se convencer de que uma partícula possui aceleração diferente de zero quando ela descreve uma trajetória curva com velocidade constante, lembre-se do que sente quando está viajando em um carro. Quando o carro acelera, você tende a se mover no interior dele em um sentido *contrário* ao da aceleração do carro. (Explicaremos a razão desse comportamento no Capítulo 4.) Logo, você tende a ser empurrado para a traseira do carro, quando ele acelera para frente (aumenta de velocidade), e para a frente

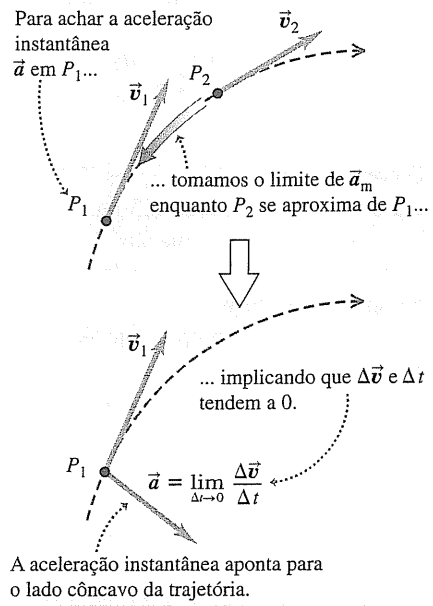


Figura 3.7 Aceleração instantânea $\vec{a}$ no ponto P_1 da Figura 3.6.

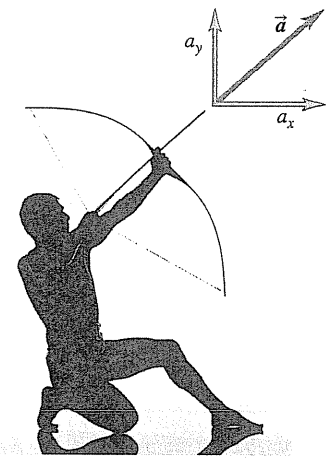


Figura 3.8 Quando o arqueiro dispara a flecha, ela acelera tanto para a frente quanto para trás. Logo, o seu vetor aceleração possui tanto um componente horizontal (a_x) quanto um componente vertical (a_y).

do carro quando ele acelera para trás (diminui de velocidade). Quando o carro faz uma curva em uma estrada plana, você tende a ser empurrado para fora da curva; portanto, o carro possui uma aceleração para dentro da curva.

Normalmente, estamos interessados no vetor aceleração instantânea, e não na aceleração média. A partir de agora, quando mencionamos a palavra 'aceleração', estaremos nos referindo ao vetor aceleração instantânea $\vec{a}$.

Cada componente do vetor aceleração é dado pela derivada do respectivo componente do vetor velocidade:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} \tag{3.10}$$

(componentes da aceleração instantânea)

Em termos dos vetores unitários,

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} \tag{3.11}$$

O componente x das equações (3.10) e (3.11), $a_x = dv_x/dt$, é a expressão da Seção 2.3 para a aceleração instantânea em uma dimensão, Equação (2.5). A Figura 3.8 apresenta o exemplo de um vetor aceleração que possui ambos os componentes x e y.

Como cada componente da velocidade é dado pela derivada da respectiva coordenada da posição, podemos escrever os componentes a_x, a_y e a_z do vetor aceleração $\vec{a}$ como

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{3.12}$$

e o vetor aceleração $\vec{a}$ do seguinte modo

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} \tag{3.13}$$

Exemplo 3.2

CÁLCULO DA ACELERAÇÃO INSTANTÂNEA E DA ACELERAÇÃO MÉDIA Vamos analisar novamente os movimentos do veículo robótico mencionado no Exemplo 3.1. Os componentes da velocidade instantânea em função do tempo t são:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-0{,}25\ \text{m/s}^2)(2t)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 1{,}0\ \text{m/s} + (0{,}025\ \text{m/s}^3)(3t^2)$$

e o vetor velocidade é

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = (-0{,}50\ \text{m/s}^2)t\hat{\imath} + [1{,}0\ \text{m/s} + (0{,}075\ \text{m/s}^3)t^2]\hat{\jmath}$$

a) Calcule os componentes do vetor aceleração média no intervalo de tempo entre $t = 0{,}0$ s e $t = 2{,}0$ s. b) Ache a aceleração instantânea para $t = 2{,}0$ s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este exemplo usa as relações vetoriais entre velocidade, aceleração média e aceleração instantânea.

PREPARAR: na parte a) Usamos a Equação (3.8); para calcularmos os componentes do vetor aceleração média, necessitamos dos componentes da velocidade no início e no final do intervalo de tempo. Na parte b) Determinamos os componentes da aceleração instantânea em qualquer instante t, tomando as derivativas de tempo dos componentes de velocidade, como na Equação (3.10).

EXECUTAR: a) Substituindo-se $t = 0{,}0$ s ou $t = 2{,}0$ s nas expressões de v_x e v_y, achamos que no início do intervalo ($t = 0{,}0$ s) os componentes da velocidade instantânea são

$$v_x = 0{,}0\ \text{m/s} \qquad v_y = 1{,}0\ \text{m/s}$$

e ao final do intervalo ($t = 2{,}0$ s), os componentes são

$$v_x = -1{,}0\ \text{m/s} \qquad v_y = 1{,}3\ \text{m/s}$$

(Os valores em $t = 2{,}0$ s são os mesmos que os encontrados no Exemplo 3.1.)

$$a_{mx} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{-1{,}0\ \text{m/s} - 0{,}0\ \text{m/s}}{2{,}0\ \text{s} - 0{,}0\ \text{s}} = -0{,}5\ \text{m/s}^2$$

$$a_{my} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{1{,}3\ \text{m/s} - 1{,}0\ \text{m/s}}{2{,}0\ \text{s} - 0{,}0\ \text{s}} = 0{,}15\ \text{m/s}^2$$

b) Pela Equação (3.10), achamos

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -0{,}50\ \text{m/s}^2 \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = (0{,}075\ \text{m/s}^3)(2t)$$

Podemos escrever o vetor aceleração instantânea $\vec{a}$ como

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} = (-0{,}50\ \text{m/s}^2)\hat{\imath} + (0{,}15\ \text{m/s}^3)t\hat{\jmath}$$

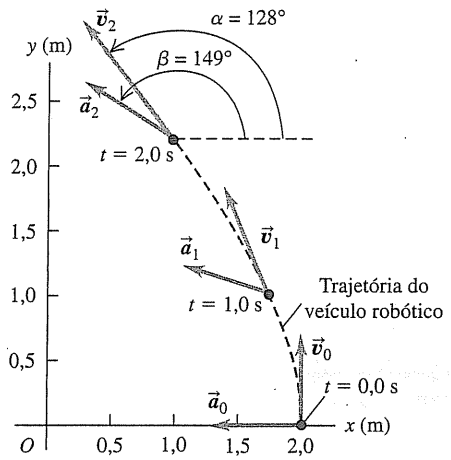


Figura 3.9 Trajetória do veículo robótico mostrando a velocidade e a aceleração para $t = 0,0$ s ($\vec{v}_0$ e $\vec{a}_0$), $t = 1,0$ s ($\vec{v}_1$ e $\vec{a}_1$) e $t = 2,0$ s ($\vec{v}_2$ e $\vec{a}_2$).

Para $t = 2,0$ s, os componentes da aceleração instantânea são

$$a_x = -0,50 \text{ m/s}^2 \qquad a_y = (0,15 \text{ m/s}^3)(2,0 \text{ s}) = 0,30 \text{ m/s}^2$$

O vetor de aceleração nesse instante é

$$\vec{a} = (-0,50 \text{ m/s}^2)\hat{\imath} + (0,30 \text{ m/s}^2)\hat{\jmath}$$

O módulo da aceleração nesse instante é

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$
$$= \sqrt{(-0,50 \text{ m/s}^2)^2 + (0,30 \text{ m/s}^2)^2} = 0,58 \text{ m/s}^2$$

A direção de $\vec{a}$ em relação ao sentido positivo do eixo Ox é dada pelo ângulo β, onde

$$\text{tg}\beta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{0,30 \text{ m/s}^2}{-0,50 \text{ m/s}^2} = -0,60$$
$$\beta = 180° - 31° = 149°$$

AVALIAR: convidamos você a determinar a aceleração instantânea para $t = 0,0$ s e para $t = 1,0$ s. A trajetória do veículo e os vetores velocidade e aceleração para $t = 0,0$ s, $t = 1,0$ s e $t = 2,0$ s são indicados na Figura 3.9. Note que a direção do vetor $\vec{v}$ é *diferente* da direção do vetor $\vec{a}$ em todos os pontos indicados. O vetor velocidade $\vec{v}$ é tangente à trajetória em cada ponto, e o vetor aceleração $\vec{a}$ aponta para o lado côncavo da trajetória.

Os componentes perpendiculares e paralelos da aceleração

O vetor aceleração $\vec{a}$ para uma partícula pode descrever variações na velocidade escalar dessa partícula, a direção do seu movimento ou ambos. É útil observar que o componente de aceleração paralelo à trajetória de uma partícula — ou seja, paralelo à velocidade — informa sobre as variações na *velocidade escalar* da partícula, enquanto o componente de aceleração *perpendicular* à trajetória — e, portanto, perpendicular à velocidade — informa sobre as variações na *direção do movimento* da partícula. A Figura 3.10 mostra esses componentes, que são indicados com os

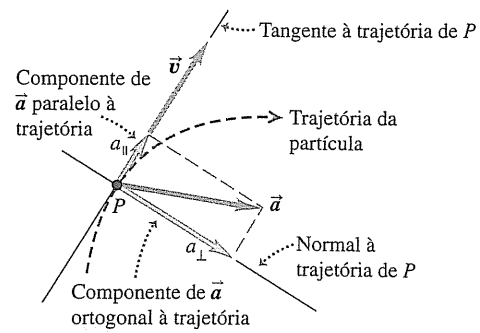


Figura 3.10 A aceleração pode ser decomposta no componente $a_\parallel$ paralelo à trajetória (e à velocidade) e no componente $a_\perp$ ortogonal à trajetória (ou seja, ao longo da normal à trajetória).

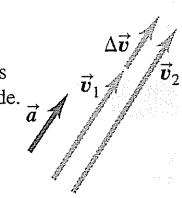
símbolos $a_\parallel$ e $a_\perp$. Para entender por que os componentes paralelo e perpendicular de $\vec{a}$ possuem essas propriedades, vamos considerar dois casos especiais.

Na Figura 3.11a, o vetor aceleração é *paralelo* ao vetor velocidade $\vec{v}_1$, portanto $\vec{a}$ possui apenas um componente paralelo $a_\parallel$ (ou seja, $a_\perp = 0$). A variação de $\Delta\vec{v}$ durante um pequeno intervalo de tempo Δt é o vetor Δv que é paralelo ao vetor $\vec{a}$ e, portanto, na mesma direção que $\vec{v}_1$. A velocidade $\vec{v}_2$ no final do intervalo Δt, dada por $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}$, é um vetor paralelo a $\vec{v}_1$ possuindo, porém, módulo maior. Em outras palavras, durante o intervalo de tempo Δt a partícula da Figura 3.11a se moveu em linha reta com velocidade crescente.

Na Figura 3.11b a aceleração é *perpendicular* ao vetor velocidade, portanto $\vec{a}$ possui apenas um componente perpendicular $a_\perp$ (ou seja, $a_\parallel = 0$). A variação da velocidade durante um pequeno intervalo de tempo Δt é o vetor $\Delta\vec{v}$ aproximadamente perpendicular a $\vec{v}_1$. Novamente, $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}$, porém, neste caso, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ possuem direções diferentes. Quando o intervalo de tempo Δt tende a zero, o ângulo ϕ na figura também tende a zero e $\Delta\vec{v}$ torna-se perpendicular a *ambos* os vetores, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, os quais

(a)

Aceleração paralela à velocidade da partícula:
- Há variação no *módulo*, mas não na *direção* da velocidade.
- A partícula se move em linha reta com velocidade escalar variável.



(b)

Aceleração ortogonal à velocidade da partícula:
- Há variação na *direção*, mas não no *módulo* da velocidade.
- A partícula se move em uma trajetória curva com velocidade escalar constante.

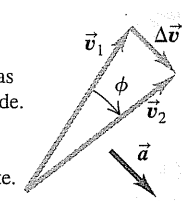


Figura 3.11 O efeito da aceleração direcionada (a) em paralelo e (b) ortogonal à velocidade de uma partícula.

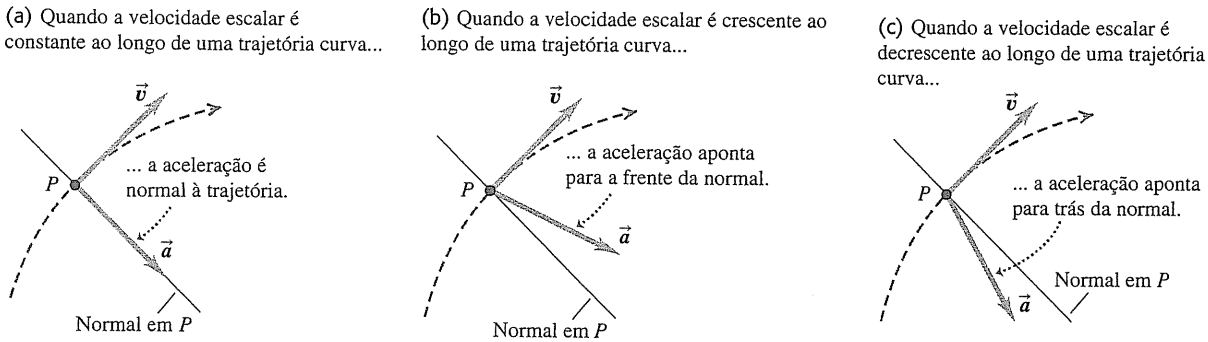


Figura 3.12 Vetores da velocidade e aceleração para uma partícula que atravessa um ponto *P* em uma trajetória curva com (a) velocidade escalar constante, (b) velocidade escalar crescente e (c) velocidade escalar decrescente.

possuem o mesmo módulo. Em outras palavras, a velocidade escalar permanece constante, porém a trajetória da partícula torna-se curva.

Na maioria dos casos, a aceleração $\vec{a}$ possui *ambos* os componentes, o paralelo e o perpendicular à velocidade $\vec{v}$, como na Figura 3.10. Então a velocidade escalar da partícula sofrerá variação (descrita pelo componente paralelo $a_{\parallel}$) *e* a direção do seu movimento sofrerá variação (descrita pelo componente perpendicular $a_{\perp}$), de modo que ela seguirá uma trajetória curva.

A Figura 3.12 mostra uma partícula descrevendo uma trajetória curva em três situações diferentes: velocidade escalar constante, velocidade escalar crescente e velocidade escalar decrescente. Quando a velocidade escalar é constante, $\vec{a}$ é perpendicular, ou *normal* à $\vec{v}$ e à trajetória e aponta para o lado côncavo da curva (Figura 3.12a). Quando a velocidade escalar é crescente, ainda existe um componente perpendicular de $\vec{a}$, porém existe também um componente paralelo que possui a mesma direção de $\vec{v}$ (Figura 3.12b). Então, $\vec{a}$ aponta para a frente da normal à trajetória. (Este foi o caso do Exemplo 3.2.) Quando a velocidade escalar é decrescente, o componente paralelo possui direção oposta à direção de $\vec{v}$, e $\vec{a}$ aponta para trás da normal à trajetória (Figura 3.12c). Usaremos essas idéias na Seção 3.4, quando estudarmos o caso especial do movimento circular.

Exemplo 3.3

CÁLCULO DOS COMPONENTES PARALELO E PERPENDICULAR DA ACELERAÇÃO Para o veículo robótico mencionado nos exemplos 3.1 e 3.2, ache os componentes paralelos e perpendiculares da aceleração em $t = 2{,}0$ s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: queremos encontrar os componentes do vetor aceleração $\vec{a}$ que são paralelos e perpendiculares ao vetor velocidade $\vec{v}$.

PREPARAR: achamos as direções de $\vec{a}$ e $\vec{v}$ nos exemplos 3.2 e 3.1, respectivamente. Isso nos permitirá encontrar o ângulo entre os dois vetores e, portanto, os componentes de $\vec{a}$.

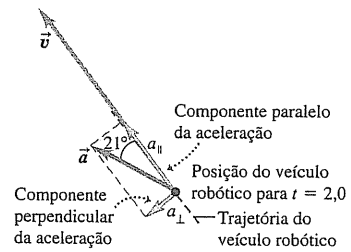


Figura 3.13 Os componentes paralelo e perpendicular da aceleração do veículo robótico em $t = 2{,}0$ s.

EXECUTAR: no Exemplo 3.2, achamos que para $t = 2{,}0$ s, a partícula tem aceleração de módulo 0,58 m/s^2 em um ângulo de 149° em relação ao sentido positivo do eixo *Ox*. Conforme o Exemplo 3.1, nesse mesmo instante o vetor velocidade forma um ângulo de 128° em relação ao sentido positivo do eixo *Ox*. Assim, a Figura 3.9 mostra que o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{v}$ é 149° − 128° = 21° (Figura 3.13). Os componentes paralelo e perpendicular da aceleração são

$$a_{\parallel} = a\cos 21° = (0{,}58\ \text{m/s}^2)\cos 21° = 0{,}54\ \text{m/s}^2$$
$$a_{\perp} = a\,\text{sen}\,21° = (0{,}58\ \text{m/s}^2)\,\text{sen}\,21° = 0{,}21\ \text{m/s}^2$$

AVALIAR: o componente paralelo $a_{\parallel}$ possui a mesma direção de $\vec{v}$, indicando que velocidade escalar é crescente nesse ponto 1; o valor de $a_{\parallel} = 0{,}54$ m/s^2 indica que a velocidade escalar é estimada em 0,54 m/s por segundo. Como o componente perpendicular $a_{\perp}$ não é nulo, concluímos que a trajetória do veículo é curva neste ponto; em outras palvras, o veículo está fazendo uma volta.

Exemplo conceitual 3.4

ACELERAÇÃO DE UMA ESQUIADORA Uma esquiadora se move ao longo de uma rampa para esqui conforme indicado na Figura 3.14a. A rampa é retilínea do ponto *A* ao ponto *C* e encurvada a partir do ponto *C*. A esquiadora ganha velocidade quando ela desce do ponto *A* ao ponto *E*, onde sua velocidade adquire seu valor máximo. Sua velocidade passa a diminuir depois que ela passa do ponto *E*. Desenhe a direção do vetor aceleração nos pontos *B, D, E* e *F*.

SOLUÇÃO

A Figura 3.14b demonstra nossa solução. No ponto B, a esquiadora se move em linha reta com velocidade crescente; logo, sua aceleração aponta de cima para baixo, na mesma direção e sentido da sua velocidade.

No ponto *D*, *a* esquiadora se move ao longo de uma trajetória curva, logo, sua aceleração possui um componente perpendicular à trajetória. Existe também um componente na direção do seu movimento, porque ela ainda está ganhando velocidade quando passa por esse ponto. Portanto, o vetor aceleração aponta para a *frente* da normal à sua trajetória no ponto *D*.

A velocidade escalar da esquiadora não varia instantaneamente no ponto *E*; sua velocidade adquire o valor máximo nesse ponto, de modo que sua derivada é igual a zero. Portanto, não existe nenhum componente paralelo de $\vec{a}$, e a aceleração é perpendicular ao seu movimento.

Finalmente, no ponto *F*, a aceleração possui um componente perpendicular (porque sua trajetória é curva nesse ponto) e um componente paralelo com sentido *oposto* ao sentido do seu movimento (porque sua velocidade está diminuindo). Portanto, o vetor aceleração aponta para *trás* da normal à sua trajetória.

Na próxima seção examinaremos a aceleração da esquiadora quando ela saltar da rampa.

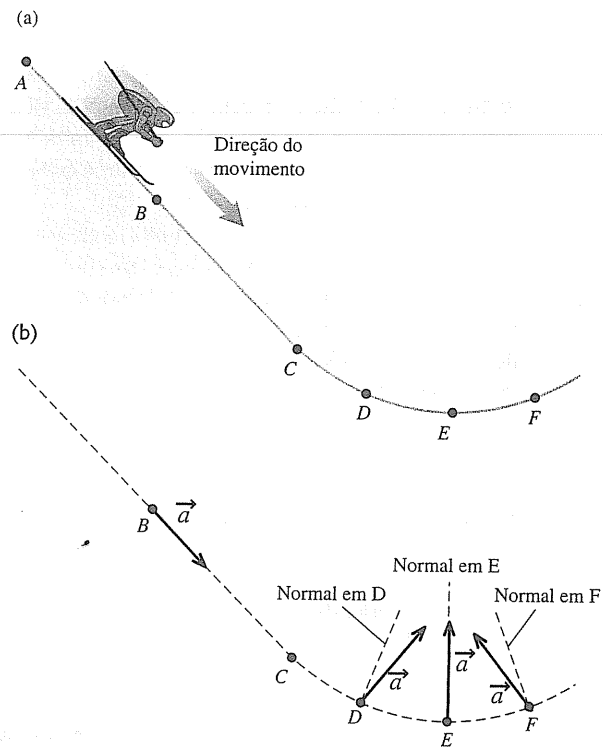
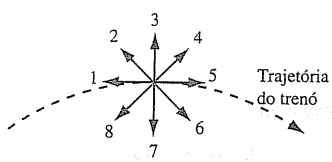


Figura 3.14 (a) A trajetória da esquiadora. (b) Nossa solução.

Teste sua compreensão da Seção 3.2 Um trenó passa pelo topo de uma colina coberta de neve. Sua velocidade diminui ao subir pela encosta da colina e aumenta ao descer pelo outro lado. Qual dos vetores (de 1 a 9) na figura demonstra corretamente a direção da aceleração do trenó no topo da colina? (A alternativa 9 corresponde a uma aceleração igual a zero.) ■



ou 9: aceleração = 0

3.3 Movimento de um projétil

Um **projétil** é qualquer corpo lançado com uma velocidade inicial e que segue uma trajetória determinada exclusivamente pela aceleração da gravidade e pela resistência do ar. Uma bola de beisebol batida, uma bola de futebol chutada, um pacote largado de um avião e uma bala atirada por uma arma de fogo são exemplos de projéteis. A curva descrita pelo projétil é a sua trajetória.

A fim de analisarmos esse tipo comum de movimento, começaremos com um modelo idealizado, representando o projétil como uma partícula com aceleração (devida à gravidade) constante em módulo, direção e sentido. Vamos desprezar os efeitos de resistência do ar e a curvatura e rotação da Terra. Como todo modelo, este possui algumas limitações. A curvatura da Terra tem de ser considerada no movimento de um míssil de longo alcance e a resistência do ar é de importância fundamental para o movimento de um pára-quedista. Contudo, podemos aprender muito da análise deste modelo simplificado. No restante deste capítulo, a frase 'movimento de um projétil' implica que desprezamos os efeitos de resistência do ar. No Capítulo 5 veremos o que ocorre quando não podemos desprezar os efeitos da resistência do ar.

Notamos inicialmente que o movimento de um projétil está sempre confinado em um plano vertical determinado pela direção da velocidade inicial (Figura 3.15). Isso ocorre porque a aceleração da gravidade é sempre vertical; a gravidade não pode produzir um movimento lateral do projétil. Logo, o movimento de um projétil ocorre em *duas dimensões*. O plano do movimento será considerado o plano de coordenadas *xy*, sendo o eixo *Ox* horizontal e o eixo *Oy* vertical e orientado de baixo para cima.

A chave para analisar o movimento de um projétil é tratar as coordenadas *x* e *y* separadamente. O componente *x* da aceleração é igual a zero, e o componente *y* é constante e igual a $-g$. (Lembre-se de que, por definição, g é sempre positivo; com a nossa escolha do sentido do eixo, a_y é negativo.) Dessa forma, *podemos considerar o movimento de um projétil como a combinação de um movimento horizontal com velocidade constante e um movimento vertical com aceleração constante*. A Figura 3.16 mostra dois projéteis com diferentes movimentos no eixo *Ox*, mas idênticos movimentos no eixo *Oy*;

- O movimento de um projétil ocorre em um plano vertical contendo o vetor velocidade inicial $\vec{v}_0$.
- Sua trajetória depende somente de $\vec{v}_0$ e da aceleração descendente em função da gravidade.

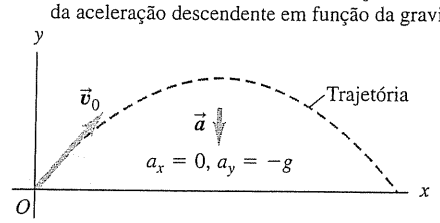


Figura 3.15 A trajetória de um projétil.

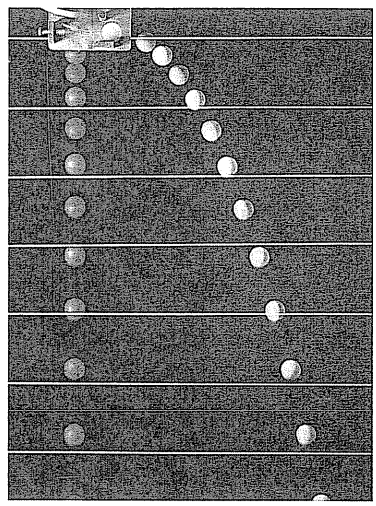


Figura 3.16 A bola da esquerda é largada verticalmente sem velocidade inicial. Simultaneamente, a bola da direita é lançada horizontalmente do mesmo ponto; imagens sucessivas desta fotografia estroboscópica são registradas em intervalos de tempo iguais. Para cada intervalo de tempo, as duas bolas possuem os mesmos componentes *y* da posição, da velocidade e da aceleração, embora os componentes *x* da posição e da velocidade sejam diferentes.

um corresponde ao movimento de uma bola largada sem velocidade inicial e o outro foi lançado horizontalmente do mesmo ponto, porém ambos caem verticalmente à mesma distância em intervalos de tempo iguais.

Assim podemos expressar todas as relações vetoriais para a posição, velocidade e aceleração usando equações separadas para os componentes horizontais e perpendiculares. O movimento efetivo do projétil é a superposição desses movimentos separados. Os componentes de $\vec{a}$ são

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g \tag{3.14}$$

(movimento de um projétil, sem resistência do ar)

Uma vez que os componentes *x* e *y* da aceleração são constantes, podemos usar as equações (2.8), (2.12), (2.13) e (2.14) diretamente. Por exemplo, suponha que no instante $t = 0$ a partícula esteja em repouso no ponto (x_0, y_0) e que nesse instante sua velocidade inicial possua componentes v_{0x} e v_{0y}. Os componentes da aceleração são $a_x = 0$ e $a_y = -g$. Considerando inicialmente o movimento no eixo *Ox* e substituindo a_x por 0 nas equações (2.8) e (2.12), achamos

$$v_x = v_{0x} \tag{3.15}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t \tag{3.16}$$

Para o movimento no eixo *Oy*, substituindo *y* por *x*, v_y por v_x, v_{0y} por v_{0x} e a_y por $-g$ para a_x, achamos

$$v_y = v_{0y} - gt \tag{3.17}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.18}$$

Normalmente é mais simples considerar a posição inicial ($t = 0$) como a origem; nesse caso $x_0 = y_0 = 0$. Este ponto poderia ser, por exemplo, a posição da mão quando lançamos uma bola ou a posição de uma bala de munição quando ela deixa o cano da arma.

A Figura 3.17 mostra a trajetória de um projétil que começa na origem (ou a atravessa) em dado instante $t = 0$. Os componentes da posição, da velocidade e da aceleração são indicados para intervalos de tempo iguais. O componente *x* da aceleração é igual a zero, portanto v_x é constante. O componente *y* da aceleração é constante e não nulo, de modo que v_y varia em quantidades iguais durante intervalos de tempo iguais, exatamente como se o projétil fosse lançado verticalmente com a mesma velocidade inicial *y*. No ponto mais elevado da sua trajetória, $v_y = 0$.

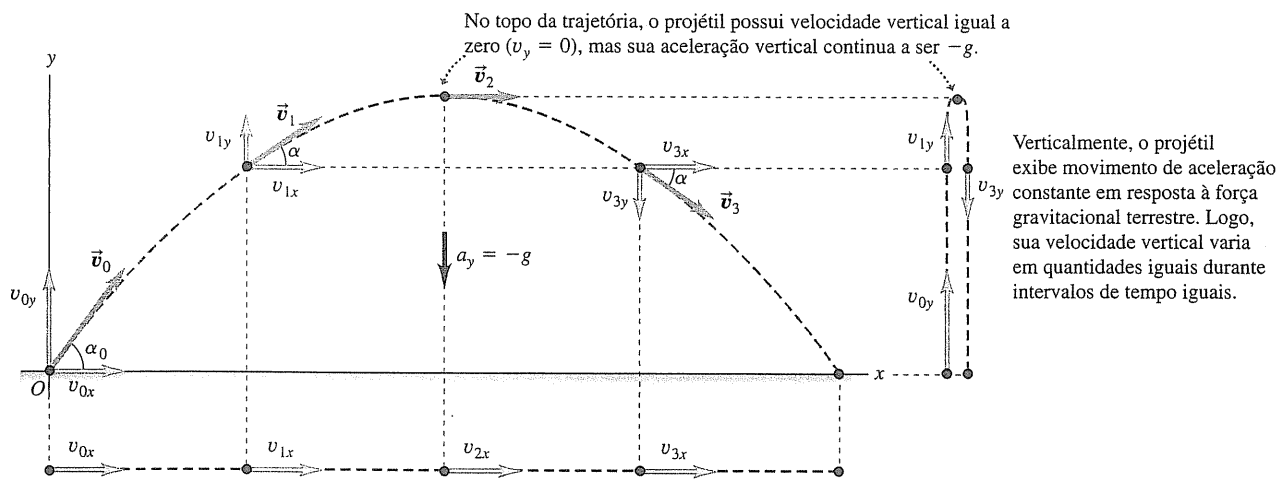


Figura 3.17 Se desprezarmos a resistência do ar, a trajetória de um projétil é uma combinação do movimento horizontal com a velocidade constante e do movimento vertical com a aceleração constante.

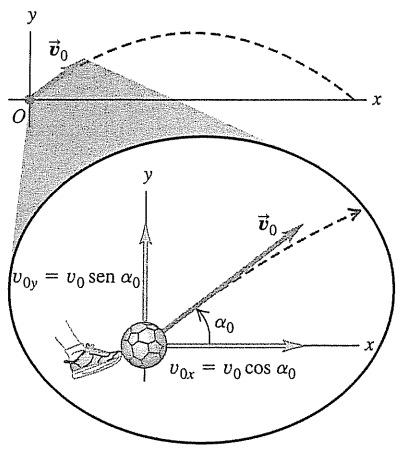


Figura 3.18 Os componentes de velocidade inicial v_{0x} e v_{0y} de um projétil (tal como um bola de futebol chutada) se relacionam com a velocidade escalar inicial v_0 e o ângulo inicial α_0).

Podemos também representar a velocidade inicial $\vec{v}_0$ por seu módulo v_0 (a velocidade escalar inicial) e seu ângulo α_0 com o sentido positivo do eixo Ox (Figura 3.18). Em termos dessas grandezas, os componentes v_{0x} e v_{0y} da velocidade inicial são:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0 \qquad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \tag{3.19}$$

Usando este resultado nas relações indicadas pela Equação (3.15) até a Equação (3.18) e fazendo $x_0 = y_0 = 0$, obtemos

$$x = (v_0 \cos \alpha_0)t \tag{3.20}$$
(movimento de um projétil)

$$y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.21}$$
(movimento de um projétil)

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0 \tag{3.22}$$
(movimento de um projétil)

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 - gt \tag{3.23}$$
(movimento de um projétil)

Essas equações descrevem a posição e a velocidade de um projétil na Figura 3.17 em qualquer instante t.

Dessas equações podemos extrair muitas informações. Por exemplo, em qualquer instante, a distância r entre o projétil e a origem (o módulo do vetor posição $\vec{r}$) é dada por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.24}$$

A velocidade escalar do projétil (o módulo de sua velocidade) em qualquer instante é dada por

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{3.25}$$

A *direção e o sentido* da velocidade em termos do ângulo α que ela faz com o sentido positivo do eixo Ox (Figura 3.17) são dados por

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} \tag{3.26}$$

O vetor velocidade $\vec{v}$ em cada ponto é tangente à trajetória no referido ponto.

Podemos deduzir a equação da forma da trajetória em termos de x e de y eliminando t. Pelas equações (3.20) e (3.21), que supõem $x_0 = y_0 = 0$, encontramos

$$y = (\operatorname{tg} \alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0}x^2 \tag{3.27}$$

Não se preocupe com os detalhes desta equação; o ponto importante é sua forma geral. As grandezas v_0, tg α_0, cos α_0 e g são constantes, de modo que essa equação tem a forma:

$$y = bx - cx^2$$

onde b e c são constantes. Trata-se da equação de uma *parábola*. A trajetória do movimento de um projétil, com nosso modelo simplificado, é sempre uma parábola (Figura 3.19).

(a) Imagens sucessivas da bola são separadas por intervalos de tempo iguais.

(b)

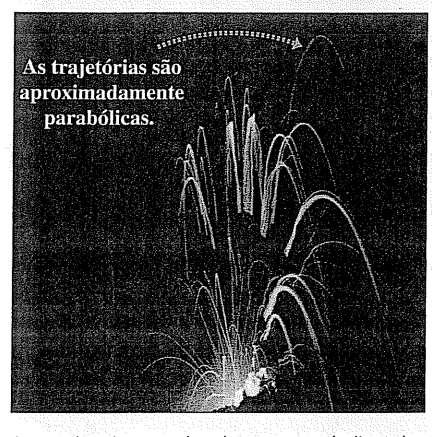


Figura 3.19 As trajetórias aproximadamente parabólicas de a) uma bola que quica e b) bolhas de rocha derretida que são ejetadas por um vulcão.

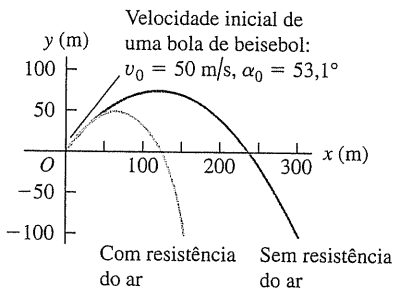


Figura 3.20 A resistência do ar tem um efeito amplo no movimento de uma bola de beisebol. Nesta simulação deixamos uma bola de beisebol cair de um ponto bastante alto e outra foi arremessada (por exemplo, a bola de beisebol poderia ter sido arremessada de um penhasco.)

Quando a resistência do ar *não* pode ser desprezada sempre e tem que ser incluída, calcular a trajetória torna-se mais complicada; os efeitos da resistência do ar dependem da velocidade, de modo que a aceleração deixa de ser constante. A Figura 3.20 mostra duas simulações de computador para a trajetória de uma bola de beisebol: uma sem resistência do ar e outra considerando uma resistência do ar proporcional ao quadrado da velocidade da bola de beisebol. Vemos que a resistência do ar possui um grande efeito; ocorre diminuição do alcance e da altura máxima, e a trajetória deixa de ser uma parábola. (Se analisarmos atentamente a Figura 3.19b, notaremos que as trajetórias das bolhas vulcânicas desviam-se de forma similar a um formato parabólico.)

Exemplo conceitual 3.5

ACELERAÇÃO DE UMA ESQUIADORA, CONTINUAÇÃO

Vamos retomar o Exemplo Conceitual 3.4, da esquiadora. Qual é a aceleração dela nos pontos *G*, *H* e *I* na Figura 3.21a *após* ela saltar da rampa? Despreze a resistência do ar.

SOLUÇÃO

A Figura 3.21b mostra nossa resposta. A aceleração da esquiadora varia de um ponto a outro, enquanto ela está sobre a rampa. Mas, assim que deixa a rampa, ela se torna um projétil. Logo, nos pontos *G*, *H* e *I*, e de fato em *todos* os pontos após ela saltar da rampa, a aceleração é orientada de cima para baixo e possui módulo g. Por mais complicada que seja a aceleração de uma partícula antes de ela se tornar um projétil, sua aceleração como projétil é dada por $a_x = 0$, $a_y = -g$.

Estratégia para a solução de problemas 3.1

MOVIMENTO DE UM PROJÉTIL

NOTA: as estratégias recomendadas nas seções 2.4 e 2.5 para problemas de aceleração constante em movimento retilíneo também são úteis aqui.

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: o principal conceito a se lembrar é que, durante o movimento do projétil, a aceleração é descendente e possui um módulo g constante. Vale observar que as equações de movimento de um projétil não se aplicam ao arremessar uma bola, porque o arremesso sofre ação tanto da mão do arremessador quanto da gravidade. Essas equações se aplicam somente após a bola deixar a mão do arremessador.

PREPARAR *o problema* usando os seguintes passos:

1. Defina seu sistema de coordenadas e faça um desenho mostrando os eixos. Em geral, é mais simples colocar a origem na posição inicial do projétil ($t = 0$), posição em que um corpo inicialmente se torna um projétil (tal como onde uma bola deixa a mão do arremessador), com o eixo Ox horizontal e o eixo Oy vertical e orientado de baixo para cima. Nesse caso, os componentes da aceleração (constante) são $a_x = 0$ e $a_y = -g$, e a posição inicial é $x_0 = 0$, $y_0 = 0$
2. Faça uma lista com as grandezas conhecidas e as desconhecidas. Em alguns problemas, os componentes (ou o módulo, a direção e o sentido) da velocidade inicial são fornecidos, e você poderá usar o conjunto de relações da Equação (3.20) à Equação (3.23) para achar a posição e os componentes da velocidade em qualquer outro instante. (Algumas outras equações fornecidas na Seção 3.3 também podem ser úteis.) Certifique-se de ter tantas equações quantas forem as incógnitas a serem resolvidas.
3. Normalmente é útil formular o problema em palavras e posteriormente traduzi-lo em símbolos. Por exemplo, *quando* uma

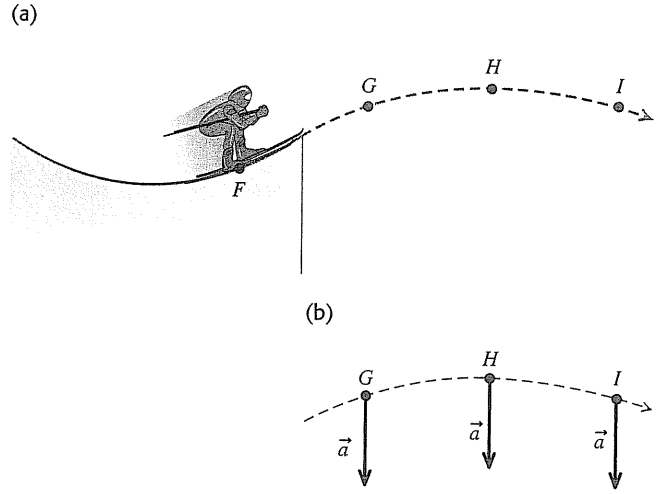


Figura 3.21 (a) A trajetória da esquiadora durante o salto. (b) Nossa solução.

partícula atinge um dado ponto? (Ou seja, qual é o valor de t?) *Onde* está a partícula quando possui um dado valor da velocidade? (Ou seja, qual é o valor de x e de y quando os valores de v_x ou v_y forem especificados?) Como no ponto mais elevado de sua trajetória $v_y = 0$, a pergunta 'Quando o projétil atinge o ponto mais elevado de sua trajetória?' se traduz como 'Qual é o valor de t quando $v_y = 0$?' Da mesma forma, 'Quando o projétil retorna à sua elevação inicial?' se traduz como 'Qual é o valor de t quando $y = y_0$?'

EXECUTAR *a solução:* use as equações (3.20) até (3.23) para achar as incógnitas. Resista à tentação de segmentar a trajetória e analisar cada segmento separadamente. Não é necessário recomeçar quando o projétil atinge seu ponto máximo! É quase sempre mais fácil usar os mesmos eixos e escala de tempo por todo o problema. Use o valor $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

AVALIAR *sua resposta:* como sempre, analise seus resultados para verificar se fazem sentido e se os valores numéricos parecem razoáveis.

Exemplo 3.6

UM CORPO PROJETADO HORIZONTALMENTE Um motociclista maluco se projeta para fora da borda de um penhasco. No ponto exato da borda, sua velocidade é horizontal e possui módulo igual a 9,0 ms. Ache a posição do motociclista, a distância da borda do penhasco e a velocidade depois de 0,50 s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: assim que o motociclista deixa o penhasco, ele está em movimento de projétil. Sua velocidade na borda do penhasco é, portanto, sua velocidade inicial.

PREPARAR: a Figura 3.22 mostra nosso desenho. Colocamos a origem de nosso sistema de coordenadas na borda do penhasco, onde o motociclista inicialmente se torna um projétil; assim, $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. A velocidade inicial é puramente horizontal (ou seja, $\alpha_0 = 0$), assim, as velocidades iniciais dos componentes são $v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 = 9{,}0\ \text{m/s}$ e $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 = 0$. Para achar a posição do motociclista no instante $t = 0{,}50$ s, usamos as equações (3.20) e (3.21), que dão x e y em função do tempo. Então determinamos a distância a partir da origem usando a Equação (3.24). Finalmente, usamos as equações (3.22) e (3.23) para encontrar os componentes de velocidade v_x e v_y em $t = 0{,}50$ s.

EXECUTAR: onde está a motocicleta em $t = 0{,}50$ s? A partir das equações (3.20) e (3.21), as coordenadas x e y são

$$x = v_{0x}t = (9{,}0\ \text{m/s})(0{,}50\ \text{s}) = 4{,}5\ \text{m}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}(9{,}8\ \text{m/s}^2)(0{,}50\ \text{s})^2 = -1{,}2\ \text{m}$$

O valor negativo de y mostra que neste instante o motociclista está abaixo de seu ponto de partida.

Qual é a distância do motociclista de seu ponto de partida neste instante? Da Equação (3.24),

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4{,}5\ \text{m})^2 + (-1{,}2\ \text{m})^2} = 4{,}7\ \text{m}$$

Qual é a velocidade em $t = 0{,}50$ s? Pelas equações (3.22) e (3.23), os componentes da velocidade neste instante são:

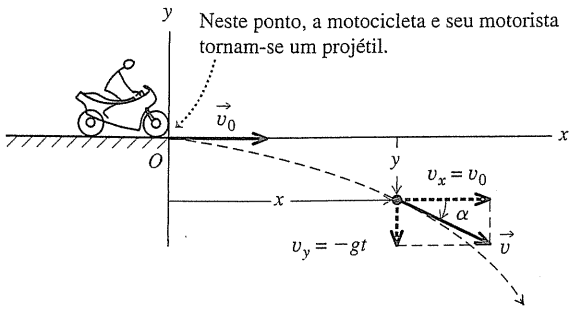


Figura 3.22 Nosso desenho para esse problema.

$$v_x = v_{0x} = 9{,}0\ \text{m/s}$$

$$v_y = -gt = (-9{,}8\ \text{m/s}^2)(0{,}50\ \text{s}) = -4{,}9\ \text{m/s}$$

A motocicleta tem a mesma velocidade horizontal v_x de quando deixou o penhasco em $t = 0$, além de ter uma velocidade vertical v_y (negativa) para baixo. Se usarmos vetores unitários, a velocidade em $t = 0{,}50$ s será

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = (9{,}0\ \text{m/s})\hat{\imath} + (-4{,}9\ \text{m/s})\hat{\jmath}$$

Também podemos expressar a velocidade em termos de módulo, direção e sentido. Pela Equação (3.25), a velocidade (módulo da velocidade) neste instante será

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$= \sqrt{(9{,}0\ \text{m/s})^2 + (-4{,}9\ \text{m/s})^2} = 10{,}2\ \text{m/s}$$

Pela Equação (3.26), o ângulo α do vetor velocidade será

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{v_y}{v_x} = \operatorname{arctg}\left(\frac{-4{,}9\ \text{m/s}}{9{,}0\ \text{m/s}}\right) = -29°$$

Neste instante a velocidade é 29° abaixo da horizontal.

AVALIAR: como demonstrado na Figura 3.17, o aspecto horizontal do movimento não varia em função da gravidade; a motocicleta continua a se mover horizontalmente a 9,0 m/s, cobrindo 4,5 m em 0,50 s. Inicialmente, a motocicleta possui velocidade vertical zero e por isso cai verticalmente, como um corpo solto a partir do repouso, e desce uma distância de $\frac{1}{2}gt^2 = 1{,}2$ m em 0,50 s.

Exemplo 3.7

ALCANCE E ALTURA DE UM PROJÉTIL I: UMA BOLA DE BEISEBOL Uma bola de beisebol deixa o bastão do batedor com uma velocidade inicial de $v_0 = 37{,}0$ m/s com um ângulo inicial de $\alpha_0 = 53{,}1°$ em um local onde $g = 9{,}80\ \text{m/s}^2$. a) Ache a posição da bola e o módulo, a direção e o sentido de sua velocidade para $t = 2{,}0$ s. b) Calcule o tempo que a bola leva para atingir a altura máxima de sua trajetória e ache a altura h desse ponto. c) Ache o *alcance horizontal* R, ou seja, a distância entre o ponto inicial e o ponto onde a bola atinge o solo.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: conforme mostramos na Figura 3.20, a resistência do ar para o movimento de uma bola de beisebol não pode ser desprezada. Contudo, para simplificar, vamos ignorar a resistência do ar neste exemplo e usar as equações de movimento de um projétil.

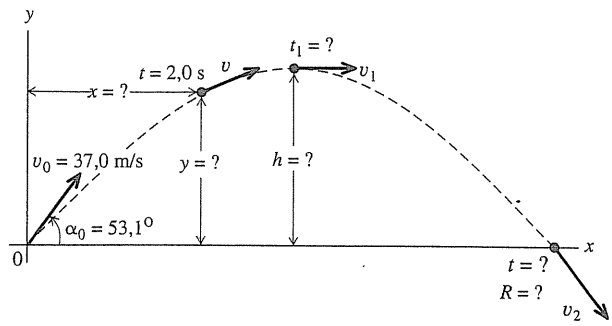


Figura 3.23 Nossa visualização deste problema.

PREPARAR: a Figura 3.23 mostra nosso desenho. Usamos o mesmo sistema de coordenadas da Figura 3.17 ou 3.18, de modo que podemos aplicar as equações (3.20) até (3.23), sem quaisquer modificações. Nossas incógnitas são 1) a posição e a velocidade da bola 2,0 s após ela deixar o bastão, 2) o tempo decorrido após deixar o bastão, quando a bola está na sua altura máxima — ou seja, quando $v_y = 0$ — e a coordenada y nesse instante e 3) a coordenada x nesse instante em que a coordenada y é igual ao valor inicial y_0.

A bola de beisebol é batida cerca de um metro acima do solo, mas desprezamos essa distância e supomos que o movimento inicia-se no nível do solo ($y_0 = 0$). A velocidade inicial da bola é

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 = (37{,}0 \text{ m/s}) \cos 53{,}1^\circ = 22{,}2 \text{ m/s}$$
$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 = (37{,}0 \text{ m/s}) \operatorname{sen} 53{,}1^\circ = 29{,}6 \text{ m/s}$$

EXECUTAR: a) queremos achar x, y, v_x e v_y no instante $t = 2{,}0$ s. Pelas equações (3.20) e (3.23),

$$x = v_{0x}t = (22{,}2 \text{ m/s})(2{,}0 \text{ s}) = 44{,}4 \text{ m}$$
$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$= (29{,}6 \text{ m/s})(2{,}0 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9{,}80 \text{ m/s}^2)(2{,}0 \text{ s})^2$$
$$= 39{,}6 \text{ m}$$
$$v_x = v_{0x} = 22{,}2 \text{ m/s}$$
$$v_y = v_{0y} - gt = 29{,}6 \text{ m/s} - (9{,}80 \text{ m/s}^2)(2{,}0 \text{ s})$$
$$= 10{,}0 \text{ m/s}$$

O componente y da velocidade é positivo, o que significa que a bola ainda está em movimento ascendente nesse instante (Figura 3.23). O módulo e a direção da velocidade podem ser determinados pelas equações (3.25) e (3.26):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(22{,}2 \text{ m/s})^2 + (10{,}0 \text{ m/s})^2}$$
$$= 24{,}3 \text{ m/s}$$
$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{10{,}0 \text{ m/s}}{22{,}2 \text{ m/s}}\right) = \operatorname{arctg}\, 0{,}450 = 24{,}2^\circ$$

A direção da velocidade (ou seja, a direção do movimento) é 24,2° acima da horizontal.

b) No ponto mais alto, a velocidade vertical v_y é zero. Quando isso ocorre? Designamos o tempo como t_1; logo

$$v_y = v_{0y} - gt_1 = 0$$
$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{29{,}6 \text{ m/s}}{9{,}80 \text{ m/s}^2} = 3{,}02 \text{ s}$$

A altura h nesse instante é o valor de y quando $t = t_1 = 3{,}02$ s:

$$h = v_{0y}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$
$$= (29{,}6 \text{ m/s})(3{,}02 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9{,}80 \text{ m/s}^2)(3{,}02 \text{ s})^2$$
$$= 44{,}7 \text{ m}$$

c) Encontraremos o alcance horizontal em duas etapas. Inicialmente, *quando* a bola atinge o solo? Isso ocorre quando $y = 0$. Chame esse instante de t_2; então

$$y = 0 = v_{0y}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = t_2\left(v_{0y} - \frac{1}{2}gt_2\right)$$

Trata-se de uma equação do segundo grau em t_2. As duas raízes são

$$t_2 = 0 \quad \text{e} \quad t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2(29{,}6 \text{ m/s})}{9{,}80 \text{ m/s}^2} = 6{,}04 \text{ s}$$

Existem dois instantes para os quais $y = 0$; $t_2 = 0$ corresponde ao instante em que a bola *deixa* o solo e $t_2 = 2v_{0y}/g = 6{,}04$ s é o instante em que a bola retorna ao solo. Isso é exatamente igual ao dobro do tempo que ela leva para atingir a altura máxima, visto que o tempo de subida é igual ao tempo de descida. Isso é *sempre* verdade quando o ponto inicial e o ponto final da trajetória estão no mesmo nível e a resistência do ar pode ser desprezada. O alcance horizontal R é o valor de x quando a bola retorna ao solo, isto é, para $t = 6{,}04$ s:

$$R = v_{0x}t_2 = (22{,}2 \text{ m/s})(6{,}04 \text{ s}) = 134 \text{ m}$$

O componente vertical da velocidade quando a bola atinge o solo é

$$v_y = v_{0y} - gt_2 = 29{,}6 \text{ m/s} - (9{,}80 \text{ m/s}^2)(6{,}04 \text{ s})$$
$$= -29{,}6 \text{ m/s}$$

Ou seja, v_y possui o mesmo módulo da velocidade inicial v_{0y}, porém em sentido contrário (de cima para baixo). Como v_x é constante, o ângulo $\alpha = -53{,}1^\circ$ (abaixo da horizontal) é igual e de sinal contrário ao ângulo inicial $\alpha_0 = 53{,}1^\circ$.

AVALIAR: é sempre recomendável conferir os resultados, obtendo-os de outra forma. Por exemplo, podemos verificar nossa resposta para a altura máxima na parte b) aplicando a fórmula da aceleração constante da Equação (2.13) para o movimento y:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0) = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$$

No ponto máximo, $v_y = 0$ e $y = h$. Substituindo esses valores, juntamente com $y_0 = 0$, encontramos

$$0 = v_{0y}^2 - 2gh$$
$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(29{,}6 \text{ m/s})^2}{2(9{,}80 \text{ m/s}^2)} = 44{,}7 \text{ m}$$

que é a mesma altura obtida na parte b).

É interessante notar que $h = 44{,}7$ m na parte b) é comparável aos 52,4 m de altura sobre o campo existente no topo do Hubert H. Humphrey Metrodome, em Minneapolis, e que o alcance horizontal $R = 134$ m na parte c) é maior que a distância de 99,7 m da '*home plate*' até o muro ao lado direito

no Safeco Field, em Seattle. (A altura da bola quando ela cruza o muro é mais do que suficiente para validá-la como uma *home run*.)

Na vida real, uma bola de beisebol com a velocidade escalar inicial e o ângulo usados aqui não vai subir tão alto nem ir tão longe quanto os nossos cálculos. (Se assim fosse, as *home runs* seriam bem mais comuns e o beisebol seria um esporte bem menos interessante.) A razão é que a resistência do ar, a qual desprezamos neste exemplo, é efetivamente um fator importante nas velocidades escalares típicas de arremessos e tacadas da bola (Figura 3.20).

Exemplo 3.8

ALCANCE E ALTURA DE UM PROJÉTIL II: ALTURA MÁXIMA, ALCANCE MÁXIMO Para um projétil lançado com velocidade inicial v_0 e formando um ângulo α_0 (entre 0° e 90°), deduza expressões gerais para a altura máxima h e para o alcance horizontal R (Figura 3.23). Para um dado v_0, qual valor de α_0 fornece altura máxima? Qual valor fornece o alcance máximo?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: trata-se praticamente do mesmo exercício das partes b) e c) do Exemplo 3.7. A diferença é que procuramos expressões gerais para h e R. Também procuramos os valores de α_0 que forneçam os valores máximos de h e R.

PREPARAR: na solução do item b) do Exemplo 3.7, descobrimos que o projétil alcança o ponto alto da trajetória (de modo que $v_y = 0$) no instante $t_1 = v_{0y}/g$, e no item c) do mesmo exemplo descobrimos que o projétil retornou à altura inicial (de modo que $y = y_0$) no instante $t_2 = 2v_{0y}/g$. (Como vimos no Exemplo 3.7, $t_2 = 2t_1$.) Para determinar a altura h no ponto alto da trajetória, usamos a Equação (3.21) para achar a coordenada y em t_1. Para determinar R, substituímos t_2 na Equação (3.20) para achar a coordenada x em t_2. Expressaremos nossas respostas em termos da velocidade de lançamento v_0 e do ângulo de lançamento α_0, usando a Equação (3.19).

EXECUTAR: da Equação (3.19), $v_{0x} = v_0\cos\alpha_0$ e $v_{0y} = v_0\operatorname{sen}\alpha_0$. Logo, podemos escrever o instante t_1, quando $v_y = 0$, como:

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0\operatorname{sen}\alpha_0}{g}$$

A seguir, pela Equação (3.21), a altura nesse instante é

$$h = (v_0\operatorname{sen}\alpha_0)\left(\frac{v_0\operatorname{sen}\alpha_0}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\operatorname{sen}\alpha_0}{g}\right)^2$$

$$= \frac{v_0^2\operatorname{sen}^2\alpha_0}{2g}$$

Para uma dada velocidade de lançamento v_0, vemos que o maior valor de h ocorre quando $\operatorname{sen}\alpha_0 = 1$ e $\alpha_0 = 90°$, ou seja, quando o projétil é lançado diretamente de baixo para cima. Isso é o que deveríamos esperar. Se ele fosse lançado horizontalmente, como no Exemplo 3.6, $\alpha_0 = 0$ e sua altura máxima seria zero!

O instante t_2, quando o projétil retorna ao solo, é

$$t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0\operatorname{sen}\alpha_0}{g}$$

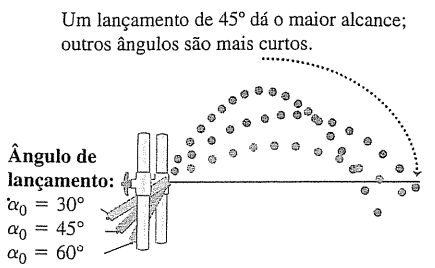


Figura 3.24 Um ângulo de lançamento de 45° fornece o alcance horizontal máximo. O alcance é mais curto com ângulos de lançamento de 30° e 60°.

O alcance horizontal R é o valor de x para o segundo instante. Pela Equação (3.20),

$$R = (v_0\cos\alpha_0)t_2 = (v_0\cos\alpha_0)\frac{2v_0\operatorname{sen}\alpha_0}{g}$$

Podemos agora usar a identidade trigonométrica $2\operatorname{sen}\alpha_0\cos\alpha_0 = \operatorname{sen}2\alpha_0$ para reescrever a relação anterior como,

$$R = \frac{v_0^2\operatorname{sen}2\alpha_0}{g}$$

O valor máximo ocorre quando $\operatorname{sen}2\alpha_0$ é igual a 1, ou seja, $2\alpha_0 = 90°$, logo $\alpha_0 = 45°$. Esse ângulo fornece o alcance máximo para uma dada velocidade inicial.

AVALIAR: a Figura 3.24 é fundamentada na superposição de três fotos de trajetórias obtidas pelo disparo de uma espingarda de mola para ângulos de lançamento de 30°, 45° e 60°. A velocidade inicial v_0 é aproximadamente a mesma nos três casos. Os alcances horizontais são aproximadamente iguais para os ângulos de 30° e 60°, e para o ângulo de 45° o alcance é o maior de todos. Você é capaz de provar que para o mesmo v_0 o alcance para um ângulo α_0 é igual ao alcance para um ângulo $90° - \alpha_0$?

ATENÇÃO Altura e alcance de um projétil Não recomendamos a memorização das fórmulas anteriores para h e para R. Elas se aplicam apenas nas circunstâncias especiais que foram descritas. Em particular, a expressão de R vale *somente* quando o ponto de lançamento e o ponto de retorno ao solo estão no mesmo nível. Existem muitos problemas no final deste capítulo para os quais as referidas fórmulas *não* se aplicam.

Exemplo 3.9

ALTURAS INICIAIS E FINAIS DIFERENTES Você lança uma bola de sua janela a 8,0 m acima do solo. Quando a bola deixa sua mão, ela se move a 10,0 m/s formando um ângulo de 20° abaixo da horizontal. A que distância horizontal de sua janela a bola atinge o solo? Despreze a resistência do ar.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: em nossos cálculos do alcance horizontal nos exemplos 3.7 e 3.8, tentamos encontrar a coordenada horizontal de um projétil, quando ele está a um dado valor de y. A diferença neste caso é que esse valor de y *não* é igual à coordenada y inicial.

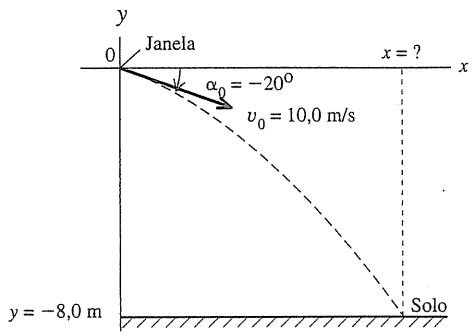


Figura 3.25 Nossa representação gráfica desse problema.

PREPARAR: novamente tomamos o eixo *Ox* como horizontal e o eixo *Oy* como orientado de baixo para cima e colocamos a origem das coordenadas no ponto em que a bola deixa a sua mão (Figura 3.25). Temos $v_0 = 10{,}0$ m/s e $\alpha_0 = -20°$; o ângulo é negativo porque a velocidade inicial está abaixo da horizontal. Nossa incógnita é o valor de x no ponto em que a bola atinge o solo – ou seja, quando $y = -8{,}0$ m. Como as alturas inicial e final da bola são diferentes, não podemos simplesmente usar a expressão para o alcance horizontal encontrado no Exemplo 3.8. Em vez disso, primeiro usamos a Equação (3.21) para determinar o tempo t, quando a bola atinge $y = -8{,}0$ m, e depois calculamos o valor de x nesse instante usando a Equação (3.20).

EXECUTAR: para determinar t, reescrevemos a Equação (3.21) na forma padronizada de uma equação do segundo grau em t:

$$\frac{1}{2}gt^2 - (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t + y = 0$$

As raízes dessa equação são:

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 \pm \sqrt{(-v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)^2 - 4\left(\frac{1}{2}g\right)y}}{2\left(\frac{1}{2}g\right)}$$

$$= \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 \pm \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha_0 - 2gy}}{g}$$

$$= \frac{\left[\begin{array}{l}(10{,}0\text{ m/s})\operatorname{sen}(-20°) \\ \pm\sqrt{(10{,}0\text{ m/s})^2\operatorname{sen}^2(-20°) - 2(9{,}80\text{ m/s}^2)(-8{,}0\text{ m})}\end{array}\right]}{9{,}80\text{ m/s}^2}$$

$$= -1{,}7\text{ s} \quad \text{ou} \quad 0{,}98\text{ s}$$

Podemos descartar a raiz negativa, visto que ela se refere a um instante anterior a bola deixar sua mão. A raiz positiva indica que a bola leva 0,98 s para atingir o solo. Pela Equação (3.20), a coordenada x da bola nesse instante é:

$$x = (v_0 \cos\alpha_0)t = (10{,}0\text{ m/s})[\cos(-20°)](0{,}98\text{ s})$$
$$= 9{,}2\text{ m}$$

A bola atinge o solo a uma distância horizontal de 9,2 m da sua janela.

AVALIAR: a raiz $t = -1{,}7$ s é exemplo de uma solução 'fictícia' para uma equação em segundo grau. Reveja o Exemplo 2.8 na Seção 2.5, onde abordamos isso.

A escolha da origem determinou as alturas inicial e final em $y_0 = 0$ e $y = -8{,}0$ m. É possível usar as equações (3.16) e (3.18) para mostrar que você obtém as mesmas respostas para t e x, se escolher como origem o ponto do solo diretamente abaixo do ponto em que a bola deixa sua mão?

Exemplo 3.10

O GUARDA DO ZOOLÓGICO E O MACACO Um macaco escapa do jardim zoológico e se refugia em uma árvore. O guarda do zoológico tenta em vão fazê-lo descer e atira um dardo tranqüilizante na direção do macaco (Figura 3.26). O esperto animal larga o galho no mesmo instante em que o dardo é disparado. Mostre que o dardo *invariavelmente* atinge o macaco, qualquer que seja a velocidade com que o dardo sai da boca da arma (desde que seja suficiente para o dardo chegar ao macaco antes de ele atingir o solo).

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: neste exemplo, temos *dois* corpos em movimento de projétil: o dardo do tranqüilizante e o macaco. Ambos possuem posição inicial e velocidade inicial diferentes, mas assumem o movimento de um projétil no mesmo instante. Para demonstrar que o dardo atinge o macaco, temos que provar que, em algum instante, o macaco e o dardo possuem a mesma coordenada x e a mesma coordenada y.

PREPARAR: fazemos a escolha usual das direções de x e y e colocamos a origem das coordenadas na saída da boca da arma com o dardo tranqüilizante (Figura 3.26). Primeiro usaremos a Equação (3.20) para encontrar o instante t em que as coordenadas x_{macaco} e x_{dardo} (x_M e x_D, respectivamente) são as mesmas. Depois usaremos a Equação (3.21) para verificar se y_{macaco} e y_{dardo} (y_M e y_D, respectivamente) também são iguais nesse instante; se forem, o dardo atingirá o macaco.

EXECUTAR: o macaco cai verticalmente para baixo, de modo que *sempre* $x_M = d$. Para o dardo, usando a Equação (3.20): $x_D = (v_0 \cos\alpha_0)t$. Quando essas coordenadas x são iguais, $d = (v_0 \cos\alpha_0)t$ ou:

$$t = \frac{d}{v_0 \cos\alpha_0}$$

Para mostrar que o dardo realmente atinge o macaco, deve ser verdadeiro que $y_M = y_D$ nesse instante. O macaco está em queda livre em uma dimensão; sua posição em qualquer instante é dada pela Equação (2.12), fazendo-se as mudanças de símbolos necessárias. A Figura 3.26 mostra que a altura inicial do macaco é $d\,\text{tg}\alpha_0$ (o lado oposto ao ângulo α_0 de um triângulo retângulo cujo lado adjacente é d), logo

$$y_{\text{macaco}} = d\,\text{tg}\alpha_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

Para o dardo, usamos a Equação (3.21):

$$y_{\text{dardo}} = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Logo, observamos que, se $d\,\text{tg}\alpha_0 = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t$ no instante em que as duas coordenadas x são iguais, então $y_M = y_D$, e temos um golpe. Para provar que isso ocorre substituímos t por $d/(v_0 \cos\alpha_0)$ no instante em que $x_M = x_D$. Com certeza, encontraremos que:

$$(v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)\frac{d}{v_0 \cos\alpha_0} = d\,\text{tg}\alpha_0$$

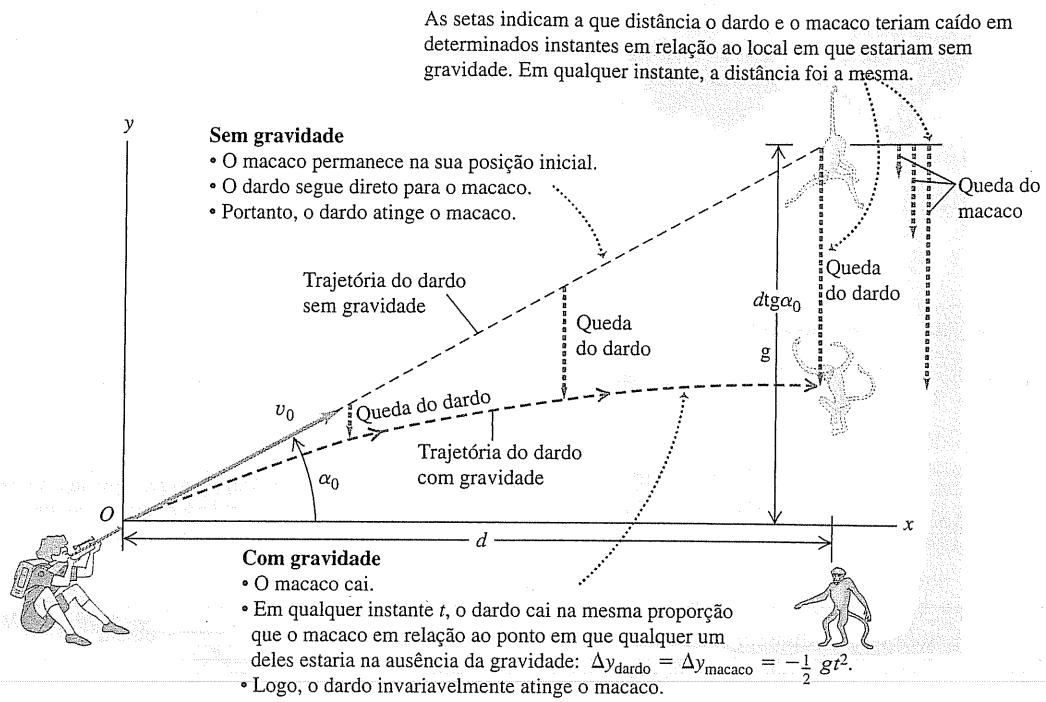
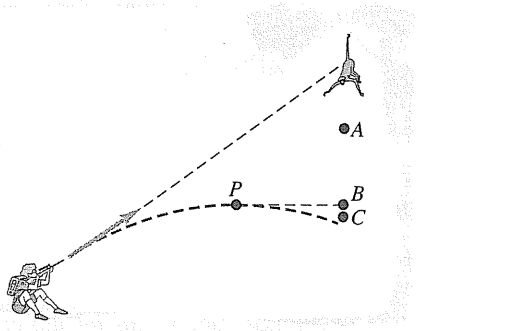


Figura 3.26 O dardo tranqüilizante atinge o macaco em queda.

AVALIAR: provamos que no instante em que as coordenadas x são iguais, as coordenadas y também são iguais; logo, um dardo apontado para a posição inicial do macaco sempre o atingirá, qualquer que seja o valor de v_0. Esse resultado também não depende do valor de g, a aceleração da gravidade. Se não houvesse gravidade ($g = 0$), o macaco ficaria em repouso e o dardo seguiria uma trajetória retilínea para atingi-lo. Com a gravidade, ambos 'caem' a mesma distância $\left(\frac{1}{2}gt^2\right)$ abaixo da posição correspondente a $g = 0$ e, ainda assim, o dardo atinge o macaco (Figura 3.26).

Teste sua compreensão da Seção 3.3 No Exemplo 3.10, suponha que o dardo de tranqüilizante possua uma velocidade relativamente baixa ao ser disparado, de modo que atinge uma altura máxima em um ponto P antes de atingir o macaco, como mostra a figura. Quando o dardo está na posição P, o macaco estará i) no ponto A (acima de P), ii) no ponto B (na mesma altura de P) ou iii) no ponto C (abaixo de P)? Despreze a resistência do ar.



3.4 Movimento circular

Quando uma partícula se move ao longo de uma trajetória curva, a direção de sua velocidade varia. Como vimos na Seção 3.2, isso significa que a partícula *deve* possuir um componente de aceleração perpendicular à trajetória, mesmo quando a velocidade escalar for constante (Figura 3.11b). Nesta seção calcularemos a aceleração para este importante caso especial de movimento circular.

Movimento circular uniforme

Quando uma partícula se move ao longo de uma circunferência com *velocidade escalar constante*, dizemos que ela descreve um **movimento circular uniforme**. Um carro percorrendo uma curva de raio constante com velocidade constante, um satélite movendo-se em uma órbita circular e um patinador descrevendo uma circunferência em uma pista de gelo com velocidade constante são exemplos de movimento circular uniforme (Figura 3.27; compare à Figura 3.12). Não existe nenhum componente da aceleração paralelo (tangente) à trajetória; caso houvesse, a velocidade escalar seria variável. O vetor da aceleração é perpendicular (normal) à trajetória, que produz variação da direção da velocidade, é relacionado de forma simples com a velocidade da partícula e o raio do círculo. Nosso próximo objetivo é deduzir essa relação.

A Figura 3.28a mostra a trajetória de uma partícula que se move com velocidade constante ao longo de uma circunferência de raio R com centro em O. A partícula se

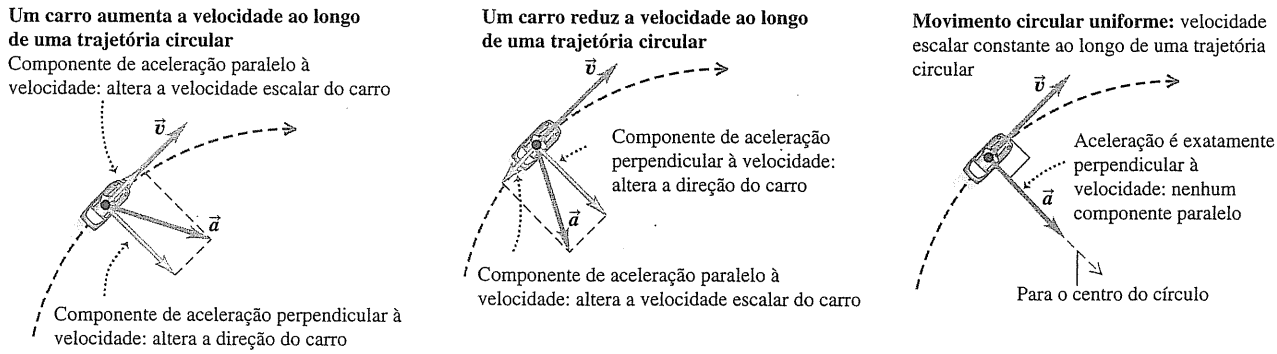


Figura 3.27 Um carro em movimento circular uniforme. A velocidade escalar é constante e a aceleração é orientada para o centro da trajetória circular.

move de P_1 a P_2 em um intervalo de tempo Δt. A variação do vetor velocidade $\Delta\vec{v}$ durante esse intervalo de tempo é indicada na Figura 3.28b.

Os ângulos designados por $\Delta\phi$ nas figuras 3.28a e 3.28b são iguais porque $\vec{v}_1$ é perpendicular à linha OP_1 e $\vec{v}_2$ é perpendicular à linha OP_2. Portanto, os triângulos nas figuras 3.28a e 3.28b são *semelhantes*. As razões entre lados correspondentes são iguais, logo

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v_1} = \frac{\Delta s}{R} \qquad \text{ou} \qquad |\Delta\vec{v}| = \frac{v_1}{R}\Delta s$$

O módulo a_m da aceleração média durante o intervalo de tempo Δt é, portanto:

$$a_m = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

O módulo a da aceleração *instantânea* $\vec{a}$ no ponto P_1 é o limite dessa expressão quando o ponto P_2 tende a se superpor ao ponto P_1:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Porém, o limite $\Delta s/\Delta t$ é a velocidade escalar v_1 no ponto P_1. Mas P_1 pode ser qualquer ponto da trajetória, de modo que podemos retirar o índice inferior e designar por v a velocidade escalar em qualquer ponto. Logo

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} \qquad (3.28)$$

(movimento circular uniforme)

Introduzimos um índice inferior 'rad' para lembrar que a direção da aceleração instantânea em cada ponto da trajetória é sempre orientada radialmente para dentro do círculo, em direção ao seu centro. Como a velocidade escalar é constante, a aceleração é sempre perpendicular ao vetor velocidade instantânea. Isso é indicado na Figura 3.28c; compare-a com a Figura 3.27.

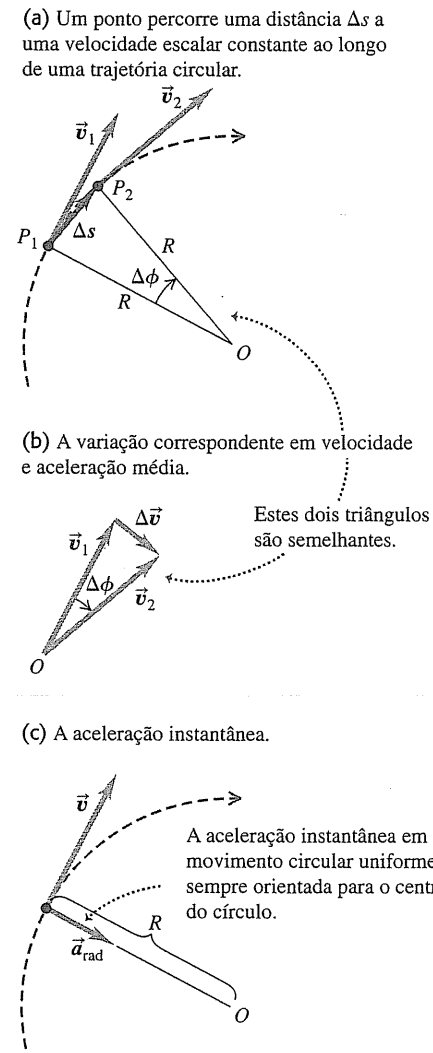
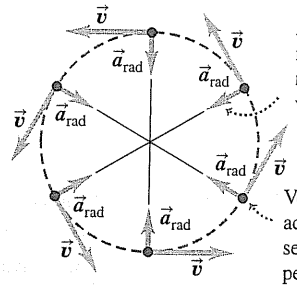


Figura 3.28 Ache a variação da velocidade $\Delta\vec{v}$, a aceleração média $\vec{a}_m$ e a aceleração instantânea $\vec{a}_{rad}$ para uma partícula que se move em círculo a uma velocidade constante.

Concluímos que, *no movimento circular uniforme, o módulo da aceleração instantânea é igual ao quadrado da velocidade escalar v dividido pelo raio R do círculo. Sua*

(a) Movimento circular uniforme.



(b) Movimento de um projétil.
Velocidade e aceleração são perpendiculares somente no pico da trajetória.

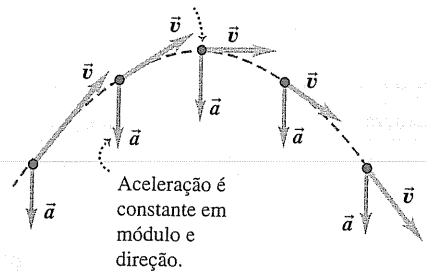


Figura 3.29 Aceleração e velocidade (a) para uma partícula em movimento circular uniforme e (b) para um projétil sem nenhuma resistência do ar.

direção é perpendicular a $\vec{v}$ e aponta para dentro do círculo ao longo do raio.

Como a aceleração é sempre orientada para dentro do círculo, ela é também chamada de **aceleração centrípeta**. A palavra '*centrípeta*' deriva do grego e significa 'que se dirige para o centro'. A Figura 3.29a mostra o vetor velocidade e o vetor aceleração em diversos pontos da trajetória de uma partícula que se move com velocidade constante em um círculo.

ATENÇÃO Movimento circular uniforme *versus* movimento de um projétil A aceleração em movimento circular uniforme possui semelhanças com a aceleração do movimento de um projétil, desprezando-se a resistência do ar, mas também há importantes diferenças. Tanto no movimento circular uniforme (Figura 3.29a) quanto no movimento de um projétil (Figura 3.29b), o *módulo* da aceleração é o mesmo em qualquer instante. Entretanto, no movimento circular uniforme a *direção* de $\vec{a}$ varia continuamente, de modo que sempre está orientada para o centro do círculo. (No topo do círculo, a aceleração aponta para baixo; no fundo do círculo, a aceleração aponta para cima.) No movimento de um projétil, por outro lado, a direção de $\vec{a}$ permanece a mesma em qualquer instante.

Podemos também expressar o módulo da aceleração em um movimento circular uniforme em termos do **período** T do movimento, o tempo que a partícula leva para fazer uma revolução (uma volta completa em torno do círculo). Em um intervalo de tempo T, a partícula se desloca a uma distância igual ao comprimento da circunferência $2\pi R$, de modo que sua velocidade escalar é:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \tag{3.29}$$

Quando substituímos esse resultado na Equação (3.28), obtemos a expressão alternativa:

$$a_{\text{rad}} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \tag{3.30}$$

(movimento circular uniforme)

Exemplo 3.11

ACELERAÇÃO CENTRÍPETA EM UMA ESTRADA CURVA O carro esportivo Aston Martin V8 Vantage possui 'aceleração lateral' de $0{,}96g$, o que equivale a $(0{,}96)\ (9{,}8\ \text{m/s}^2) = 9{,}4\ \text{m/s}^2$. Isso representa a aceleração centrípeta máxima sem que o carro deslize para fora de uma trajetória circular. Se o carro se desloca a uma velocidade constante de 40 m/s (89 mi/h ou cerca de 144 km/h), qual é o raio mínimo da curva que ele pode aceitar? (Suponha que a curva não possua inclinação lateral.)

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como o carro está se movendo a uma velocidade escalar constante ao longo de uma curva que é um segmento de um círculo, podemos aplicar as noções do movimento circular uniforme.

PREPARAR: usamos a Equação (3.28) para determinar a incógnita R (o raio da curva) em termos de uma dada aceleração centrípeta a_{rad} e velocidade escalar v.

EXECUTAR: foram fornecidas a_{rad} e v; logo, usando a Equação (3.28) para R:

$$R = \frac{v^2}{a_{\text{rad}}} = \frac{(40\ \text{m/s})^2}{9{,}4\ \text{m/s}^2} = 170\ \text{m}\ (560\ \text{pés})$$

AVALIAR: nosso resultado demonstra que o raio R requerido da curva é proporcional ao *quadrado* da velocidade escalar. Logo, mesmo uma pequena redução nessa velocidade pode tornar R substancialmente menor. Por exemplo, uma redução de 20% em v (de 40 m/s para 32 m/s) provoca uma redução de 36% em R (de 170 m para 109 m).

Quando a curva possui inclinação lateral, o raio pode ser menor, conforme veremos no Capítulo 5.

Exemplo 3.12

ACELERAÇÃO CENTRÍPETA EM UM PARQUE DE DIVERSÕES Em um brinquedo de um parque de diversões, os passageiros viajam com velocidade constante em um círculo de raio 5,0 m. Eles fazem uma volta completa no círculo em 4,0 s. Qual é a aceleração deles?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a velocidade é constante, de modo que se trata de um problema envolvendo um movimento circular uniforme.

PREPARAR: podemos usar a Equação (3.30) para calcular a aceleração, pois são dados $R = 5{,}0$ m e o período $T = 4{,}0$ s. Como alternativa, podemos calcular primeiro a velocidade v pela Equação (3.29) e depois acharmos a aceleração pela Equação (3.28).

EXECUTAR: pela Equação (3.30), temos:

$$a_{\text{rad}} = \frac{4\pi^2(5{,}0\text{ m})}{(4{,}0\text{ s})^2} = 12\text{ m/s}^2$$

Vamos conferir essa resposta usando a Equação (3.28), após calcular a velocidade v. Pela Equação (3.29), a velocidade escalar é igual ao comprimento da circunferência dividido pelo período

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(5{,}0\text{ m})}{4{,}0\text{ s}} = 7{,}9\text{ m/s}$$

A aceleração centrípeta é, então:

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} = \frac{(7{,}9\text{ m/s})^2}{5{,}0\text{ m}} = 12\text{ m/s}^2$$

Felizmente, obtemos o mesmo resultado para a_{rad}, com ambas as abordagens.

AVALIAR: como no Exemplo 3.11, a direção de $\vec{a}$ aponta sempre para o centro do círculo. O módulo de $\vec{a}$ é maior do que g, a aceleração da gravidade, de modo que este brinquedo não é destinado a quem sofre do coração. (Algumas montanhas-russas submetem seus passageiros a acelerações de até 4 g.)

Movimento circular não uniforme

Consideramos nesta seção que a velocidade escalar da partícula permanecia constante durante o movimento. Quando esta velocidade varia, a partícula descreve um **movimento circular não uniforme**. Um exemplo é o movimento do carro de uma montanha-russa, que diminui de velocidade quando sobe e aumenta de velocidade quando desce em torno de uma volta vertical. Em um movimento circular não uniforme, a Equação (3.28) ainda fornece a componente *radial* da aceleração, $a_{\text{rad}} = v^2/R$, que é sempre *perpendicular* à velocidade instantânea e aponta para o centro do círculo. Porém, como a velocidade escalar v da partícula possui diversos valores em diferentes pontos da trajetória, o valor de a_{rad} não é constante. A aceleração radial (centrípeta) assume o valor máximo no ponto da circunferência para o qual a velocidade escalar possui seu valor máximo.

Em um movimento circular não uniforme existe também um componente da aceleração à velocidade instantânea. Trata-se do componente $a_{\parallel}$ mencionado na Seção 3.2, que será agora designado por a_{tg} para enfatizar que ele é *tangente* à circunferência. Pela discussão no final da Seção 3.2, vemos que o componente tangencial da aceleração a_{tg} é dado pela taxa de variação da *velocidade escalar*. Logo

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} \quad \text{e} \quad a_{\text{tg}} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \tag{3.31}$$

(movimento circular não uniforme)

O vetor aceleração de uma partícula que se desloca em um círculo com velocidade escalar variável é dado pela soma vetorial do componente tangencial da aceleração com o componente radial da aceleração. O componente tangencial da aceleração possui direção paralela à direção do vetor velocidade, com o mesmo sentido deste vetor, quando a velocidade escalar aumenta, e sentido contrário quando a velocidade escalar diminui (Figura 3.30).

No movimento circular *uniforme* não existe componente tangencial da aceleração, mas o componente radial é dado pelo módulo de $d\vec{v}/dt$.

ATENÇÃO Movimento circular uniforme *versus* não uniforme Note que estas duas grandezas:

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} \quad \text{e} \quad \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|$$

não são semelhantes. A primeira grandeza, igual à aceleração tangencial, é a razão da variação da velocidade escalar; corresponde a zero sempre que uma partícula se move com velocidade escalar constante, mesmo que sua direção de movimento varie (tal como no movimento circular *uniforme*). A segunda é o módulo da aceleração do vetor; corresponde a zero somente quando o *vetor* aceleração da partícula é zero — ou seja, quando a partícula se move em linha reta com velocidade escalar constante. No movimento circular *uniforme*, $|d\vec{v}/dt| = a_{\text{rad}} = v^2/r$; no movimento circular *não uniforme*, também há um componente tangencial de aceleração, de modo que $|d\vec{v}/dt| = \sqrt{a_{\text{rad}}^2 + a_{\text{tg}}^2}$.

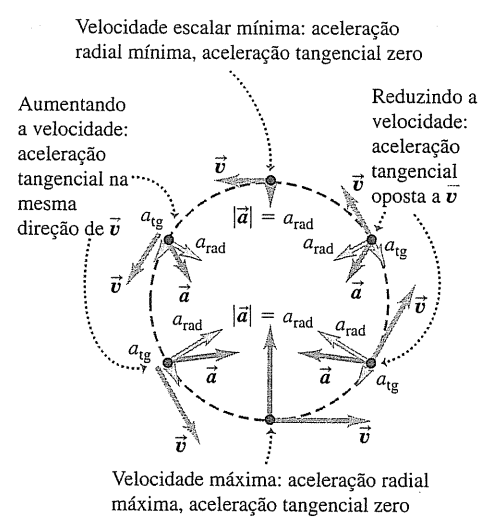


Figura 3.30 Partícula movendo-se em um círculo vertical, como um carro de uma montanha-russa, com velocidade variável.

Teste sua compreensão da Seção 3.4 Suponha que a partícula na Figura 3.30 possua na parte de baixo do círculo uma aceleração quatro vezes maior do que no topo do círculo. Se comparado à sua velocidade escalar no topo do círculo, sua velocidade escalar na parte de baixo do círculo é i) $\sqrt{2}$ vezes maior; ii) 2 vezes maior; iii) $2\sqrt{2}$ vezes maior; iv) 4 vezes maior; ou v) 16 vezes maior. ∎

3.5 Velocidade relativa

Certamente você já deve ter observado que um carro que se desloca para a frente parece deslocar-se para trás quando você o ultrapassa. Em geral, quando dois observadores medem a velocidade de um objeto que se move, eles obtêm resultados diferentes se um observador se move em relação ao outro. A velocidade medida por um dos observadores denomina-se **velocidade relativa** ao observador considerado ou simplesmente velocidade relativa. A Figura 3.31 mostra uma situação em que a compreensão da velocidade relativa é extremamente importante.

Inicialmente, estudaremos a velocidade relativa ao longo de uma linha reta e depois generalizaremos para a velocidade relativa em um plano.

Velocidade relativa em uma dimensão

Uma mulher caminha com velocidade de 1,0 m/s no interior de um trem que se move com velocidade de 3,0 m/s (Figura 3.32a). Qual é a velocidade da mulher? Trata-se de uma questão bastante simples, mas que não possui uma resposta única. Em relação a um passageiro sentado no trem, ela se move a 1,0 m/s. Uma pessoa parada em uma bicicleta ao lado do trem vê a mulher deslocar-se com velocidade 1,0 m/s + 3,0 m/s = 4,0 m/s. Um observador em outro trem movendo-se em sentido oposto daria ainda outra resposta. É necessário especificar a velocidade *relativa* a um observador particular. A velocidade relativa da mulher em relação ao trem é 1,0 m/s, sua velocidade relativa ao ciclista é 4,0 m/s e assim por diante. Cada observador equipado com uma régua e um cronômetro em princípio constitui um **sistema de referência**. Logo, um sistema de referência é um sistema de coordenadas acrescido de uma escala de tempo.

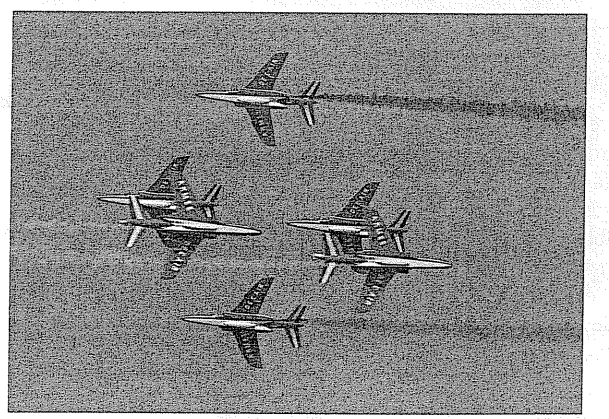


Figura 3.31 Os pilotos de uma exibição aérea enfrentam um problema complicado de movimento relativo. Eles devem considerar a velocidade relativa do ar sobre as asas (para que a força de sustentação atinja valores apropriados), a velocidade relativa entre os aviões (para evitar colisões) e a velocidade relativa em relação ao público (para que eles possam ser vistos).

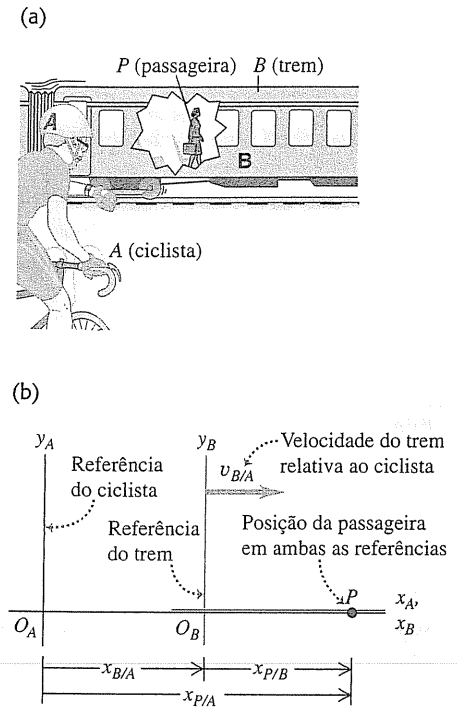


Figura 3.32 (a) A mulher caminhando no interior do trem. (b) A posição da mulher relativa ao sistema de referência do ciclista e ao sistema de referência do trem.

Vamos designar por A o sistema de referência do ciclista e por B o sistema de referência do trem. Para um movimento retilíneo, a posição de um ponto P em relação ao sistema de referência A é dada pela distância $x_{P/A}$ (posição de P em relação à A), e a posição em relação ao sistema de referência B é dada pela distância $x_{P/B}$ (Figura 3.32b). A distância entre a origem de A e a origem de B (posição de B em relação à A) é $x_{B/A}$. Podemos ver pela Figura 3.32b que

$$x_{P/A} = x_{P/B} + x_{B/A} \tag{3.32}$$

Isto nos informa que a distância total entre a origem de A e o ponto P é a distância entre a origem de B e o ponto P somado à distância entre a origem de A e a origem de B.

A velocidade relativa de P em relação à A, designada por $v_{P/A\text{-}x}$, é a derivada de $x_{P/A}$ em relação ao tempo. As demais velocidades são obtidas de modo análogo. Logo, derivando a Equação (3.32), obtemos a seguinte relação entre as várias velocidades:

$$\frac{dx_{P/A}}{dt} = \frac{dx_{P/B}}{dt} + \frac{dx_{B/A}}{dt} \quad \text{ou}$$

$$v_{P/Ax} = v_{P/Bx} + v_{B/Ax} \tag{3.33}$$

(velocidade relativa ao longo de uma linha reta)

Voltando ao caso da mulher caminhando no trem na Figura 3.32, A é o sistema de referência do ciclista, B é o sistema de referência do trem e o ponto P representa a mulher. Usando a notação anterior, temos

$$v_{P/Bx} = +1{,}0\ \text{m/s} \qquad v_{B/Ax} = +3{,}0\ \text{m/s}$$

Pela Equação (3.33), a velocidade da mulher $v_{P/A}$ relativa ao ciclista é dada por

$$v_{P/Ax} = +1{,}0\ \text{m/s} + 3{,}0\ \text{m/s} = +4{,}0\ \text{m/s}$$

como já sabíamos.

Neste exemplo, as duas velocidades são orientadas da esquerda para a direita, e implicitamente adotamos esse sentido como positivo. Caso a mulher caminhasse para a *esquerda* em relação ao trem, então $v_{P/Bx} = -1{,}0$ m/s, e sua velocidade relativa ao ciclista seria $v_{P/Ax} = -1{,}0$ m/s + 3,0 m/s = +2,0 m/s. A soma indicada na Equação (3.33) deve ser encarada sempre como uma soma algébrica, e qualquer termo pode ser negativo.

Quando a mulher olha para fora da janela, o ciclista parado no solo parece se mover para trás; podemos designar a velocidade relativa do ciclista em relação à mulher por $v_{A/Px}$. É claro que ela é igual e contrária a $v_{P/Ax}$. Em geral, quando A e B são dois pontos ou sistemas de referência quaisquer:

$$v_{A/Bx} = -v_{B/Ax} \tag{3.34}$$

Estratégia para a solução de problemas 3.2

VELOCIDADE RELATIVA

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* quando você se deparar com a frase 'velocidade relativa a' ou 'velocidade em relação a', é provável que os conceitos de velocidade relativa sejam aplicáveis.

PREPARAR *o problema:* classifique cada sistema de referência do problema. Cada corpo em movimento possui o seu próprio sistema de referência; além disso, você quase sempre terá que incluir o sistema de referência da superfície terrestre. (Enunciados tais como 'O carro está viajando rumo ao norte a 90 km/h' implicitamente se referem à velocidade do carro relativa à superfície terrestre.) Use as classificações para identificar a incógnita. Por exemplo, se você quer determinar a velocidade x de um carro (C) em relação a um ônibus (B), sua incógnita é $v_{C/Bx}$.

EXECUTAR *a solução:* solucione a incógnita usando a Equação (3.33). (Se as velocidades não estão orientadas na mesma direção, será preciso usar a forma vetorial dessa equação, derivada posteriormente nesta seção.) É importante observar a ordem dos índices inferiores duplos na Equação (3.33): $v_{A/Bx}$ sempre denota 'velocidade x de A relativa a B'. Esses índices obedecem a um interessante tipo de álgebra, conforme mostra a Equação (3.33). Encarando os índices como frações, a fração do lado esquerdo seria o *produto* das frações do lado direito: $P/A = (P/B)(B/A)$. Trata-se de uma regra útil que você pode usar quando aplicar a Equação (3.33) a qualquer número de sistemas de referência. Por exemplo, se houver três diferentes sistemas de referência A, B e C, podemos escrever imediatamente:

$$v_{P/Ax} = v_{P/Cx} + v_{C/Bx} + v_{B/Ax}$$

AVALIAR *sua resposta:* esteja alerta para sinais negativos extraviados na sua resposta. Se a incógnita é a velocidade x de um carro relativa à de um ônibus ($v_{C/Bx}$), tome cuidado para não se confundir e calcular acidentalmente a velocidade x do *ônibus* relativa à do *carro* ($v_{B/Cx}$). Se cometer esse erro, poderá desfazê-lo usando a Equação (3.34).

Exemplo 3.13

VELOCIDADE RELATIVA EM UMA ESTRADA RETILÍNEA

Você está dirigindo do sul para o norte por uma estrada retilínea de duas pistas com velocidade constante de 88 km/h. Um caminhão se aproxima de você em sentido contrário com velocidade constante de 104 km/h (na outra pista, felizmente). a) Qual a velocidade do caminhão em relação a você? b) Qual sua velocidade em relação ao caminhão? c) Como as velocidades relativas variam depois que o caminhão cruzar com você?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este exemplo se refere a velocidades relativas ao longo de uma linha reta.

PREPARAR: considere V como sendo você, C o caminhão e T a superfície da Terra, e tome o sentido Sul-Norte como positivo (Figura 3.33). Então, a sua velocidade em relação à Terra é $v_{V/Tx}$ = +88 km/h. O caminhão se aproxima de você, logo ele está se movendo do norte para o sul, fornecendo $v_{C/Tx} = -104$ km/h. A incógnita na parte a) é $v_{C/Vx}$; a incógnita na parte b) é $v_{V/Cx}$. Acharemos ambas as incógnitas usando a Equação (3.33) para velocidade relativa.

EXECUTAR: a) para determinar $v_{C/Vx}$, primeiro escrevemos a Equação (3.33) para os três sistemas de referência V, C e T e depois rearranjamos como:

$$v_{C/Tx} = v_{C/Vx} + v_{V/Tx}$$

$$v_{C/Vx} = v_{C/Tx} - v_{V/Tx}$$

$$= -104\ \text{km/h} - 88\ \text{km/h} = -192\ \text{km/h}$$

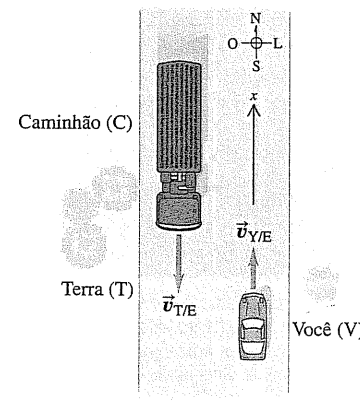


Figura 3.33 Sistemas de referência para você e para o caminhão.

O caminhão se desloca a 192 km/h no sentido Norte-Sul em relação a você.

b) Pela Equação (3.34),

$$v_{V/Cx} = -v_{C/Vx} = -(-192\ \text{km/h}) = +192\ \text{km/h}$$

Você se desloca a 192 km/h no sentido Sul-Norte em relação ao caminhão.

c) As velocidades relativas não variam de forma alguma depois que o caminhão cruzar com você. As posições relativas entre os corpos não importam no cálculo da velocidade relativa. A velocidade relativa do caminhão em relação a você continua sendo de 192 km/h no sentido Norte-Sul, mas agora ele se afasta de você em vez de se aproximar.

AVALIAR: para conferir sua resposta na parte b), tente usar a Equação (3.33) diretamente na forma $v_{V/Cx} = v_{V/Tx} + v_{T/Cx}$. (Lembre-se de que a velocidade x da Terra em relação ao caminhão é o oposto da velocidade x do caminho em relação à Terra: $v_{T/Cx} = -v_{C/Tx}$.) Você obtém o mesmo resultado?

Velocidade relativa em duas ou três dimensões

Podemos estender o conceito de velocidade relativa para incluir movimento em um plano ou no espaço mediante o uso da regra da soma vetorial para as velocidades. Suponha que a mulher na Figura 3.32a, em vez de se mover ao longo do eixo do trem, esteja se movendo lateralmente dentro do trem, com velocidade de 1,0 m/s (Figura 3.34a). Podemos descrever a posição da mulher P em relação a dois sistemas de referência: o sistema A para o observador parado em solo e B para o trem em movimento. Porém, em vez da coordenada x, usamos o vetor posição $\vec{r}$ porque agora o problema envolve duas dimensões. Então, conforme mostra a Figura 3.34b,

$$\vec{r}_{P/A} = \vec{r}_{P/B} + \vec{r}_{B/A} \tag{3.35}$$

Analogamente ao método usado antes, derivamos essa equação para obter uma relação entre as diversas velocidades relativas; a velocidade de P relativa a A é dada por $\vec{v}_{P/A} = d\vec{r}_{P/A}/dt$ e assim por diante para as outras velocidades. Obtemos

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A} \tag{3.36}$$

(velocidade relativa no espaço)

A Equação (3.36) é conhecida como a *transformação de velocidade de Galileu*, que relaciona a velocidade de um corpo P em relação ao sistema de referência A e sua velocidade em relação ao sistema de referência B ($\vec{v}_{P/A}$ e $\vec{v}_{P/B}$, respectivamente) com a velocidade do sistema de referência B em relação ao sistema de referência A ($\vec{v}_{B/A}$). Quando todas as três velocidades relativas são paralelas à mesma linha reta, então a Equação (3.36) se reduz à Equação (3.33) para os componentes da velocidade ao longo dessa linha.

Se a velocidade relativa do trem em relação ao solo possui módulo $v_{B/A} = 3{,}0$ m/s e a velocidade relativa da mulher em relação ao trem possui módulo $v_{P/B} = 1{,}0$ m/s, então seu vetor velocidade relativa $\vec{v}_{P/A}$ em relação ao solo é obtido conforme indicado na Figura 3.34c. O teorema de Pitágoras fornece

$$v_{P/A} = \sqrt{(3{,}0\ \text{m/s})^2 + (1{,}0\ \text{m/s})^2} = \sqrt{10\ \text{m}^2/\text{s}^2} = 3{,}2\ \text{m/s}$$

Também podemos observar nesse diagrama que a *direção* do vetor velocidade relativa da mulher em relação ao solo faz um ângulo ϕ com o vetor velocidade relativa do trem $\vec{v}_{B/A}$, onde

$$\text{tg}\,\phi = \frac{v_{P/B}}{v_{B/A}} = \frac{1{,}0\ \text{m/s}}{3{,}0\ \text{m/s}} \qquad \text{e} \qquad \phi = 18°$$

Como no caso de um movimento retilíneo, temos a seguinte regra geral válida em *qualquer* caso em que A e B são dois pontos ou sistemas de referência,

$$\vec{v}_{A/B} = -\vec{v}_{B/A} \tag{3.37}$$

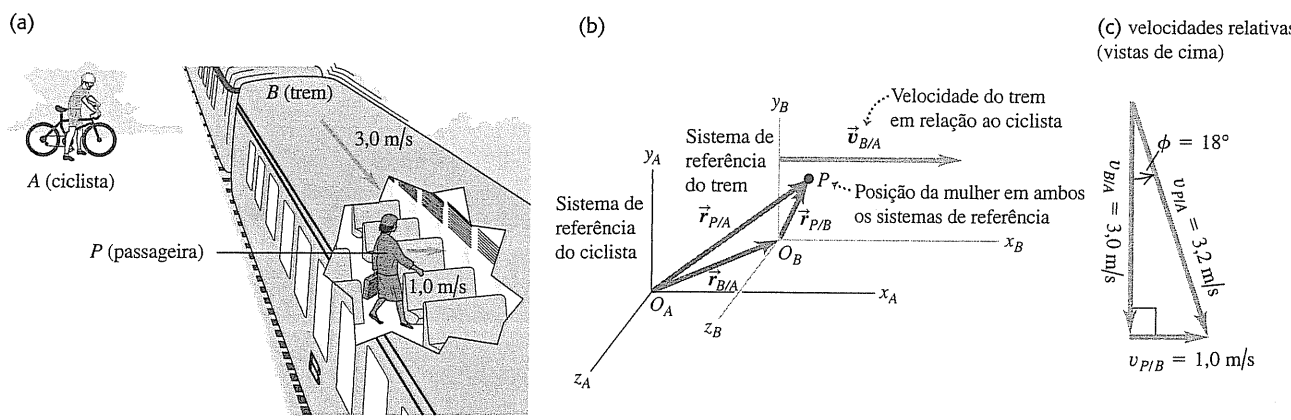


Figura 3.34 (a) Uma mulher andando de um lado a outro do trem. (b) Posição da mulher em relação ao sistema de referência do ciclista e ao sistema de referência do trem. c) Diagrama vetorial para a velocidade da mulher em relação ao solo (o sistema de referência do ciclista), $\vec{v}_{P/A}$.

A velocidade relativa da mulher em relação ao trem é igual e contrária à velocidade relativa do trem em relação à mulher e assim por diante.

No início do século XX, Albert Einstein demonstrou na sua especial teoria da relatividade que a composição das velocidades relativas, dada pela Equação (3.36), deve ser modificada quando a velocidade escalar se aproxima da velocidade da luz, designada por c. Ocorre que, se a passageira na Figura 3.32a pudesse andar na direção do eixo do trem a $0{,}30c$ e o trem se movesse a $0{,}90c$, então sua velocidade escalar relativa ao solo não seria $1{,}20c$, mas $0{,}94c$; nada pode se mover mais rapidamente do que a luz! Retomaremos a teoria da relatividade no Capítulo 37.

Exemplo 3.14

VOANDO COM VENTO ORTOGONAL A bússola de um avião mostra que ele se desloca do sul para o norte, e seu indicador de velocidade do ar mostra que ele está se movendo no ar com velocidade igual a 240 km/h. Se existe um vento de 100 km/h de oeste para leste, qual é a velocidade do avião em relação à Terra?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema envolve as velocidades em duas dimensões (sentido Norte e sentido Leste), de modo que se trata de um problema sobre velocidade relativa usando vetores.

PREPARAR: encontraremos o módulo e a direção da velocidade do avião (P) em relação ao ar (A). Encontaremos também o módulo e a direção da velocidade do vento, que é a velocidade do ar (A) em relação à Terra (T).

$$\vec{v}_{P/A} = 240 \text{ km/h} \qquad \text{sul para norte}$$

$$\vec{v}_{A/T} = 100 \text{ km/h} \qquad \text{leste para leste}$$

Nossas variáveis-alvo são o módulo e direção da velocidade do avião (P) em relação à Terra (T), $\vec{v}_{P/T}$. Nós as encontraremos utilizando a Equação (3.36).

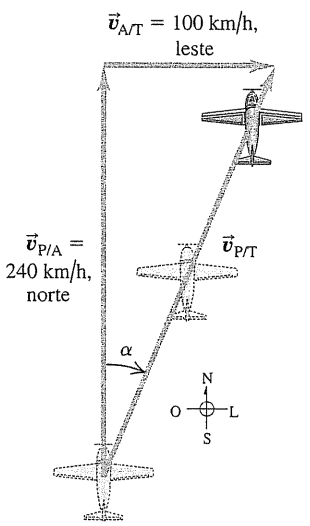


Figura 3.35 O avião vai do sul para o norte, mas o vento sopra de oeste para leste, produzindo a velocidade relativa resultante $\vec{v}_{P/T}$ do avião em relação à Terra.

EXECUTAR: usando a Equação (3.36), temos:

$$\vec{v}_{P/T} = \vec{v}_{P/A} + \vec{v}_{A/T}$$

As três velocidades relativas e a relação entre elas são indicadas na Figura 3.35. As incógnitas são o módulo da velocidade escalar $v_{P/T}$ e o ângulo α. Pelo diagrama, achamos

$$v_{P/T} = \sqrt{(240 \text{ km/h})^2 + (100 \text{ km/h})^2} = 260 \text{ km/h}$$

$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{100 \text{ km/h}}{240 \text{ km/h}}\right) = 23° \text{ L de N}$$

AVALIAR: o vento aumenta a velocidade do avião em relação à Terra, mas em compensação faz o avião sair de sua rota.

Exemplo 3.15

CORREÇÃO EM RELAÇÃO AO VENTO ORTOGONAL No Exemplo 3.14, em que direção o piloto deve inclinar o avião para que ele siga de sul para o norte? Qual seria, então, sua velocidade em relação à Terra? (Suponha que a velocidade do avião em relação ao ar seja a mesma do Exemplo 3.14.)

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como o Exemplo 3.14, este é um problema sobre velocidade relativa com vetores.

PREPARAR: a Figura 3.36 ilustra a situação. Os vetores são dispostos de acordo com a equação de velocidade relativa do vetor, na Equação (3.36):

$$\vec{v}_{P/T} = \vec{v}_{P/A} + \vec{v}_{A/T}$$

Conforme a Figura 3.36, o piloto aponta o bico do avião de modo a formar um ângulo β em relação ao vento e assim compensar o vento ortogonal. Esse ângulo, que informa a direção do vetor $\vec{v}_{P/A}$ (a velocidade do avião em relação ao ar), é uma das nossas incógnitas. A outra incógnita é a velocidade escalar do avião sobre o solo, que é o módulo do vetor $\vec{v}_{P/T}$ (a velocidade do avião em relação à Terra). As grandezas conhecidas e desconhecidas são:

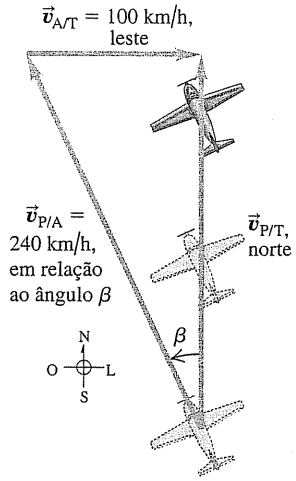


Figura 3.36 O piloto deve inclinar o avião na direção do vetor $\vec{v}_{P/A}$ para que ele siga do sul para o norte em relação à Terra.

$\vec{v}_{P/T}$ = módulo desconhecido	sul para norte
$\vec{v}_{P/A}$ = 240 km/h	direção desconhecida
$\vec{v}_{A/T}$ = 100 km/h	oeste para leste

Podemos resolver as incógnitas desconhecidas usando a Figura 3.36 e a trigonometria.

EXECUTAR: a partir do diagrama, a velocidade $v_{P/T}$ e o ângulo β são dados por

$$v_{P/T} = \sqrt{(240\ \text{km/h})^2 - (100\ \text{km/h})^2} = 218\ \text{km/h}^2$$

$$\beta = \text{arcsen}\left(\frac{100\ \text{km/h}}{240\ \text{km/h}}\right) = 25°$$

O piloto deve inclinar o avião em 25° oeste e sua velocidade em relação ao solo é de 218 km/h.

AVALIAR: note que tanto neste exemplo quanto no anterior precisamos determinar duas incógnitas. A diferença é que, no Exemplo 3.14, a direção e o módulo se referiam ao *mesmo* vetor ($\vec{v}_{P/T}$), enquanto neste exemplo, eles se referem a vetores *diferentes* ($\vec{v}_{P/T}$ e $\vec{v}_{P/A}$).

Não é de se surpreender que um vento contrário reduza a velocidade de um avião em relação ao solo. Este exemplo demonstra que um *vento ortogonal* também reduz a velocidade de um avião — um infortúnio no dia-a-dia da aeronáutica.

Teste sua compreensão da Seção 3.5 Suponha que o bico de um avião esteja direcionado para leste e que o avião possua uma velocidade do ar de 150 km/h. Devido ao vento, o avião se move para *norte* em relação ao solo e sua velocidade escalar relativa à Terra é 150 km/h. Qual é a velocidade do ar relativa à Terra? i) 150 km/h do leste para oeste; ii) 150 km/h do sul para norte; iii) 150 km/h do sudeste para noroeste; iv) 212 km/h do leste para oeste; v) 212 km/h do sul para norte; vi) 212 km/h do sudeste para noroeste; vii) não há ocorrência possível de um vento com velocidade tal que possa causar isso. ∎

Resumo

Vetores de posição, velocidade e aceleração: o vetor posição $\vec{r}$ é um vetor que vai da origem do sistema de coordenadas a um ponto P do espaço, cujas coordenadas cartesianas são x, y e z.

O vetor velocidade média $\vec{v}_m$ durante um intervalo de tempo Δt é o deslocamento $\Delta\vec{r}$ (a variação do vetor posição $\vec{r}$) dividido por Δt. O vetor velocidade instantânea $\vec{v}$ é a derivada do tempo de $\vec{r}$, e seus componentes são as derivadas de tempo x, y e z. A velocidade escalar instantânea é o módulo de $\vec{v}$. A velocidade $\vec{v}$ de uma partícula é sempre tangente à trajetória da partícula (Exemplo 3.1).

O vetor aceleração média $\vec{a}_m$ durante um intervalo de tempo Δt é a variação da velocidade $\Delta\vec{v}$ dividido por Δt. O vetor aceleração instantânea $\vec{a}$ é a derivada de tempo de $\vec{v}$, e seus componentes são *as derivadas de tempo de* v_x, v_y *e* v_z (Exemplo 3.2).

O componente de aceleração paralelo à direção da velocidade instantânea afeta a velocidade, enquanto o componente de $\vec{a}$ perpendicular a $\vec{v}$ afeta a direção do movimento (exemplos 3.3 e 3.4).

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \tag{3.1}$$

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{3.2}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{3.3}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{3.4}$$

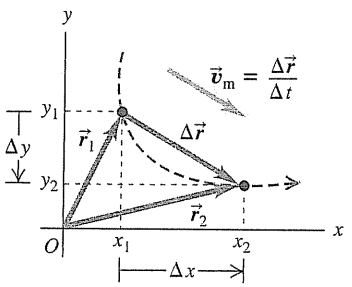
$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{3.8}$$

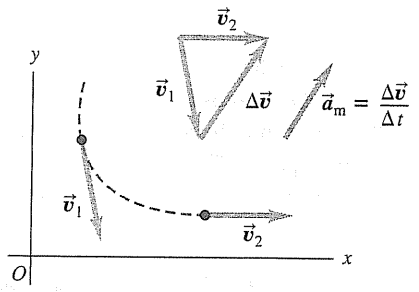
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{3.9}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \tag{3.10}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt}$$





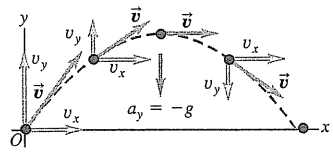
Movimento de um projétil: no movimento de um projétil, desprezada a resistência do ar, $a_x = 0$ e $a_y = -g$. As coordenadas e os componentes da velocidade em função do tempo são simples funções de tempo, e o formato da trajetória é sempre uma parábola. Geralmente definimos a origem na posição inicial do projétil (exemplos 3.5 a 3.10).

$$x = (v_0\cos\alpha_0)t \tag{3.20}$$

$$y = (v_0\,\text{sen}\,\alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.21}$$

$$v_x = v_0\cos\alpha_0 \tag{3.22}$$

$$v_y = v_0\,\text{sen}\,\alpha_0 - gt \tag{3.23}$$

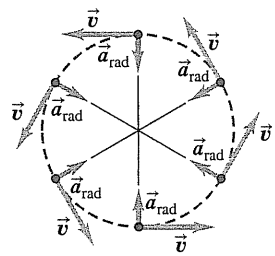


Movimento circular uniforme e não uniforme: quando uma partícula se move ao longo de um círculo de raio R com velocidade escalar v constante (movimento circular uniforme), ela possui aceleração dirigida $\vec{a}$ para o centro do círculo e perpendicular ao vetor $\vec{v}$. O módulo a_{rad} da aceleração pode ser expressa em termos de v e R ou em termos de R e o período T (o tempo de uma revolução), onde $v = 2\pi R/T$. (exemplos 3.11 e 3.12).

Quando a velocidade escalar não for constante (movimento circular não uniforme), ainda existirá um componente radial de $\vec{a}$ dado pela Equação (3.28) ou (3.30), mas existirá também um componente paralelo (tangencial) à trajetória. Esse componente é igual à taxa de variação da velocidade escalar, dv/dt.

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} \tag{3.28}$$

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \tag{3.30}$$



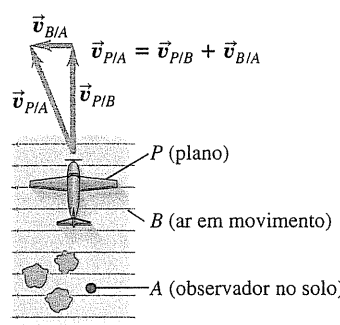
Velocidade relativa: quando um corpo P se move em relação a outro corpo (ou sistema de referência) B, e B se move em relação à A, designamos a velocidade de P relativa a B por $\vec{v}_{P/B}$, a velocidade de P relativa à A por $\vec{v}_{P/A}$ e a velocidade de B relativa a A por $\vec{v}_{B/A}$. Quando essas velocidades estão ao longo da mesma linha, seus componentes ao longo dessa linha estão relacionados pela Equação (3.33). Genericamente, essas velocidades estão relacionadas pela Equação (3.36) (exemplos 3.13 a 3.15).

$$v_{P/Ax} = v_{P/Bx} + v_{B/Ax} \tag{3.33}$$

(velocidade relativa ao longo da linha)

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A} \tag{3.36}$$

(velocidade relativa no espaço)



Principais termos

aceleração centrípeta, 87
aceleração instantânea, 73
aceleração média, 72
movimento circular não uniforme, 88
movimento circular uniforme, 85
período, 87
projétil, 77
sistema de referência, 89
trajetória, 77
velocidade instantânea, 70
velocidade média, 70
velocidade relativa, 89
vetor posição, 69

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Um carro que faz uma curva a uma velocidade escalar constante possui aceleração orientada para o interior da curva (Seção 3.2, principalmente Figura 3.12a)

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

3.1 Resposta: iii) Se a velocidade instantânea $\vec{v}$ é constante por um intervalo de tempo, seu valor em qualquer ponto (incluindo o final do intervalo) é o mesmo que a velocidade média $\vec{v}_m$ no intervalo. Em i) e ii), a direção de $\vec{v}$ no final do intervalo é tangente à trajetória nesse ponto, enquanto a direção de $\vec{v}_m$ aponta desde o início da trajetória até o final dela (na direção do deslocamento líquido). Em iv) $\vec{v}$ e $\vec{v}_m$ são ambos orientados ao longo da linha reta, mas $\vec{v}$ possui módulo maior, porque a velocidade escalar é crescente.

3.2 Resposta: vetor 7. No ponto alto da trajetória do trenó, a velocidade escalar é mínima. Nesse ponto, a velocidade não está nem crescendo nem diminuindo, e o componente paralelo da aceleração (ou seja, o componente horizontal) é zero. A aceleração possui somente um componente perpendicular orientado para o interior da trajetória curva do trenó. Em outras palavras, a aceleração é orientada para baixo.

3.3 Resposta: i) Na ausência de gravidade ($g = 0$), o macaco não cairia e o dardo seguiria uma trajetória retilínea (demonstrada como uma linha tracejada). O efeito da gravidade consiste em fazer o macaco e o dardo percorrerem a mesma distância em queda, $\frac{1}{2}gt^2$ abaixo das suas posições $g = 0$. O ponto A está na mesma distância abaixo da posição inicial do macaco que o ponto P em relação à linha tracejada, logo o ponto A é onde encontraremos o macaco no instante em questão.

3.4 Resposta: ii) Tanto no topo quanto na parte de baixo do círculo, a aceleração é puramente radial e é dada pela Equação (3.28). O raio R é o mesmo em ambos os pontos; logo, a diferença em aceleração deve-se puramente às diferenças na velocidade escalar. Como a_{rad} é proporcional ao quadrado de v, a velocidade escalar deve ser duas vezes maior na parte de baixo do círculo do que no topo.

3.5 Resposta: vi) O efeito do vento consiste em cancelar o movimento do avião na direção leste e dar-lhe um movimento em direção ao norte. Logo, a velocidade do ar relativa ao solo

(a velocidade do vento) deve ter um componente de 150 km/h para oeste e um componente de 150 km/h para o norte. A combinação deles é um vetor de módulo $\sqrt{(150\ \text{km/h})^2 + (150\ \text{km/h})^2} = 212\ \text{km/h}$ que aponta para noroeste.

Questões para discussão

Q3.1 Um pêndulo simples (um corpo oscilando na extremidade de um fio) descreve um arco de círculo em cada oscilação. Qual é a direção e o sentido da aceleração nas extremidades da oscilação? E no ponto médio? Explique como você obteve cada resposta.

Q3.2 Refaça a Figura 3.11a supondo $\vec{a}$ antiparalelo a $\vec{v}_1$. A partícula se move em linha reta? O que ocorre com a velocidade escalar?

Q3.3 Desprezando a resistência do ar, um projétil se move em uma trajetória parabólica. Existe algum ponto em que $\vec{a}$ é paralelo a $\vec{v}$? Perpendicular a $\vec{v}$? Explique.

Q3.4 Quando um rifle é disparado contra um alvo distante, a direção do cano não coincide com a do alvo. Por que não coincide? O ângulo da correção depende da distância do alvo?

Q3.5 No mesmo instante em que a bala sai horizontalmente do cano de uma arma, você larga um corpo da mesma altura do cano. Desprezando a resistência do ar, qual dos dois chegará primeiro ao solo? Explique.

Q3.6 Um pacote é largado de um avião que voa em uma mesma altitude com velocidade constante. Desprezando a resistência do ar, qual seria a trajetória do pacote observada pelo piloto? E a trajetória observada por uma pessoa no solo?

Q3.7 Desenhe os seis gráficos para os componentes x e y da posição, da velocidade e da aceleração em função do tempo para movimento de um projétil com $x_0 = y_0 = 0$ e $0 < \alpha_0 < 90°$.

Q3.8 Um objeto é lançado de baixo para cima e não sofre resistência do ar. Como é possível que ele tenha aceleração quando pára de se mover no seu ponto mais alto?

Q3.9 Supondo que uma rã possa pular sempre com a mesma velocidade inicial em qualquer direção que ela pule (para a frente ou diretamente de baixo para cima), como a altura máxima que ela pode atingir se relaciona com o alcance horizontal máximo $R_{\text{máx}} = v_0^2/g$?

Q3.10 Um projétil é disparado de baixo para cima, a um ângulo θ acima da horizontal com velocidade escalar inicial v_0. Na sua altura máxima, determine seu vetor de velocidade, sua velocidade escalar e seu vetor de aceleração.

Q3.11 Em um movimento circular uniforme, qual é a velocidade *média* e a aceleração *média* para uma revolução? Explique.

Q3.12 Em um movimento circular uniforme, como varia a aceleração quando a velocidade cresce de um fator igual a 3? Quando o raio decresce de um fator igual a 2?

Q3.13 Em um movimento circular uniforme, a aceleração é perpendicular à velocidade em cada instante, embora ambas mudem de direção continuamente. Isso continua válido, quando o movimento não é uniforme — ou seja, quando a velocidade escalar não é constante?

Q3.14 As gotas da chuva vistas através do vidro lateral de um carro em movimento caem em uma direção diagonal, mesmo sem a ação do vento. Por quê? A explicação é a mesma ou diferente para a diagonal que se vê no pára-brisa?

Q3.15 No caso de uma chuva forte, o que determina a melhor posição do guarda-chuva?

Q3.16 Você está na margem oeste de um rio cujas águas se escoam do sul para o norte com velocidade de 1,2 m/s. Sua velocidade de nado em relação à água é igual a 1,5 m/s e o rio possui 60 m de largura. Qual é a trajetória em relação ao solo para você atravessar o rio no menor intervalo de tempo possível? Explique seu raciocínio.

Q3.17 Quando você deixa um objeto cair de uma certa altura, ele leva um tempo T para atingir o solo, desprezando-se a resistência do ar. Se você o deixasse cair de uma altura três vezes maior, quanto tempo (em termos de T) levaria para o objeto chegar ao solo?

Q3.18 Uma pedra é atirada no ar a um ângulo sobre a horizontal e sofre uma resistência desprezível do ar. Qual gráfico na Figura 3.37 descreve da melhor forma a *velocidade escalar* v da pedra em função do tempo t, enquanto ela está suspensa no ar?

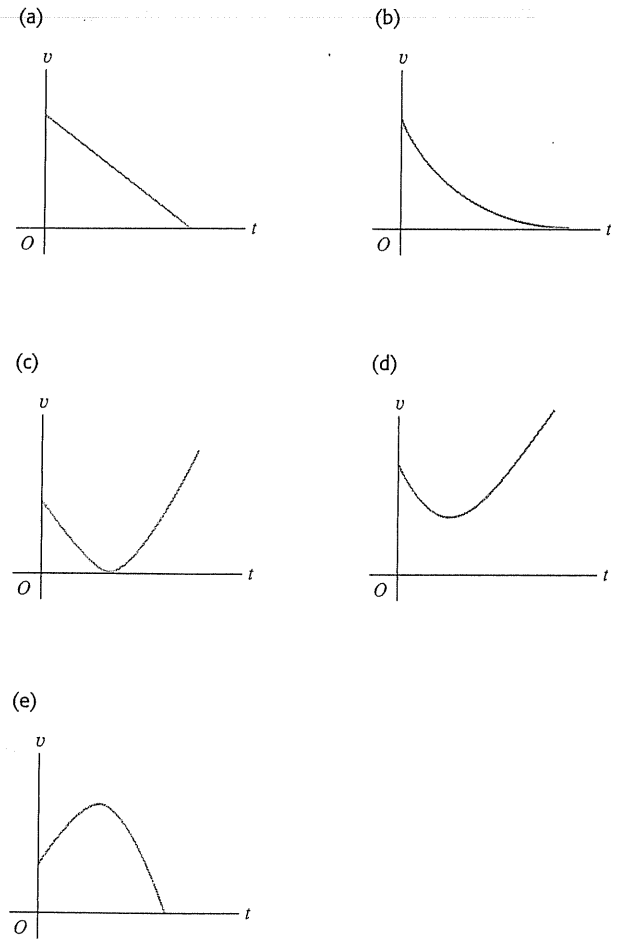


Figura 3.37 Questão Q3.18.

Exercícios

Seção 3.1 Vetor posição e vetor velocidade

3.1 Um esquilo possui coordenadas x e y (1,1 m e 3,4 m) para $t_1 = 0$ e coordenadas (5,3 m e – 0,5 m) para $t_2 = 3{,}0$ s. Para esse intervalo de tempo, calcule a) os componentes da velocidade média; b) o módulo e direção da velocidade média.

3.2 Um rinoceronte está na origem do sistema de coordenadas para $t_1 = 0$. Para o intervalo de tempo entre $t_1 = 0$ e $t_2 = 12{,}0$ s, sua velocidade média possui componente $x = -3{,}8$ m/s e componente $y = 4{,}9$ m/s. Para $t_2 = 12{,}0$ s, a) quais são as coordenadas x e y do rinoceronte? b) qual é a distância entre a origem e o rinoceronte?

3.3 Um projetista de páginas da Internet cria uma animação na qual um ponto da tela do computador possui posição $\vec{r} = [4{,}0\text{ cm} + (2{,}5\text{ cm/s}^2)t^2]\hat{\imath} + (5{,}0\text{ cm/s})t\hat{\jmath}$. a) Ache o módulo, a direção e o sentido da velocidade média do ponto para o intervalo entre $t_1 = 0$ e $t_2 = 2{,}0$ s. b) Ache o módulo, a direção e o sentido da velocidade instantânea para $t_1 = 0$ e $t_2 = 2{,}0$ s. c) Faça um desenho da trajetória do ponto no intervalo entre $t_1 = 0$ e $t_2 = 2{,}0$ s e mostre as velocidades calculadas em (b).

3.4 Se $\vec{r} = bt^2\hat{\imath} + ct^3\hat{\jmath}$, onde b e c são constantes positivas, quando o vetor velocidade faz um ângulo de 45,0° com os eixos Ox e Oy?

Seção 3.2 Vetor aceleração

3.5 Um avião a jato está voando a uma altura constante. No instante $t_1 = 0$, os componentes da velocidade são $v_x = 90$ m/s, $v_y = 110$ m/s. No instante $t_2 = 30{,}0$ s, os componentes são $v_x = -170$ m/s, $v_y = 40$ m/s. a) Faça um esboço do vetor velocidade para t_1 e para t_2. Qual a diferença entre esses vetores? Para esse intervalo de tempo, calcule b) os componentes da aceleração média, c) o módulo, a direção e o sentido da aceleração média.

3.6 A velocidade de um cachorro correndo em um campo aberto possui componentes $v_x = 2{,}6$ m/s, $v_y = -1{,}8$ m/s para $t_1 = 10{,}0$ s. Para o intervalo de tempo entre $t_1 = 10{,}0$ s e $t_2 = 20{,}0$ s, a aceleração média do cachorro possui módulo igual a 0,45 m/s^2, formando um ângulo de 31,0°, medido considerando-se uma rotação do eixo $+Ox$ para o eixo $+Oy$. Para $t_2 = 20{,}0$ s, a) quais são os componentes x e y da velocidade do cachorro? b) Ache o módulo, a direção e o sentido da velocidade do cachorro. c) Faça um desenho mostrando o vetor velocidade para t_1 e para t_2. Qual é a diferença entre esses vetores?

3.7 Um pássaro voando em um plano xy possui coordenadas $x(t) = \alpha t$ e $y(t) = 3{,}0\text{ m} - \beta t^2$ onde $\alpha = 2{,}4$ m/s e $\beta = 1{,}2$ m/s^2. a) Faça um esboço da trajetória do pássaro entre $t = 0$ e $t = 2{,}0$ s. b) Ache o vetor velocidade e o vetor aceleração do pássaro em função do tempo. c) Ache o módulo, a direção e o sentido do vetor velocidade e do vetor aceleração do pássaro para $t = 2{,}0$ s. d) Faça um esboço do vetor velocidade e do vetor aceleração do pássaro para $t = 2{,}0$ s. Nesse instante, a velocidade escalar do pássaro está aumentando, diminuindo ou é constante? O pássaro está fazendo uma volta? Em caso positivo, em que sentido?

3.8 Uma partícula segue uma trajetória indicada na Figura 3.38. Entre os pontos B e D, a trajetória é uma linha reta. Desenhe o vetor aceleração em A, C e E para os casos em que a) a partícula se move com velocidade escalar constante; b) a partícula se move com velocidade escalar que cresce uniformemente; c) a partícula se move com velocidade escalar que decresce uniformemente.

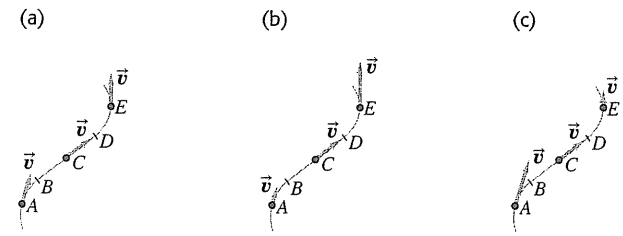


Figura 3.38 Exercício 3.8.

Seção 3.3 Movimento de um projétil

3.9 Um livro de física escorrega horizontalmente para fora do topo de uma mesa com velocidade de 1,10 m/s. Ele colide com o solo em 0,350 s. Desprezando a resistência do ar, ache a) a altura do topo da mesa até o solo; b) a distância horizontal entre a extremidade da mesa e o ponto onde ele colidiu com o solo; c) os componentes da velocidade do livro e o módulo, a direção e o sentido da velocidade imediatamente antes de o livro atingir o solo; d) faça diagramas xt, yt, v_xt e v_yt para o movimento.

3.10 Um helicóptero militar em missão de treinamento voa horizontalmente com velocidade de 60,0 m/s e acidentalmente deixa cair uma bomba (felizmente não ativa) de uma altura de 300 m. Despreze a resistência do ar. a) Quanto tempo a bomba leva para atingir o solo? b) Qual a distância horizontal percorrida pela bomba durante a queda? c) Ache os componentes da velocidade na direção horizontal e na vertical imediatamente antes de a bomba atingir o solo. d) Faça diagramas xt, yt, v_xt e v_yt para o movimento da bomba. e) Mantida constante a velocidade do helicóptero, onde estaria ele no momento em que a bomba atingisse o solo?

3.11 Dois grilos, Chirpy e Milada, saltam do topo de um rochedo íngreme. Chirpy simplesmente se deixa cair e chega ao solo em 3.50 s, enquanto Milada salta horizontalmente com velocidade inicial de 95,0 cm/s. A que distância da base do rochedo Milada vai atingir o chão?

3.12 Uma ousada nadadora salta correndo 510 N e horizontalmente de um rochedo para um mergulho, conforme a Figura 3.39. Qual deve ser sua velocidade mínima quando salta do topo do rochedo, de modo que ela consiga ultrapassar uma saliência no pé do rochedo, com largura de 1,75 m e 9,0 m abaixo do topo?

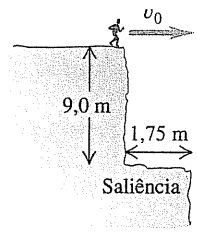


Figura 3.39 Exercício 3.12.

3.13 Saltando o rio I. Durante uma tempestade, um carro chega onde deveria haver uma ponte, mas o motorista a encontra destruída, levada pelas águas. Como precisa chegar ao outro lado, o motorista decide tentar saltar sobre o rio com o carro. O lado da estrada em que o carro está fica 21,3 m acima do rio, enquanto o lado oposto está apenas 1,8 m acima do rio. O rio é uma torrente de águas turbulentas com largura de 61,0 m. a) A que velocidade o carro deve estar se movendo no momento em que deixa a estrada para cruzar sobre o rio e aterrissar em segurança na margem oposta? b) Qual é a velocidade escalar do carro pouco antes de aterrissar do outro lado?

3.14 Uma bola de gude rola horizontalmente com velocidade escalar v_0 e cai do topo de uma plataforma de 2,75 m de altura, sem sofrer nenhuma resistência significativa do ar. No nível do solo, a 2,0 m da base da plataforma, há um buraco escancarado (Figura 3.40). Para qual alcance da velocidade v_0 a bola de gude aterrissará no buraco?

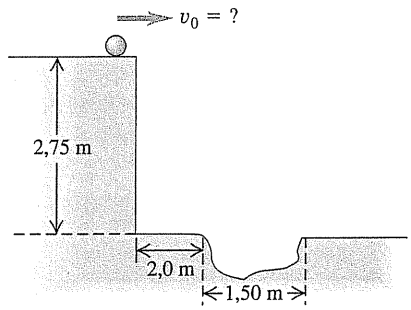


Figura 3.40 Exercício 3.14.

3.15 No interior de uma nave espacial em repouso sobre a superfície terrestre, uma bola rola pelo topo de uma mesa horizontal e cai no chão a uma distância D do pé da mesa. Essa nave agora aterrissa no inexplorado Planeta X. O comandante, Capitão Curioso, rola a mesma bola pela mesma mesa e com a mesma velocidade escalar inicial como ocorreu na superfície terrestre e descobre que ela cai no chão a uma distância de $2{,}76D$ do pé da mesa. Qual é a aceleração da gravidade no Planeta X?

3.16 Pelé chuta uma bola de futebol com velocidade inicial tal que o componente vertical é igual a 16,0 m/s e o componente horizontal é igual a 20,0 m/s. Despreze a resistência do ar. a) Quanto tempo a bola leva para atingir a altura máxima de sua trajetória? b) Qual a altura desse ponto? c) Quanto tempo a bola leva (desde o momento do chute inicial) até o instante em que ela retorna ao mesmo nível inicial? Qual é a relação entre esse tempo e o calculado no item (a)? d) Que distância horizontal ela percorreu durante esse tempo? e) Faça diagramas xt, yt, v_xt e v_yt para o movimento.

3.17 No nível do solo, uma bomba é disparada com velocidade inicial de 80,0 m/s, a 60° sobre a horizontal e sem sofrer resistência significativa do ar. a) Ache os componentes horizontal e vertical da velocidade inicial da bomba. b) Quanto tempo ela leva para atingir seu ponto mais alto? c) Ache sua altura máxima sobre o solo. d) A que distância do seu ponto de disparo a bomba aterrissa? e) No seu ponto mais alto, ache os componentes horizontal e vertical da sua aceleração e velocidade.

3.18 Uma pistola de sinalização atira uma bala luminosa com velocidade inicial (velocidade na saída do cano) igual a 125 m/s e a 55° acima da horizontal. Despreze a resistência do ar. Calcule a altura máxima da bala luminosa e sua distância desde o ponto de disparo até o ponto de aterrissagem, caso seja disparada a) no nível das planícies de uma região como Brasília e b) de uma região plana da Lua, onde $g = 1{,}6\ \text{m/s}^2$.

3.19 Mark McGwire bate uma bola de beisebol de forma que ela abandona o bastão com velocidade de 30,0 m/s formando um ângulo de 36,9° acima da horizontal. Despreze a resistência do ar. a) Ache os *dois* instantes para os quais a altura da bola está a 10,0 m acima do nível inicial. b) Calcule o componente vertical e o componente horizontal da velocidade da bola em cada um dos dois tempos calculados no item (a). c) Determine o módulo, a direção e o sentido da velocidade da bola quando ela retorna ao nível inicial.

3.20 Um taco golpeia uma bola de golfe em uma pequena elevação acima do solo com uma velocidade de 12,0 m/s e um ângulo inicial de 51,0° acima da horizontal. A bola atinge o campo 2,08 s após a tacada. Despreze a resistência do ar. a) Quais são os componentes da aceleração da bola durante o vôo? b) Quais são os componentes da velocidade da bola no início e no final de sua trajetória? c) Qual é a distância horizontal percorrida pela bola? d) Por que a expressão de R obtida no Exemplo 3.8 *não* pode ser usada para dar a resposta correta do item (c)? e) Qual era a altura da bola no momento em que ela saiu do taco? f) Faça diagramas xt, yt, v_xt e v_yt para o movimento.

3.21 Ganhe o prêmio. Em um parque de diversões você pode ganhar uma girafa inflável, se conseguir encaixar uma moeda de 25 centavos em um prato pequeno. O prato está sobre uma prateleira acima do ponto em que a moeda deixa sua mão, a uma distância horizontal de 2,1 m deste ponto (Figura 3.41). Se você lança a moeda com velocidade de 6,4 m/s formando um ângulo de 60° acima da horizontal, a moeda se encaixa no prato. Despreze a resistência do ar. a) Qual a altura da prateleira em relação ao nível da sua mão? b) Qual é o componente vertical da velocidade da moeda imediatamente antes de a moeda pousar no prato?

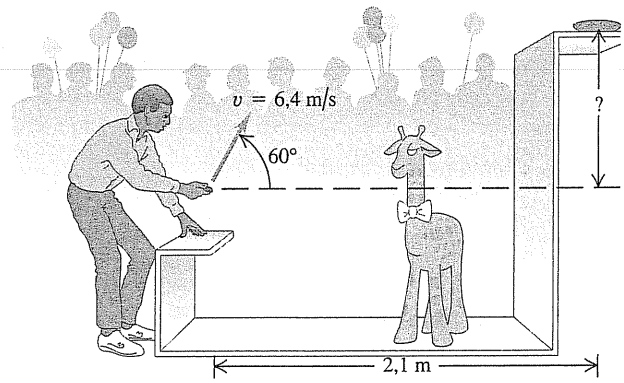


Figura 3.41 Exercício 3.21.

3.22 Suponha que o ângulo inicial α_0 da Figura 3.26 seja 42,0° e que d seja igual a 3,0 m. Onde o dardo e o macaco se encontrarão, se a velocidade inicial do dardo for a) 12,0 m/s? b) 8,0 m/s? c) O que ocorreria se a velocidade inicial do dardo fosse 4,0 m/s? Faça um esboço da trajetória em cada caso.

3.23 Um homem está parado no alto de um edifício de 15,0 m de altura e atira uma pedra com velocidade de módulo de 30,0 m/s formando um ângulo inicial de 33,0° acima da horizontal. Despreze a resistência do ar. Calcule a) a altura máxima acima do telhado atingida pela pedra; b) o módulo da velocidade da pedra imediatamente antes de ela atingir o solo; c) a distância horizontal entre a base do edifício e o ponto onde ela atinge o solo. d) Faça diagramas xt, yt, v_xt e v_yt para o movimento.

3.24 Bombeiros estão lançando um jato de água em um prédio em chamas, usando uma mangueira de alta pressão que dispara água a uma velocidade escalar de 25,0 m/s. Quando sai da mangueira, a água passa a adquirir o movimento de um projétil. Os bombeiros ajustam o ângulo de elevação α da mangueira até a água levar 3,0 s para atingir o prédio a 45,0 m de distância. Despreze a resistência do ar e suponha que o final da mangueira está ao nível do solo. a) Ache o ângulo de elevação α. b) Ache a velocidade escalar e a aceleração da água no ponto mais alto de sua trajetória. c) A que altura do chão a água atinge o prédio e qual sua velocidade pouco antes de atingir o prédio?

3.25 Um balão de 124 kg carregando um cesto de 22 kg está descendo a uma velocidade constante de 20,0 m/s. Uma pedra de 1,0 kg é atirada do cesto em uma trajetória perpendicular a do balão que desce, com velocidade inicial de 15,0 m/s, medida em relação a uma pessoa em repouso no cesto. Essa pessoa vê a pedra atingir o solo 6,0 s após ser atirada. Suponha que o balão continue sua descida com a mesma velocidade escalar constante de 20,0 m/s. a) Qual a altura do balão quando a pedra foi atirada? b) Qual a altura do balão quando a pedra atinge o solo? c) No instante em que a pedra atinge o solo, a que distância está do cesto? d) No instante em que a pedra vai atingir o solo, determine seus componentes horizontal e vertical medidos por um observador i) em repouso no cesto e ii) em repouso no solo.

3.26 Um canhão, localizado a 60,0 m da base de um rochedo vertical, lança uma bomba de 15 kg, a 45° sobre a horizontal e em direção ao rochedo. a) Qual deve ser a velocidade mínima na boca do canhão para que a bomba passe sobre o topo do rochedo? b) O solo no topo do rochedo é plano, com uma elevação constante de 25,0 m acima do canhão. Sob as condições de (a), a que distância da borda do rochedo a bomba aterrissa?

3.27 Um avião voa a uma velocidade de 90,0 m/s, a um ângulo de 23,0° acima da horizontal. Quando está a 114 m diretamente sobre um cachorro parado no nível do solo, uma mala cai do compartimento de bagagens. A que distância do cachorro a mala vai cair? Despreze a resistência do ar.

Seção 3.4 Movimento circular

3.28 Em seu primeiro dia de trabalho em uma fábrica de eletrodomésticos, você é solicitado a informar o que é necessário fazer para que a centrifugadora de uma máquina de lavar triplique sua aceleração centrípeta. Você impressiona sua chefe respondendo imediatamente. O que você diz a ela?

3.29 A Terra possui um raio igual a 6.380 km e faz um giro completo em 24 horas. a) Qual é a aceleração radial de um objeto no equador da Terra? Dê sua resposta em m/s^2 e como uma fração de g. b) Se a_{rad} no equador fosse maior do que g, os objetos seriam ejetados da Terra e voariam para o espaço. (Veremos a razão disso no Capítulo 5.) Qual deveria ser o período mínimo de rotação da Terra para que isso ocorresse?

3.30 Um modelo de rotor de helicóptero possui quatro lâminas, cada qual com 3,40 m de comprimento desde o eixo central até sua extremidade. O modelo gira em um túnel de vento com 550 rev/min. a) Qual é a velocidade linear da extremidade da lâmina em m/s? b) Qual é a aceleração radial da extremidade da lâmina expressa como múltiplo da aceleração da gravidade, g?

3.31 Em um teste de um 'aparelho para g', um voluntário gira em um círculo horizontal de raio igual a 7,0 m. Qual é o período da rotação para que a aceleração centrípeta possua módulo de a) 3,0 g? b) 10 g?

3.32 O raio da órbita da Terra em torno do Sol (suposta circular) é igual a $1{,}50 \times 10^8$ km, e a Terra percorre essa órbita em 365 dias. a) Qual é o módulo da velocidade orbital da Terra em m/s? b) Qual é a aceleração radial da Terra no sentido do Sol em m/s^2? c) Repita os cálculos de (a) e de (b) para o planeta Mercúrio (raio da órbita = $5{,}79 \times 10^7$ km, período da órbita = 88,0 dias).

3.33 Uma roda-gigante com raio igual a 14,0 m está girando em torno de um eixo horizontal passando pelo seu centro (Figura 3.42). A velocidade linear de uma passageira em sua periferia é igual a 7,0 m/s. Determine o módulo, a direção e o sentido da aceleração da passageira a) no ponto mais baixo do movimento circular, b) no ponto mais alto do movimento circular. c) Quanto tempo leva a roda-gigante para completar uma revolução?

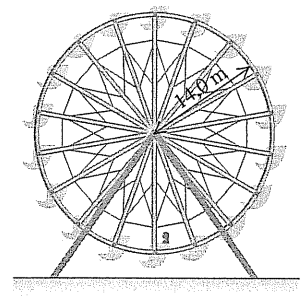


Figura 3.42 Exercícios 3.33 e 3.34.

3.34 A roda-gigante da Figura 3.42, que gira no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, começa a se mover. Em dado instante, um passageiro na periferia da roda e passando no ponto mais baixo do movimento circular, move-se a 3,0 m/s e está ganhando velocidade com uma taxa de 0,500 m/s^2. a) Determine o módulo, a direção e o sentido da aceleração do passageiro nesse instante. b) Faça um desenho da roda-gigante e do passageiro, mostrando a velocidade e os vetores de aceleração dele.

3.35 Hipergravidade. No *Ames Research Center*, a NASA usa sua grande centrífuga '20-G' para testar os efeitos de acelerações muito grandes ('hipergravidade') sobre pilotos e astronautas de teste. Nesse dispositivo, um braço de 8,84 m de comprimento gira uma extremidade em um plano horizontal, e o astronauta fica preso na outra extremidade. Suponha que ele está alinhado ao longo do braço, com a cabeça na extremidade mais externa. A aceleração sustentada máxima à qual os humanos são sujeitos nessa máquina é geralmente 12,5 g. a) A que velocidade a cabeça do astronauta deve se mover para sentir essa aceleração máxima? b) Qual é a *diferença* entre a aceleração da sua cabeça e a dos seus pés, se o astronauta tiver 2,0 m de altura? c) Qual a velocidade em rpm (rev/min) em que o braço está girando para produzir a aceleração máxima sustentada?

Seção 3.5 Velocidade relativa

3.36 O vagão-plataforma de um trem se desloca para a direita, com uma velocidade escalar de 13,0 m/s relativa a um observador fixo no solo. Há alguém dirigindo uma lambreta sobre o vagão-plataforma (Figura 3.43). Qual a velocidade (módulo, direção e sentido) da lambreta em relação ao vagão, se sua velocidade relativa ao observador em solo é a) 18,0 m/s para a direita? b) 3,0 m/s para a esquerda? c) zero?

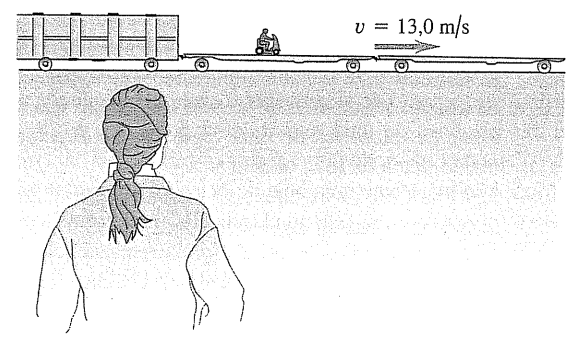


Figura 3.43 Exercício 3.36.

3.37 A 'esteira rolante horizontal' do terminal de um aeroporto se move a 1,0 m/s e tem 35,0 m de comprimento. Se uma mulher pisa em uma das extremidades e caminha a 1,5 m/s em relação à

plataforma móvel, quanto tempo ela necessita para chegar à extremidade oposta, se andar a) na mesma direção que a plataforma se move? b) na direção oposta?

3.38 Dois píeres estão localizados em um rio: o píer B está situado a 1500 m de A corrente abaixo (Figura 3.35). Dois amigos devem fazer um percurso do píer A ao píer B e depois voltar. Um deles vai de barco com velocidade constante de 4,0 km/h em relação à água. O outro caminha pela margem do rio com velocidade constante de 4,0 km/h. A velocidade do rio é igual a 2,80 km/h no sentido de A para B. Calcule o tempo de cada um para fazer o percurso de ida e volta.

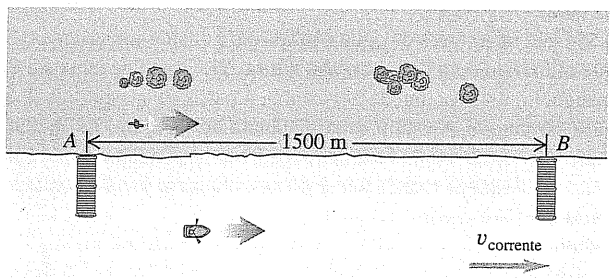


Figura 3.44 Exercício 3.38.

3.39 Uma canoa possui velocidade de 0,40 m/s do sul para leste em relação à Terra. A canoa se desloca em um rio que escoa a 0,50 m/s do oeste para leste em relação à Terra. Determine o módulo, a direção e o sentido da velocidade da canoa em relação ao rio.

3.40 O piloto de um avião deseja voar de leste para oeste. Um vento de 80,0 km/h (sobre 50 mi/h) sopra do norte para o sul. a) Se a velocidade do avião em relação ao ar (sua velocidade se o ar estivesse em repouso) é igual a 320,0 km/h (sobre 200 mi/h), qual deve ser a direção escolhida pelo piloto? b) Qual é a velocidade do avião em relação ao solo? Ilustre sua solução com um diagrama vetorial.

3.41 Cruzando o rio I. A água de um rio se escoa com velocidade de 2,0 m/s do norte para o sul. Um homem dirige um barco com motor ao longo do rio; com velocidade igual a 4,2 m/s em relação à água, de oeste para leste. A largura do rio é igual a 800 m. a) Determine o módulo, a direção e o sentido da sua velocidade em relação à Terra. b) Quanto tempo é necessário para atravessar o rio? c) A que distância ao sul do ponto inicial ele atingirá a margem oposta?

3.42 Cruzando o rio II. a) Em que direção o barco do Exercício 3.41 deveria se para atingir a margem oposta diretamente a leste do ponto inicial? (Sua velocidade em relação à água permanece igual a 4,2 m/s.) b) Qual a velocidade do barco em relação à Terra? c) Quanto tempo é necessário para atravessar o rio?

3.43 Um avião ultraleve aponta de norte para sul, e seu indicador de velocidade em relação ao ar mostra 35 m/s. O avião está submetido a um vento de 10 m/s que sopra na direção sudoeste em relação à Terra. a) Faça um diagrama vetorial mostrando a relação entre os vetores dados e $\vec{v}_{P/T}$ (a velocidade do avião em relação à Terra). b) Usando a coordenada x para o leste e a coordenada y para o norte, determine os componentes de $\vec{v}_{P/T}$. Determine o módulo, a direção e o sentido de $\vec{v}_{P/T}$.

Problemas

3.44 Um modelo de foguete se move no plano xy (o sentido positivo do eixo vertical Oy é de baixo para cima). A aceleração do foguete possui os componentes $a_x(t) = \alpha t^2$ e $a_y(t) = \beta - \gamma t$, onde $\alpha = 2{,}50\ \text{m/s}^4$, $\beta = 9{,}0\ \text{m/s}^2$ e $\gamma = 1{,}40\ \text{m/s}^3$. Para $t = 0$, o foguete está na origem e possui velocidade $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{\imath} + v_{0y}\hat{\jmath}$, sendo $v_{0x} = 1{,}0$ m/s e $v_{0y} = 7{,}0$ m/s. a) Determine o vetor velocidade e o vetor posição em função do tempo. b) Qual a altura máxima atingida pelo foguete? c) Faça um desenho da trajetória do foguete. d) Qual o deslocamento horizontal do foguete quando ele retorna para o ponto $y = 0$?

3.45 Um foguete é lançado a um ângulo do topo de uma torre com altura $h_0 = 50{,}0$ m. Devido ao projeto dos motores, suas coordenadas de posição estão na forma $x(t) = A + Bt^2$ e $y(t) = C = Dt^3$, sendo que A, B, C e D são constantes. Além disso, a aceleração do foguete 1,0 s após o lançamento é $\vec{a} = (4{,}0\hat{\imath} + 3{,}0\hat{\jmath})\ \text{m/s}^2$. Suponha que a origem das coordendas esteja na base da torre. a) Ache as constantes A, B, C e D, incluindo suas unidades SI. b) No instante imediatamente após o lançamento do foguete, quais são seu vetor de aceleração e sua velocidade? c) Quais são os componentes x e y da velocidade do foguete 10,0 s após seu lançamento e com que velocidade ele se desloca? d) Qual o vetor posição do foguete 10,0 s após seu lançamento?

3.46 Um pássaro voa em um plano xy com um vetor velocidade dado por $\vec{v} = (\alpha - \beta t^2)\hat{\imath} + \gamma t\hat{\jmath}$, sendo $\alpha = 2{,}4$ m/s, $\beta = 1{,}6\ \text{m/s}^3$ e $\gamma = 4{,}0\ \text{m/s}^2$. O sentido positivo do eixo vertical Oy é de baixo para cima. Em $t = 0$, o pássaro está na origem. a) Determine o vetor posição e o vetor aceleração do pássaro em função do tempo. b) Qual é a altura do pássaro (coordenada y) quando ele voa sobre $x = 0$ pela primeira vez depois de $t = 0$?

3.47 Um foguete de teste é lançado por aceleração ao longo de uma inclinação de 200,0 m, a 125 m/s^2, partindo do repouso no ponto A (Figura 3.45). A inclinação se ergue a 35,0° sobre a horizontal e, no instante em que o foguete parte dela, os motores se apagam e ele fica sujeito somente à gravidade (a resistência ao ar pode ser desprezada). Determine a) a altura máxima sobre o solo atingida pelo foguete e b) o maior alcance horizontal do foguete passando-se o ponto A.

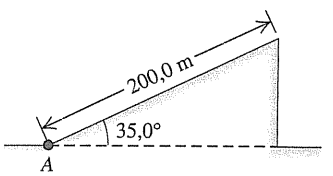


Figura 3.45 Problema 3.47.

3.48 Atletas marcianas. No salto à distância, uma atleta se projeta a um ângulo sobre o solo e cai mantendo-se na mesma altura, tentando percorrer a maior distância horizontal. Suponha que na Terra ela permanecesse no ar pelo tempo T, atingindo uma altura máxima h e percorrendo uma distância horizontal D. Se ela saltasse *exatamente* da mesma forma em uma competição em Marte, onde g_{MARTE} é 0,379 do seu valor na Terra, ache o tempo dela no ar, a altura máxima e a distância horizontal. Expresse cada uma dessas três grandezas em termos do seu valor na Terra. Despreze a resistência do ar nos dois planetas.

3.49 Dinamite! Uma equipe de demolição usa dinamite para explodir um edifício velho. Fragmentos da explosão voam em todas as direções e mais tarde são encontrados num raio de 50 m da explosão. Faça uma estimativa da velocidade máxima atingi-

da pelos fragmentos da explosão. Descreva todas as hipóteses que você usar.

3.50 Em espiral. É comum ver aves de rapina ganhando altura impulsionadas por uma corrente de ar quente. A trajetória que elas percorrem se assemelha a uma espiral. Pode-se reproduzir o movimento em espiral como um movimento circular uniforme combinado com uma velocidade ascendente constante. Suponha que um pássaro complete um círculo com raio de 8,0 m a cada 5,0 s e suba verticalmente a uma taxa de 3,0 m/s. Determine a) a velocidade escalar do pássaro em relação ao solo, b) a aceleração do pássaro (módulo, direção e sentido) e c) o ângulo entre o vetor de velocidade do pássaro e a horizontal.

3.51 Na selva, um veterinário com uma arma carregada com um dardo tranqüilizante e um macaco astuto de 1,5 kg estão 25 m acima do solo, cada qual em uma árvore a 90 m de distância uma da outra. Assim que o caçador atira horizontalmente no macaco, este se solta da árvore na tentativa de escapar do tiro. Qual deve ser a velocidade mínima do dardo no cano da arma para que o caçador atinja o macaco antes que ele chegue ao chão?

3.52 Uma dublê de cinema pula de um helicóptero em vôo a 30,0 m acima do solo com velocidade constante cujo componente vertical é igual a 10,0 m/s de baixo para cima e cujo componente horizontal é igual a 15,0 m/s do norte para o sul. Despreze a resistência do ar. a) Em que lugar do solo (em relação ao ponto onde ela abandonou o helicóptero) a dublê colocou almofadas de espuma para amortecer a queda? b) Faça diagramas xt, yt, $v_x t$ e $v_y t$ para o movimento.

3.53 No combate a incêndios em florestas, aviões jogam água para ajudar equipes que trabalham no solo. Um piloto em treinamento lança uma caixa com corante vermelho, na esperança de atingir um alvo no solo. Se o avião está voando horizontalmente a 90,0 m acima do solo com velocidade de 64,0 m/s (143 mi/h), a que distância horizontal do alvo o piloto deve lançar a caixa? Despreze a resistência do ar.

3.54 Um navio se aproxima do porto a 45,0 cm/s e uma importante peça do equipamento de ancoragem precisa ser lançada, para que ele possa aportar. Esse equipamento é lançado a 15,0 m/s e 60,0° acima da horizontal, do topo de uma torre, à beira da água, 8,75 m acima do convés do navio (Figura 3.46). Para esse equipamento cair na frente do navio, a que distância D da doca deve estar o navio quando o equipamento for lançado? Despreze a resistência do ar.

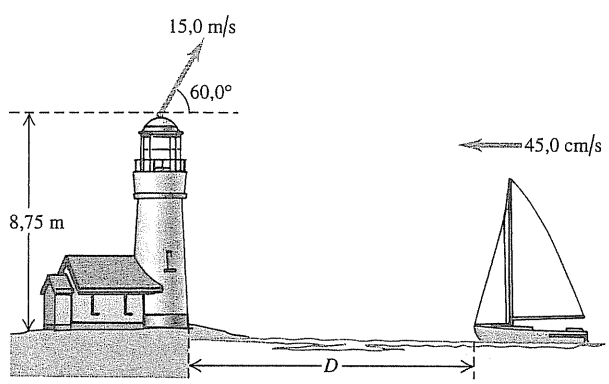


Figura 3.46 Problema 3.54.

3.55 O maior alcance de uma bola de beisebol. De acordo com o *Guinness Book of World Records*, o recorde de alcance de uma bola de beisebol foi obtido em uma batida feita por Roy 'Dizzy' Carlyle em um jogo menor de um campeonato. A bola percorreu uma distância horizontal de 188 m até atingir o solo fora do campo. a) Supondo que a bola tenha sido lançada a 45,0° acima da horizontal e desprezando a resistência do ar, qual era a velocidade inicial da bola para que isso ocorresse, sabendo-se que a bola foi batida em um ponto a 0,9 m acima do nível do solo? Suponha que o solo seja perfeitamente plano. b) Em que ponto a bola passou acima da cerca de 3,0 m de altura, sabendo-se que a cerca estava a uma distância de 116 m do ponto do lançamento da bola?

3.56 Uma mangueira de água é usada para encher um grande tanque cilíndrico com diâmetro D e altura $2D$. O jato de água sai da mangueira a 45° acima da horizontal, a partir do mesmo nível da base do tanque, e está a uma distância $6D$ (Figura 3.47). Para qual *alcance* de velocidade de lançamento (v_0) a água entrará no tanque? Despreze a resistência do ar e expresse sua resposta em termos de D e g.

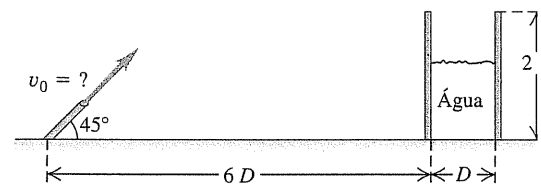


Figura 3.47 Problema 3.56.

3.57 Um projétil está sendo lançado do nível do chão, sem sofrer resistência do ar. Você quer evitar que ele penetre uma camada de inversão de temperatura na atmosfera a uma altura h sobre o solo. a) Qual velocidade de lançamento máxima você poderia aplicar nesse projétil, se o lançasse diretamente de baixo para cima? Expresse sua resposta em termos de h e g. b) Suponha que a plataforma de lançamento disponível dispare projéteis ao dobro da velocidade de lançamento máxima calculada na parte a) A que ângulo máximo sobre a horizontal você deve lançar o projétil? c) A que distância (em termos de h) da plataforma de lançamento o projétil aterrissa na parte (b)?

3.58 Chutando a gol. No futebol americano, após um *touchdown (aterrissagem, nome de uma jogada vencedora)*, o time tem a oportunidade de conquistar mais um ponto chutando a bola sobre a barra entre as traves do gol. A barra fica a 10,0 pés acima do solo, e a bola é chutada do nível do solo, na direção horizontal a 36,0 pés da barra (Figura 3.48). As regras do futebol americano são enunciadas em unidades inglesas, mas devem ser convertidas para SI neste caso. a) Há um ângulo mínimo acima do solo que garante que a bola passará sobre a barra, seja qual for a velocidade do chute. Qual é esse ângulo? b) Se a bola for chutada

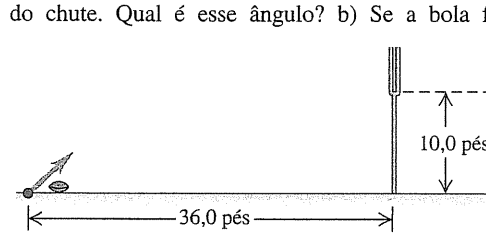


Figura 3.48 Problema 3.58.

a 45,0° acima da horizontal, qual deve ser a velocidade escalar inicial suficiente para que ela passe sobre a barra? Expresse sua resposta em m/s e km/h.

3.59 Um projétil é lançado com velocidade v_0 formando um ângulo α_0 com a horizontal. O ponto de lançamento está situado a uma altura h acima do solo. a) Desprezando a resistência do ar, mostre que a distância horizontal percorrida pelo projétil antes de ele atingir o solo é dada por

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha_0}{g}\left(v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 + \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_0 + 2gh}\right)$$

Verifique que, se o ponto de lançamento estivesse situado no mesmo nível do solo, isto é, $h = 0$, essa expressão se reduziria ao alcance horizontal R encontrado no Exemplo 3.8. b) Para o caso $v_0 = 10$ m/s e $h = 5{,}0$ m, faça um gráfico de x em função do ângulo de lançamento α_0 para valores d α_0 e de 0° a 90°. Seu gráfico deve mostrar que x é igual a zero para $\alpha_0 = 90°$, mas x é diferente de zero para $\alpha_0 = 0$; explique a razão disso. c) Vimos no Exemplo 3.8 que, quando o projétil atinge o solo no mesmo nível em que ele é lançado, o alcance horizontal é máximo para $\alpha_0 = 45°$. Para o caso desenhado no item (b), o ângulo de lançamento para o alcance horizontal máximo é igual a, maior que ou menor que 45°? (Este problema fornece um resultado geral para o lançamento de um projétil lançado de um ponto mais elevado do que o ponto onde ele atinge o solo.)

3.60 Cuidado! Uma bola de neve rola do telhado de um celeiro que possui uma inclinação para baixo igual a 40° (Figura 3.49). A extremidade do telhado está situada a 14,0 m acima do solo e a bola de neve possui velocidade de 7,0 m/s quando ela abandona o telhado. Despreze a resistência do ar. a) A que distância do celeiro a bola de neve atingirá o solo caso não colida com nada durante sua queda? b) Faça diagramas xt, yt, $v_x t$ e $v_y t$ para o movimento da parte (a). c) Um homem de 1,9 m de altura está parado a uma distância de 4,0 m da extremidade do celeiro. Ele será atingido pela bola de neve?

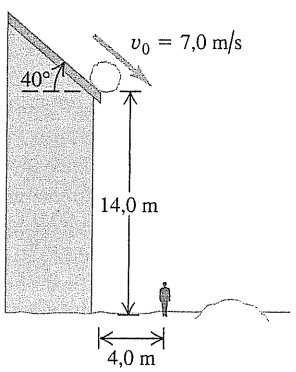


Figura 3.49 Problema 3.60.

3.61 a) Prove que um projétil lançado em um ângulo α_0 possui o mesmo alcance horizontal de outro lançado com a mesma velocidade em um ângulo $(90° - \alpha_0)$. b) Uma rã salta com uma velocidade de 2,2 m/s e chega ao solo a 25 cm de distância de seu ponto inicial. Para que ângulos acima da horizontal ela poderia ter saltado?

3.62 No trapézio voador. Em um novo circo, Maria oscila em um trapézio, projeta-se em um ângulo de 53° e deve ser segurada por João, cujas mãos estão a 6,1 m acima e 8,2 m horizontalmente do ponto de lançamento de Maria (Figura 3.50). Despreze a resistência do ar. a) Qual deve ser a velocidade inicial de Maria para que ela seja segurada por João? b) Para a velocidade inicial calculada em (a), qual é o módulo, a direção e o sentido da velocidade de Maria quando ela é segurada por João? c) Supondo que Maria possua a velocidade inicial calculada em (a), faça diagramas xt, yt, $v_x t$ e $v_y t$ para o movimento dos dois trapezistas. Seus gráficos devem mostrar o movimento para cima até o instante em que Maria alcança João. d) Na noite de estréia, João não consegue segurar Maria. Qual a distância horizontal percorrida por Maria, a partir de seu ponto inicial, até o momento em que ela atinge a rede de segurança situada a 8,6 m abaixo de seu ponto inicial?

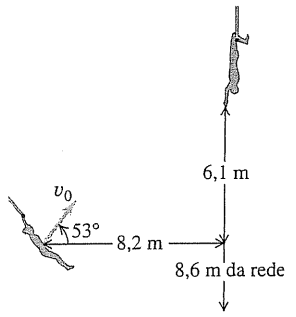


Figura 3.50 Problema 3.62.

3.63 Saltando no rio II. Um professor de física faz loucas proezas em suas horas vagas. Sua última façanha foi saltar sobre um rio com sua motocicleta (Figura 3.51). A rampa de decolagem era inclinada de 53,0°, a largura do rio era de 40,0 m, e a outra margem estava a 15,0 m abaixo do nível da rampa. O rio estava a 100 m abaixo do nível da rampa. Despreze a resistência do ar. a) Qual deveria ser sua velocidade para que ele pudesse alcançar a outra margem sem cair no rio? b) Caso sua velocidade fosse igual à metade do valor encontrado em (a), aonde ele cairia?

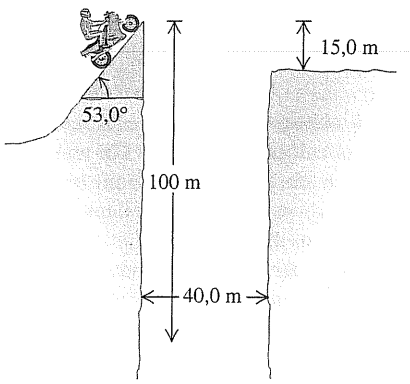


Figura 3.51 Problema 3.63.

3.64 Uma pedra é atirada do telhado de um edifício com velocidade v_0, formando um ângulo α_0 com a horizontal. Despreze a resistência do ar. Determine o módulo, a direção e o sentido da velocidade da pedra imediatamente antes de atingir o solo e mostre que essa velocidade não depende de ângulo α_0.

3.65 Uma carreta de 5.500 kg carregando uma plataforma vertical para lançamento de foguetes se desloca para a direita, a uma velocidade constante de 30,0 m/s ao longo de uma pista horizontal. Essa plataforma lança um foguete de 45,0 kg verticalmente de baixo para cima, com velocidade inicial de 40,0 m/s em relação à carreta. a) Que altura o foguete atingirá? b) Onde, em relação à carreta, o foguete aterrissará? c) Que distância a carreta percorre enquanto o foguete está no ar? d) Do ponto de vista de um observador em repouso no solo, a que ângulo, em relação à horizontal, o foguete se desloca assim que deixa a carreta? 2) Desenhe a trajetória do foguete do ponto de vista de um observador i) parado na carreta e ii) parado no solo.

3.66 Uma bola de 2,7 kg é jogada de baixo para cima com velocidade inicial de 20 m/s, da borda de um rochedo que mede 45,0 m de altura. No instante em que a bola é jogada, uma mulher começa a correr da base do rochedo, com velocidade constante de 6,0 m/s. Ela corre em linha reta no nível do solo, e a resistência do ar sobre a bola é desprezível. a) A que

ângulo sobre a horizontal a bola deve ser jogada para que a corredora consiga pegá-la antes que atinja o solo e que distância ela percorre até conseguir isso? b) Desenhe a trajetória da bola do ponto de vista de i) uma pessoa em repouso no solo e ii) a corredora.

3.67 Uma rocha de 76,0 kg rola horizontalmente pelo topo de um rochedo vertical, que está 20 m acima da superfície de um lago, conforme a Figura 3.52. O topo da face vertical de uma barragem localiza-se a 100 m do pé do rochedo, sendo que o topo da barragem está no mesmo nível da superfície do lago. Uma planície nivelada está 25 m abaixo do topo da barragem. a) Qual deve ser a velocidade mínima da rocha ao cair do rochedo, de modo que role para a planície, sem atingir a represa? b) A que distância da base da represa a rocha atinge a planície?

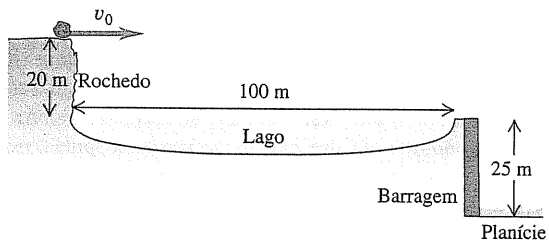


Figura 3.52 Problema 3.67.

3.68 Atirando o almoço. Henriqueta está indo para a aula de física e corre pela calçada a 3,05 m/s. De repente, seu marido Bruno percebe que ela saiu com tanta pressa que esqueceu o sanduíche. Ele corre para a janela do apartamento, que está 43,9 m acima do nível da rua e se projeta sobre a calçada, pretendendo jogar o lanche para a esposa. Bruno joga o pacote horizontalmente 9,0 s após Henriqueta passar sob a janela e ela consegue apanhá-lo sem parar de correr. Despreze a resistência do ar. a) Com que velocidade inicial Bruno deve jogar o sanduíche para que Henriqueta possa apanhá-lo antes que caia no chão? b) Onde está Henriqueta quando apanha o sanduíche?

3.69 Dois tanques militares estão em exercício de treinamento no nível do solo. O primeiro dispara uma munição carregada de tinta, com velocidade de disparo de 250 m/s e a um ângulo de 10,0° com a horizontal, enquanto avança em direção ao segundo tanque, com velocidade de 15,0 m/s relativa ao solo. O segundo tanque recua a 35,0 m/s em relação ao solo, mas é atingido pelo cartucho. Despreze a resistência do ar e suponha que o cartucho atinja o alvo na mesma altura sobre o solo de quando foi disparado. Ache a distância entre os tanques a) quando a munição foi inicialmente disparada e b) no instante do impacto.

3.70 Bang! Um estudante está sentado sobre uma plataforma a uma distância h acima do solo. Ele lança um grande rojão horizontalmente com uma velocidade v. Entretanto, um vento que sopra paralelo ao solo dá ao artefato uma aceleração horizontal constante com módulo a. Isso faz com que o artefato caia no chão diretamente sob o estudante. Determine a altura h em termos de v, a e g. Despreze o efeito da resistência do ar sobre o movimento vertical.

3.71 Um foguete é lançado verticalmente do repouso, com uma aceleração ascendente constante de 1,75 m/s^2. Após 22,0 s do lançamento, um tanque de combustível não mais necessário é desconectado do foguete. Um membro da tripulação mede que a velocidade inicial do tanque é 25,0 m/s e que ele se move perpendicularmente à trajetória do foguete. O tanque não sofre resistência significativa do ar, somente a força da gravidade, assim que se separa do foguete. a) Com que velocidade o foguete se move no instante em que o tanque de combustível é ejetado? b) Quais são os componentes horizontal e vertical da velocidade do tanque de combustível, assim que é ejetado, medido do ponto de vista de i) um membro da tripulação no foguete e ii) um técnico parado em solo? c) Para qual ângulo em relação à horizontal o tanque ejetado inicialmente se move, do ponto de vista de i) um membro da tripulação no foguete e ii) um técnico parado em solo? d) Qual altura máxima sobre a plataforma de lançamento o tanque ejetado atinge?

3.72 Um foguete se desloca verticalmente para cima a 8,50 m/s constantes em relação ao solo. Quando atinge 145 m de altura, ele lança um segundo foguete a uma velocidade escalar de 12,0 m/s e ângulo de 53° sobre a horizontal, ambas as grandezas medidas por um astronauta no interior do foguete. Despreze a resistência do ar. a) No instante em que o segundo foguete é lançado, quais são os componentes horizontal e vertical da sua velocidade relativa a i) o astronauta no foguete e ii) o Controle da Missão no solo? b) Ache a velocidade inicial e o ângulo de lançamento do segundo foguete, medido pelo Controle da Missão. c) Qual altura máxima acima do solo o segundo foguete atinge?

3.73 Em uma comemoração de 04 de julho (Dia da Independência dos EUA), um rojão é lançado do nível do solo com velocidade inicial de 25,0 m/s e ângulo de 30,0° da *vertical*. Ao atingir sua altura máxima, ele explode em vários fragmentos, dois dos quais se projetam para frente inicialmente a 20,0 m/s e a $+/-53{,}0°$ em relação à horizontal, ambas as grandezas medidas *em relação ao rojão original, imediatamente antes da explosão*. Com que ângulos em relação à horizontal, os dois fragmentos inicialmente se movem logo após a explosão, medidos do ponto de vista de um espectador parado no solo?

3.74 Em um filme de aventura, o herói joga uma granada de seu carro, que se desloca a 90,0 km/h, atingindo o carro do inimigo, que se desloca a 110,0 km/h. O carro do inimigo está 15,8 m à frente do carro do herói quando ele joga a granada. Se o lançamento é tal que sua velocidade inicial em relação a ele forma um ângulo de 45° acima da horizontal, qual deve ser o módulo da velocidade inicial? Os dois carros se deslocam no mesmo sentido numa estrada retilínea e plana. Despreze a resistência do ar. Ache o módulo da velocidade inicial em relação ao herói e em relação à Terra.

3.75 Uma pedra amarrada em uma corda se move no plano xy. Suas coordenadas são dadas em função do tempo por

$$x(t) = R\cos\omega t \qquad y(t) = R\operatorname{sen}\omega t$$

onde R e ω são constantes. a) Mostre que a distância da pedra até a origem é constante e igual a R, ou seja, sua trajetória é uma circunferência de raio R. b) Mostre que em cada ponto o vetor velocidade é perpendicular ao vetor posição. c) Mostre que o vetor aceleração é sempre oposto ao vetor posição e possui módulo igual a ω^2. d) Mostre que o módulo da velocidade da pedra é constante e igual a ωR. e) Combine os resultados das partes (c) e (d) para mostrar que a aceleração da pedra possui módulo constante igual a v^2/R.

3.76 Um rio com largura de 400,0 m corre de oeste para leste a 30,0 m/min. Seu barco se move a 100,0 m/min em relação à água, não importando a direção em que segue. Para atravessar esse rio, você parte de um embarcadouro no ponto A localizado na margem sul. Há um barco aportando na direção exatamente

oposta, no ponto B localizado na margem norte, e ainda outro no ponto C, 75,0 m abaixo de B (Figura 3.53). a) Aonde na margem norte você aportará, se orientar seu barco perpendicularmente à correnteza e qual distância terá percorrido? b) Se você inicialmente orientar seu barco diretamente para o ponto C e não mudar essa posição em relação à margem, onde na margem norte você aportará? c) Para chegar ao ponto C: i) para qual posição você deve orientar o barco, ii) quanto tempo levará para atravessar o rio, iii) qual distância percorrerá e iv) qual a velocidade escalar do seu barco, conforme medido por um observador parado na margem do rio?

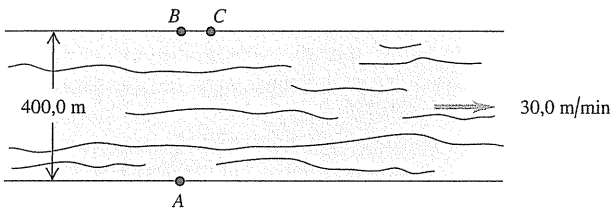


Figura 3.53 Problema 3.76.

3.77 Ciclóide. Uma partícula se move em um plano x,y. Suas coordenadas são dadas em função do tempo por

$$x(t) = R(\omega t - \operatorname{sen}\omega t) \qquad y(t) = R(1 - \cos\omega t)$$

onde R e ω são constantes. a) Faça um esboço da trajetória da partícula. (Essa curva é a trajetória de um ponto que se desloca na periferia de uma roda que rola com velocidade escalar constante numa superfície horizontal. A curva traçada por esse ponto enquanto ele se move no espaço denomina-se *ciclóide*.) b) Determine os componentes da velocidade e da aceleração da partícula em qualquer tempo t. c) Para que instantes a partícula está momentaneamente em repouso? Quais são as coordenadas da partícula nesses instantes? Determine o vetor aceleração. d) O módulo da aceleração é função do tempo? Compare com o movimento circular uniforme.

3.78 Um projétil é disparado do ponto A de um ângulo sobre a horizontal. No seu ponto mais alto, após ter percorrido uma distância horizontal D a partir do seu ponto de lançamento, ele explode e se parte em dois fragmentos idênticos, que se deslocam horizontalmente com velocidades iguais, mas opostas, conforme medidas *em relação ao projétil, imediatamente antes da explosão*. Se um dos fragmentos cair de volta no ponto A, a que distância de A (em termos de D) o outro fragmento cairá?

3.79 Centrífuga em Mercúrio. Uma centrífuga de laboratório na superfície terrestre faz n rpm (rev/min) e produz uma aceleração de $5{,}0g$ na sua extremidade mais externa. a) Qual a aceleração (em g) em um ponto na metade do caminho para o fim? b) Essa centrífuga está sendo usada em uma cápsula espacial sobre o planeta Mercúrio, onde $g_{\text{MERCÚRIO}}$ é 0,378 do que é na Terra. Quantos rpm (em termos de n) ela deve fazer para produzir $5g_{\text{MERCÚRIO}}$ na sua extremidade mais externa?

3.80 Gotas de chuva. Quando a velocidade de um trem é de 12,0 m/s na direção leste, as gotas de chuva que caem verticalmente em relação à superfície terrestre deixam vestígios com inclinação de 30,0° em relação à vertical, nas janelas do trem. a) Qual o componente horizontal da velocidade de uma gota em relação à superfície terrestre? Em relação ao trem? b) Qual o módulo da velocidade da gota em relação à superfície terrestre? Em relação ao trem?

3.81 Um piloto de avião coloca o curso da direção de leste para oeste com uma bússola e mantém uma velocidade em relação ao ar de 220 km/h. Depois de voar durante 0,500 h, ele se encontra sobre uma cidade a 120 km a oeste e 20 km ao sul da sua posição inicial. a) Ache a velocidade do vento (módulo, direção e sentido). b) Se a velocidade do vento fosse igual a 40 km/h do norte para o sul, em que direção o piloto deveria orientar seu curso para que pudesse se dirigir de leste para oeste. Considere a mesma velocidade em relação ao ar de 220 km/h.

3.82 Um elevador se move de baixo para cima com velocidade constante de 2,50 m/s. Um parafuso no teto do elevador está roxo e cai. a) Quanto tempo ele leva para atingir o piso do elevador? Qual é a velocidade do parafuso no momento em que ele atinge o piso do elevador b) para um observador dentro do elevador? c) E para um observador parado fora do elevador? d) Para o observador do item (c), qual é a distância percorrida pelo parafuso entre o teto e o piso do elevador?

3.83 Suponha que o elevador do Problema 3.82 parta do repouso e mantenha uma aceleração ascendente constante de 4,0 m/s^2 e que o parafuso caia no instante em que o elevador começa a se mover. a) Quanto tempo o parafuso leva para cair no piso do elevador? b) Quando chega ao piso, com que velocidade o parafuso se move, do ponto de vista de um observador i) no elevador? ii) Parado no andar do prédio? c) De acordo com cada observador no item (b), qual distância o parafuso percorre entre o teto e o piso do elevador?

3.84 A cidade A fica diretamente a oeste da cidade B. Quando não há vento, um avião faz o vôo de ida e volta de 5.550 km entre as cidades em 6,60 h de tempo de vôo enquanto se desloca na mesma velocidade em ambas as direções. Quando sopra um vento forte e regular de 225 km/h, do oeste para leste, e o avião possui a mesma velocidade que antes em relação ao ar, quanto tempo levará a viagem completa?

3.85 Em uma partida de futebol da Copa do Mundo, José está correndo para o gol na direção norte, com velocidade de 8,0 m/s em relação ao solo. Um companheiro de time passa a bola para ele. A bola tem velocidade de 12,0 m/s e se move em uma direção de 37,0° do leste para o norte, em relação ao solo. Quais são o módulo e a direção da velocidade da bola em relação a José?

Problemas desafiadores

3.86 Um homem está sobre um vagão largo e aberto, que se desloca com velocidade de 9,10 m/s (Figura 3.54). Ele deseja lançar uma bola através de um aro em repouso a uma altura de 4,90 m de sua mão, de tal modo que a bola se mova horizontalmente quando passar pelo aro. Ele lança a bola com velocidade de 10,8 m/s em relação a si próprio. a) Qual deve ser o componente vertical da velocidade inicial da bola? b) Quantos segundos após o lançamento da bola ela passará através do aro? c) A que distância horizontal à frente do aro ele deve lançar a bola? d) Quando a bola deixa a mão do homem, qual é a direção de sua velocidade relativa em relação ao vagão? E em relação a um observador em repouso no solo?

3.87 Uma espingarda dispara um grande número de pequenas pelotas de baixo para cima. Algumas delas se deslocam aproximadamente na vertical e outras divergem cerca de 1,0° da vertical. Suponha que a velocidade inicial das pelotas seja uniforme para todas e igual a 150,0 m/s. Despreze a resistência do ar. a) Dentro de que raio, a partir do ponto do disparo, as pelotas se distribuem? b) Caso haja 1000 pelotas e elas caiam em um círculo cujo raio

foi calculado na parte (a), qual a probabilidade de que pelo menos uma pelota caia na cabeça da pessoa que fez o disparo? Suponha que o raio da sua cabeça seja de 10 cm. c) A resistência do ar, de fato, produz diversos efeitos. Ela diminui a velocidade da pelota que sobe, torna menor o seu componente horizontal e limita a velocidade com a qual elas caem. Qual desses efeitos poderá tornar maior o raio no cálculo que você fez para responder ao item (a) e qual poderá fazê-lo diminuir? O que você pensa sobre o efeito global da resistência do ar? (O efeito da resistência do ar sobre um componente da velocidade aumenta quando o módulo da velocidade desse componente aumenta.)

3.88 Um projétil é lançado de um ponto P. Ele se move de tal modo que sua distância ao ponto P é sempre crescente. Determine o ângulo máximo acima da horizontal com o qual o projétil foi lançado. Despreze a resistência do ar.

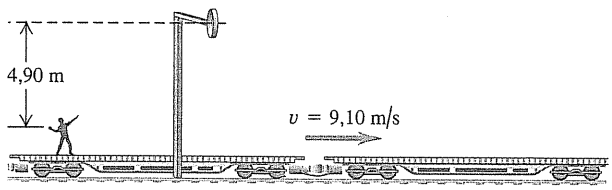


Figura 3.54 Problema desafiador 3.86.

3.89 Movimento de projétil em uma Inclinação I. Uma bola de beisebol recebe uma velocidade inicial com módulo v_0, formando um ângulo ϕ com um plano inclinado a um ângulo θ acima da horizontal (Figura 3.55). a) Calcule a distância, medida ao longo do plano inclinado, entre o ponto de lançamento e o ponto em que a bola colide com o plano inclinado. Suas respostas serão em termos de v_0, g, θ e ϕ. b) Qual o ângulo ϕ que fornece o alcance máximo, medido ao longo do plano inclinado? (*Nota:* Você poderia se interessar pelos três diferentes métodos de solução apresentados por I. R. Lapidus na revista *Am. Jour. of Phys.*, vol. 51, (1983), p. 806 e 847. Veja também H. A. Buckmaster na revista *Am. Jour. of Phys.*, vol. 53 (1985), p. 638-641, para um estudo aprofundado deste e de outros problemas semelhantes.)

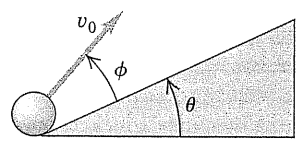


Figura 3.55 Problema desafiador 3.89.

3.90 Movimento de projétil em uma inclinação II. Considere o Problema Desafiador 3.89. a) Um arqueiro se encontra em um terreno com inclinação constante de 30,0° e deseja atingir um alvo situado a uma distância de 60,0 m para cima do plano inclinado. O arco, a flecha e o centro do alvo estão situados a uma distância de 1,50 m acima do plano inclinado. A velocidade inicial da flecha no exato momento em que ela sai do arco possui módulo igual a 32,0 m/s. Para que ângulo acima da *horizontal* o arqueiro deve apontar para atingir o centro do alvo? Caso existam dois ângulos, ache o menor entre os dois. Você pode ter que resolver a equação que fornece o ângulo por meio de uma iteração, ou seja, pelo método das tentativas. Como esse ângulo se relaciona com o ângulo que seria obtido supondo-se um terreno plano com inclinação igual a zero? b) Repita o item (a) para uma inclinação *para baixo* constante e igual a 30,0°.

3.91 Sem nenhum motivo aparente, um cão *poodle* corre com velocidade constante $v = 5{,}0$ m/s em torno de um círculo com raio $R = 2{,}50$ m. Seja $\vec{v}_1$ o vetor velocidade no tempo t_1 e $\vec{v}_2$ o vetor velocidade no tempo t_2. Considere $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ e $\Delta t = t_2 - t_1$. Lembre-se de que $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$. Para $\Delta t = 0{,}5$ s, 0,1 s e 0,05 s, calcule o módulo (com quatro algarismos significativos), a direção e o sentido (em relação a $\vec{v}_1$) da aceleração média $\vec{a}_m$. Compare seus resultados com a expressão geral da aceleração instantânea a obtida no texto para o caso do movimento circular uniforme.

3.92 Um foguete projetado para colocar pequenas cargas em órbita é conduzido a uma altura de 12,0 km acima do nível do mar por uma aeronave convertida. Quando a aeronave está voando em linha reta com velocidade constante de 850 km/h, o foguete é lançado. Depois do lançamento, a aeronave mantém a mesma altitude e velocidade e continua a voar em linha reta. O foguete cai durante um intervalo de tempo pequeno, depois do qual seu motor é acionado. Com o motor funcionando, o efeito combinado da gravidade e da força motriz produzem uma aceleração constante de módulo $3{,}0g$ dirigida para cima e formando um ângulo de 30,0° com a horizontal. Por razões de segurança, o foguete deve permanecer pelo menos a uma distância de 1,0 km à frente da aeronave quando ele sobe até atingir a altura da aeronave. Sua tarefa é calcular o intervalo de tempo mínimo da queda do foguete antes do seu motor ser acionado. Despreze a resistência do ar. Sua solução deve incluir: i) um diagrama que mostre as trajetórias do vôo do foguete e da aeronave, identificadas mediante seus respectivos vetores para a velocidade e a aceleração em diversos pontos; ii) um gráfico xt que mostre os movimentos do foguete e da aeronave; e iii) um gráfico yt que mostre os movimentos do foguete e da aeronave. Nos diagramas e nos gráficos, indique o instante em que o foguete é lançado, o instante em que o motor é acionado e o instante em que o foguete sobe atingindo a altura da aeronave.

3.93 Dois estudantes estão praticando canoagem em um rio. Quando eles estão se dirigindo no sentido contrário ao da corrente, uma garrafa vazia cai acidentalmente da canoa. A seguir, eles continuam remando durante 60 minutos, atingindo um ponto 2,0 km a montante do ponto inicial. Nesse ponto eles notam a falta da garrafa e, pensando na preservação do meio ambiente, dão uma volta e retornam no sentido da corrente. Eles recolhem a garrafa (que acompanhou o movimento da corrente) em um ponto situado a 5,0 km correnteza abaixo, do ponto onde eles retornaram. a) Supondo que o esforço feito para remar seja constante em todas as etapas do trajeto, qual a velocidade de escoamento do rio? b) Qual seria a velocidade da canoa em um lago calmo, supondo que o esforço feito para remar seja o mesmo?

LEIS DE NEWTON DO MOVIMENTO

4

A criança em pé está empurrando a outra sentada no balanço. A criança sentada está empurrando de volta? Em caso afirmativo, ela está empurrando com força igual ou diferente?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- O que significa o conceito de força na física e por que as forças são vetores.
- O significado da força resultante sobre um objeto e o que acontece quando essa força é nula.
- A relação entre a força resultante sobre um objeto, a massa do objeto e sua aceleração.
- Como se relacionam as forças que dois corpos exercem mutuamente.

Nos dois capítulos anteriores, vimos como descrever o movimento em uma, duas ou três dimensões. Mas quais são as *causas* subjacentes de um movimento? Por exemplo, como pode um rebocador rebocar um navio muito mais pesado do que ele? Por que é mais difícil controlar um carro que se desloca sobre uma pista de gelo do que quando ele se desloca sobre uma pista de concreto seco? As respostas a essas e outras questões semelhantes nos conduzem ao estudo da **dinâmica**, a relação entre o movimento e as forças que o produzem. Nos dois capítulos anteriores, estudamos a *cinemática*, a linguagem para *descrever* o movimento. Agora estamos aptos a entender o que faz os corpos se moverem da maneira como eles o fazem.

Neste capítulo, usaremos dois conceitos novos, *força* e *massa*, para analisar os princípios da dinâmica. Esses princípios podem ser sintetizados em um conjunto de três afirmações claramente estabelecidas pela primeira vez por sir Isaac Newton (1642-1727), que as publicou em 1687 em sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* ("Princípios Matemáticos da Filosofia Natural"). Essas três afirmações são conhecidas como as **leis de Newton do movimento**. A primeira afirma que, quando a força resultante que atua sobre um corpo é igual a zero, o movimento do corpo não se altera. A segunda lei de Newton relaciona a força com a aceleração quando a força resultante que atua sobre um corpo *não* é igual a zero. A terceira lei é uma relação entre as forças de interação que um corpo exerce sobre o outro.

As leis de Newton não são o produto de derivações matemáticas, mas, antes, uma síntese do que os físicos têm aprendido a partir de uma série de *experiências* sobre como os objetos se movem. (Newton usou idéias e observações de muitos cientistas que o precederam, tais como: Copérnico, Brahe, Kepler e especialmente Galileu Galilei, que faleceu no mesmo ano do nascimento de Newton.) Essas leis são genuinamente fundamentais, pois não podem ser deduzidas ou demonstradas a partir de outros princípios. As leis de Newton são o fundamento da **mecânica clássica** (também conhecida como **mecânica newtoniana**); aplicando-as podemos compreender os tipos mais familiares de movimento. As leis de Newton necessitam de modificações somente em situações que envolvem velocidades muito elevadas (próximas à velocidade da luz) e dimensões muito pequenas (tal como no interior de um átomo).

As leis de Newton podem ser enunciadas de modo muito simples, embora alguns estudantes tenham dificulda-

de para entendê-las e utilizá-las. A razão é que, antes de estudar física, durante anos você caminhou, jogou bola, empurrou caixas e fez dezenas de coisas que envolvem movimento. Nesse período você desenvolveu um 'senso comum' relativo a noções sobre o movimento e suas causas. Porém, muitas dessas noções pautadas no 'senso comum' não se sustentam perante uma análise lógica. Grande parte da tarefa deste capítulo — e do restante de nosso estudo da física — consiste em ajudar você a perceber que o 'senso comum' pode ocasionalmente induzir ao erro e a ajustar sua compreensão do mundo da física de modo a torná-la compatível com o que as experiências comprovam.

4.1 Força e interações

Na linguagem cotidiana, exercer uma **força** significa puxar ou empurrar. Uma definição melhor é a de que uma força é uma *interação* entre dois corpos ou entre o corpo e seu ambiente (Figura 4.1). Por isso, sempre nos referimos à força que um corpo *exerce* sobre outro. Quando você empurra um carro atolado na neve, você exerce uma força sobre ele; um cabo de aço exerce uma força sobre a viga que ele sustenta em uma construção; e assim por diante. Conforme a Figura 4.1, força é uma grandeza *vetorial*; você pode empurrar ou puxar um corpo em direções diferentes.

Quando uma força envolve o contato direto entre dois corpos, como o ato de puxar ou empurrar um objeto com a mão, ela é chamada de **força de contato**. As figuras 4.2a, 4.2b e 4.2c mostram três tipos comuns de forças de contato. A **força normal** (Figura 4.2a) é exercida sobre um objeto por qualquer superfície com a qual ele tenha contato. O adjetivo *normal* significa que a força sempre age perpendicularmente à superfície de contato, seja qual for o ângulo dessa superfície. Em contraste, a **força de atrito** (Figura 4.2b) exercida sobre um objeto por uma superfície age *paralelamente* à superfície, na direção oposta ao deslizamento. A força de puxar que uma corda esticada exerce sobre um objeto ao qual está amarrada é chamada de **força de tensão** (Figura 4.2c). Um exemplo dessa força é o ato de puxar seu cachorro pela coleira.

Existem também forças denominadas **forças de longo alcance**, que atuam mesmo quando os corpos estão muito afastados entre si. Por exemplo, a força entre um par de ímãs e também a força da gravidade (Figura 4.2d); a Terra exerce uma atração gravitacional sobre um objeto em queda, mesmo que não haja nenhum contato direto entre o objeto e a Terra. A atração gravitacional que a Terra exerce sobre você é o seu **peso**.

Para descrever um vetor força $\vec{F}$, é necessário descrever a *direção* e o *sentido* em que ele age, bem como seu *módulo*, que especifica 'quanto' ou 'a intensidade' com que a força puxa ou empurra. A unidade SI do módulo de uma força é o *newton*, abreviado por N. (Forneceremos uma definição precisa do newton na Seção 4.3.) Na Tabela 4.1 indicamos valores típicos dos módulos de algumas forças.

- Uma força é o ato de empurrar ou puxar.
- Uma força é a interação entre dois objetos ou entre um objeto e seu ambiente.
- Uma força é uma grandeza vetorial com módulo, direção e sentido.

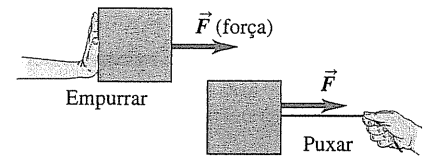
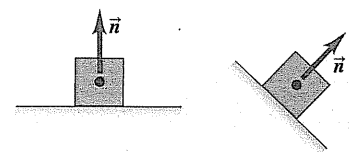
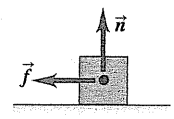


Figura 4.1 Algumas propriedades das forças.

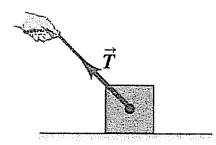
(a) **Força normal $\vec{n}$:** quando um objeto repousa sobre uma superfície ou a empurra, a superfície exerce sobre ele uma força, que é orientada perpendicularmente à superfície.



(b) **Força de atrito $\vec{f}$:** além da força normal, uma superfície pode exercer uma força de atrito sobre um objeto, que é orientada paralelamente à superfície.



(c) **Força de tensão $\vec{T}$:** uma força de puxar exercida sobre um objeto por uma corda, cordão etc.



(d) **Peso $\vec{p}$:** a força de puxar da gravidade sobre um objeto é uma força de longo alcance (uma força que age a certa distância).

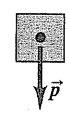


Figura 4.2 Quatro tipos de força.

Um instrumento comum para medir módulos de força é o *dinamômetro*, cujo funcionamento é semelhante ao de uma *balança de molas*. Esse instrumento é constituído por uma mola protegida no interior de uma caixa cilíndrica com um ponteiro ligado em sua extremidade. Quando são aplicadas forças nas extremidades da mola, ela se deforma; o valor da deformação é proporcional à força aplicada. Podemos fazer uma escala para o ponteiro e calibrá-la

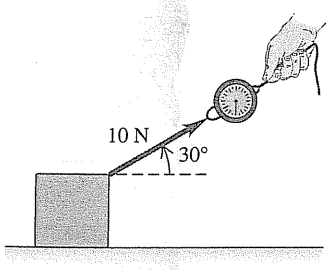
Tabela 4.1 Valores típicos dos módulos de algumas forças

Atração gravitacional exercida pelo Sol sobre a Terra	$3{,}5 \times 10^{22}$ N
Força de propulsão de um ônibus espacial durante o lançamento	$3{,}1 \times 10^{7}$ N
Peso de uma baleia azul	$1{,}9 \times 10^{6}$ N
Força de propulsão máxima de uma locomotiva	$8{,}9 \times 10^{5}$ N
Peso aproximado de um homem com massa de 110 kg	$1{,}1 \times 10^{3}$ N
Peso de uma maçã média	1 N
Peso do menor ovo de um inseto	2×10^{-6} N
Atração elétrica entre o próton e o elétron em um átomo de hidrogênio	$8{,}2 \times 10^{-8}$ N
Peso de uma pequena bactéria	1×10^{-18} N
Peso de um átomo de hidrogênio	$1{,}6 \times 10^{-26}$ N
Peso de um elétron	$8{,}9 \times 10^{-30}$ N
Atração gravitacional entre o próton e o elétron em um átomo de hidrogênio	$3{,}6 \times 10^{-47}$N

usando diversos pesos de 1 N cada. Quando um, dois ou mais desses pesos são suspensos pela balança, a força que deforma a mola será de 1 N, 2 N e assim sucessivamente, e podemos marcar os pontos referentes a 1 N, 2 N e assim sucessivamente. A seguir, poderemos usar esse instrumento para medir o módulo de uma força desconhecida. O instrumento pode ser usado tanto para forças que empurram a mola quanto para forças que a puxam.

A Figura 4.3 mostra um dinamômetro sendo usado para medir uma força que empurra e outra que puxa uma caixa. Em cada caso, desenhamos um vetor para representar a força aplicada. Os vetores indicam o módulo e a direção da força. O comprimento da flecha também indica o módulo do vetor; quanto mais longo o vetor, maior o módulo da força.

(a) Uma força de puxar de 10 N, formando um ângulo de 30° sobre a horizontal.



(b) Uma força de empurrar de 10 N, formando um ângulo de 45° sob a horizontal.

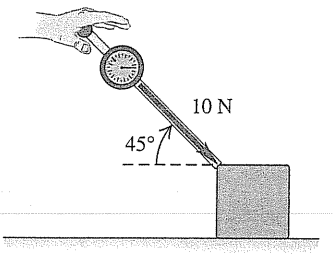


Figura 4.3 Usando uma flecha vetorial para designar a força que exercemos quando (a) puxamos um bloco com um barbante ou (b) empurramos um bloco com uma vara.

Superposição de forças

Quando você joga uma bola, pelo menos duas forças agem sobre ela: o empurrão da sua mão e o puxão para baixo da gravidade. Experiências comprovam que, quando duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ atuam simultaneamente em um ponto A de um corpo (Figura 4.4), o efeito sobre o movimento do corpo é o mesmo que o efeito produzido por uma única força $\vec{R}$ dada pela *soma vetorial* das duas forças: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Generalizando, *o efeito sobre o movimento de um corpo produzido por um número qualquer de forças é o mesmo efeito produzido por uma força única igual à soma vetorial de todas as forças.* Esse resultado importante denomina-se princípio da **superposição das forças**.

A descoberta experimental de que as forças se combinam seguindo a regra da soma vetorial é de extraordinária importância. Usaremos esse fato muitas vezes em nossos estudos de física. Isso nos permite substituir uma força pelos seus vetores componentes, como fizemos com os

Duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ que atuam sobre um ponto A exercem o mesmo efeito que uma única força $\vec{R}$ dada pela soma vetorial.

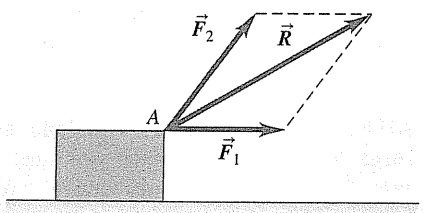


Figura 4.4 Superposição de forças.

deslocamentos na Seção 1.8. Por exemplo, na Figura 4.5a, a força $\vec{F}$ atua sobre o corpo em um ponto O. Os vetores componentes de $\vec{F}$ nas direções Ox e Oy são $\vec{F}_x$ e $\vec{F}_y$. Quando aplicamos simultaneamente $\vec{F}_x$ e $\vec{F}_y$, como na Figura 4.5b, o efeito é igual ao produzido pela força original $\vec{F}$. Logo, *qualquer força pode ser substituída pelos seus vetores componentes que atuam em um mesmo ponto.*

Geralmente é mais conveniente descrever uma força $\vec{F}$ em termos dos seus componentes x e y, F_x e F_y do que por meio dos seus vetores componentes (lembre-se de que, de acordo com a Seção 1.8, os *vetores componentes* são vetores, enquanto os *componentes* são apenas números). Para o caso indicado na Figura 4.5, F_x e F_y são ambos positivos, mas, dependendo da orientação da força $\vec{F}$, qualquer um dos valores de F_x e de F_y pode ser negativo ou nulo.

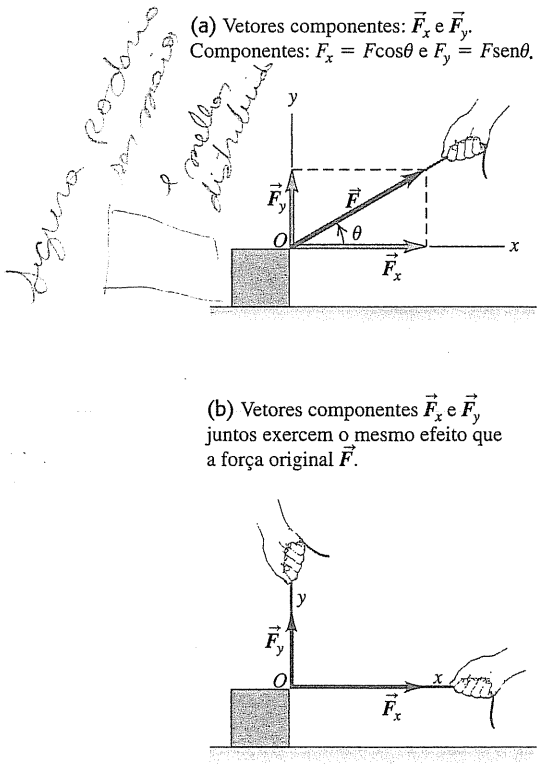


Figura 4.5 A força $\vec{F}$, que atua formando um ângulo θ com o eixo Ox, pode ser substituída pelos seus vetores componentes retangulares $\vec{F}_x$ e $\vec{F}_y$.

Não existe nenhuma lei que nos obrigue a escolher os eixos na direção vertical ou horizontal. A Figura 4.6 mostra um engradado sendo puxado para cima de uma rampa por uma força $\vec{F}$ representada por seus componentes F_x, paralelo ao plano, e F_y, perpendicular ao plano inclinado.

ATENÇÃO Uso de sinal ondulado em diagramas de força Na Figura 4.6 usamos um sinal ondulado sobre o vetor força $\vec{F}$ para indicar que essa força foi substituída pelos seus componentes x e y. Caso contrário, o diagrama estaria incluindo a mesma força duas vezes. Usamos esse sinal ondulado em todo diagrama em que a força é substituída pelos seus componentes.

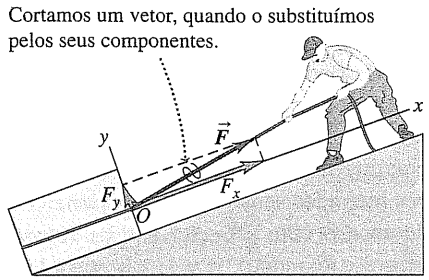


Figura 4.6 F_x e F_y são os componentes de $\vec{F}$ paralelo e perpendicular à superfície da ladeira no plano inclinado.

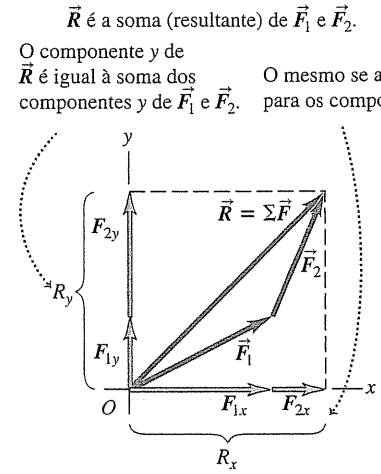


Figura 4.7 Achando os componentes do vetor soma (resultante) $\vec{R}$ de duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$.

Normalmente precisaremos determinar o vetor soma (resultante) de *todas* as forças que atuam sobre um corpo. Chamaremos essa soma de **força resultante** que atua sobre um corpo. Usaremos a letra grega maiúscula Σ ('sigma' maiúsculo, equivalente à letra S) como uma notação manuscrita para designar uma soma. Se as forças forem designadas por $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, e assim por diante, abreviaremos a soma do seguinte modo

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots = \sum\vec{F} \qquad (4.1)$$

onde $\sum\vec{F}$ é lido como 'o vetor soma das forças' ou 'vetor força resultante'. A versão da Equação (4.1) para a linguagem dos seus componentes é o par de equações:

$$R_x = \sum F_x \qquad R_y = \sum F_y \qquad (4.2)$$

onde ΣF_x é a soma dos componentes x e ΣF_y é a soma dos componentes y (Figura 4.7). Cada componente pode ser positivo ou negativo, portanto tome cuidado com os sinais quando avaliar a soma indicada na Equação (4.2).

Uma vez determinados R_x e R_y, podemos achar o módulo, a direção e o sentido da força resultante $\vec{R} = \sum\vec{F}$ que atua sobre um corpo. O módulo é:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

e o ângulo θ entre $\vec{R}$ e o eixo + Ox pode ser determinado pela relação $\text{tg}\theta = R_y/R_x$. Os componentes R_x e R_y podem ser positivos, negativos ou nulos, e o ângulo θ pode estar em qualquer um dos quatro quadrantes.

Para problemas em três dimensões, as forças possuem componentes no eixo Oz, portanto adicionamos a equação $R_z = \sum F_z$ à Equação (4.2). O módulo da força resultante será então

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

Exemplo 4.1

SUPERPOSIÇÃO DE FORÇAS Três lutadores profissionais estão lutando pelo mesmo cinturão de campeão. Olhando de cima, eles aplicam três forças horizontais sobre o cinturão, conforme indicado na Figura 4.8a. Os módulos das três forças são $F_1 = 250$ N, $F_2 = 50$ N e $F_3 = 120$ N. Ache os componentes x e y da força resultante. Determine o módulo, a direção e o sentido da força resultante.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: trata-se apenas de um problema de soma vetorial. O único aspecto novo é que os vetores representam forças.

PREPARAR: necessitamos achar os componentes x e y da força resultante $\vec{R}$, por isso usaremos o método dos componentes da soma vetorial expressa pela Equação (4.2). Quando obtivermos os componentes de $\vec{R}$, poderemos encontrar seu módulo, direção e sentido.

EXECUTAR: na Figura 4.8a, os ângulos entre as forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ e o eixo $+Ox$ são $\theta_1 = 180° - 53° = 127°$, $\theta_2 = 0°$ e $\theta_3 = 270°$. Os componentes x e y das três forças são

$$F_{1x} = (250\text{ N})\cos 127° = -150\text{ N}$$
$$F_{1y} = (250\text{ N})\operatorname{sen} 127° = 200\text{ N}$$
$$F_{2x} = (50\text{ N})\cos 0° = 50\text{ N}$$
$$F_{2y} = (50\text{ N})\operatorname{sen} 0° = 0\text{ N}$$
$$F_{3x} = (120\text{ N})\cos 270° = 0\text{ N}$$
$$F_{3y} = (120\text{ N})\operatorname{sen} 270° = -120\text{ N}$$

Pela Equação (4.2), a força resultante $\vec{R} = \sum\vec{F}$ possui componentes

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = (-150\text{ N}) + 50\text{ N} + 0\text{ N} = -100\text{ N}$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 200\text{ N} + 0\text{ N} + (-120\text{ N}) = 80\text{ N}$$

O componente x da força resultante é negativo e o componente y da força resultante é positivo, de modo que ela aponta para a esquerda e para o alto da página na Figura 4.8b (ou seja, está no segundo quadrante).

O módulo da força resultante $\vec{R} = \sum\vec{F}$ é

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-100\text{ N})^2 + (80\text{ N})^2} = 128\text{ N}$$

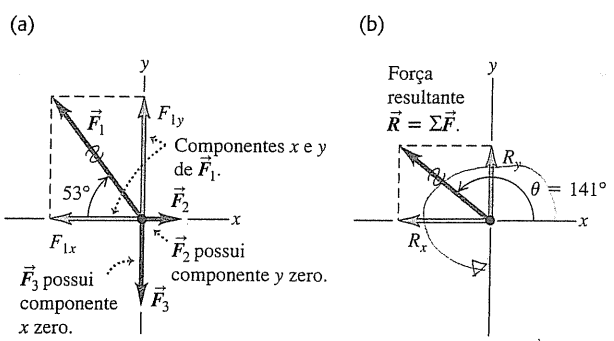


Figura 4.8 (a) Três forças atuando sobre um mesmo ponto. (b) A força resultante $\vec{R} = \sum\vec{F}$ e seus componentes.

Para achar o ângulo entre a força resultante e o eixo $+Ox$, utilizamos a relação $\operatorname{tg}\theta = R_y/R_x$, ou

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{R_y}{R_x} = \operatorname{arctg}\left(\frac{80\text{ N}}{-100\text{ N}}\right) = \operatorname{arctg}(-0{,}80)$$

As duas soluções possíveis são $\theta = -39°$ ou $\theta = -39° + 180° = 141°$. Uma vez que a força resultante está no segundo quadrante, como mencionado antes, a resposta correta é $\theta = 141°$ (Figura 4.8b).

AVALIAR: nessa situação, a força resultante *não* é zero, e você pode deduzir que o lutador 1 (que exerce a maior força, $\vec{F}_1$, sobre o cinturão) provavelmente será o campeão ao final da luta. Na Seção 4.2, exploraremos em detalhes o que acontece em situações nas quais a força resultante *é* zero.

Teste sua compreensão da Seção 4.1 A Figura 4.6 mostra uma força $\vec{F}$ atuando sobre um engradado. Com os eixos x e y mostrados na figura, qual afirmação sobre os componentes da força *gravitacional* que a Terra exerce sobre o engradado (o peso do engradado) está *correta*? i) Os componentes x e y são ambos positivos; ii) O componente x é zero e o componente y é positivo; iii) O componente x é negativo e o componente y é positivo; iv) Os componentes x e y são ambos negativos; v) O componente x é zero e o componente y é negativo; vi) O componente x é positivo e o componente y é negativo. ∎

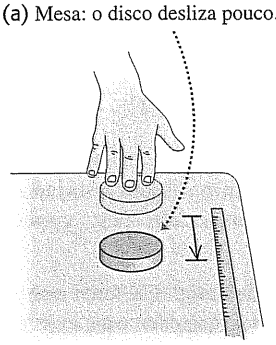
4.2 Primeira lei de Newton

Discutimos algumas propriedades das forças, mas até agora não mencionamos sobre como as forças afetam o movimento. Para começar, vamos verificar o que ocorre quando a força resultante sobre um corpo é igual a *zero*. Quando um corpo está em repouso, e se nenhuma força resultante atua sobre ele (isto é, nenhuma força puxa ou empurra o corpo), você certamente concorda que esse corpo deve permanecer em repouso. Porém, o que ocorre quando o corpo está em *movimento* e a força resultante sobre ele é igual a zero?

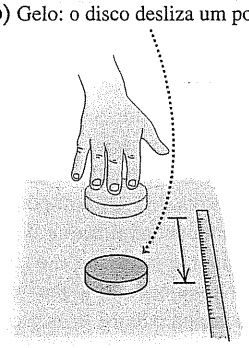
Para ver o que ocorre nesse caso, suponha que você jogue um disco de hóquei sobre o topo de uma mesa horizontal aplicando sobre ele uma força horizontal com sua mão (Figura 4.9a). Depois que você parou de empurrar, o disco *não* continua a se mover indefinidamente; ele diminui de velocidade e pára. Para que seu movimento continuasse, você teria que continuar a empurrar (ou seja, aplicar uma força). O 'senso comum' levaria você a concluir que corpos em movimento devem parar naturalmente e que seria necessário aplicar uma força para sustentar o movimento.

Imagine agora que você empurre o disco de hóquei sobre uma superfície plana de gelo (Figura 4.9b). Depois que você parar de empurrar, o disco percorrerá uma distância maior antes de parar. Coloque-o em uma mesa com um colchão de ar, de modo que ele flutue dentro de uma camada de ar; nesse caso ele percorre uma distância muito maior (Figura 4.9c). Em cada caso, o *atrito*, uma força de

(a) Mesa: o disco desliza pouco.



(b) Gelo: o disco desliza um pouco mais.



(c) Colchão de ar: o disco desliza ainda mais.

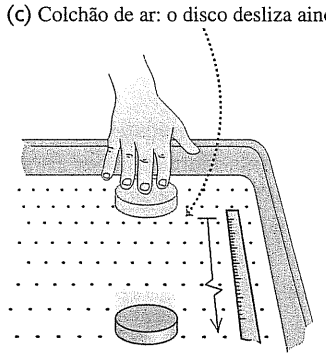


Figura 4.9 Quanto mais lisa a superfície, mais longe um disco desliza após tomar uma velocidade inicial. Se ele se move em um colchão de ar sobre a mesa (c), a força de atrito é praticamente zero, de modo que o disco continua a deslizar com velocidade quase constante.

interação entre a superfície do disco e a superfície sobre a qual ele desliza, é responsável pela diminuição da velocidade do disco; a diferença entre os três casos é o módulo da força de atrito. O gelo exerce uma força de atrito menor do que a força de atrito da superfície do topo da mesa, de modo que o disco percorre uma distância maior antes de parar. As moléculas de ar exercem a menor força de atrito entre as três. Caso fosse possível eliminar completamente o atrito, a velocidade do disco não diminuiria nunca e não precisaríamos de nenhuma força para mantê-lo em movimento. Portanto, o 'senso comum' de que seria necessário aplicar uma força para sustentar o movimento é *incorreto.*

Experiências como as que acabamos de descrever mostram que quando a força resultante é igual a zero o corpo ou está em repouso ou se move em linha reta com velocidade constante. Uma vez iniciado o movimento, não seria necessária nenhuma força resultante para mantê-lo. Este é o enunciado da *primeira lei de Newton:*

Primeira lei de Newton: Quando a força resultante sobre um corpo é igual a zero, ele se move com velocidade constante (que pode ser nula) e aceleração nula.

A tendência de um corpo em permanecer deslocando-se, uma vez iniciado o movimento, resulta de uma propriedade denominada **inércia**. Você usa essa propriedade quando tenta se servir de *ketchup* sacudindo sua embalagem. Inicialmente, quando você movimenta a embalagem para baixo (com o *ketchup* dentro), o conteúdo tende a se mover para baixo; quando você inverte o movimento, o *ketchup* continua a mover-se para a frente e vai terminar no seu hambúrguer. A tendência de um corpo parado manter-se em repouso é também decorrente da inércia. Você já deve ter visto uma experiência na qual a louça distribuída sobre uma toalha de mesa não cai após a toalha ser puxada repentinamente. A força de atrito sobre a porcelana durante o intervalo de tempo muito curto não é suficiente para que ela se mova, logo ela permanece praticamente em repouso.

É relevante notar que na primeira lei de Newton o que importa é conhecer a força *resultante*. Por exemplo, um livro de física em repouso sobre uma mesa horizontal possui duas forças atuando sobre ele: uma força de cima para baixo, oriunda da atração gravitacional que a Terra exerce sobre ele (uma força de longo alcance que atua sempre, independentemente da altura da mesa; Figura 4.2d) e uma força de baixo para cima, oriunda da reação de apoio da mesa (uma força normal; Figura 4.2a). A reação de apoio da mesa de baixo para cima é igual à força da gravidade de cima para baixo, de modo que a força *resultante* que atua sobre o livro (ou seja, a soma vetorial das duas forças) é igual a zero. De acordo com a primeira lei de Newton, se o livro está em repouso sobre a mesa, ele deve permanecer em repouso. O mesmo princípio pode ser aplicado a um disco de hóquei se deslocando sobre uma superfície horizontal sem atrito: a soma vetorial da reação de apoio da superfície de baixo para cima e da força da gravidade de cima para baixo é igual a zero. Uma vez iniciado o movimento do disco, ele deve continuar com velocidade constante porque a força *resultante* atuando sobre ele é igual a zero.

Vejamos outro exemplo. Suponha que um disco de hóquei esteja em repouso sobre uma superfície horizontal com atrito desprezível, tal como um colchão de ar sobre uma mesa ou um bloco de gelo. Se o disco estiver inicialmente em repouso e uma única força horizontal $\vec{F}_1$ atuar sobre ele (Figura 4.10a), o disco começa a se mover. Caso o disco já estivesse se movendo antes da aplicação da força, esta produziria uma variação do módulo ou da direção da velocidade escalar, ou de ambas as grandezas, dependendo da direção da força aplicada. Nesse exemplo, a força resultante é igual a $\vec{F}_1$, que *não* é igual a zero. (Existem também

duas forças verticais: a reação de apoio da superfície, de baixo para cima, e a força da gravidade, de cima para baixo. Porém, como dissemos antes, essas forças se anulam.)

Suponha agora que seja aplicada uma segunda força $\vec{F}_2$ (Figura 4.10b), igual em módulo e contrária em direção à força $\vec{F}_1$. As duas forças são antiparalelas e de mesmo módulo, ou seja, $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, portanto, a soma vetorial é igual a zero:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 + (-\vec{F}_1) = \mathbf{0}$$

Novamente, verificamos que se um corpo está parado, ele deve manter-se em repouso; se inicialmente ele já estava em movimento, deve continuar em movimento com velocidade constante. Esses resultados mostram que, na primeira lei de Newton, *força resultante igual a zero é equivalente a nenhuma força.* Isso decorre apenas do princípio da superposição de forças estudado na Seção 4.1.

Quando não existe nenhuma força atuando sobre um corpo ou quando existem diversas forças com uma soma vetorial (resultante) igual a zero, dizemos que o corpo está em **equilíbrio**. No equilíbrio, ou o corpo está em repouso ou está em movimento com velocidade constante. Para um corpo em equilíbrio, a força resultante é igual a zero:

$$\sum \vec{F} = \mathbf{0} \qquad (4.3)$$

(corpo em equilíbrio)

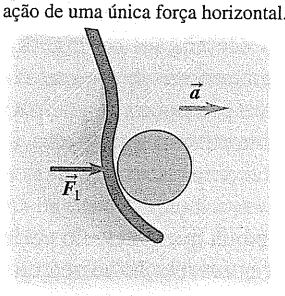
Para isso ser verdade, cada um dos componentes da força resultante deve ser igual a zero, logo:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad (4.4)$$

(corpo em equilíbrio)

Estamos supondo que o corpo possa ser representado adequadamente por uma partícula pontual. Quando o corpo possui um tamanho finito, também devemos considerar *onde* as forças estão aplicadas sobre o corpo. Voltaremos a esse ponto no Capítulo 11.

(a) Um disco sobre uma superfície sem atrito acelera quando sofre ação de uma única força horizontal.



(b) Um objeto que sofre ação de forças cujo vetor soma é igual a zero se comporta como se nenhuma força atue sobre ele.

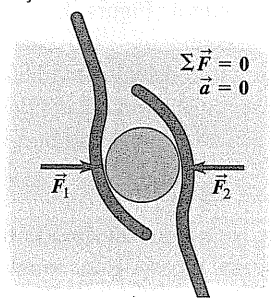


Figura 4.10 (a) Um disco de hóquei acelera no sentido de uma força resultante aplicada $\vec{F}_1$. (b) Quando a força resultante é igual a zero, a aceleração é nula e o disco está em equilíbrio.

Exemplo conceitual 4.2

FORÇA RESULTANTE NULA SIGNIFICA VELOCIDADE CONSTANTE Em um filme de ficção científica da década de 1950, uma espaçonave se move no vácuo do espaço sideral, longe de qualquer planeta, quando seu motor pára de funcionar. Em virtude disso, a espaçonave diminui de velocidade e fica em repouso. Como você aplica a primeira lei de Newton nesse evento?

SOLUÇÃO

Não existe nenhuma força atuando sobre a espaçonave, portanto, pela primeira lei de Newton, ela *não* deve parar. Ela deve continuar a se mover em linha reta com velocidade escalar constante. Alguns filmes de ficção fizeram um uso muito preciso da ciência; este não foi um deles.

Exemplo conceitual 4.3

VELOCIDADE CONSTANTE SIGNIFICA FORÇA RESULTANTE NULA Você está dirigindo um Porsche ao longo de um trecho retilíneo de teste com velocidade escalar constante igual a 150 km/h. Você ultrapassa um Volkswagen que se move com velocidade escalar constante igual a 75 km/h. Para qual dos dois carros a força resultante é maior?

SOLUÇÃO

A palavra fundamental nesta questão é 'resultante'. Os dois carros estão em equilíbrio porque se movem com velocidade constante; logo, a força *resultante* sobre cada carro é igual a *zero*. Essa conclusão parece contradizer o 'senso comum' segundo o qual o carro mais rápido deve possuir uma força motriz maior. É verdade que a força motriz do Porsche é maior do que a do Volkswagen (graças à elevada potência do Porsche). Porém, existe também uma força *para trás*, exercida sobre cada carro em virtude do atrito com o solo e da resistência do ar. O motor de cada carro produz uma força motriz para a frente, que contrabalanceia a resistência para trás, e cada carro se move com velocidade constante. A força para trás sobre o Porsche é maior por causa de sua maior velocidade, por isso o seu motor deve ser mais potente do que o do Volkswagen.

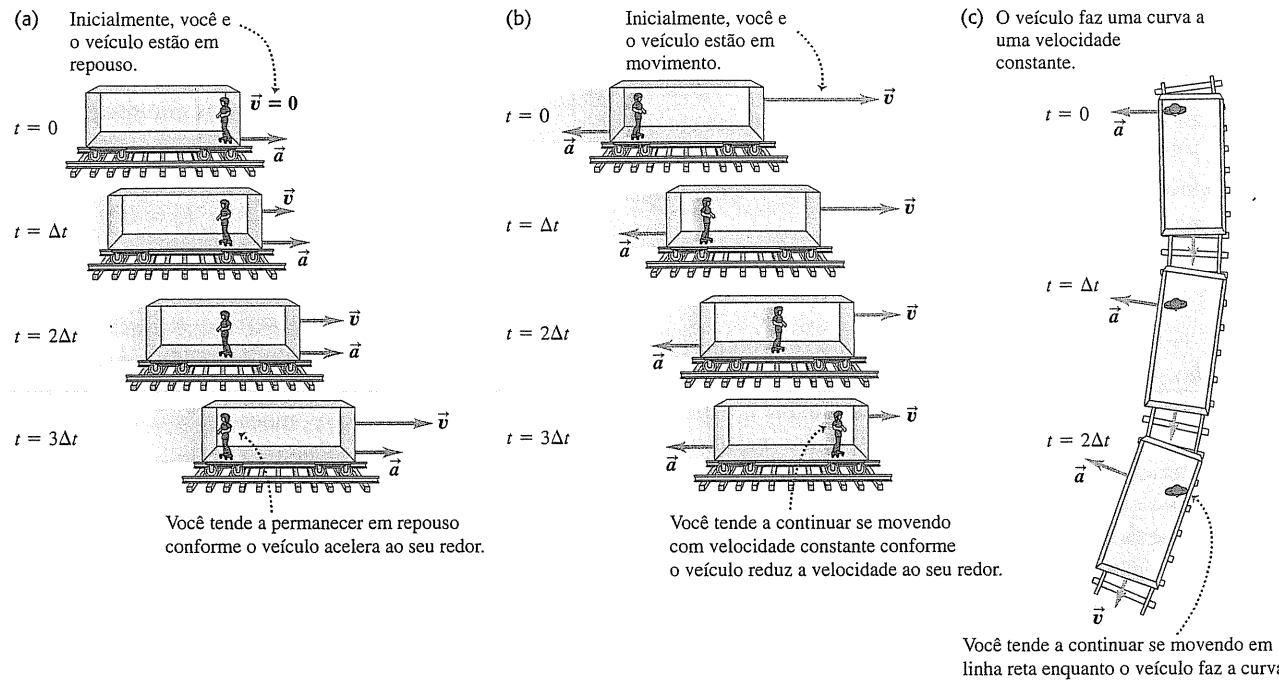


Figura 4.11 Viajando em um veículo acelerando.

Sistema de referência inercial

Ao discutirmos velocidade relativa na Seção 3.5, introduzimos o conceito de *sistema de referência*. Esse conceito é essencial para as leis de Newton do movimento. Suponha que você esteja em um ônibus que acelera ao longo de uma estrada retilínea. Se você pudesse ficar em pé apoiado em patins ao longo do eixo no interior do ônibus, você se deslocaria *para trás* em relação ao ônibus à medida que o motorista acelerasse o veículo. Ao contrário, se o ônibus freasse para parar, você começaria a se mover para a frente. Tudo se passa como se a primeira lei de Newton não estivesse sendo obedecida; aparentemente não existe nenhuma força resultante atuando sobre você, embora sua velocidade esteja variando. O que existe de errado?

O fato é que o ônibus está sendo acelerado em relação à Terra e este *não* é um sistema de referência adequado para a aplicação da primeira lei de Newton. Essa lei vale para alguns sistemas de referência e não vale para outros. Um sistema de referência para o qual a primeira lei de Newton é válida denomina-se **sistema de referência inercial**. A Terra pode ser considerada aproximadamente um sistema de referência inercial, mas não o ônibus nesse caso. (A Terra não é exatamente um sistema de referência inercial porque possui uma aceleração devida à sua rotação e por causa de seu movimento em torno do Sol. Contudo, esses efeitos são muito pequenos; veja os exercícios 3.29 e 3.32.) Como a primeira lei de Newton é usada para definir um sistema de referência inercial, algumas vezes ela é chamada *lei da inércia.*

A Figura 4.11 mostra como usar a primeira lei de Newton para compreender o que ocorre quando você viaja em um veículo em aceleração. Na Figura 4.11a, o veículo está inicialmente em repouso e a seguir começa a acelerar para a direita. Uma passageira sobre patins (cujas rodas praticamente eliminam os efeitos do atrito) não sofre quase nenhuma força resultante sobre si e por isso tende a permanecer em repouso em relação ao sistema de referência inercial da Terra. À medida que o veículo acelera para a frente, ela se move para trás em relação ao veículo. Analogamente, um passageiro em um veículo que reduz a velocidade tende a continuar se movendo com velocidade constante em relação à Terra e, portanto, move-se para a frente em relação ao veículo (Figura 4.11b). Um veículo também está acelerando quando se move a uma velocidade constante, mas faz uma curva (Figura 4.11c). Nesse caso, um passageiro tende a continuar se movendo em relação à Terra com uma velocidade constante em linha reta; em relação ao veículo, o passageiro se move lateralmente para fora da curva.

Em cada caso mostrado na Figura 4.11, um observador fixo no sistema de referência do veículo pode ser levado a concluir que *há* uma força resultante atuando sobre o passageiro, já que a velocidade dele *relativa ao veículo* varia conforme o caso. Essa conclusão está errada; a força resultante sobre o passageiro é, na verdade, igual a zero. O erro do observador do veículo está em tentar aplicar a primeira lei de Newton no sistema de referência do veículo, que *não* é um sistema de referência inercial e no qual não se aplica a primeira lei de Newton (Figura 4.12). Neste livro, usaremos *somente* sistema de referência inercial.

Mencionamos apenas um sistema de referência (aproximadamente) inercial: a superfície terrestre. Mas há muitos desses sistemas. Quando temos um sistema de referência inercial A, que obedece à primeira lei de Newton, então *qualquer* segundo sistema de referência B também será inercial, se ele se move em relação à A com velocidade constante $\vec{v}_{B/A}$. Podemos provar isso usando a relação da velocidade relativa da Equação (3.36), na Seção 3.5:

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A}$$

Suponha que P seja um corpo que se move com velocidade constante $\vec{v}_{P/A}$ em relação a um sistema de referência inercial A. Pela primeira lei de Newton, a força resultante sobre esse corpo é igual a zero. A velocidade de P relativa a outro sistema de referência B possui um valor diferente, $\vec{v}_{P/B} = \vec{v}_{P/A} - \vec{v}_{B/A}$. Mas, se a velocidade relativa $\vec{v}_{B/A}$ dos dois sistemas for constante, então $\vec{v}_{P/B}$ também é constante. Logo, B também é um sistema de referência inercial; a velocidade de P nesse sistema de referência é constante e a força resultante sobre P é igual a zero, portanto, a primeira lei de Newton é seguida em B. Observadores nos sistemas A e B discordarão sobre a velocidade de P, mas concordarão que P possui velocidade constante (aceleração zero) e força resultante nula atuando sobre ele.

Na formulação das leis de Newton, não há nenhum sistema de referência inercial privilegiado. Se um sistema de referência é inercial, então qualquer outro sistema que se mova em relação a ele com velocidade constante também é inercial. Sob esse ponto de vista, o estado de repouso e o estado de movimento com velocidade constante não são muito diferentes; ambos ocorrem quando o vetor soma das forças que atuam sobre o corpo é igual a zero.

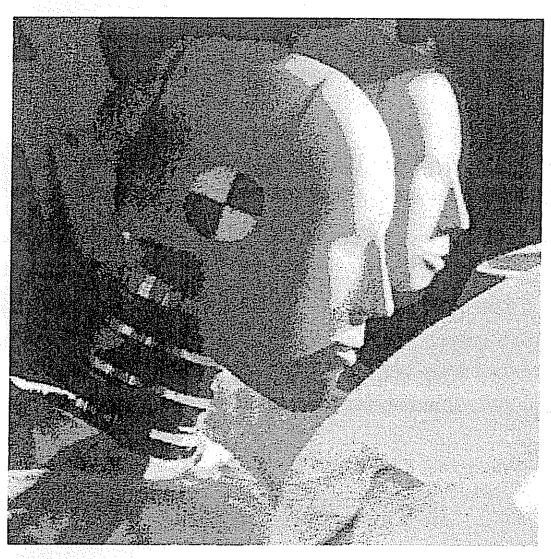


Figura 4.12 A partir do sistema de referência do carro, parece que uma força empurra os bonecos de teste de colisão para a frente, quando o carro freia repentinamente. Conforme o carro pára, os bonecos continuam a se mover para a frente como conseqüência da primeira lei de Newton.

Teste sua compreensão da Seção 4.2 Em qual das seguintes situações a força resultante que atua sobre um corpo é igual a zero? i) Um vôo de avião que se desloca para o norte, com altura e velocidade constantes a 120 m/s; ii) Um carro subindo uma colina, com 3° de inclinação e velocidade constante 90 km/h; iii) Uma águia voando em círculo a constantes 20 km/h e 15 m de altura sobre um campo aberto; iv) Uma caixa com superfícies lisas, sem atrito, transportada por um caminhão que acelera em uma estrada plana a 5 m/s^2. ∎

4.3 Segunda lei de Newton

Segundo a primeira lei de Newton, quando um corpo sofre uma força resultante nula, ele se move com velocidade constante e aceleração zero. Na Figura 4.13a, um disco de hóquei desliza da esquerda para a direita sobre uma superfície de gelo. O atrito é desprezível, portanto não há forças horizontais atuando sobre o disco; a força da gravidade, que atua de cima para baixo, e a força normal exercida pela superfície de gelo, que atua de baixo para cima, somam zero. Logo, a força resultante $\sum\vec{F}$ que atua sobre o disco é nula, o disco possui aceleração zero e sua velocidade é constante.

Mas o que acontece quando a força resultante é *diferente* de zero? Sobre um disco em movimento, na Figura 4.13b, aplicamos uma força horizontal constante na mesma direção e sentido em que ele se move. Logo, $\sum\vec{F}$ é constante e se desloca na mesma direção horizontal de $\vec{v}$. Descobrimos que enquanto a força está atuando, a velocidade do disco varia a uma taxa constante; ou seja, o disco se move com aceleração constante. A velocidade escalar do disco aumenta, de modo que a aceleração $\vec{a}$ está na mesma direção de $\vec{v}$ e $\sum\vec{F}$.

Na Figura 4.13c, invertemos o sentido da força sobre o disco, de modo que $\sum\vec{F}$ atue em oposição a $\vec{v}$. Também nesse caso, o disco possui uma aceleração; o disco se move cada vez mais lentamente para a direita. A aceleração $\vec{a}$ neste caso é para a esquerda, na mesma direção de $\sum\vec{F}$. Como no caso anterior, a experiência prova que a aceleração será constante, se $\sum\vec{F}$ for constante.

Concluímos que *uma força resultante que atua sobre um corpo faz com que o corpo acelere na mesma direção que a força resultante.* Se o módulo da força resultante for constante, como nas figuras 4.13b e 4.13c, assim será o módulo de aceleração.

Essas conclusões sobre força resultante e aceleração também se aplicam a um corpo que se move ao longo de uma trajetória curva. Por exemplo, a Figura 4.14 mostra um disco de hóquei que se desloca em um círculo horizontal sobre uma superfície de gelo, com atrito desprezível. Uma corda que prende o disco à superfície de gelo exerce uma força de tensão de módulo constante orientado para o interior do círculo. O resultado é uma força resultante e

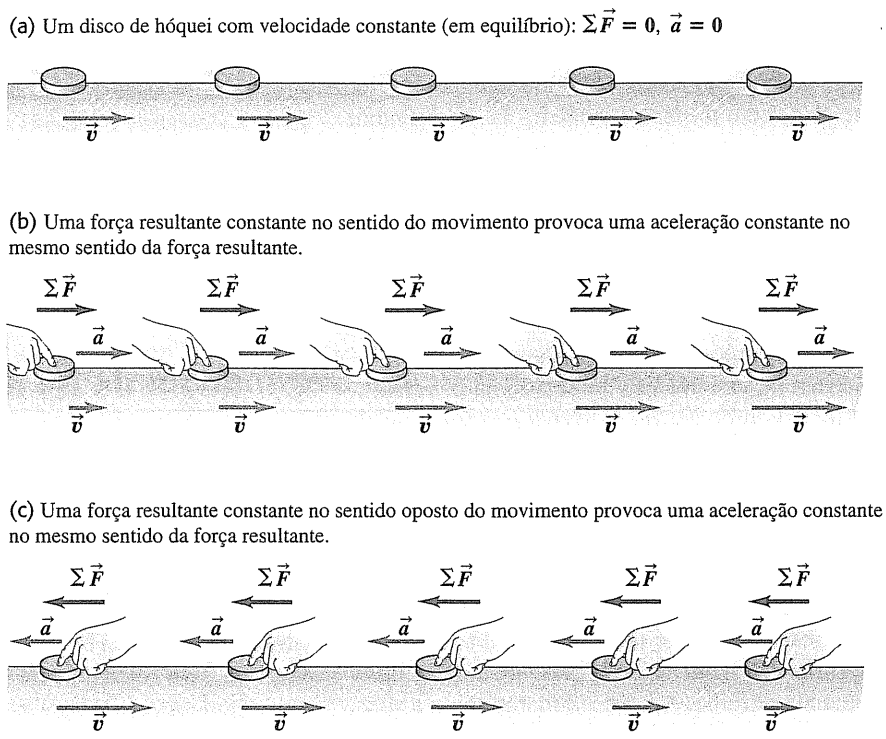


Figura 4.13 Vamos explorar a relação entre a aceleração de um corpo e a força resultante que atua sobre ele (neste caso, um disco de hóquei sobre uma superfície sem atrito).

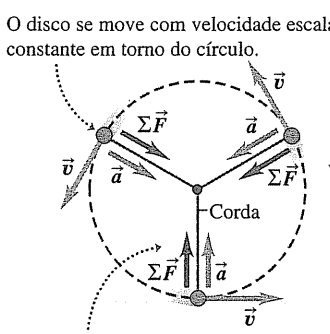


Figura 4.14 Visão aérea de um disco de hóquei em movimento circular uniforme sobre uma superfície horizontal sem atrito.

uma aceleração que são constantes em módulo e direcionadas para o centro do círculo. A velocidade escalar do disco é constante, logo identificamos um movimento circular uniforme, como foi discutido na Seção 3.4.

A Figura 4.15a mostra outra experiência para explorar a relação entre a aceleração e a força resultante que atua sobre um corpo. Aplicamos uma força horizontal constante sobre um disco de hóquei em uma superfície horizontal sem atrito, usando o dinamômetro descrito na Seção 4.1 com a mola esticada a um valor constante. Tanto na Figura 4.13b quanto na Figura 4.13c, essa força horizontal é igual à força resultante que atua sobre o disco.

Fazendo variar o módulo da força resultante, a aceleração varia com a mesma proporção. Dobrando-se a força resultante, a aceleração dobra (Figura 4.15b); usando-se metade da força resultante, a aceleração se reduz à metade (Figura 4.15c) e assim por diante. Diversas experiências

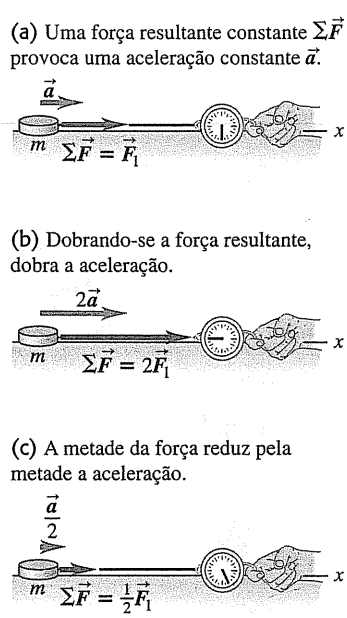


Figura 4.15 Para um corpo de uma dada massa m, o módulo da aceleração do corpo é diretamente proporcional ao módulo da força resultante que atua sobre o corpo.

análogas mostram que, *para qualquer dado objeto, o módulo da aceleração é diretamente proporcional ao módulo da força resultante que atua sobre o corpo.*

Massa e força

Nossos resultados significam que, para um dado corpo, a *razão* entre o módulo da força resultante $|\sum\vec{F}|$ e o módulo da aceleração $a = |\vec{a}|$ é constante, independentemente do módulo da força resultante. Essa razão denomina-se *massa inercial* do corpo, ou simplesmente **massa**, e será representada por m. Ou seja:

$$m = \frac{|\sum\vec{F}|}{a} \quad \text{ou} \quad |\sum\vec{F}| = ma \quad \text{ou} \quad a = \frac{|\sum\vec{F}|}{m} \tag{4.5}$$

A massa mede quantitativamente a inércia, já discutida na Seção 4.2. Conforme a última das equações na Equação (4.5), quanto maior a massa, mais um corpo 'resiste' a ser acelerado. Quando você segura uma fruta e a joga levemente para cima e para baixo para estimar seu peso, você está aplicando uma força e observando quanto a fruta acelera, para cima e para baixo em resposta. Se uma força produz uma aceleração grande, a massa da fruta é pequena; se a mesma força produz uma aceleração pequena, a massa da fruta é grande. Similarmente, se você aplicar a mesma força em uma bola de tênis de mesa e depois em uma bola de basquete, vai notar que a bola de basquete possui uma aceleração menor porque sua massa é muito maior.

A unidade SI de massa é o **quilograma.** Mencionamos na Seção 1.3 que o quilograma é oficialmente definido como a massa de um padrão de uma liga de irídio-platina mantido em uma repartição de pesos e medidas próxima de Paris. Podemos usar esse quilograma padrão, juntamente com a Equação (4.5), para definir o **newton**:

Um newton é o valor de uma força que imprime a um corpo de um quilograma de massa uma aceleração de um metro por segundo ao quadrado.

Podemos usar essa definição para calibrar um dinamômetro e outros instrumentos destinados a medir forças. Por causa da maneira como definimos o newton, ele é relacionado com as unidades de comprimento, massa e tempo. Para que a Equação (4.5) seja dimensionalmente coerente, a seguinte relação precisa ser verdadeira

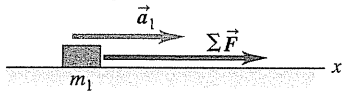
1 newton = (1 quilograma) (1 metro por segundo ao quadrado)

ou

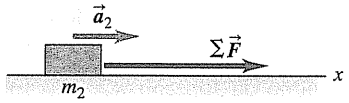
$$1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Usaremos esta relação muitas vezes nos próximos capítulos, portanto ela deve ser sempre lembrada.

(a) Uma força $\sum\vec{F}$ conhecida faz com que um objeto com massa m_1 tenha uma aceleração $\vec{a}_1$.



(b) Aplicando a mesma força $\sum\vec{F}$ a um segundo objeto e observando a aceleração, podemos medir a massa.



(c) Quando as duas massas se juntam, o mesmo método mostra que a massa composta é a soma das massas individuais.

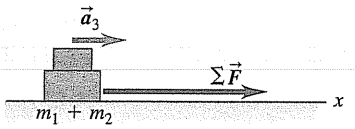


Figura 4.16 Para uma força resultante $\sum\vec{F}$ atuando sobre um corpo, a aceleração é inversamente proporcional à massa do corpo. As massas se somam como escalares comuns.

Podemos também usar a Equação (4.5) para comparar massas com a massa padrão e, portanto, *medir* massas. Suponha que aplicamos uma força resultante $\sum\vec{F}$ sobre um corpo de massa conhecida m_1 e achamos uma aceleração de módulo a_1 (Figura 4.16a). Podemos a seguir aplicar a mesma força a um outro corpo de massa m_2 e achar uma aceleração de módulo a_2 (Figura 4.16b). Então, de acordo com a Equação (4.5),

$$m_1 a_1 = m_2 a_2$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} \qquad \text{(mesma força resultante)} \tag{4.6}$$

Para a mesma força resultante, a razão entre as massas é o inverso da razão entre as acelerações. Em princípio, poderíamos usar a Equação (4.6) para medir uma massa desconhecida m_2, porém, normalmente é mais prático determinar a massa indiretamente pela medida do *peso* do corpo. Voltaremos a esse ponto na Seção 4.4.

Quando duas massas m_1 e m_2 se juntam, verificamos que elas formam um corpo composto de massa $m_1 + m_2$ (Figura 4.16c). Essa propriedade aditiva das massas parece óbvia, porém, ela deve ser verificada experimentalmente. Efetivamente, a massa de um corpo depende do número de prótons, nêutrons e elétrons que ele contém. Essa não seria uma boa *definição* de massa, visto que não existe nenhum método prático para se contar o número dessas

partículas. Contudo, o conceito de massa fornece a maneira mais fundamental para se caracterizar a quantidade de matéria contida em um corpo.

Segunda lei de Newton

Afirmamos cuidadosamente que a *força resultante* que atua sobre um corpo é a responsável pela aceleração do corpo. A experiência mostra que quando diversas forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ e assim por diante são aplicadas sobre um corpo, ele terá a mesma aceleração (módulo, direção e sentido) que teria se sobre ele atuasse uma única força dada pela soma vetorial $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots$. Em outras palavras, o princípio da superposição das forças também vale quando a força resultante que atua sobre o corpo não é zero e o corpo possui uma aceleração.

A Equação (4.5) relaciona o módulo da força resultante que atua sobre o corpo com o módulo da aceleração que ela produz. Também vimos que a força resultante possui a mesma direção e o mesmo sentido da aceleração, tanto no caso de uma trajetória retilínea quanto no caso de uma trajetória curvilínea. Newton sintetizou todas essas relações e resultados experimentais em uma única formulação denominada *segunda lei de Newton:*

Segunda lei de Newton: quando uma força resultante externa atua sobre um corpo, ele se acelera. A aceleração possui a mesma direção e o mesmo sentido da força resultante. O vetor força resultante é igual ao produto da massa do corpo pelo vetor aceleração do corpo.

Em símbolos,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad (4.7)$$

(segunda lei de Newton)

Uma formulação alternativa é que a aceleração de um corpo possui a mesma direção e o mesmo sentido da força resultante que atua sobre ele e é igual à força resultante dividida pela sua massa:

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

A segunda lei de Newton é uma lei fundamental da natureza, a relação básica entre força e movimento. No restante deste capítulo e em todo o capítulo seguinte vamos nos dedicar a estudar como aplicar esta lei em diversas circunstâncias.

A Equação (4.7) possui muitas aplicações práticas (Figura 4.17). Na realidade você já a utilizou diversas vezes para medir a aceleração do seu corpo. Na parte interna do seu ouvido, células ciliares microscópicas sentem o módulo, a direção e o sentido da força que elas devem exercer para que pequenas membranas se desloquem com a mesma aceleração do corpo inteiro. Pela segunda lei de Newton, a aceleração das membranas — e, portanto, do seu corpo inteiro — é proporcional a essa força e possui a mesma direção e o mesmo sentido. Desse modo, você pode sentir o módulo, a direção e o sentido da sua aceleração mesmo com os olhos fechados!

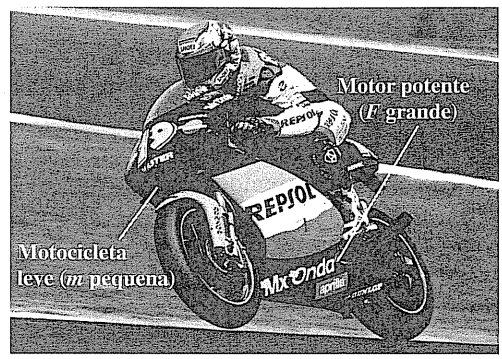


Figura 4.17 O projeto de uma motocicleta de alto desempenho depende fundamentalmente da segunda lei de Newton. Para maximizar a aceleração, o projetista deve fazer a motocicleta ser o mais leve possível (isto é, minimizar sua massa) e usar o motor mais potente possível (isto é, maximizar a força motriz).

Aplicações da segunda lei de Newton

Existem pelo menos quatro aspectos da segunda lei de Newton que necessitam de atenção especial. Primeiro, a Equação (4.7) é uma equação *vetorial*. Normalmente ela será usada mediante a forma dos componentes, escrevendo-se separadamente uma equação para cada componente da força e a aceleração correspondente:

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \sum F_z = ma_z \qquad (4.8)$$

(segunda lei de Newton)

Esse conjunto de equações para cada componente é equivalente à Equação (4.7). Cada componente da força resultante é igual à massa vezes o componente correspondente da aceleração.

Segundo, a segunda lei de Newton refere-se a forças *externas*. Com isso queremos dizer que essas forças são exercidas por outros corpos existentes em suas vizinhanças. É impossível um corpo afetar seu próprio movimento exercendo uma força sobre si mesmo; se isso fosse possível, você poderia dar um pulo até o teto puxando seu cinto de baixo para cima! É por isso que somente forças externas são incluídas em todas as somas das forças indicadas nas equações (4.7) e (4.8).

Terceiro, as equações (4.7) e (4.8) são válidas apenas quando a massa m é *constante*. É fácil imaginar sistemas que possuem massas variáveis, como um caminhão-tanque vazando líquido, um foguete se deslocando ou um vagão em movimento em uma estrada de ferro sendo carregado com carvão. Porém, tais sistemas são mais bem estudados mediante o conceito de momento linear; esse assunto será abordado no Capítulo 8.

Finalmente, a segunda lei de Newton é válida somente em sistemas de referência inerciais, como no caso da primeira lei de Newton. Portanto, ela não vale para nenhum dos veículos acelerados indicados na Figura 4.11; em relação a qualquer um desses sistemas, o passageiro acelera, embora a força resultante seja igual a zero. Geralmente supomos que a Terra seja aproximadamente um sistema de referência inercial, entretanto, devido ao movimento de rotação e ao movimento orbital, este sistema não é exatamente inercial.

ATENÇÃO $m\vec{a}$ **não é uma força** Observe que, embora a grandeza $m\vec{a}$ seja igual ao vetor soma $\sum\vec{F}$ de todas as forças atuando sobre o copo, o vetor $m\vec{a}$ *não* é uma força. A aceleração é o *resultado* de uma força resultante diferente de zero; não é um força propriamente dita. De acordo com o 'senso comum', existe uma 'força de aceleração' que empurra você contra o assento do carro quando você acelera bruscamente o carro a partir do repouso. Porém, *tal força não existe*; em vez disso, a sua inércia determina que você fique em repouso em relação à Terra e o carro acelere para a frente (Figura 4.11a). A confusão provocada pelo 'senso comum' é que se tenta aplicar a segunda lei de Newton a um sistema de referência onde ela não vale, como o sistema de referência não inercial de um carro com aceleração. Vamos sempre estudar somente movimentos em relação a um sistema de referência *inercial*.

Para aprender a usar a segunda lei de Newton, vamos começar neste capítulo com exemplos de movimento retilíneo. No Capítulo 5 examinaremos casos mais gerais e desenvolveremos estratégias para a solução de problemas mais detalhados aplicando a segunda lei de Newton.

Exemplo 4.4

DETERMINAÇÃO DA ACELERAÇÃO A PARTIR DA FORÇA

Um trabalhador aplica uma força horizontal constante de módulo igual a 20 N sobre uma caixa de massa igual a 40 kg que está em repouso sobre uma superfície horizontal com atrito desprezível. Qual é a aceleração da caixa?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema envolve força e aceleração. Sempre que encontrar um problema deste tipo, você deve abordá-lo usando a segunda lei de Newton.

PREPARAR: os primeiros passos para resolver *qualquer* problema envolvendo forças são escolher o sistema de coordenadas e identificar todas as forças que atuam sobre o corpo em questão. Geralmente é conveniente tomar um eixo ao longo da direção da aceleração do corpo, que neste caso é horizontal, ou em oposição a ela. Escolhemos o eixo $+Ox$ no mesmo sentido da força (ou seja, a direção e o sentido em que a caixa acelera) e o eixo $+Oy$ apontando para cima (Figura 4.18). Na maioria dos problemas referentes à força (inclusive este), os vetores de força ficam em um plano e por isso o eixo Oz não é usado.

As forças que atuam sobre a caixa são (i) a força horizontal $\vec{F}$ exercida pelo trabalhador com módulo 20 N; (ii) o peso $\vec{p}$ da caixa, ou seja, a força de cima para baixo oriunda da atração gravitacional da Terra; e (iii) a força de reação de baixo para cima $\vec{n}$ exercida pela superfície sobre o corpo. Como na Seção 4.2, denominamos a força $\vec{n}$ de força *normal* porque ela é normal (perpendicular) à superfície de contato. (Usamos a letra n em itálico para não confundir com a abreviação N, reservada para o newton, unidade de força.) O enunciado diz que o atrito é desprezível, de modo que não incluímos nenhuma força de atrito. Como a caixa não se move verticalmente, a aceleração y é zero: $a_y = 0$. Nossa incógnita é o componente x da aceleração, a_x, que determinaremos usando a segunda lei de Newton na forma de componentes, conforme a Equação (4.8).

A caixa não possui aceleração vertical, portanto a soma dos componentes verticais da força resultante é igual a zero. No entanto, para maior clareza, mostramos as forças verticais atuando sobre a caixa.

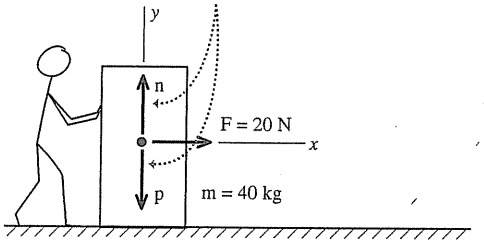


Figura 4.18 Nosso desenho desse problema. O piso sob a caixa acabou de ser encerado, por isso assumimos que o atrito é desprezível.

EXECUTAR: na Figura 4.18, apenas a força 20 N possui componente x diferente de zero. Logo, de acordo com a primeira relação na Equação (4.8)

$$\sum F_x = F = 20\ \text{N} = ma_x$$

Logo, o componente x da aceleração é

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{20\ \text{N}}{40\ \text{kg}} = \frac{20\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{40\ \text{kg}} = 0{,}50\ \text{m/s}^2$$

AVALIAR: a aceleração possui a direção e o sentido do eixo $+Ox$, a mesma direção e o mesmo sentido da força resultante. A força resultante é constante, logo a aceleração também é constante. Caso fossem dadas a posição inicial e a velocidade inicial da caixa, poderíamos achar a posição e a velocidade em qualquer instante pela equação do movimento com aceleração constante que deduzimos no Capítulo 2.

Note que, para determinar a_x, não tivemos que usar o componente y da segunda lei de Newton dada pela Equação (4.8), $\sum F_y = ma_y$. Usando essa equação, você poderia demonstrar que o módulo n da força normal, nessa situação, é igual ao peso da caixa?

Exemplo 4.5

DETERMINAÇÃO DA FORÇA A PARTIR DA ACELERAÇÃO

Uma garçonete empurra uma garrafa de *ketchup* de massa igual a 0,45 kg ao longo de um balcão liso e horizontal. Quando a garrafa deixa sua mão, ela possui velocidade de 2,8 m/s, que depois diminui por causa do atrito horizontal constante exercido pela superfície superior do balcão. A garrafa percorre uma distância de 1,0 m até parar. Determine o módulo, a direção e o sentido da força de atrito que atua na garrafa.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como no Exemplo 4.4, este problema envolve forças e aceleração (a redução na velocidade do pote de *ketchup*), portanto usaremos a segunda lei de Newton para resolvê-lo.

PREPARAR: como no Exemplo 4.4, o primeiro passo é escolher o sistema de coordenadas e depois identificar as forças que atuam sobre o corpo (neste caso, o pote de *ketchup*). Conforme a Figura 4.19, escolhemos o eixo $+Ox$ no mesmo sentido em que desliza, sendo $x_0 = 0$ o ponto onde ela deixa a mão da garçonete com a velocidade inicial de 2,8 m/s. As forças que atuam sobre a garrafa também são indicadas na Figura 4.19. A força de atrito $\vec{f}$ atua para fazer diminuir a velocidade inicial do pote, de modo que seu sentido deve ser oposto ao da velocidade (veja a Figura 4.13c).

Nossa variável-alvo é o módulo f da força de atrito, que encontraremos usando o componente x da segunda lei de Newton, conforme a Equação (4.8). Para isso, primeiro necessitamos saber o componente x da aceleração do pote. O valor de a_x não é fornecido, mas sabemos que a força de atrito é constante. Logo, a aceleração também é constante e podemos calcular a_x usando uma das fórmulas da aceleração constante da Seção 2.4. Como conhecemos a coordenada x e a velocidade x iniciais ($x_0 = 0$, $v_{0x} = 2{,}8$ m/s), assim como as finais ($x = 1{,}0$ m, $v_x = 0$), a equação mais fácil de usar para determinar a_x é a Equação (2.13), $v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$.

EXECUTAR: conforme a Equação (2.13),

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

$$a_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2(x - x_0)} = \frac{(0\text{ m/s})^2 - (2{,}8\text{ m/s})^2}{2(1{,}0\text{ m} - 0\text{ m})} = -3{,}9\text{ m/s}^2$$

O sinal negativo indica que o sentido da aceleração é para a *esquerda*; a velocidade possui sentido contrário ao da aceleração, como é de se esperar, pois o pote está diminuindo de velocidade. A força resultante na direção de x é $-f$, o componente x da força de atrito, logo

$$\sum F_x = -f = ma_x = (0{,}45\text{ kg})(-3{,}9\text{ m/s}^2)$$
$$= -1{,}8\text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = -1{,}8\text{ N}$$

O sinal negativo indica novamente que o sentido da força é para a esquerda. O módulo da força de atrito é dado por $f = 1{,}8$ N. Lembre-se de que esse módulo é *sempre* positivo!

AVALIAR: escolhemos o eixo $+Ox$, na mesma direção e sentido do movimento do pote, de modo que a_x fosse negativo. Para conferir o resultado, tente repetir o cálculo com o eixo $+Ox$, no sentido *oposto* ao movimento (para a esquerda na Figura 4.19), de modo que a_x seja positivo. Nesse caso, você deve encontrar que $\sum F_x$ é igual a $+f$ (porque a força de atrito agora é na direção $+x$), que, por sua vez, é igual a $+1{,}8$ N. Suas respostas para os *módulos* das forças (que são sempre números positivos) nunca devem depender da sua escolha dos eixos das coordenadas!

Desenhamos um diagrama para o movimento do pote e outro para as forças que atuam sobre ele.

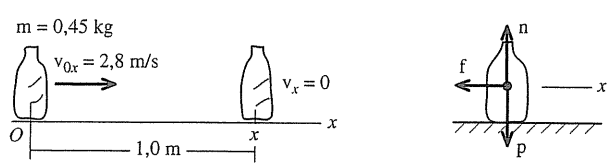


Figura 4.19 Nosso desenho desse problema.

Algumas observações sobre unidades

É conveniente fazer algumas observações sobre unidades. No sistema métrico cgs (não usado neste livro), a unidade de massa é o grama, igual a 10^{-3} kg, e a unidade de distância é o centímetro, igual a 10^{-2} m. A unidade de força correspondente denomina-se *dina:*

$$1\text{ dina} = 1\text{ g} \cdot \text{cm/s}^2 = 10^{-5}\text{ N}$$

No sistema inglês, a unidade de força é a *libra* (ou libra-força) e a unidade de massa é o *slug* (Figura 4.20). A unidade de aceleração é 1 pé/s^2, logo,

$$1\text{ libra} = 1\text{ slug} \cdot \text{pé/s}^2$$

A definição oficial da libra é

$$1\text{ libra} = 4{,}448221615260\text{ newtons}$$

É útil lembrar que uma libra é aproximadamente 4,4 N e um newton é aproximadamente 0,22 libra. Da próxima vez que quiser pedir 'um quarto de libra', tente pedir 'um newton' para ver o que acontece. Outro fato útil: um corpo com massa de 1 kg possui peso de aproximadamente 2,2 lb na superfície terrestre.

Na Tabela 4.2 apresentamos um resumo das unidades de força, massa e aceleração dos três sistemas.

Tabela 4.2 Unidades de força, massa e aceleração

Sistema de Unidades	Força	Massa	Aceleração
SI	newton (N)	quilograma (kg)	m/s^2
cgs	dina (dyn)	grama (g)	cm/s^2
Inglês	libra (lb)	slug	pés/s^2

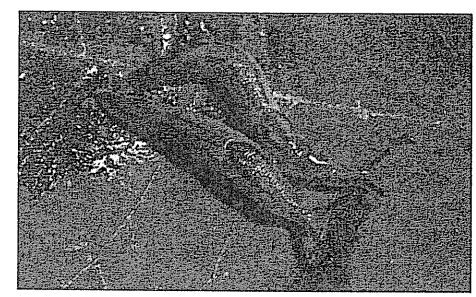


Figura 4.20 Uma lesma típica de jardim possui massa aproximadamente igual a 10^{-3} slug ou cerca de 15 gramas.

Teste sua compreensão da Seção 4.3 Classifique as seguintes situações por ordem crescente de módulo da aceleração do objeto. Há algum caso com o mesmo módulo de aceleração? i) Um objeto de 2,0 kg que sofre uma força resultante de 2,0 N; ii) Um objeto de 2,0 kg que sofre uma força resultante de 8,0 N; iii) Um objeto de 8,0 kg que sofre uma força resultante de 2,0 N; iv) Um objeto de 8,0 kg que sofre uma força resultante de 8,0 N. ∎

4.4 Massa e peso

O *peso* de um corpo é uma das forças mais familiares que a Terra exerce sobre o corpo. (Quando você estiver em outro planeta, seu peso será a força gravitacional que o planeta exerce sobre você.) Infelizmente, os termos *massa* e *peso* em geral são mal empregados e considerados sinônimos em nossa conversação cotidiana. É extremamente importante que você saiba a diferença entre estas duas grandezas físicas.

A massa caracteriza a propriedade da *inércia* de um corpo. Por causa de sua massa, a louça fica praticamente em repouso sobre a mesa quando você puxa repentinamente a toalha. Quanto maior a massa, maior a força necessária para produzir uma dada aceleração; isso se reflete na segunda lei de Newton, $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$.

O peso de um corpo, por outro lado, é a *força* de atração gravitacional exercida pela Terra sobre o corpo. Massa e peso se relacionam: um corpo que possui massa grande também possui peso grande. É difícil lançar horizontalmente uma pedra grande porque ela possui *massa* grande, e é difícil levantá-la porque ela possui *peso* grande.

Para compreender a relação entre massa e peso, note que um corpo em queda livre possui uma aceleração igual a g, e de acordo com a segunda lei de Newton uma força deve produzir essa aceleração. Quando um corpo de 1 kg cai com aceleração igual a 9,8 m/s^2, a força necessária possui o seguinte módulo

$$F = ma = (1\text{ kg})\,(9{,}8\text{ m/s}^2) = 9{,}8\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2 = 9{,}8\text{ N}$$

A força que faz o corpo acelerar de cima para baixo é o *peso* do corpo. Qualquer corpo próximo da superfície da Terra que possua massa de 1 kg *deve* possuir um peso igual a 9,8 N para que ele tenha a aceleração que observamos quando o corpo está em queda livre. Generalizando, qualquer corpo de massa m deve possuir um peso com módulo p dado por

$$p = mg \text{ (módulo do peso de um corpo de massa } m) \qquad (4.9)$$

Logo, o módulo p do peso de um corpo é diretamente proporcional à sua massa m. O peso de um corpo é uma força, uma grandeza vetorial, de modo que podemos escrever a Equação (4.9) como uma equação vetorial (Figura 4.21):

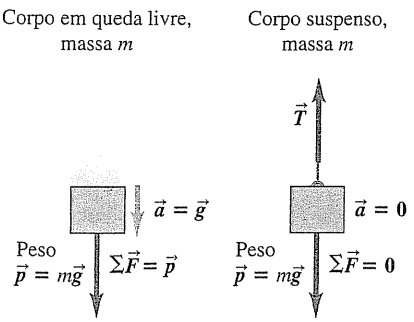


Figura 4.21 A relação entre massa e peso.

$$\vec{p} = m\vec{g} \qquad (4.10)$$

Lembre-se de que g é o *módulo* de $\vec{g}$, a aceleração da gravidade, logo, g é sempre um número positivo. Portanto, p, dado pela Equação (4.9), é o *módulo* do peso e também é sempre um número positivo.

ATENÇÃO O peso de um corpo atua eternamente É importante assinalar que o peso de um corpo atua *eternamente* sobre o corpo, independentemente de ele estar ou não em queda livre. Quando um objeto de 10 kg está em equilíbrio, suspenso por uma corrente, sua aceleração é igual a zero. Porém, seu peso, dado pela Equação (4.10), continua puxando-o para baixo (Figura 4.21). Nesse caso, a corrente exerce uma força que puxa o objeto de baixo para cima. A *soma vetorial* das forças é igual a zero, mas o peso ainda atua.

Exemplo conceitual 4.6

FORÇA RESULTANTE E ACELERAÇÃO EM QUEDA LIVRE No Exemplo 2.6 (Seção 2.5), uma moeda de um euro foi largada do repouso, do alto da Torre Inclinada de Pisa. Se a moeda cai em queda livre, de modo que os efeitos do ar sejam desprezíveis, como a força resultante sobre ela varia durante a queda?

SOLUÇÃO

Em queda livre, a aceleração $\vec{a}$ da moeda é constante e igual a $\vec{g}$. Portanto, de acordo com a segunda lei de Newton, a força resultante $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ também é constante e igual a $m\vec{g}$, que é o peso da moeda $\vec{p}$ (Figura 4.22). A velocidade da moeda varia enquanto

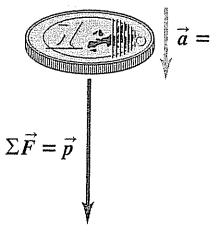


Figura 4.22 A aceleração de um objeto em queda livre é constante, assim como a força resultante que atua sobre o objeto.

ela cai, mas a força resultante que atua sobre ela permanece constante. Se isso lhe causou alguma surpresa, deve ser porque ainda acredite no 'senso comum' errôneo de que maior velocidade escalar implica em maior força. Nesse caso, você deve reler o Exemplo Conceitual 4.3.

A força resultante sobre uma moeda em queda livre é constante, mesmo que você inicialmente a jogue de baixo para cima. A força que sua mão exerceu sobre a moeda ao jogá-la é uma força de contato, que desaparece no instante em que a moeda perde contato com sua mão. A partir daí, a única força que atua sobre a moeda é seu peso $\vec{p}$.

Variação de g com o local

Usaremos $g = 9{,}80\ \text{m/s}^2$ para os problemas na superfície da Terra (ou, se os outros dados no problema forem fornecidos com apenas dois números significantes, $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$). Na realidade, o valor de g varia de um ponto a outro na superfície da Terra, desde aproximadamente $9{,}78\ \text{m/s}^2$ até aproximadamente $9{,}82\ \text{m/s}^2$, porque a Terra não é uma esfera perfeita e devido à sua rotação e seu movimento orbital. Em um ponto onde $g = 9{,}80\ \text{m/s}^2$, o peso de um quilograma padrão é igual a $p = 9{,}80$ N. Em outro ponto onde $g = 9{,}78\ \text{m/s}^2$, o peso de um quilograma seria $p = 9{,}78$ N, porém sua massa continuaria igual a 1 kg. O peso de um corpo varia de um local para outro; a massa, não.

Se levarmos um quilograma padrão para a superfície da Lua, onde a aceleração de um corpo em queda livre é de $1{,}62\ \text{m/s}^2$ (o valor de g na superfície da Lua), seu peso será 1,62 N, porém sua massa continuará igual a 1 kg (Figura 4.23). Um astronauta de 80,0 kg pesa na Terra

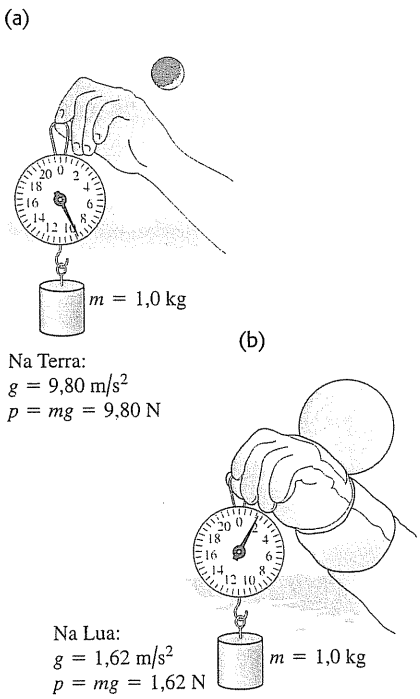


Figura 4.23 O peso de um corpo de 1 quilograma (a) na Terra e (b) na Lua.

(80,0 kg) $(9{,}80\ \text{m/s}^2) = 784$ N, mas na Lua o peso desse astronauta seria apenas (80,0 kg) $(1{,}62\ \text{m/s}^2) = 130$ N. No Capítulo 12, veremos como calcular o valor de g na superfície da Lua ou em outros mundos.

Medidas da massa e do peso

Na Seção 4.3 descrevemos um método para avaliar massas estruturado na comparação da aceleração de cada massa submetida à mesma força resultante. Contudo, normalmente, o método mais simples para avaliar a massa de um corpo consiste em medir o seu peso, geralmente mediante comparação a um padrão. De acordo com a Equação (4.9), dois corpos que possuem o mesmo peso no mesmo local devem possuir a mesma massa. Podemos comparar pesos de modo muito preciso; a familiar balança de braços iguais (Figura 4.24) permite isso com grande precisão (até 1 parte em 10^6), visto que, quando dois corpos possuem o mesmo peso no mesmo local, eles possuem a mesma massa. (Esse método não poderia ser usado em regiões do espaço sideral com valor aparente de 'gravidade nula'. Nesse caso, devemos aplicar uma dada força ao corpo, medir sua aceleração e obter a massa pela razão entre força e aceleração. Esse método, ou variantes dele, é utilizado para medir a massa de um astronauta no espaço, bem como as massas de partículas atômicas e subatômicas.)

O conceito de massa desempenha dois papéis bastante diferentes na mecânica. O peso de um corpo (a força da atração gravitacional sobre o corpo) é proporcional à sua massa; podemos denominar essa propriedade do corpo de *massa gravitacional*. Por outro lado, a propriedade inercial decorrente da segunda lei de Newton pode ser chamada de *massa inercial*. Se essas duas quantidades fossem diferentes, a aceleração da gravidade poderia ser diferente para corpos diferentes. Contudo, experiências com extraordinária precisão estabeleceram que essas massas *são* iguais, com precisão superior a uma parte em 10^{12}.

ATENÇÃO Não confunda massa com peso As unidades SI de massa e de peso são freqüentemente mal empregadas em nosso cotidiano. Expressões incorretas como 'Esta caixa pesa 6 kg' são quase universalmente usadas. Essa frase significa que a *massa* da caixa, provavelmente determinada indiretamente por *pesagem*, é igual a 6 kg. Tome cuidado para evitar esse tipo de erro nos seus trabalhos! Em unidades SI, o peso (uma força) é medido em newtons, enquanto a massa é medida em quilogramas.

Exemplo 4.7

MASSA E PESO Um carro de $2{,}49 \times 10^4$ N em movimento ao longo do eixo $+Ox$ pára repentinamente; o componente x da força resultante que atua sobre o carro é $-1{,}83 \times 10^4$ N. Qual é sua aceleração?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: usaremos novamente a segunda lei de Newton para relacionar força e aceleração. Para aplicar essa relação, necessitamos conhecer a massa do carro. Entretanto, como o newton é uma unidade de força, sabemos que $2{,}49 \times 10^4$ N é o peso do carro, não a sua massa. Logo, também usaremos a relação entre a massa de um corpo e o seu peso.

PREPARAR: nossa variável-alvo é o componente x da aceleração do carro, a_x. (O movimento é puramente orientado na direção do eixo x.) Usamos a Equação (4.9) para determinar a massa do carro a partir do seu peso e depois usamos o componente x da segunda lei de Newton, dada pela Equação (4.8), para determinar a_x.

EXECUTAR: a massa m do carro é

$$m = \frac{p}{g} = \frac{2{,}49 \times 10^4\ \text{N}}{9{,}80\ \text{m/s}^2} = \frac{2{,}49 \times 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}{9{,}80\ \text{m/s}^2}$$
$$= 2540\ \text{kg}$$

Como $\sum F_x = ma_x$, obtemos

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{-1{,}83 \times 10^4\ \text{N}}{2540\ \text{kg}} = \frac{-1{,}83 \times 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}{2540\ \text{kg}}$$
$$= -7{,}20\ \text{m/s}^2$$

AVALIAR: o sinal negativo significa que o vetor de aceleração aponta na direção $-Ox$. Isso faz sentido: o carro se desloca na direção $+Ox$ e está reduzindo a velocidade.

Note que a aceleração pode também ser escrita como $-0{,}735\,g$. Vale mencionar que $-0{,}735$ também é a razão de $-1{,}83 \times 10^4$ N (o componente x da força resultante) por $2{,}49 \times 10^4$ N (o peso). Na verdade, a aceleração de um corpo expressa como um múltiplo de g sempre é igual à razão da força resultante sobre o corpo pelo seu peso. Você sabe por quê?

Teste sua compreensão da Seção 4.4 Suponha que um astronauta aterrisse em um planeta onde $g = 19{,}6\ \text{m/s}^2$. Em comparação com a Terra, caminhar seria mais fácil, mais difícil ou igual? E apanhar uma bola que se move horizontalmente a 12 m/s? (Considere que a roupa do astronauta é um modelo leve, que não restringe em nada os seus movimentos.) ▮

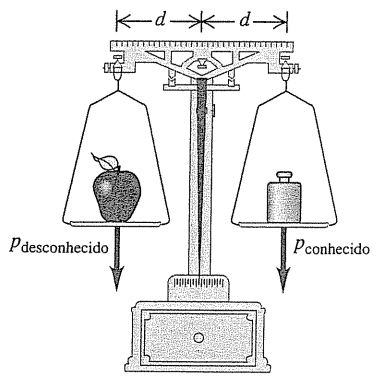


Figura 4.24 Uma balança de braços iguais determina a massa de um corpo (como maçã) comparando o seu peso a um dado peso.

4.5 Terceira lei de Newton

Uma força atuando sobre um corpo é sempre o resultado de uma interação com outro corpo, de modo que as forças sempre ocorrem em pares. Você não pode puxar a maçaneta de uma porta sem que ela empurre você para trás. Quando você chuta uma bola, a força para a frente que seu pé exerce sobre ela faz a bola mover-se ao longo da sua trajetória, porém, você sente a força que a bola exerce sobre seu pé. Quando você chuta uma rocha, a dor que você sente decorre da força que a rocha exerce sobre seu pé.

Em cada um dos casos acima, a força que você exerce sobre o corpo é igual e contrária à força que o corpo exerce sobre você. A experiência mostra que, quando dois corpos interagem, as duas forças decorrentes da interação possuem sempre o *mesmo módulo* e a *mesma direção, mas sentidos contrários*. Esse resultado denomina-se *terceira lei de Newton.*

Quando um corpo *A* exerce uma força sobre um corpo *B* (uma 'ação'), então, o corpo *B* exerce uma força sobre o corpo *A* (uma 'reação'). Essas duas forças têm o mesmo módulo e a mesma direção, mas possuem sentidos contrários. Essas duas forças atuam em corpos diferentes.

Na Figura 4.25, $\vec{F}_{A\text{ em }B}$ é a força exercida *pelo* corpo *A* (primeiro índice inferior) *sobre* o corpo *B* (segundo índice inferior) e $\vec{F}_{B\text{ em }A}$ é a força exercida *pelo* corpo *B* (primeiro índice inferior) *sobre* o corpo *A* (segundo índice inferior). O enunciado matemático da terceira lei de Newton é:

$$\vec{F}_{A\text{ em }B} = -\vec{F}_{B\text{ em }A} \qquad (4.11)$$
(terceira lei de Newton)

Não importa se um corpo é inanimado (como a bola de futebol na Figura 4.25) e o outro não (como a pessoa que chuta): eles necessariamente exercem forças mútuas que seguem a Equação (4.11).

Nesse enunciado, a 'ação' e a 'reação' são duas forças opostas (na Figura 4.25, $\vec{F}_{A\text{ em }B}$ e $\vec{F}_{B\text{ em }A}$); algumas vezes nos referimos a elas como um **par de ação e reação**. Isso *não* significa nenhuma relação de causa e efeito; qualquer uma das forças pode ser considerada como a 'ação' ou como a 'reação'. Algumas vezes dizemos simplesmente que as forças são 'iguais e contrárias', querendo dizer que elas têm o mesmo módulo e a mesma direção, mas possuem sentidos contrários.

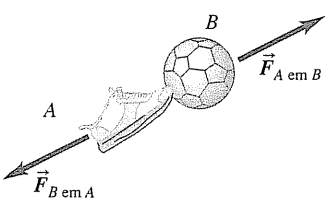


Figura 4.25 Quando um corpo *A* exerce uma força $\vec{F}_{A\text{ em }B}$, então o corpo *B* exerce uma força $\vec{F}_{B\text{ em }A}$, que possui o mesmo módulo e a mesma direção, mas sentido contrário: $\vec{F}_{A\text{ em }B} = -\vec{F}_{B\text{ em }A}$.

ATENÇÃO As duas forças no par de ação e reação atuam sobre corpos diferentes Enfatizamos que as duas forças descritas na terceira lei de Newton atuam em corpos *diferentes*. Isso é importante na solução de problemas envolvendo a primeira ou a segunda lei de Newton, que dizem respeito a forças que atuam sobre um corpo. Por exemplo, a força resultante que atua sobre a bola da Figura 4.25 é a soma vetorial do peso da bola com a força $\vec{F}_{A \text{ em } B}$ que o pé exerce sobre a bola. Nessa soma você não deve incluir a força $\vec{F}_{B \text{ em } A}$ porque essa força é exercida sobre o pé e não sobre a bola.

Na Figura 4.25, a ação e a reação são forças *de contato* que estão presentes somente enquanto os dois corpos se tocam. Porém, a terceira lei de Newton também se aplica para as forças de *longo alcance* que não necessitam do contato físico entre os corpos, como no caso da atração gravitacional. Uma bola de pingue-pongue exerce sobre a Terra uma força gravitacional de baixo para cima de mesmo módulo que a força gravitacional de cima para baixo exercida pela Terra sobre a bola. Quando você deixa a bola cair, a bola e a Terra se aproximam. O módulo da força resultante sobre cada um desses corpos é o mesmo, mas a aceleração da Terra é extremamente microscópica por causa de sua massa gigantesca. Contudo, ela se move!

Exemplo conceitual 4.8

QUAL FORÇA É MAIOR? Seu carro esportivo enguiça, e você o empurra até a oficina mais próxima. Quando o carro está começando a se mover, como a força que você exerce sobre o carro se compara com a força que o carro exerce sobre você? Como essas forças se comparam quando você empurra o carro com velocidade escalar constante?

SOLUÇÃO

Nos *dois* casos, a força que você exerce sobre o carro é igual e contrária à força que o carro exerce sobre você. É verdade que a força que você faz para iniciar o movimento é bem maior do que a força que você faz para deslocá-lo com velocidade constante. Porém, qualquer que seja a força que você faça sobre o carro, o carro exercerá sobre você uma força igual e contrária. A terceira lei de Newton sempre se aplica, estejam os corpos em repouso, movendo-se com velocidade constante ou acelerando.

Você poderá se perguntar como o carro 'sabe' empurrar de volta com o mesmo módulo de força que você exerce sobre ele. Talvez ajude lembrar que as forças que você e o carro exercem mutuamente são, de fato, interações entre os átomos na superfície da sua mão e os átomos na superfície do carro. Essas interações são análogas a molas em miniatura entre átomos adjacentes, e uma mola comprimida exerce forças igualmente potentes sobre ambas as extremidades.

Fundamentalmente, porém, sabemos que objetos de massas diferentes exercem forças recíprocas igualmente potentes porque a *experiência nos mostra isso*. Nunca se esqueça de que a física não é uma mera coleção de regras e equações; mais do que isso, trata-se de uma descrição sistemática do mundo natural baseada em experiência e observação.

Exemplo conceitual 4.9

APLICAÇÃO DA TERCEIRA LEI DE NEWTON: OBJETOS EM REPOUSO Uma maçã está em repouso sobre uma mesa. Quais são as forças que atuam sobre ela? Quais são as forças de reação a cada uma das forças que atuam sobre ela? Quais são os pares de ação e reação?

SOLUÇÃO

A Figura 4.26a mostra as forças que atuam sobre a maçã. No diagrama, $\vec{F}_{\text{Terra sobre a maçã}}$ é o peso da maçã, isto é, a força gravitacional de cima para baixo exercida *pela* Terra (primeiro índice inferior) *sobre* a maçã (quarto índice inferior). Analogamente, $\vec{F}_{\text{mesa sobre a maçã}}$ é a força de baixo para cima exercida *pela* mesa (primeiro índice inferior) *sobre* a maçã (quarto índice inferior).

Conforme a Terra puxa a maçã para baixo, a maçã puxa a Terra para cima com uma força $\vec{F}_{\text{maçã sobre a Terra}}$ de mesma intensidade, conforme mostra a Figura 4.26b. As forças $\vec{F}_{\text{maçã sobre a Terra}}$ e $\vec{F}_{\text{Terra sobre a maçã}}$ constituem um par de ação e reação, representando a interação mútua entre a maçã e a Terra, logo:

$$\vec{F}_{\text{maçã sobre a Terra}} = -\vec{F}_{\text{Terra sobre a maçã}}$$

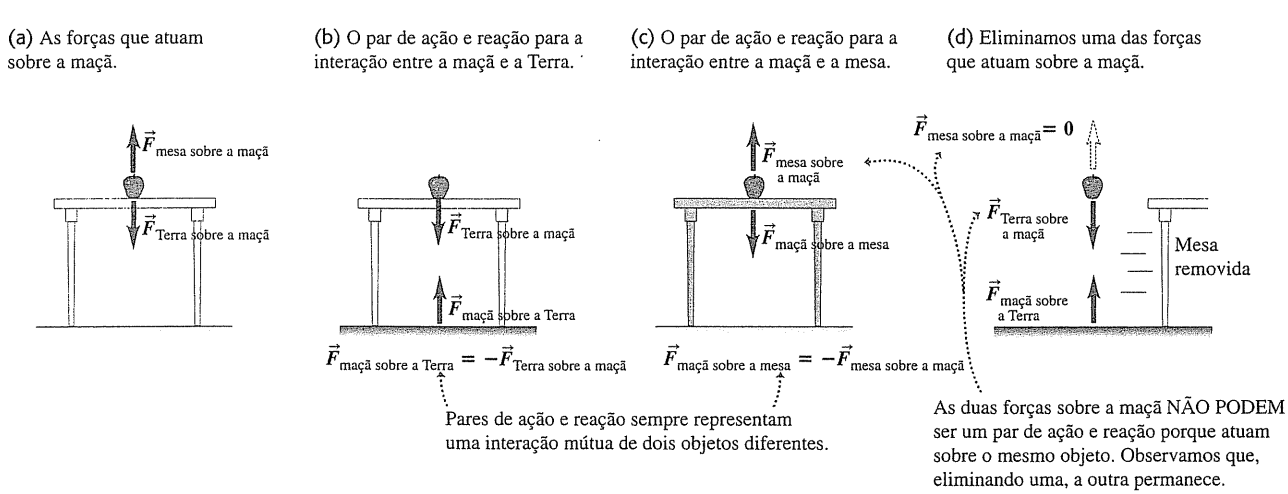


Figura 4.26 As duas forças em um par de ação e reação sempre atuam sobre corpos diferentes.

Também, como a mesa empurra a maçã para cima com uma força $\vec{F}_{\text{mesa sobre a maçã}}$, a reação correspondente é a força para baixo $\vec{F}_{\text{maçã sobre a mesa}}$ exercida pela maçã sobre a mesa (Figura 4.26c). Portanto,

$$\vec{F}_{\text{maçã sobre a mesa}} = -\vec{F}_{\text{mesa sobre a maçã}}$$

As duas forças que atuam sobre a maçã são $\vec{F}_{\text{mesa sobre a maçã}}$ e $\vec{F}_{\text{Terra sobre a maçã}}$. Elas constituem um par de ação e reação? Não, elas não formam esse par, ainda que sejam iguais e de sinais contrários. Elas não representam a interação mútua entre dois corpos; são duas forças diferentes que atuam sobre o *mesmo* corpo. *As duas forças de um par de ação e reação* ***nunca*** *atuam sobre o mesmo corpo.* Vejamos outro modo de examinar a questão. Suponha que você retire repentinamente a mesa onde a maçã repousa (Figura 4.26d). Agora, as duas forças $\vec{F}_{\text{maçã sobre a mesa}}$ e $\vec{F}_{\text{mesa sobre a maçã}}$ tornam-se nulas, porém, $\vec{F}_{\text{maçã sobre a Terra}}$ e $\vec{F}_{\text{Terra sobre a maçã}}$ continuam presentes (a força gravitacional continua atuando). Como $\vec{F}_{\text{mesa sobre a maçã}}$ é agora igual a zero, ela não é igual e oposta a $\vec{F}_{\text{terra sobre a maçã}}$. Portanto, este par não pode ser um par de ação e reação.

Exemplo conceitual 4.10

APLICAÇÃO DA TERCEIRA LEI DE NEWTON: OBJETOS EM MOVIMENTO Um pedreiro arrasta um bloco de mármore em um piso, puxando-o por meio de uma corda amarrada ao bloco (Figura 4.27a). O bloco pode ou não estar em equilíbrio. Como as diversas forças estão relacionadas? Quais são os pares de ação e reação?

SOLUÇÃO

Usaremos índices inferiores em todas as forças para auxiliar as explicações: o bloco (B), a corda (C) e o pedreiro (P). O vetor $\vec{F}_{\text{P em C}}$ representa a força exercida pelo *pedreiro* sobre a *corda*. Sua reação é a força igual e oposta $\vec{F}_{\text{C em P}}$ exercida pela *corda* sobre o *pedreiro*. O vetor $\vec{F}_{\text{C em B}}$ representa a força exercida pela *corda* sobre o *bloco*. Sua reação é a força igual e oposta $\vec{F}_{\text{B em C}}$ exercida pelo *bloco* sobre a *corda*. Para esses dois pares de ação e reação (Figura 4.27b), temos

$$\vec{F}_{\text{C em P}} = -\vec{F}_{\text{P em C}} \quad \text{e} \quad \vec{F}_{\text{B em C}} = -\vec{F}_{\text{C em B}}$$

Certifique-se de que você entendeu por que as forças $\vec{F}_{\text{P em C}}$ e $\vec{F}_{\text{B em C}}$ *não* constituem um par de ação e reação (Figura 4.27c). Essas duas forças atuam sobre o *mesmo* corpo (a corda), enquanto as duas forças de um par de ação e reação sempre *atuam* sobre corpos *diferentes*. Além disso, as forças $\vec{F}_{\text{P em C}}$ e $\vec{F}_{\text{B em C}}$ não possuem necessariamente o mesmo módulo. Aplicando a segunda lei de Newton, obtemos

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{\text{P em R}} + \vec{F}_{\text{B em R}} = m_{\text{corda}}\vec{a}_{\text{corda}}$$

Se o bloco e a corda estão acelerados (ou seja, aumentando ou reduzindo a velocidade escalar), a corda não está em equilíbrio e $\vec{F}_{\text{P em C}}$ possui módulo diferente do módulo de $\vec{F}_{\text{B em C}}$. Em contraste, o par de ação e reação $\vec{F}_{\text{P em C}}$ e $\vec{F}_{\text{C em P}}$ possui sempre o mesmo módulo, como também $\vec{F}_{\text{C em B}}$ e $\vec{F}_{\text{B em C}}$. A terceira lei de Newton vale sempre, tanto para um corpo em repouso quanto para um corpo em aceleração.

No caso especial de uma corda em equilíbrio, a força $\vec{F}_{\text{P em C}}$ possui o mesmo módulo da força $\vec{F}_{\text{B em C}}$. Esse caso, porém, é um exemplo da *primeira* lei de Newton e não da *terceira* lei de Newton. Outro modo de examinar a questão é que, em equilíbrio, $\vec{a}_{\text{corda}} = \mathbf{0}$ na equação anterior. Então, $\vec{F}_{\text{B em C}} = -\vec{F}_{\text{P em C}}$ em virtude da primeira ou da segunda lei de Newton.

Isso também é verdade quando a corda é acelerada, mas sua massa é desprezível em comparação com a massa do pedreiro ou do bloco. Nesse caso, $m_{\text{corda}} = 0$ na equação anterior, portanto novamente $\vec{F}_{\text{B em C}} = -\vec{F}_{\text{P em C}}$. Uma vez que, pela terceira lei de Newton, $\vec{F}_{\text{B em C}}$ é *sempre* igual a $-\vec{F}_{\text{C em B}}$ (elas constituem um par de ação e reação), nesses mesmos casos especiais, $\vec{F}_{\text{C em B}}$ é também igual a $\vec{F}_{\text{P em C}}$. Em outras palavras, nesses casos, a força da corda sobre o bloco é igual à força do pedreiro sobre a corda, e podemos imaginar que a corda 'transmite' ao bloco, sem nenhuma variação, a força que a pessoa exerce sobre a corda. Esse ponto de vista é útil, mas você deve se lembrar de que ele vale *apenas* quando a corda estiver em equilíbrio ou quando sua massa for desprezível.

Caso você, neste momento, esteja confundindo os índices inferiores, respire fundo. Repasse novamente essa discussão, comparando os símbolos com os diagramas vetoriais, até ter segurança dos conceitos envolvidos.

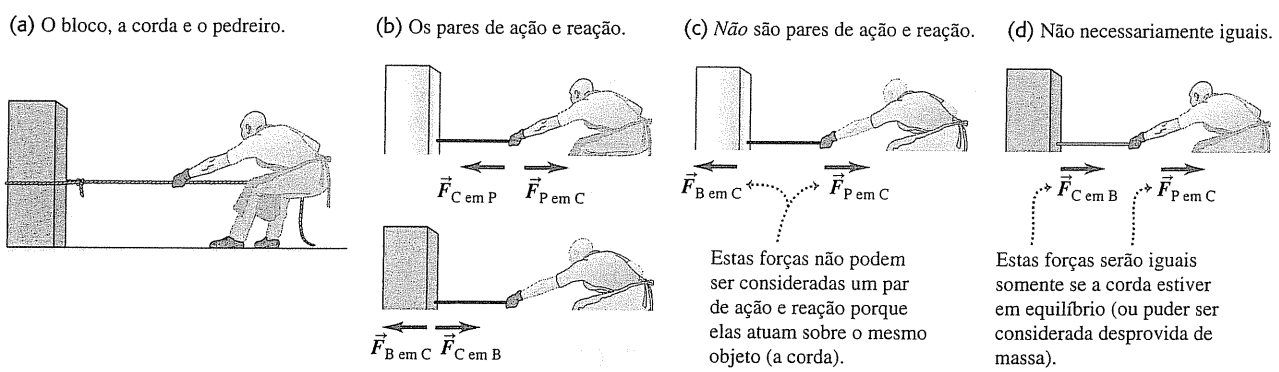


Figura 4.27 Identificação das forças em ação, quando um pedreiro puxa uma corda amarrada a um bloco.

Exemplo conceitual 4.11

UM PARADOXO DA TERCEIRA LEI DE NEWTON? No Exemplo 4.10, observamos que o pedreiro puxa com toda força a combinação corda-bloco, que o puxa de volta. Por que, então, o bloco se move enquanto o pedreiro permanece estacionário?

SOLUÇÃO

A solução para esse aparente enigma está na diferença entre a *segunda* lei de Newton e a *terceira* lei de Newton. As únicas forças envolvidas na segunda lei de Newton são aquelas que atuam *sobre* o corpo. O vetor soma dessas forças determina como o corpo acelera (e se de fato acelera). Em contraposição, a terceira lei de Newton relaciona as forças que dois corpos *diferentes* exercem mutuamente. Somente a terceira lei não revela nada sobre o movimento de qualquer um dos corpos.

Se a combinação corda-bloco está inicialmente em repouso, ela começa a deslizar se o pedreiro exercer uma força $\vec{F}_{\text{P em C}}$ que tenha módulo *maior* que a força de atrito exercida pelo piso sobre o bloco (Figura 4.28). (O bloco de mármore possui uma base lisa, que ajuda a minimizar o atrito.) Logo, existe uma força resultante sobre a combinação corda-bloco orientada para a direita e, por isso, ela acelera para a direita. Em contraposição, o pedreiro *não* se move porque a força resultante que atua sobre ele é *nula*. Ele calça sapatos com sola antiderrapante, que não escorrega no piso, de modo que a força de atrito exercida pelo piso sobre ele é forte o suficiente para contrabalançar na medida exata o puxão da corda, $\vec{F}_{\text{C em P}}$. (Tanto o bloco quanto o pedreiro também sentem uma força gravitacional de cima para baixo e uma força normal de baixo para cima exercida pelo piso. Como elas se equilibram entre si e se anulam, não as incluímos na Figura 4.28.)

Assim que o bloco começa a se mover, o pedreiro não precisa puxar com tanta força; ele precisa exercer somente uma força suficiente para contrabalançar a força de atrito sobre o bloco. Logo, a força resultante sobre o bloco que se move é igual a zero, e o bloco continua a se mover em direção ao pedreiro a uma velocidade constante, de acordo com a primeira lei de Newton.

Concluímos que o bloco se move enquanto o pedreiro fica parado, porque diferentes valores de atrito atuam sobre eles. Se o piso estivesse encerado, de modo que houvesse pouco atrito entre ele e os sapatos do pedreiro, o ato de puxar a corda faria o bloco deslizar para a direita *e* o pedreiro deslizar para a esquerda.

Esse exemplo ensina que, ao analisar o movimento de um corpo, você deve lembrar que somente as forças que atuam *sobre* o corpo determinam o seu movimento. Sob esse ponto de vista, a terceira lei de Newton é meramente uma ferramenta que pode ajudar a determinar quais são essas forças.

Quando um corpo, como a corda indicada na Figura 4.27, possui forças aplicadas em suas extremidades, dizemos que ele está sob *tensão*. A **tensão** em qualquer ponto é o módulo da força que atua nesse ponto (veja Figura 4.2c). Na Figura 4.27b, a tensão na extremidade direita da corda é o módulo de $\vec{F}_{\text{P em C}}$ (ou $\vec{F}_{\text{C em P}}$), e a tensão na extremidade esquerda da corda é dada pelo módulo de $\vec{F}_{\text{B em C}}$ (ou $\vec{F}_{\text{C em B}}$). Quando a corda está em equilíbrio e quando nenhuma força atua em suas extremidades, a tensão é a *mesma* nas extremidades e através da corda. Portanto, caso seja de 50 N o módulo de cada uma das forças $\vec{F}_{\text{B em C}}$ e $\vec{F}_{\text{P em C}}$, então a tensão na corda será de 50 N (*e não de* 100 N). O vetor força *resultante* $\vec{F}_{\text{B em C}} + \vec{F}_{\text{P em C}}$ que atua sobre a corda, nesse caso, é igual a zero!

Mais uma vez, enfatizamos uma verdade fundamental: as duas forças de um par de ação e reação *nunca* atuam sobre o mesmo corpo. Lembre-se de que esse fato simples pode ajudá-lo a esclarecer dúvidas sobre um par de ação e reação e sobre a terceira lei de Newton.

Teste sua compreensão da Seção 4.5 Você está dirigindo em uma estrada rural quando um mosquito se espatifa no seu pára-brisa. Qual força possui módulo maior: a que o carro exerce sobre o mosquito ou a que o mosquito exerce sobre o carro? Ou os módulos são iguais? Se são diferentes, como relacionar esse fato com a terceira lei de Newton? Se são iguais, por que o mosquito se espatifou ao passo que o carro ficou intacto? ▮

4.6 Exemplos de diagramas do corpo livre

As três leis de Newton contêm todos os princípios básicos necessários para a solução de uma grande variedade de problemas de mecânica. Essas leis possuem formas muito simples, mas sua aplicação em situações específicas

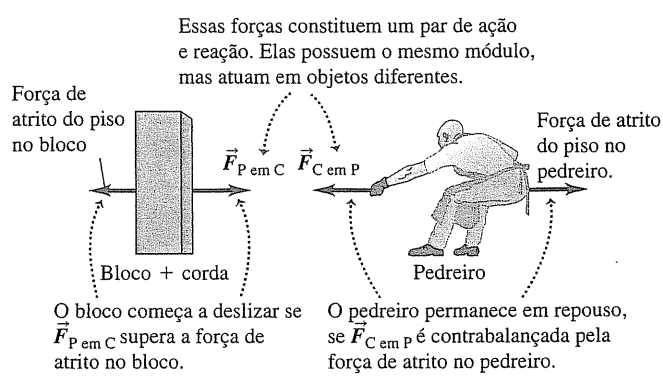


Figura 4.28 As forças horizontais que atuam sobre a combinação bloco-corda (à esquerda) e o pedreiro (à direita). (As forças verticais não são mostradas.)

pode apresentar desafios reais. Esta seção apresenta três noções e técnicas úteis na solução de quaisquer problemas referentes às leis de Newton. Você aprenderá outras no Capítulo 5, que estende o uso das leis de Newton a situações mais complexas.

1. *A primeira e a segunda leis de Newton se aplicam a um corpo específico.* Quando você usar a primeira lei de Newton, $\Sigma\vec{F} = \mathbf{0}$, para uma situação de equilíbrio, ou a segunda lei de Newton, $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$, para uma situação sem equilíbrio, você deve definir logo de início o corpo sobre o qual você está falando. Isso pode parecer trivial, mas não é.
2. *Só importam as forças que atuam sobre o corpo.* A soma $\Sigma\vec{F}$ inclui todas as forças que atuam *sobre* o corpo em questão. Portanto, depois de escolher o corpo a ser analisado, você deve identificar todas as forças que atuam sobre ele. Não confunda as forças que atuam sobre esse corpo com as forças exercidas por ele sobre outros corpos. Por exemplo, para analisar uma pessoa caminhando, você deve incluir em $\Sigma\vec{F}$ a força que o solo exerce sobre a pessoa enquanto ela caminha, mas *não* a força que a pessoa exerce sobre o solo (Figura 4.29). Essas forças formam um par de ação e reação e estão relacionadas à terceira lei de Newton, mas somente o membro do par que atua sobre o corpo que você está analisando é que entra em $\Sigma\vec{F}$.
3. *Os diagramas do corpo livre são essenciais para ajudar a identificar as forças relevantes.* Um **diagrama do corpo livre** é um diagrama que mostra o corpo escolhido 'livre' das suas vizinhanças, com vetores desenhados para mostrar o módulo, a direção e o sentido de todas as forças que atuam sobre o corpo e que são resultantes de vários outros corpos que interagem com ele. Já mostramos alguns diagramas do corpo livre nas figuras 4.18, 4.19, 4.21 e 4.26a. Seja cuidadoso e não se esqueça de incluir todas as forças que atuam *sobre* o corpo, tomando cuidado para *não* incluir as forças que esse corpo exerce sobre outros corpos. Em particular, as duas forças de um par de ação e reação *nunca* devem aparecer em um diagrama do corpo livre, porque elas nunca atuam sobre o mesmo corpo. Além disso, as forças que um corpo exerce sobre si mesmo nunca devem aparecer, porque forças internas não afetam o movimento do corpo.

ATENÇÃO Forças em diagramas do corpo livre Quando você possui um diagrama do corpo livre *deve* ser capaz de responder a cada uma das forças da seguinte pergunta: 'Que outro corpo está aplicando essa força?' Caso você não possa responder a essa pergunta, poderá estar considerando uma força inexistente. Fique especialmente alerta para evitar forças inexistentes, tais como 'a força da aceleração' ou 'a força $m\vec{a}$', discutida na Seção 4.3.

Quando o problema envolve mais de um corpo, você deve separar os corpos e desenhar um diagrama do corpo livre para cada corpo. Por exemplo, a Figura 4.27c mostra um diagrama do corpo livre separado para o caso em que a corda é considerada sem massa (de modo que nenhuma força gravitacional atua sobre ela). A Figura 4.28 também mostra diagramas para o pedreiro e para o bloco, mas estes *não* são diagramas do corpo livre completos porque não mostram todas as forças que atuam sobre cada corpo. (Não mencionamos as forças verticais – a força de peso exercida pela Terra e a força normal de baixo para cima exercida pelo piso.)

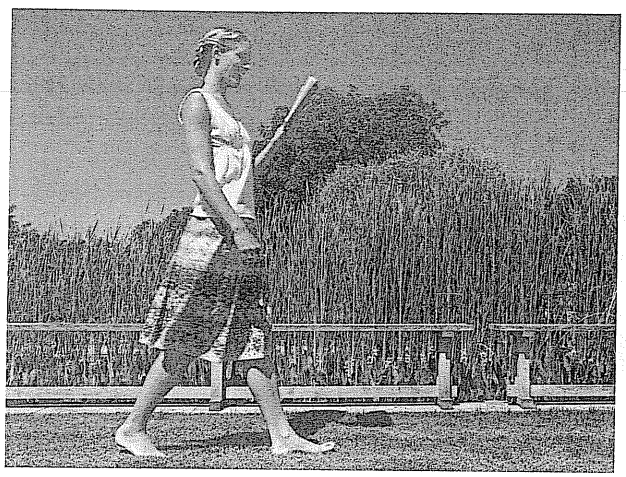


Figura 4.29 O simples fato de caminhar depende basicamente da terceira lei de Newton. Para se mover para a frente, você empurra o solo para trás com os pés. Em reação, o solo empurra seus pés (e, portanto, todo o seu corpo) com uma força para a frente de mesmo módulo. Essa força *externa* fornecida pelo solo é que produz a aceleração de seu corpo para a frente.

A Figura 4.30 na página 126 apresenta algumas situações reais e os respectivos diagramas do corpo livre completos. Note que, em cada situação, uma pessoa exerce uma força sobre algo que a cerca, mas a força que aparece no diagrama do corpo livre dessa pessoa é a força que aquilo que a cerca exerce de volta *sobre* ela.

Teste sua compreensão da Seção 4.6 A força de flutuação mostrada na Figura 4.30c é a metade de um par de ação e reação. Qual é a força que completa esse par? i) O peso da mergulhadora; ii) A força que impele para a frente; iii) A força que puxa para trás; iv) A força descendente que a mergulhadora exerce sobre a água; v) A força para trás que a mergulhadora exerce sobre a água com o movimento das pernas. ∎

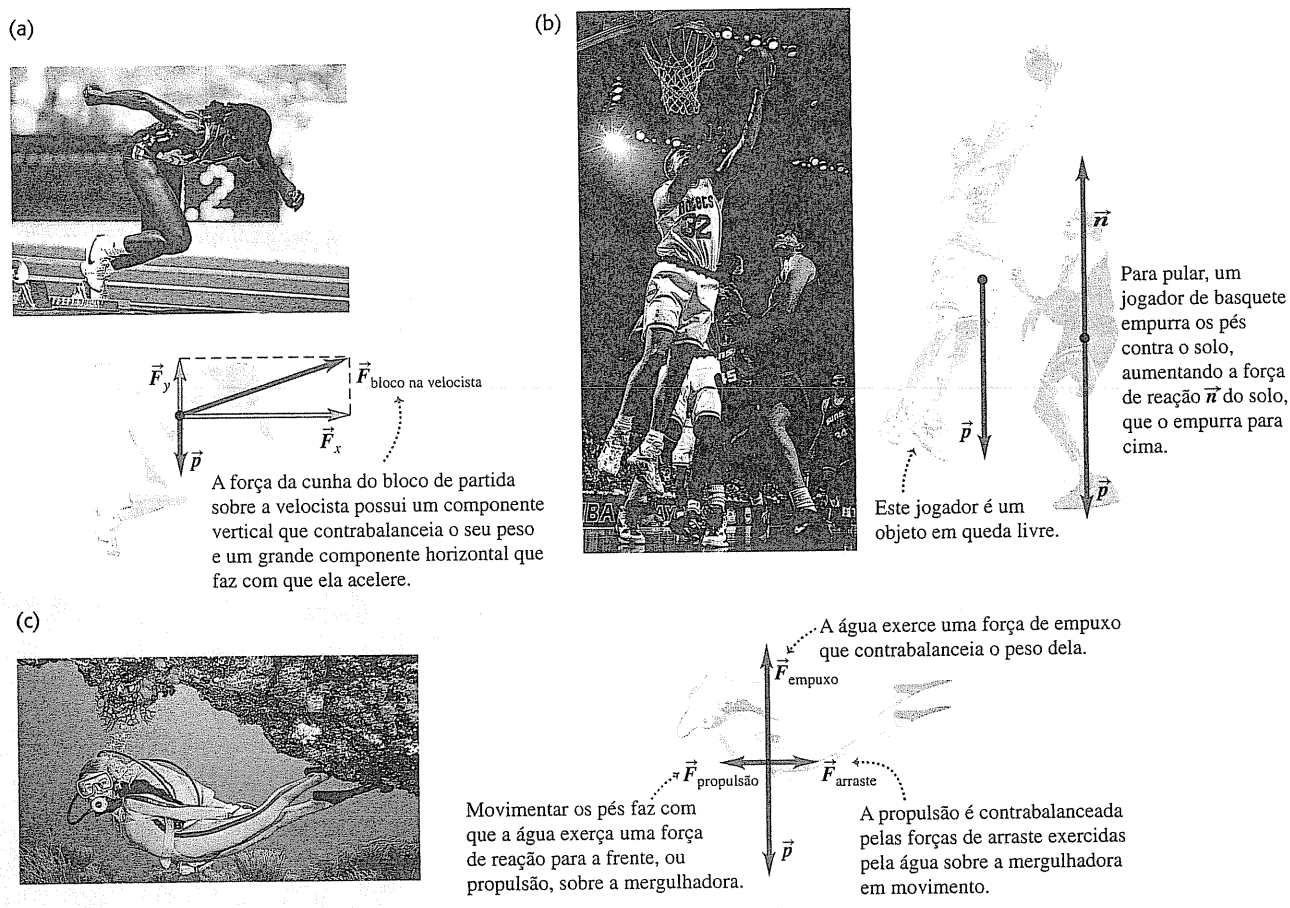
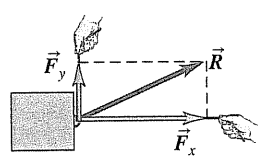


Figura 4.30 Exemplos de diagramas de corpo livre. Em cada caso, o diagrama de corpo livre mostra todas as forças externas que atuam sobre o objeto em questão.

Resumo

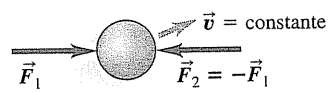
Força como grandeza vetorial: a força é a medida da interação entre dois corpos. É uma grandeza vetorial. Quando diversas forças atuam sobre um corpo, o efeito sobre seu movimento é o mesmo que o produzido pela ação de uma única força agindo sobre o corpo, dada pela soma vetorial (resultante) dessas forças. (Exemplo 4.1.)

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots = \sum \vec{F} \qquad (4.1)$$



A força resultante sobre um corpo e a primeira lei de Newton: a primeira lei de Newton afirma que, quando a soma vetorial das forças que atuam sobre o corpo (a *força resultante*) é igual a zero, o corpo está em equilíbrio e possui aceleração nula. Quando o corpo está inicialmente em repouso, ele permanece em repouso; quando o corpo está inicialmente em movimento, ele continua em movimento com velocidade constante. Essa lei vale apenas em sistemas de referência inerciais. (exemplos 4.2 e 4.3.)

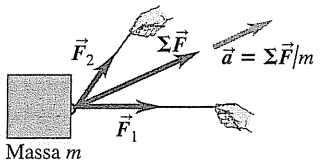
$$\sum \vec{F} = 0 \qquad (4.3)$$



$$\Sigma \vec{F} = 0$$

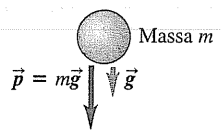
Massa, aceleração e a segunda lei de Newton: a propriedade inercial de um corpo é caracterizada pela sua *massa*. A aceleração de um corpo submetido à ação de um conjunto de forças é diretamente proporcional à soma vetorial das forças que atuam sobre o corpo (a *força resultante*) e inversamente proporcional à massa do corpo. Esta formulação é a segunda lei de Newton. Como na primeira lei, a segunda lei de Newton vale apenas em sistemas de referência inerciais. A unidade de força é definida em termos das unidades de massa e de aceleração. Em unidades SI, a unidade de força denomina-se newton (N), sendo igual a 1 kg · m/s^2. (exemplos 4.4 e 4.5.)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$\sum F_x = ma_x \qquad (4.7)$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\sum F_z = ma_z \qquad (4.8)$$



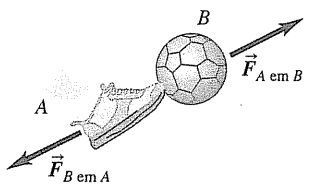
Peso: o peso $\vec{p}$ de um corpo é a força de atração gravitacional exercida pela Terra sobre o corpo. O peso é uma grandeza vetorial. O módulo do peso de um corpo em um local específico é igual ao produto de sua massa m pelo módulo da aceleração da gravidade g nesse local. O peso de um corpo depende do local onde ele se encontra, porém a massa é sempre a mesma independentemente do local. (exemplos 4.6 e 4.7.)

$$p = mg \qquad (4.9)$$



Terceira lei de Newton e os pares de ação e reação: a terceira lei de Newton afirma que quando dois corpos interagem, a força que o primeiro exerce sobre o segundo é exatamente igual e contrária à força que o segundo exerce sobre o primeiro. Essas forças são denominadas forças de ação e reação. Cada força de um par de ação e reação atua separadamente em somente um corpo; as forças de ação e reação nunca podem atuar sobre o mesmo corpo. (exemplos 4.8–4.11.)

$$\vec{F}_{A \text{ em } B} = -\vec{F}_{B \text{ em } A} \qquad (4.11)$$



Principais termos

diagrama do corpo livre, 125
dinâmica, 105
equilíbrio, 111
força, 106
força de atrito, 106
força de contato, 106
força de longo alcance, 106
força normal, 106
força resultante, 108
força de tensão, 106
inércia, 110
leis de Newton do movimento, 105
massa, 115
mecânica clássica (newtoniana), 105
newton, 115
par de ação e reação, 121
peso, 106
primeira lei de Newton, 110
quilograma, 115
segunda lei de Newton, 116
sistema de referência inercial, 112
superposição das forças, 107
tensão, 124
terceira lei de Newton, 121

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

De acordo com a terceira lei de Newton, a criança sentada (a quem chamaremos de Raul) empurra a criança em pé (a quem chamaremos de Stênio) com a mesma força que Stênio empurra Raul, mas no sentido oposto. Isso é verdadeiro, tanto no caso de Raul empurrar Stênio 'ativamente' (por exemplo, se Raul empurra Stênio com as mãos) quanto 'passivamente' (se as costas de Raul é que o empurram, como na foto que abre o capítulo). Os módulos das forças poderiam ser maiores no caso 'ativo' do que no 'passivo', mas em qualquer dos casos Raul empurra Stênio com a mesma força que Stênio empurra Raul.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

4.1 Resposta: (iv) A força gravitacional sobre o engradado aponta diretamente de cima para baixo. Na Figura 4.6, o eixo x aponta para cima e para a direita, enquanto o eixo y aponta para cima e para a esquerda. Logo, a força gravitacional possui tanto o componente x quanto o componente y e ambos são negativos.

4.2 Resposta: (i), (ii) e (iv) Em (i), (ii) e (iv), o corpo não está em aceleração, por isso a força resultante sobre o corpo é igual a zero. [No item (iv), a caixa permanece estacionária sob o ponto de vista do sistema de referência inercial do solo quando o caminhão acelera para a frente, tal qual o patinador na Figura 4.11a.] No item (iii), a águia está se movendo em círculo; logo, está em aceleração e *não* em equilíbrio.

4.3 Resposta: (iii), (i) e (iv) (empate), (ii) A aceleração é igual à força resultante dividida pela massa. Logo, o módulo da aceleração em cada situação é:

(i) $a = (2{,}0\text{ N})/(2{,}0\text{ kg}) = 1{,}0\text{ m/s}^2$;
(ii) $a = (8{,}0\text{ N})/(2{,}0\text{ N}) = 4{,}0\text{ m/s}^2$;
(iii) $a = (2{,}0\text{ N})/(8{,}0\text{ kg}) = 0{,}25\text{ m/s}^2$;
(iv) $a = (8{,}0\text{ N})/(8{,}0\text{ kg}) = 1{,}0\text{ m/s}^2$.

4.4 O astronauta faria o dobro do esforço para caminhar, porque seu peso no planeta seria duas vezes maior que na Terra. Mas pegaria a bola deslocando-se horizontalmente com a mesma facilidade. A *massa* da bola é a mesma que na Terra, portanto a força horizontal a ser exercida pelo astronauta para parar a bola (ou seja, dar a ela a mesma aceleração) seria a mesma que na Terra.

4.5 Pela terceira lei de Newton, as duas forças possuem o mesmo módulo. Como o carro possui massa muito maior que a do mosquito, ele sofre somente uma aceleração mínima, imperceptível, em reação à força do impacto. Por outro lado, o mosquito, com sua massa minúscula, sofre uma aceleração catastroficamente grande.

4.6 **Resposta: (iv)** A força de flutuação é uma força *de baixo para cima* que a *água* exerce sobre a *mergulhadora*. Pela terceira lei de Newton, a outra metade do par de ação e reação é uma força *de cima para baixo* que a *mergulhadora* exerce sobre a *água* e possui o mesmo módulo que a força de flutuação. É verdade que o peso da mergulhadora também é orientado de cima para baixo e possui o mesmo módulo que a força de flutuação; entretanto, o peso atua sobre o mesmo corpo (a mergulhadora) que a força de flutuação e, portanto, essas forças não formam um par de ação e reação.

Questões para discussão

Q4.1 Pode um corpo permanecer em equilíbrio quando somente uma força atua sobre ele? Explique.
Q4.2 Uma bola lançada verticalmente de baixo para cima possui velocidade nula em seu ponto mais elevado. A bola está em equilíbrio nesse ponto? Por que sim ou por que não?
Q4.3 Um balão cheio de hélio fica suspenso no ar, nem subindo nem descendo. Ele está em equilíbrio? Quais as forças que atuam sobre ele?
Q4.4 Quando você voa de avião em uma noite com ar calmo, não tem a sensação de estar em movimento, embora o avião possa estar se deslocando a 800 km/h (500 mi/h). Como você explica isso?
Q4.5 Quando as duas extremidades de uma corda são puxadas com forças de mesmo módulo, mas sentidos contrários, por que a tensão na corda não é igual a zero?
Q4.6 Você amarra um tijolo na extremidade de uma corda e o faz girar em torno de você em um círculo horizontal. Descreva a trajetória do tijolo quando você larga repentinamente a corda.
Q4.7 Quando um carro pára repentinamente, os passageiros tendem a se mover para frente em relação aos seus assentos. Por quê? Quando um carro faz uma curva abrupta, os passageiros tendem a escorregar para um lado do carro. Por quê?
Q4.8 Algumas pessoas dizem que, quando um carro pára repentinamente, os passageiros são empurrados para a frente por uma 'força de inércia' (ou uma 'força de momento linear'). O que existe de errado nessa explicação?
Q4.9 Um passageiro no interior de um ônibus sem janelas e em movimento observa que uma bola que estava em repouso no meio do ônibus começa a se mover para a traseira do ônibus. Imagine dois modos diferentes de explicar o que ocorreu e descubra um método para decidir qual dos dois está correto.
Q4.10 Suponha que as unidades SI fundamentais sejam força, comprimento e tempo, em vez de massa, comprimento e tempo. Quais seriam as unidades de massa em termos dessas unidades fundamentais?
Q4.11 Na Grécia Antiga, alguns pensavam que o 'estado natural' de um objeto fosse o repouso, de modo que os objetos buscariam o seu estado natural ficando em repouso quando soltos. Explique por que essa visão pode muito bem parecer plausível no mundo atual.
Q4.12 Por que a Terra é considerada um sistema de referência inercial apenas aproximado?
Q4.13 A segunda lei de Newton é válida para um observador no interior de um veículo que está acelerando, parando ou fazendo uma curva? Explique.
Q4.14 Alguns estudantes dizem que a grandeza $m\vec{a}$ é a 'força da aceleração'. É correto dizer que essa grandeza é uma força? Em caso afirmativo, onde essa força é exercida? Em caso negativo, qual é a melhor descrição para essa grandeza?
Q4.15 A aceleração de um corpo em queda livre é medida no interior de um elevador que está subindo com velocidade constante de 9,8 m/s. Que resultado é obtido?
Q4.16 Você pode brincar de segurar uma bola lançada por outra pessoa em um ônibus que se move com velocidade constante em uma estrada retilínea, do mesmo modo como se o ônibus estivesse em repouso. Isso é possível quando o ônibus se move com velocidade constante em uma curva? Explique por que sim ou por que não.
Q4.17 Alguns estudantes afirmam que a força da gravidade sobre um objeto é 9,8 m/s^2. O que há de errado nessa noção?
Q4.18 A cabeça de um martelo começa a se soltar do cabo. Como você deve bater o cabo em um bloco de concreto para que a cabeça fique firme novamente? Por que isso funciona?
Q4.19 Por que um chute em uma rocha grande pode machucar mais o seu pé do que o chute em uma pedra pequena? A rocha grande *deve* sempre machucar mais? Explique.
Q4.20 'Não é a queda que machuca você; é a brusca parada embaixo.' Traduza isso usando a linguagem das leis de Newton do movimento.
Q4.21 Uma pessoa pode mergulhar na água pulando de uma altura de 10 m, sem se machucar, mas, quando ela pula de uma altura de 10 m e cai sobre um piso de concreto, sofre sérias lesões. Qual é a razão dessa diferença?
Q4.22 Por que, por motivo de segurança, um carro é projetado para sofrer esmagamento na frente e na traseira? Por que não para colisões laterais e capotagens?
Q4.23 Quando uma bala é disparada de uma arma, qual é a origem da força que acelera a bala?
Q4.24 Quando um peso grande é suspenso por um fio no limite de sua elasticidade, puxando-se o fio suavemente o peso pode ser levantado; porém, se você puxar bruscamente, o fio se rompe. Explique isso usando as leis de Newton do movimento.
Q4.25 Um engradado grande é suspenso pela extremidade de uma corda vertical. A tensão na corda é maior quando o engradado está em repouso ou quando ele se move de baixo para cima com velocidade constante? Quando o engradado se move na vertical, a tensão na corda é maior quando o engradado está sendo acelerado ou quando sua velocidade diminui? Explique cada caso usando as leis de Newton do movimento.
Q4.26 Qual pedra sente um puxão maior devido à gravidade da Terra, uma de 10 kg ou outra de 20 kg? Se você as deixar cair, por que a pedra de 20 kg não cai com o dobro da aceleração da pedra de 10 kg? Explique seu raciocínio.
Q4.27 Por que não é correto dizer que 1 kg é *igual* a 9,8 N?
Q4.28 Um cavalo puxa uma carroça. Uma vez que a carroça puxa o cavalo para trás com uma força igual e contrária à força exercida pelo cavalo sobre a carroça, por que a carroça não permanece em equilíbrio, independentemente da intensidade da força com a qual o cavalo puxa a carroça?
Q4.29 Verdadeiro ou falso: você exerce uma força de empurrar P sobre um objeto e ele empurra você de volta com uma força F. Se o objeto está se deslocando a uma velocidade constante, então F é igual a P, mas, se o objeto está em aceleração, então P deve ser maior que F.

Q4.30 Um caminhão grande e um automóvel compacto colidem frontalmente. Durante a colisão, o caminhão exerce uma força $\vec{F}_{\text{T em C}}$ sobre o automóvel, e o automóvel exerce uma força $\vec{F}_{\text{C em T}}$ sobre o caminhão. As duas forças possuem o mesmo módulo ou uma delas é maior do que a outra? Sua resposta depende do valor da velocidade de cada veículo antes da colisão? Por que sim ou por que não?

Q4.31 Quando um carro pára em uma estrada plana, qual força é responsável pela redução da velocidade? Quando o carro aumenta a velocidade escalar na mesma estrada, qual força é responsável pelo aumento da velocidade? Explique.

Q4.32 Um carro pequeno está puxando uma caminhonete que estava enguiçada, e eles se movem ao longo de uma estrada com a mesma velocidade e a mesma aceleração. Quando o carro está acelerando, a força que ele exerce sobre a caminhonete possui módulo maior, menor ou igual à força que a caminhonete exerce sobre o carro? A maior força resultante atua sobre o carro ou sobre a caminhonete, ou as duas forças resultantes possuem o mesmo módulo? Explique.

Q4.33 Em um cabo-de-guerra duas pessoas puxam as extremidades de uma corda em sentidos opostos. Pela terceira lei de Newton, a força que A exerce sobre B possui módulo igual ao da força que B exerce sobre A. Então, o que determina qual é o vencedor? (*Sugestão:* desenhe um diagrama do corpo livre para cada pessoa.)

Q4.34 Na Lua, $g = 1{,}62\ \text{m/s}^2$. Lá, se um tijolo de 2 kg caísse de uma altura de 2 m sobre o seu pé, causaria uma lesão maior, menor ou igual à que causaria se o mesmo fato acontecesse aqui na Terra? Explique. Se na Lua o tijolo fosse lançado horizontalmente e atingisse você com uma velocidade de 6 m/s, causaria uma lesão maior, menor ou igual do que a lesão causada nas mesmas circunstâncias na Terra? Explique. (Na Lua, suponha que você esteja dentro de uma cabina pressurizada e por isso não veste a roupa especial usada pelos astronautas.)

Q4.35 Um manual para aprendiz de piloto contém a seguinte passagem: 'Quando o avião voa em uma altitude constante, sem subir nem descer, a força de sustentação que atua de baixo para cima sobre suas asas é igual ao peso do avião. Quando o avião está subindo com aceleração constante, a força de sustentação que atua de baixo para cima sobre suas asas é maior do que o peso do avião; quando o avião está descendo com aceleração constante, a força de sustentação que atua de baixo para cima é menor do que o peso do avião'. Essas afirmações estão corretas? Explique.

Q4.36 Se suas mãos estão molhadas e não há nenhuma toalha disponível, você pode secar o excesso de umidade sacudindo-as. Por que esse movimento elimina a água?

Q4.37 Se você está agachado (como quando está olhando os livros na prateleira de baixo de uma estante) e se levanta repentinamente, você pode sentir uma tontura momentânea. Como as leis de Newton explicam isso?

Q4.38 Quando um carro sofre uma colisão traseira, os passageiros podem sentir como se fossem chicoteados. Use as leis de Newton para explicar as causas disso.

Q4.39 Em uma colisão frontal entre dois veículos, os passageiros que não estiverem com cintos de segurança afivelados poderão ser lançados através do pára-brisa. Use as leis de Newton para explicar as causas disso.

Q4.40 Em uma colisão frontal entre um carro compacto de 1000 kg e outro grande de 2500 kg, qual sofre a força maior? Explique. Qual sofre a maior aceleração? Explique por quê. Agora, explique por que os passageiros no carro menor têm mais chance de se ferir do que os do carro maior, mesmo que a carroceria de ambos os carros seja igualmente resistente.

Q4.41 Suponha que você está em um foguete sem janelas, viajando no espaço, distante de qualquer outro objeto. Sem olhar para fora do foguete ou fazer qualquer contato com o mundo externo, explique como você poderia determinar se o foguete está a) movendo-se para a frente a uma velocidade constante equivalente a 80% da velocidade da luz e b) acelerando para a frente.

Exercícios

Seção 4.1 Força e interações

4.1 Duas forças possuem o mesmo módulo F. Qual é o ângulo entre os dois vetores quando a soma vetorial possui o módulo igual a a) $2F$? b) $\sqrt{2}F$? c) Zero? Faça um desenho dos três vetores em cada caso.

4.2 Em vez de usar os eixos Ox e Oy da Figura 4.8 para analisar a situação do Exemplo 4.1, use um sistema de eixos girados de 37,0° no sentido anti-horário, de modo que o eixo Ox seja paralelo à força de 250 N. a) Para esses eixos ache os componentes x e y da força resultante que atua sobre a partícula. b) Partindo dos componentes calculados em (a), calcule o módulo, a direção e o sentido da força resultante. Compare seus resultados com o Exemplo 4.1.

4.3 Um trabalhador de um armazém empurra uma caixa ao longo de um piso como indicado na Figura 4.31, aplicando uma força de 10 N de cima para baixo, formando um ângulo de 45° abaixo da horizontal. Ache os componentes horizontais e verticais da força.

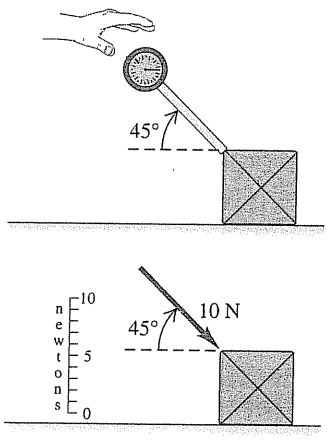


Figura 4.31 Exercício 4.3.

4.4 Um homem está puxando uma mala para cima ao longo da rampa de carga de um caminhão de mudanças. A rampa possui um ângulo de 20,0° e o homem exerce uma força $\vec{F}$ para cima cuja direção forma um ângulo de 30,0° com a rampa (Figura 4.32). a) Qual deve ser o módulo da força $\vec{F}$ necessária para que o componente

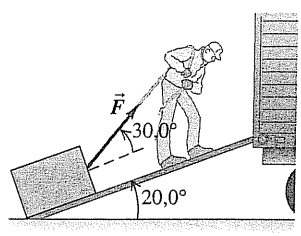


Figura 4.32 Exercício 4.4.

F_x paralelo à rampa possua módulo igual a 60,0 N? b) Qual deve ser o módulo do componente Fy nesse caso?

4.5 Dois cachorros puxam horizontalmente cordas amarradas a um poste; o ângulo entre as cordas é igual a 60,0°. Se o cachorro A exerce uma força de 270 N e o cachorro B exerce uma força de 300 N, ache o módulo da força resultante e o ângulo que ela faz com a corda do cachorro A.

4.6 Duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, atuam sobre um ponto. O módulo de $\vec{F}_1$ é igual a 9,0 N, e sua direção forma um ângulo de 60,0° acima do eixo Ox no segundo quadrante. O módulo de $\vec{F}_2$ é igual a 6,0 N, e sua direção forma um ângulo de 53,1° abaixo do eixo Ox no terceiro quadrante. a) Quais são os componentes x e y da força resultante? b) Qual o módulo da força resultante?

Seção 4.3 Segunda lei de Newton

4.7 Se uma força resultante horizontal de 132 N é aplicada a uma pessoa com massa de 60 kg em repouso na beira de uma piscina, qual é a aceleração produzida?

4.8 Qual o módulo da força necessária para imprimir uma aceleração de 1,40 m/s^2 em uma geladeira com massa de 135 kg?

4.9 Uma caixa está em repouso sobre um lago congelado, que é uma superfície horizontal sem atrito. Se um pescador aplica uma força horizontal de módulo 48,0 N sobre a caixa, produzindo uma aceleração de 3,0 m/s^2, qual é a massa da caixa?

4.10 Um portuário aplica uma força horizontal constante de 80,0 N a um bloco de gelo sobre uma superfície horizontal lisa. A força de atrito é desprezível. O bloco parte do repouso e se move 11,0 m em 5,0 s. a) Qual é a massa do bloco de gelo? b) Se o portuário parar de empurrar o bloco depois de 5,0 s, qual será a distância percorrida pelo bloco nos 5,0 s posteriores?

4.11 Um disco de hóquei com massa de 0,160 kg está em repouso na origem ($x = 0$) em uma superfície horizontal sem atrito da pista. No instante $t = 0$, um jogador aplica sobre o disco uma força de 0,250 N paralela ao eixo Ox; ele continua a aplicar a força até $t = 2{,}0$ s. a) Qual é a posição e a velocidade do disco no instante $t = 2{,}0$ s? b) Se a mesma força for aplicada novamente no instante $t = 5{,}0$ s, qual será a posição e a velocidade do disco no instante $t = 7{,}0$ s?

4.12 Um engradado com massa de 32,5 kg, inicialmente em repouso sobre o piso de um armazém, sofre uma força resultante horizontal de 140 N. a) Qual é a aceleração produzida? b) Qual é a distância percorrida pelo engradado em 10,0 s? c) Qual é a velocidade escalar ao final de 10,0 s?

4.13 Uma carreta de brinquedo pesando 4,50 kg está em aceleração por uma linha reta (o eixo x). O gráfico na Figura 4.33 mostra essa aceleração em função do tempo. a) Ache a força resultante máxima que atua sobre esse objeto. Quando essa força máxima ocorre? b) Em que instantes a força resultante sobre o brinquedo é constante? c) Quando a força resultante é igual a zero?

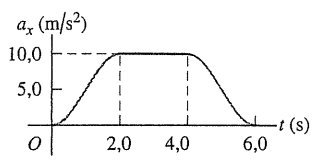


Figura 4.33 Exercício 4.13.

4.14 Um gato de 2,75 kg move-se em linha reta (o eixo x). A Figura 4.34 mostra um gráfico do componente x da velocidade desse gato em função do tempo. a) Ache a força resultante máxima que atua sobre esse gato. a) Quando essa força ocorre? b) Quando a força resultante sobre o gato é igual a zero? c) Qual é a força resultante no instante 8,5 s?

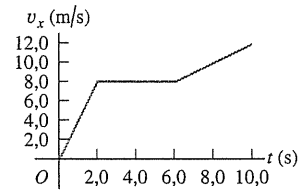


Figura 4.34 Exercício 4.14.

4.15 Um pequeno foguete de 8,0 kg queima combustível que exerce uma força de baixo para cima, que varia com o tempo, sobre o foguete. Essa força obedece à equação $F = A + Bt^2$. Medidas mostram que no instante $t = 0$ a força é de 100,0 N, e no final dos primeiros 2,0 s, 150,0 N. a) Ache as constantes A e B, incluindo suas unidades SI. b) Ache a força *resultante* sobre esse foguete e sua aceleração i) no instante após o combustível se inflamar e ii) 3,0 s após a ignição. c) Suponha que você estivesse usando esse foguete no espaço, distante de toda gravidade. Qual seria sua aceleração 3,0 s após a ignição?

4.16 Um elétron (massa = $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg) deixa a extremidade de um tubo luminoso de TV com velocidade inicial zero e se desloca em linha reta até a grade de aceleração, que está a uma distância de 1,80 cm. Ele a atinge a $3{,}0 \times 10^6$ m/s. Se a força que o acelera for constante, calcule a) a aceleração; b) o tempo para atingir a grade; c) a força resultante, em newtons. (A força gravitacional sobre o elétron é desprezível.)

Seção 4.4 Massa e peso

4.17 O super-homem lança uma rocha de 2400 N sobre seu adversário. Qual é a força horizontal que o super-homem deve aplicar sobre a rocha para que ela se desloque com uma aceleração horizontal igual a 12,0 m/s^2?

4.18 Uma bola de boliche pesa 71,2 N. O jogador aplica sobre ela uma força horizontal de 160 N. Qual o módulo da aceleração horizontal da bola?

4.19 Na superfície de Io, uma das luas de Júpiter, a aceleração da gravidade é $g = 1{,}81$ m/s^2. Uma melancia pesa 44,0 N na superfície da Terra. a) Qual sua massa na superfície da Terra? b) Qual sua massa e peso na superfície de Io?

4.20 A mochila de uma astronauta pesa 17,5 N quando ela está na superfície terrestre, mas somente 3,24 N na superfície de um asteróide. a) Qual é a aceleração da gravidade nesse asteróide? b) Qual é a massa da mochila no asteróide?

Seção 4.5 Terceira lei de Newton

4.21 Uma velocista de competição mundial que pesa 55 kg pode se acelerar a partir do bloco de partida com uma aceleração aproximadamente horizontal cujo módulo é igual a 15 m/s^2. Que força horizontal deve a velocista exercer sobre o bloco de partida para produzir essa aceleração? Qual é o corpo que exerce a força que impulsiona a velocista: o bloco ou a própria velocista?

4.22 Imagine que você esteja sustentando um livro de 4 N em repouso sobre a palma da sua mão. Complete as seguintes sentenças: a) Uma força de cima para baixo de módulo igual a 4 N é exercida sobre o livro pela _____. b) Uma força de baixo para cima de módulo _____ é exercida sobre _____ pela palma da sua mão. c) É a força de baixo para cima do item

(b) a reação da força de cima para baixo do item (a)? d) A reação da força do item (a) é a força de módulo _____ exercida sobre _____ pelo _____. Seu sentido é _____. e) A reação da força do item (b) é a força de módulo _____ exercida sobre _____ pelo _____. f) As forças dos itens (a) e (b) são iguais e opostas em virtude da _____ lei de Newton. g) As forças dos itens (b) e (e) são iguais e opostas em virtude da _____ lei de Newton. Suponha agora que você exerça sobre o livro uma força de baixo para cima de módulo igual a 5 N. h) O livro permanece em equilíbrio? i) É a força exercida sobre o livro pela sua mão igual e oposta à força exercida sobre o livro pela Terra? j) É a força exercida sobre o livro pela Terra igual e oposta à força exercida sobre a Terra pelo livro? k) É a força exercida sobre o livro pela sua mão igual e oposta à força exercida sobre sua mão pelo livro? Finalmente, suponha que você retire subitamente sua mão enquanto o livro se move para cima. l) Quantas forças atuam agora sobre o livro? m) O livro está em equilíbrio?

4.23 Uma garrafa é empurrada sobre uma mesa e escorrega para fora da extremidade da mesa. *Não* despreze a resistência do ar. a) Quais forças atuam sobre a garrafa enquanto ela cai da mesa até o chão? b) Quais são as reações dessas forças; ou seja, sobre quais corpos e por quais corpos as reações são exercidas?

4.24 O piso de um elevador exerce uma força normal de 620 N de baixo para cima sobre um passageiro que pesa 650 N. Quais são as reações dessas duas forças? O passageiro está sendo acelerado? Em caso afirmativo, determine o módulo, a direção e o sentido da aceleração.

4.25 Uma estudante com massa de 45 kg pula de um trampolim elevado. Considerando a massa da Terra como $6{,}0 \times 10^{24}$ kg, qual é a aceleração da Terra no sentido da estudante quando ela se acelera no sentido da Terra com 9,8 m/s^2? Suponha que a força resultante sobre a Terra seja a força gravitacional que ela exerce sobre a Terra.

Seção 4.6 Exemplos de diagramas do corpo livre

4.26 Um atleta joga uma bola de massa m diretamente de baixo para cima, com resistência do ar desprezível. Desenhe um diagrama do corpo livre para essa bola enquanto ela está livre da mão do atleta e a) deslocando-se de baixo para cima; b) no seu ponto mais alto; c) deslocando-se de cima para baixo. d) Repita os itens (a), (b) e (c) considerando que o atleta joga a bola formando um ângulo de 60° acima da horizontal, em vez de diretamente de baixo para cima.

4.27 Dois engradados, A e B, estão em repouso, lado a lado, sobre uma superfície horizontal livre de atrito. Eles possuem massa m_A e m_B. Uma força horizontal $\vec{F}$ é aplicada sobre o engradado A, e os dois engradados se movem para a direita. a) Desenhe diagramas do corpo livre claramente designados para o engradado A e para o engradado B. Indique quais pares de forças, se houver, são os pares de ação e reação da terceira lei. b) Se o módulo da força $\vec{F}$ for menor que o peso total dos dois engradados, isso fará com que eles se movam? Explique.

4.28 Uma pessoa puxa horizontalmente o bloco B da Figura 4.35, fazendo com que ambos os blocos movam-se juntos, como uma unidade. Para esse sistema em movimento, faça um diagrama do corpo livre claramente designado para o bloco A, considerando que a) a mesa é livre de atrito e b) há atrito entre o bloco B e a mesa e a força de puxar é igual à força de atrito sobre o bloco B, devido à mesa.

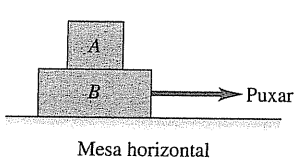


Figura 4.35 Exercício 4.28

4.29 Uma bola está pendurada por um fio longo amarrado ao teto do vagão de um trem que viaja de oeste para leste sobre trilhos horizontais. Um observador no interior do vagão vê a bola suspensa, sem movimento. Faça um diagrama do corpo livre para a bola, considerando que a) o trem possui velocidade uniforme e b) o trem está aumentando a velocidade de forma uniforme. A força resultante sobre a bola é igual a zero em ambos os casos? Explique.

4.30 Uma caixa grande contendo o seu novo computador está na carroceria da sua caminhonete. Você está parado em um semáforo. A luz verde se acende e você pisa no acelerador, fazendo a caminhonete acelerar. Para sua aflição, a caixa começa a deslizar em direção à traseira do veículo. Desenhe diagramas do corpo livre separados para a caminhonete e para a caixa. Indique os pares de forças, se houver, que sejam os pares de ação e reação da terceira lei. (*Não* despreze o atrito no leito da carroceria.)

4.31 Uma cadeira com massa de 12,0 kg está sobre um piso horizontal, que não está livre de atrito. Você empurra a cadeira com uma força F = 40,0 N, que forma um ângulo de 37,0° abaixo da horizontal, e a cadeira desliza ao longo do piso. a) Faça um diagrama do corpo livre para a cadeira. b) Use seu diagrama e as leis de Newton para calcular a força normal que o piso exerce sobre a cadeira.

4.32 Um esquiador com massa de 65,0 kg é puxado para cima em uma encosta coberta de neve, a uma velocidade escalar constante, pelo cabo de um reboque que está paralelo ao solo. O solo tem inclinação de baixo para cima, formando um ângulo de 26,0° acima da horizontal, e o atrito é desprezível. a) Faça um diagrama do corpo livre para o esquiador. b) Calcule a tensão no cabo do reboque.

4.33 Um caminhão está puxando um carro em uma estrada horizontal, usando uma corda horizontal. O carro está em ponto morto, de modo que podemos assumir que não há atrito significativo entre os pneus e a estrada. Considerando que o caminhão aumenta a velocidade para níveis de estrada, desenhe um diagrama do corpo livre para a) o carro e b) o caminhão. c) Qual força acelera esse sistema para a frente? Explique como essa força se origina.

Problemas

4.34 Uma bala de um rifle 22, deslocando-se a 350 m/s, atinge o tronco de uma árvore grande, no qual ela penetra até uma profundidade de 0,130 m. A massa da bala é de 1,80 g. Suponha uma força retardadora constante. a) Qual é o tempo necessário para a bala parar? b) Qual é a força, em newtons, que o tronco da árvore exerce sobre a bala?

4.35 Dois cavalos puxam horizontalmente cordas amarradas a um tronco de árvore. As duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ que eles exercem sobre o tronco são tais que a força resultante $\vec{R}$ possui módulo igual ao de $\vec{F}_1$ e faz um ângulo de 90° com $\vec{F}_1$. Seja $\vec{F}_1$ = 1300 N e $\vec{R}$ = 1300 N. Determine o módulo, a direção e o sentido de $\vec{F}_2$ (em relação a $\vec{F}_1$).

4.36 Você acabou de pousar no Planeta X e apanha uma bola de 100 g. Você a deixa cair, a partir do repouso, de uma altura de 10,0 m e cronometra que ela leva 2,2 s para atingir o solo.

Ignore qualquer força sobre a bola exercida pela atmosfera do planeta. Quanto a bola de 100 g pesa na superfície do Planeta X?

4.37 Dois adultos e uma criança querem empurrar uma caixa apoiada sobre rodas na direção do ponto marcado com x na Figura 4.36. Os dois adultos empurram com forças horizontais $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ como mostra a figura. a) Ache o módulo, a direção e o sentido da *menor* força que a criança deve exercer. Ignore os efeitos do atrito. b) Se a criança exercer a força mínima determinada no item (a), a caixa acelera a 2,0 m/s^2 na direção $+x$. Qual é o peso da caixa?

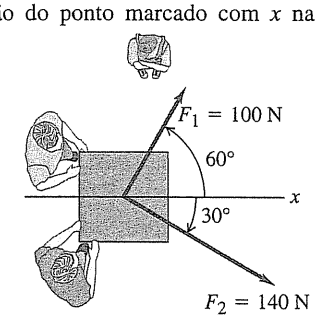


Figura 4.36 Problema 4.37.

4.38 Os motores de um navio-tanque enguiçaram e o vento está levando o navio diretamente para um recife, a uma velocidade escalar constante de 1,5 m/s (Figura 4.37) . Quando o navio está a 500 m do recife, o vento cessa e os motores voltam a funcionar. O leme está emperrado, e a única alternativa é tentar acelerar diretamente para trás, para se afastar do recife. A massa do navio e da carga é de 3,6 × 10^7 kg, e os motores produzem uma força resultante horizontal de 8,0 × 10^4 N sobre o navio. Ele atingirá o recife? Se sim, o petróleo estará seguro? O casco resiste ao impacto de uma velocidade escalar de até 0,2 m/s. Ignore a força retardadora da água sobre o casco do navio-tanque.

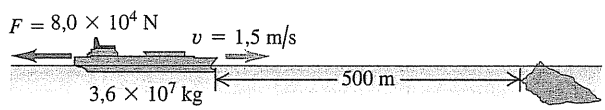


Figura 4.37 Problema 4.38.

4.39 Um salto vertical em pé. O jogador de basquete Darrel Griffith detém o recorde em salto vertical de 1,2 m. (Isso significa que ele se moveu de baixo para cima por 1,2 m, após seus pés deixarem o chão.) Griffith pesava 890 N. a) Qual é a velocidade dele, quando ele deixa o chão? b) Se o tempo da parte do salto imediatamente anterior a seus pés deixarem o chão foi de 0,300 s, qual foi sua velocidade média (módulo e direção) quando ele empurrava o corpo contra o chão? c) Desenhe o diagrama do corpo livre (veja a Seção 4.6). Em termos das forças no diagrama, qual é a força resultante sobre ele? Use as leis de Newton e os resultados da parte b) para calcular a força média que ele aplicou sobre o solo.

4.40 Um anúncio publicitário afirma que um dado automóvel pode 'parar em questão de centavos'. Qual é a força resultante realmente necessária para parar um automóvel de 850 kg, com deslocamento inicial a 45,0 km/h, em uma distância igual ao diâmetro de uma moeda, calculada em 1,8 cm?

4.41 Um balde com água pesando 4,80 kg é acelerado de baixo para cima por uma corda de massa desprezível cuja tensão de ruptura é igual a 75,0 N. a) Desenhe um diagrama de força do corpo livre para o balde. Em termos das forças sobre o seu diagrama, qual é a força resultante sobre o balde? b) Aplique a segunda lei de Newton para o balde e calcule a aceleração máxima de baixo para cima que o balde pode ter sem que a corda se rompa.

4.42 Uma pára-quedista confia na resistência do ar (principalmente no seu pára-quedas) para diminuir sua velocidade durante a queda. Sabendo que sua massa, incluindo a do pára-quedas, é igual a 55,0 kg e que a resistência do ar exerce uma força de baixo para cima de 620 N sobre ela e seu pára-quedas, a) qual é o peso da pára-quedista? b) Desenhe um diagrama do corpo livre para a pára-quedista (veja Seção 4.6). Use esse diagrama para calcular a força resultante sobre a pára-quedista. A força resultante é orientada de baixo para cima ou de cima para baixo? c) Qual é a aceleração (módulo e direção) da pára-quedista?

4.43 Duas caixas, uma de massa de 4,0 kg e outra de 6,0 kg, estão em repouso sobre a superfície sem atrito de um lago congelado, ligadas por uma corda leve (Figura 4.38). Uma mulher usando um tênis de solado áspero (de modo que ela possa exercer tração sobre o solo) puxa horizontalmente a caixa de 6,0 kg com uma força F que produz uma aceleração de 2,50 m/s^2. a) Qual é a aceleração da caixa de 4,0 kg? b) Desenhe um diagrama do corpo livre para a caixa de 4,0 kg. Use esse diagrama e a segunda lei de Newton para achar a tensão T na corda que conecta as duas caixas. c) Desenhe um diagrama do corpo livre para a caixa de 6,0 kg. Qual é a direção da força resultante sobre a caixa de 6,0 kg? Qual tem o maior módulo, a força T ou a força F? d) Use a parte c) e a segunda lei de Newton para calcular o módulo da força F.

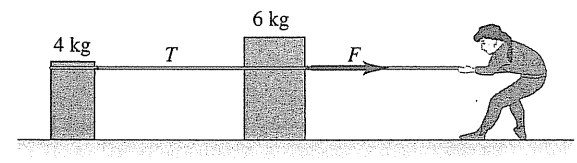


Figura 4.38 Problema 4.43.

4.44 Uma astronauta está ligada a uma nave espacial por um cabo forte. A astronauta com sua roupa e equipamentos possui massa total de 105 kg, enquanto a massa do cabo é desprezível. A massa da espaçonave é igual a 9,05 × 10^4 kg. A espaçonave está longe de qualquer corpo celeste, de modo que as forças gravitacionais externas sobre ela e sobre a astronauta são desprezíveis. Supomos também que a astronauta e a espaçonave estejam em repouso inicialmente em um sistema de referência inercial. A astronauta puxa o cabo com uma força de 80,0 N. a) Qual é a força que o cabo exerce sobre a astronauta? b) Visto que $\sum\vec{F} = m\vec{a}$, como pode um 'cabo sem massa' (m = 0) exercer uma força? c) Qual é a aceleração da astronauta? d) Qual é a força que o cabo exerce sobre a espaçonave? e) Qual é a aceleração da espaçonave?

4.45 Para estudar o dano que a colisão com grandes pássaros pode causar a um avião, você projeta uma arma de teste, que vai acelerar objetos do tamanho de uma galinha, de modo que seu deslocamento ao longo do cano da arma seja dado por x = (9,0 × 10^3 m/s^2)t^2 − (8,0 × 10^4 m/s^3)t^3. O objeto deixa o fim do cano no instante t = 0,025 s. a) Qual deve ser o comprimento do cano da arma? b) Qual será a velocidade escalar dos objetos quando deixam o final do cano? c) Qual força resultante deve ser exercida sobre um objeto de 1,50 kg a i) t = 0 e ii) t = 0,025 s?

4.46 Uma nave espacial desce verticalmente próximo à superfície do Planeta X. Uma propulsão de baixo para cima de 25,0 kN dos seus motores reduz a velocidade da nave a uma taxa de 1,20 m/s^2, mas ela aumenta a velocidade a uma taxa de 0,80 m/s^2 com uma

força propulsora de baixo para cima de 10,0 kN. a) Em cada caso, qual é a direção da aceleração da nave? b) Desenhe um diagrama do corpo livre para a nave. Em cada caso, de aumento ou redução da velocidade, qual é a direção da força resultante sobre a nave? c) Aplique a segunda lei de Newton para cada caso, aumento ou redução de velocidade, e use isso para achar o peso da nave próximo à superfície do Planeta X.

4.47 Um instrumento de 6,50 kg está pendurado por um cabo vertical no interior de uma espaçonave que está sendo lançada da superfície terrestre. Essa nave parte do repouso e alcança a altitude de 276 m em 15,0 s com aceleração constante. a) Desenhe um diagrama do corpo livre para o instrumento nesse período de tempo. Indique qual força é maior. b) Ache a força que o cabo exerce sobre o instrumento.

4.48 Suponha que o foguete no Problema 4.47 está se aproximando para uma aterrissagem vertical em vez de estar sendo lançado. O capitão ajusta a propulsão do motor de modo que o módulo da aceleração do foguete seja o mesmo que era durante o lançamento. Repita as partes (a) e (b).

4.49 Uma ginasta de massa m escala uma corda vertical que está presa ao teto. Ignore o peso da corda. Desenhe um diagrama do corpo livre para a ginasta. Calcule a tensão na corda, considerando que a ginasta a) escala a uma taxa constante; b) dependura-se estática na corda; c) sobe a corda com aceleração de módulo $|\vec{a}|$; d) escorrega pela corda com aceleração de cima para baixo de módulo $|\vec{a}|$.

4.50 Um elevador carregado possui massa total de 2200 kg. Os cabos muito desgastados podem suportar uma tensão máxima de 28000 N. a) Faça um diagrama de força do corpo livre para o elevador. Em termos das forças que atuam no seu diagrama, qual é a força resultante sobre o elevador? Aplique a segunda lei de Newton para o elevador e ache a aceleração máxima de baixo para cima para o elevador, sem que os cabos se rompam. b) Qual seria a resposta para o item a), se o elevador estivesse na Lua, onde $g = 1{,}62\ \text{m/s}^2$?

4.51 Pulando para o solo. Um homem de 75,0 kg pula de uma plataforma de 3,10 m de altura acima do solo. Ele mantém as pernas esticadas à medida que cai, mas no momento em que os pés tocam o solo, os joelhos começam a se dobrar, e, considerando-o uma partícula, ele se move 0,60 m antes de parar. a) Qual é sua velocidade no momento em que os pés tocam o solo? b) Qual é sua aceleração (módulo e direção) quando ele diminui de velocidade, supondo uma aceleração constante? c) Desenhe o diagrama do corpo livre para ele (Seção 4.6). Em termos das forças que atuam no diagrama, qual é a força resultante sobre ele? Use as leis de Newton e os resultados do item (b) para calcular a força média que os pés dele exercem sobre o solo enquanto ele diminui de velocidade. Expresse essa força em newtons e também como um múltiplo do peso dele.

4.52 A cabeça de um martelo de 4,9 N, que se desloca de cima para baixo com velocidade de 3,2 m/s, pára, fazendo um prego penetrar 0,45 cm em uma placa de pinho. Além de seu peso, existe uma força de 15 N aplicada de cima para baixo sobre o martelo por uma pessoa que o está usando. Suponha que a aceleração da cabeça do martelo seja constante durante o contato com o prego. a) Faça um diagrama do corpo livre para a cabeça do martelo. Identifique a força de reação a cada uma das forças incluídas no diagrama. b) Determine a força $\vec{F}$ de cima para baixo exercida pela cabeça do martelo durante o contato com o prego. c) Suponha que o prego esteja em contato com madeira dura e que a cabeça do martelo só se desloque 0,12 cm até parar. A força aplicada sobre o martelo é a mesma do item (b). Qual será então a força $\vec{F}$ de cima para baixo exercida pela cabeça do martelo durante o contato com o prego?

4.53 Um cabo uniforme de peso p fica pendurado verticalmente de cima para baixo, equilibrado por uma força de módulo p de baixo para cima aplicada em sua extremidade superior. Qual é a tensão no cabo a) em sua extremidade superior? b) Em sua extremidade inferior? c) Em seu ponto médio? Sua resposta para cada parte deve incluir um diagrama do corpo livre. (*Sugestão:* Para cada questão, isole a seção ou o ponto do cabo que você analisará.) d) Faça um gráfico da tensão na corda *versus* a distância a partir da extremidade superior.

4.54 Os dois blocos indicados na Figura 4.39 estão ligados por uma corda uniforme e pesada, com massa de 4,0 kg. Uma força de 200 N é aplicada de baixo para cima conforme indicado. a) Desenhe três diagramas do corpo livre, um para o bloco de 6,0 kg, um para a corda de 4,0 kg e outro para o bloco de 5,0 kg. Para cada força, indique qual é o corpo que exerce a referida força. b) Qual é a aceleração do sistema? c) Qual é a tensão no topo da pesada corda? d) Qual é a tensão no meio da corda?

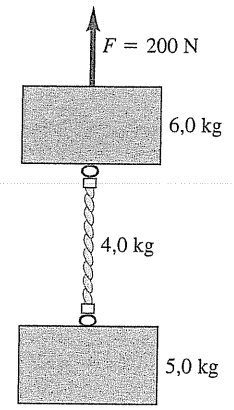


Figura 4.39 Problema 4.54.

4.55 Um atleta com massa de 90,0 kg está praticando exercícios de levantamento de peso. Saindo da posição de repouso, ele levanta, com aceleração constante, um haltere que pesa 490 N. Ele levanta o haltere a uma distância de 0,60 m em 1,6 s. a) Faça um diagrama de força do corpo livre para o haltere e outro para o atleta. b) Use os diagramas do item (a) e as leis de Newton para achar a força total que os pés dele exercem sobre o solo enquanto ele ergue o haltere.

4.56 Um balão de ar quente consiste de um cesto, um passageiro e alguma carga. Considere a massa total como M. Embora haja uma força de levantamento de baixo para cima que atua sobre o balão, este inicialmente está acelerando no sentido de cima para baixo a uma taxa de $g/3$. a) Desenhe um diagrama do corpo livre para o balão descendente. b) Encontre a força de levantamento de baixo para cima em termos do peso inicial total Mg. c) O passageiro observa que está se dirigindo diretamente para uma cachoeira e decide que precisa subir. Qual fração do peso total ele deve soltar do cesto para que o balão acelere *de baixo para cima* a uma taxa de $g/2$? Suponha que a força de levantamento de baixo para cima permanece a mesma.

4.57 Um estudante tenta erguer uma corrente que consiste de três elos idênticos. Cada elo possui massa de 300 g. A corrente de três peças é conectada a um fio e depois suspensa verticalmente, com o estudante segurando a extremidade superior do fio e puxando de baixo para cima. Em função da força de puxar do estudante, uma força de baixo para cima de 12 N é aplicada sobre a corrente pelo fio. a) Desenhe um diagrama do corpo livre para *cada* elo na corrente e também para a corrente toda considerada como um corpo único. b) Use os resutlados do item (a) e as leis de Newton para determinar i) a aceleração da corrente e ii) a força exercida pelo elo superior sobre o elo do meio.

4.58 A posição de um helicóptero de treinamento de $2{,}75 \times 10^5$ N é dada por

$$\vec{r} = (0{,}020\ \text{m/s}^3)t^3\hat{i} + (2{,}2\ \text{m/s})t\hat{j} - (0{,}060\ \text{m/s}^2)t^2\hat{k}.$$

Ache a força resultante sobre o helicóptero para $t = 5{,}0$ s.

4.59 Um objeto com massa m move-se ao longo do eixo Ox. Sua posição em função do tempo é dada por $x(t) = At - Bt^3$, onde A e B são constantes. Calcule a força resultante sobre o objeto em função do tempo.

4.60 Um objeto de massa m inicialmente em repouso é submetido a uma força dada por $\vec{F} = k_1\hat{i} + k_2t^3\hat{j}$, onde k_1 e k_2 são constantes. Determine a velocidade $\vec{v}(t)$ do objeto em função do tempo.

Problemas desafiadores

4.61 Conhecendo-se $F(t)$, a força em função do tempo, para um movimento retilíneo, a segunda lei de Newton fornece $a(t)$, a aceleração em função do tempo. Podemos então integrar $a(t)$ para obter $v(t)$ e $x(t)$. Contudo, suponha que em vez disso você conheça $F(v)$. a) A força resultante sobre um corpo que se move ao longo do eixo Ox é igual a $-Cv^2$. Use a segunda lei de Newton escrita como $\sum F = m\,dv/dt$ e faça duas integrações para mostrar que $x - x_0 = (m/C)\ln(v_0/v)$. b) Mostre que a segunda lei de Newton pode ser escrita como $\sum F = mv\,dv/dx$. Deduza a mesma expressão obtida na parte (a) usando essa forma da segunda lei de Newton fazendo uma integração.

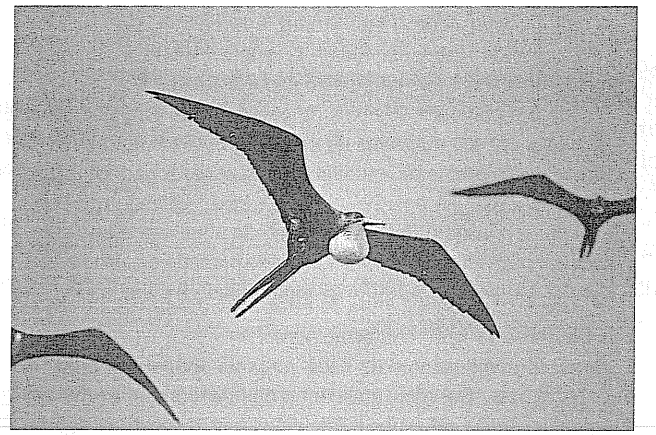
4.62 Um objeto de massa m está inicialmente em repouso na origem. No instante $t = 0$, aplica-se uma nova força $\vec{F}(t)$ cujos componentes são

$$F_x(t) = k_1 + k_2y \qquad F_y(t) = k_3t$$

onde k_1, k_2 e k_3 são constantes. Determine em função do tempo o vetor posição $\vec{r}(t)$ e o vetor velocidade $\vec{v}(t)$.

APLICAÇÕES DAS LEIS DE NEWTON

5



Suponha que um pássaro em vôo é apanhado por uma corrente de ar ascendente, que o faz subir a uma velocidade uniforme. Nessa situação, qual destas forças possui módulo maior: a força da gravidade ou a força ascendente do ar sobre o pássaro?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Como usar a primeira lei de Newton para resolver problemas referentes às forças que atuam sobre um corpo em equilíbrio.
- Como usar a segunda lei de Newton para resolver problemas referentes às forças que atuam sobre um corpo em aceleração.
- A natureza dos diversos tipos de força de atrito – atrito estático, atrito cinético, atrito de rolamento e resistência de um fluido – e como resolver problemas que envolvem essas forças.
- Como resolver problemas referentes às forças que atuam sobre um corpo que se move ao longo de uma trajetória circular.
- As principais propriedades das quatro forças fundamentais da natureza.

Vimos no Capítulo 4 que as três leis de Newton do movimento, o fundamento da mecânica clássica, podem ser formuladas de modo simples. Porém, as *aplicações* dessas leis em situações tais como um navio quebra-gelo se deslocando sobre a superfície congelada de um lago, um tobogã deslizando morro abaixo ou um avião fazendo uma curva acentuada requerem habilidades analíticas e técnicas para a solução de problemas. Neste capítulo aprofundaremos as habilidades para a solução de problemas que você começou a aprender no capítulo anterior.

Começamos com problemas envolvendo o equilíbrio, nos quais o corpo está ou em repouso ou movendo-se com velocidade constante. A seguir, generalizaremos nossas técnicas para a solução de problemas que envolvem corpos que não estão em equilíbrio, para os quais precisamos considerar com exatidão as relações entre as forças e o movimento. Vamos ensinar como descrever e analisar as forças de contato entre corpos em repouso ou quando um corpo desliza sobre uma superfície. Finalmente, estudaremos o caso importante do movimento circular uniforme, no qual o corpo se desloca ao longo de uma circunferência com velocidade escalar constante.

Todas essas situações abrangem o conceito de força, que usaremos em todos os nossos estudos de física. Encerraremos o capítulo com uma breve discussão sobre a natureza fundamental da força e os tipos de força existentes na natureza.

5.1 Uso da primeira lei de Newton: partículas em equilíbrio

No Capítulo 4, aprendemos que um corpo está em *equilíbrio* quando está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em um sistema de referência inercial. Uma lâmpada suspensa, uma ponte pênsil, um avião voando em linha reta e plana a uma velocidade escalar constante — são todos exemplos de situações de equilíbrio. Nesta seção vamos considerar apenas o equilíbrio de corpos que podem ser modelados como partículas. (No Capítulo 11 veremos o que fazer quando um corpo não pode ser modelado como partícula.) O princípio físico essencial é a primeira lei de Newton: quando uma partícula está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em um sistema de referência inercial, a força resultante que atua sobre ela — isto é, a soma vetorial de todas as forças que atuam sobre ela — deve ser igual a zero:

$$\sum \vec{F} = \mathbf{0} \qquad (5.1)$$

(partícula em equilíbrio, forma vetorial)

Normalmente usaremos essa relação utilizando os componentes:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad (5.2)$$

(partícula em equilíbrio, forma de componentes)

Esta seção é sobre o uso da primeira lei de Newton para resolver problemas envolvendo corpos em equilíbrio. Alguns deles podem parecer complicados, mas o importante é lembrar que *todos* esses problemas são resolvidos do mesmo modo. As seguintes recomendações da Estratégia para a Solução de Problemas 5.1 devem ser seguidas para todos esses problemas. Estude a estratégia com cuidado, acompanhe como ela é empregada nos exemplos resolvidos e tente aplicá-la quando for resolver os problemas propostos.

Estratégia para a solução de problemas 5.1

PRIMEIRA LEI DE NEWTON: EQUILÍBRIO DE UMA PARTÍCULA

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* você deve usar a primeira lei de Newton para qualquer problema referente às forças que atuam sobre um corpo em equilíbrio – ou seja, que está em repouso ou em movimento com velocidade constante. Por exemplo, um carro está em equilíbrio quando estacionado, mas também quando se desloca por uma estrada retilínea a uma velocidade escalar uniforme.

Se o problema envolve mais de um corpo e os corpos interagem entre si, você também precisa usar a *terceira* lei de Newton. Essa lei permite relacionar as forças que um corpo exerce sobre outro à força que o segundo corpo exerce sobre o primeiro.

Certifique-se que você identificou as variáveis-alvo. Algumas variáveis-alvo comuns em problemas referentes a equilíbrio incluem o módulo de uma das forças, os componentes de uma força ou a direção (ângulo) de uma força.

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. Faça um desenho com um esquema simples da situação física, mostrando as dimensões e os ângulos.
2. Escolha um corpo que esteja em equilíbrio e desenhe um diagrama do corpo livre para esse corpo. No momento vamos considerá-lo como uma partícula, de modo que basta um ponto grosso para representar a partícula. Em seu diagrama do corpo livre, *não* inclua os outros corpos que interagem com ele, tal como uma superfície sobre a qual ele possa estar apoiado ou uma corda que o esteja puxando.
3. Agora pergunte quais são os corpos que interagem com ele pelo contato ou de outra forma. Em seu diagrama do corpo livre, desenhe o vetor força de cada interação e assinale cada força com um símbolo representando o *módulo* da força. Caso você saiba o ângulo da direção de uma força, desenhe o ângulo e assinale seu valor. Inclua o peso do corpo, exceto nos casos em que ele possua massa desprezível (e, portanto, peso desprezível). Caso a massa seja dada, use $p = mg$ para determinar o peso. Uma superfície em contato com o corpo exerce uma força normal perpendicular à superfície e possivelmente uma força de atrito paralela à superfície. Uma corda ou corrente exerce uma força de puxar (nunca de empurrar) seguindo a direção do seu comprimento.
4. No diagrama do corpo livre, você *não* deve mostrar nenhuma força exercida *pelo* corpo sobre outros corpos. As somas indicadas nas equações (5.1) e (5.2) incluem somente forças que atuam *sobre* o corpo. Para cada força sobre o corpo, pergunte "Qual é o outro corpo que produz a força?". Caso você não seja capaz de responder a essa pergunta, poderá estar imaginando uma força que não existe naquele local.
5. Defina um conjunto de eixos de coordenadas para que sejam incluídos em seu diagrama do corpo livre. (Se houver mais de um corpo no problema, escolha eixos separados para cada um.) Assinale a direção positiva para cada eixo. Quando um corpo está em repouso ou desliza ao longo de uma superfície, geralmente é mais simples escolher um eixo paralelo e outro perpendicular à superfície, mesmo quando o plano for inclinado.

EXECUTAR *a solução* conforme segue:

1. Ache os componentes de cada força ao longo dos eixos de coordenadas. Desenhe uma linha ondulada sobre cada vetor força que tenha sido substituído pelos seus respectivos componentes, de modo a não contar os vetores duas vezes. Lembre-se que o *módulo* de uma força é sempre positivo, enquanto o *componente* de uma força ao longo de uma dada direção pode ser positivo ou negativo.
2. Iguale a zero a soma algébrica de todos os componentes x das forças que atuam sobre o corpo. Em outra equação, iguale a zero a soma algébrica de todos os componentes y das forças. (*Nunca* adicione componentes x e y na mesma equação.)
3. Caso existam dois ou mais corpos, repita as etapas acima para cada corpo. Caso haja interação entre os corpos, use a terceira lei de Newton para relacionar as forças mútuas entre os corpos.
4. Certifique-se de que você tenha um número de equações independentes igual ao número de incógnitas. A seguir resolva essas equações para obter os valores das variáveis-alvo.

AVALIAR *sua resposta:* examine os seus resultados e pergunte-se se eles fazem sentido. Quando o resultado é dado por símbolos ou por fórmulas, procure casos especiais (valores particulares ou casos extremos das diversas grandezas) para os quais você possa imaginar resultados esperados. Confira o resultado verificando se a fórmula é válida para o caso particular imaginado.

Exemplo 5.1

EQUILÍBRIO EM UMA DIMENSÃO: TENSÃO EM UMA CORDA SEM MASSA Uma ginasta com massa $m_G = 50{,}0$ kg está começando a subir em uma corda presa ao teto de um ginásio. Qual é o peso da ginasta? Qual força (módulo e direção) a corda exerce sobre ela? Qual é a tensão na extremidade superior da corda? Considere que a massa da corda em si é desprezível.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a ginasta e a corda estão em equilíbrio; logo, podemos aplicar a primeira lei de Newton em ambos os corpos. Também usaremos a terceira lei de Newton para relacionar as forças que a ginasta e a corda exercem entre si. As variáveis-alvo

são o peso da ginasta, p_G; a força que a corda exerce sobre a ginasta (denominada $T_{C\text{ em }G}$); e a tensão que o teto exerce sobre a extremidade superior da corda (denominada $T_{T\text{ em }C}$).

PREPARAR: desenhamos a situação (Figura 5.1a) e fazemos diagramas do corpo livre separados para a ginasta (Figura 5.1b) e a corda (Figura 5.1c). Consideramos o eixo positivo y orientado de baixo para cima, conforme mostra a figura. Cada força atua na direção vertical e, portanto, possui somente um componente y. As duas forças $T_{C\text{ em }G}$ e $T_{G\text{ em }C}$ são a força de baixo para cima da corda sobre a ginasta (Figura 5.1b) e a força de cima para baixo da ginasta sobre a corda (Figura 5.1c). Essas forças formam um par de ação e reação; portanto, devem possuir o mesmo módulo.

Note também que o peso da ginasta, p_G, é a força de atração (de cima para baixo) exercida sobre a *ginasta* pela *Terra*. Sua força de reação é igual e oposta à força de atração (de baixo para cima) exercida pela *Terra* sobre a *ginasta*. Essa força atua sobre a superfície terrestre, não sobre a ginasta, e por isso não aparece no diagrama do corpo livre dela (Figura 5.1b). Compare com a discussão da maçã do Exemplo Conceitual 4.9 (Seção 4.5). Analogamente, a força que a corda exerce sobre o teto não aparece na Figura 5.1c.

EXECUTAR: o módulo do peso da ginasta é o produto da sua massa e da aceleração da gravidade, g:

$$p_G = m_G g = (50{,}0\text{ kg})(9{,}80\text{ m/s}^2) = 490\text{ N}$$

Essa força aponta na direção negativa de y, portanto seu componente y é $-p_G$. A força de baixo para cima exercida pela corda possui módulo desconhecido $T_{C\text{ em }G}$ e componente y positivo $+T_{C\text{ em }G}$. Como a ginasta está em equilíbrio, a soma dos componentes y da força que atua sobre ela deve ser zero:

$$\text{Ginasta:}\quad \sum F_y = T_{C\text{ em }G} + (-p_G) = 0 \quad \text{logo}$$
$$T_{C\text{ em }G} = p_G = 490\text{ N}$$

A corda puxa a ginasta *para cima* com uma força $T_{C\text{ em }G}$ de módulo 490 N. Pela terceira lei de Newton, a ginasta puxa a corda *para baixo* com uma força de mesmo módulo, $T_{G\text{ em }C} = 490$ N.

A corda também está em equilíbrio. Consideramos que ela é desprovida de peso, portanto a força de baixo para cima de magnitude $T_{T\text{ em }C}$ que o teto exerce sobre a sua extremidade superior deve igualar a zero a força *resultante* vertical que atua sobre a corda. Expresso como uma equação, isso significa

$$\text{Corda:}\quad \sum F_y = T_{T\text{ em }C} + (-T_{G\text{ em }C}) = 0 \quad \text{logo}$$
$$T_{T\text{ em }C} = T_{G\text{ em }C} = 490\text{ N}$$

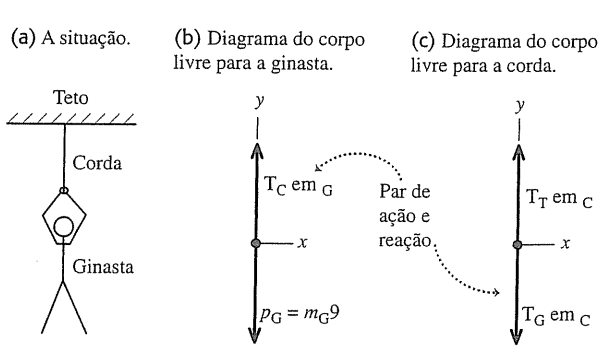


Figura 5.1 Nossos desenhos para esse problema.

AVALIAR: a *tensão* em qualquer ponto da corda é a força que atua nesse ponto. Para esta corda desprovida de peso, a tensão $T_{G\text{ em }C}$ na extremidade inferior da corda possui o mesmo valor que a tensão $T_{T\text{ em }C}$ na extremidade superior. Na verdade, para uma corda sem peso ideal, a tensão possui o mesmo valor em qualquer ponto ao longo do seu comprimento. (Compare com a discussão do Exemplo Conceitual 4.10, na Seção 4.5.)

Note que definimos tensão como o *módulo* de uma força, portanto ela é sempre positiva. Mas, o componente y da força que atua sobre a corda na sua extremidade inferior é $-T_{G\text{ em }C} = -490$ N.

Exemplo 5.2

EQUILÍBRIO EM UMA DIMENSÃO: TENSÃO EM UMA CORDA COM MASSA Suponha que no Exemplo 5.1 o peso da corda não seja desprezível, mas de 120 N. Ache a tensão em cada extremidade da corda.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como no Exemplo 5.1, as variáveis-alvo são os módulos $T_{G\text{ em }C}$ e $T_{T\text{ em }C}$ das forças que atuam nas extremidades inferior e superior da corda, respectivamente. Novamente, aplicamos a primeira lei de Newton para a ginasta e para a corda e usamos a terceira lei de Newton para relacionar as forças que a ginasta e a corda exercem entre si.

PREPARAR: novamente desenhamos diagramas do corpo livre separados para a ginasta (Figura 5.2a) e para a corda (Figura 5.2b). A única diferença em relação ao Exemplo 5.1 é que neste caso há *três* forças atuando sobre a corda: a força de cima para baixo exercida pela ginasta ($T_{G\text{ em }C}$), a força de baixo para cima exercida pelo teto ($T_{C\text{ em }C}$) e o peso da corda, de módulo $p_C = 120$ N.

EXECUTAR: o diagrama do corpo livre para a ginasta é o mesmo do Exemplo 5.1, portanto, sua condição de equilíbrio é também a mesma. Pela terceira lei de Newton, $T_{C\text{ em }G} = T_{G\text{ em }C}$ e temos

$$\text{Ginasta:}\quad \sum F_y = T_{C\text{ em }G} + (-p_G) = 0 \quad \text{logo}$$
$$T_{C\text{ em }G} = T_{G\text{ em }C} = p_G = 490\text{ N}$$

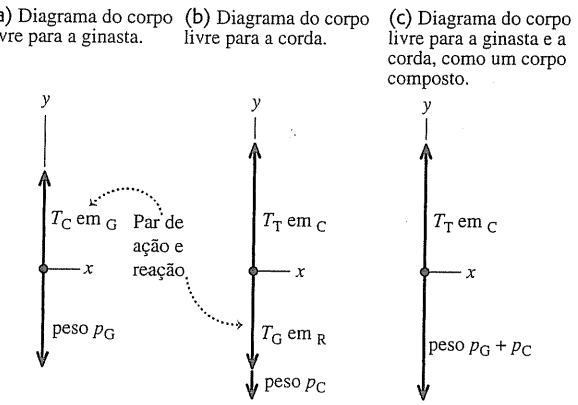


Figura 5.2 Nossos desenhos para esse problema, incluindo o peso da corda.

A condição de equilíbrio $\Sigma F_y = 0$ para a corda é

$$\text{Corda:} \quad \sum F_y = T_{\text{T em C}} + (-T_{\text{G em C}}) + (-p_{\text{C}}) = 0$$

Note que o componente y de $T_{\text{T em C}}$ é positivo porque ele aponta na direção $+y$, mas os componentes y, tanto de $T_{\text{G em C}}$ quanto de p_{C}, são negativos. Quando solucionamos $T_{\text{T em C}}$ e substituímos os valores $T_{\text{G em C}} = T_{\text{C em G}} = 490$ N e $p_{\text{C}} = 120$ N, encontramos

$$T_{\text{T em C}} = T_{\text{G em C}} + p_{\text{C}} = 490 \text{ N} + 120 \text{ N} = 610 \text{ N}$$

AVALIAR: quando incluímos o peso da corda, a tensão é *diferente* em ambas as extremidades da corda. A força $T_{\text{T em C}}$ exercida pelo teto precisa sustentar tanto o peso de 490 N da ginasta quanto o de 120 N da corda; logo, $T_{\text{T em C}} = 610$ N.

Para observar isso de forma mais explícita, desenhe um diagrama do corpo livre para o corpo composto, que consiste da ginasta e da corda considerados como uma unidade (Figura 5.2c). Somente duas forças externas atuam sobre esse corpo composto: a força $T_{\text{T em C}}$ exercida pelo teto e o peso total $p_{\text{G}} + p_{\text{C}} = 490$ N + 120 N = 610 N. (As forças $T_{\text{G em C}}$ e $T_{\text{C em G}}$ são *internas* ao corpo composto. Como a primeira lei de Newton envolve somente forças *externas*, as forças internas não têm função.) Logo, a primeira lei de Newton aplicada a esse corpo composto é

$$\text{Corpo composto:} \quad \sum F_y = T_{\text{T em C}} + [-(p_{\text{G}} + p_{\text{C}})] = 0$$

logo, $T_{\text{T em C}} = p_{\text{G}} + p_{\text{C}} = 610$ N.

Esse método de tratar a ginasta e a corda como um corpo composto parece bem mais simples e você pode estar pensando por que não o usamos primeiro. A resposta é que não podemos determinar a tensão $T_{\text{G em C}}$ na extremidade inferior da corda por meio desse método. *Moral da história: sempre que houver mais de um corpo em um problema que envolva as leis de Newton, a abordagem mais segura é tratar cada corpo separadamente.*

Exemplo 5.3

EQUILÍBRIO EM DUAS DIMENSÕES Na Figura 5.3a, o motor de um automóvel com peso p está suspenso por uma corrente que está ligada por um anel O a duas outras correntes, uma delas amarrada ao teto e a outra presa na parede. Ache as tensões nas três correntes em função de p e despreze o peso das correntes e do anel.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: as variáveis-alvo são as tensões T_1, T_2 e T_3 nas três correntes (Figura 5.3a). Pode parecer estranho desprezar o peso das correntes e do anel neste exemplo e *não* desprezar o peso de uma simples corda no Exemplo 5.2. A razão é que o peso das correntes ou do anel é muito pequeno em comparação com o peso do motor. Por outro lado, no Exemplo 5.2, o peso da corda era uma fração razoável do peso da ginasta (120 N em comparação com 490 N).

Todos os corpos do exemplo estão em equilíbrio, por isso usaremos a primeira lei de Newton para determinar T_1, T_2 e T_3. Precisamos de três equações simultâneas, uma para cada variável-alvo. Entretanto, ao aplicar a primeira lei de Newton somente a um corpo fornece apenas *duas* equações, como na Equação (5.2). Assim, para resolver o problema, temos que considerar mais de um corpo em equilíbrio. Analisaremos o motor (que sofre ação de T_1) e o anel (que está conectado às três correntes e, portanto, sofre ação das três tensões).

PREPARAR: as figuras 5.3b e 5.3c mostram nossos diagramas do corpo livre, incluindo um sistema de coordenadas xy, para o motor e o anel, respectivamente.

As duas forças que atuam sobre o motor são seu peso p e a força de tensão de baixo para cima T_1, exercida pela corrente vertical; as três forças que atuam sobre o anel são as tensões da corrente vertical (T_1), a corrente horizontal (T_2) e a corrente inclinada (T_3). Como a corrente vertical possui peso desprezível, ela exerce forças de módulo igual a T em ambas as suas extremidades: de baixo para cima sobre o motor na Figura 5.3b e de cima para baixo na Figura 5.3c (veja o Exemplo 5.1). Se o peso não fosse desprezível, essas duas forças teriam módulos diferentes, como ocorreu com a corda no Exemplo 5.2. Também estamos desprezando o peso do anel, razão pela qual ele não é incluído nas forças da Figura 5.3c.

EXECUTAR: as forças que atuam sobre o motor estão orientadas somente ao longo do eixo y, portanto, de acordo com a primeira lei de Newton

$$\text{Motor:} \quad \sum F_y = T_1 + (-p) = 0 \quad \text{e} \quad T_1 = p$$

A corrente horizontal e a corrente inclinada não exercem forças sobre o motor em si, visto que elas não estão ligadas a ele, mas

(a) Motor, correntes e anel. (b) Diagrama do corpo livre para o motor. (c) Diagrama do corpo livre para o anel O.

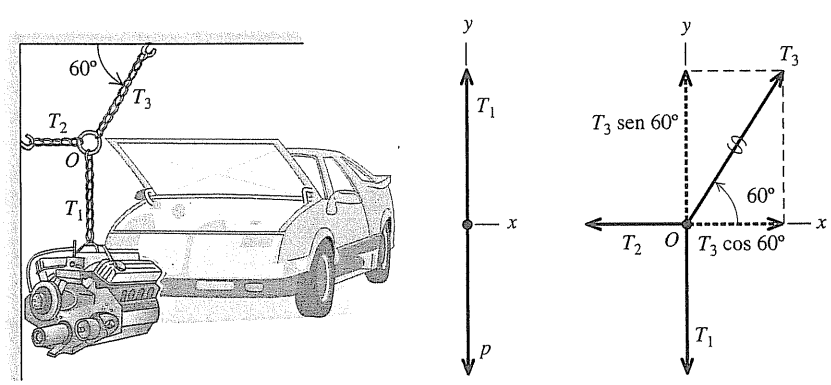


Figura 5.3 (a) A situação; (b) e (c) Nossos diagramas do corpo livre.

essas forças aparecem quando aplicamos a primeira lei de Newton ao anel.

No diagrama do corpo livre do anel (Figura 5.3c), lembre-se de que T_1, T_2 e T_3 são os *módulos* das forças. Primeiro, decompomos a força com magnitude T_3 nos seus componentes x e y. O anel está em equilíbrio, por isso escrevemos equações separadas segundo as quais os componentes x e y da força resultante sobre o anel são iguais a zero. (Note que, conforme vimos na Estratégia para a Solução de Problemas 5.1, os componentes x e y *nunca* devem ser adicionados em uma única equação.) Achamos

$$\text{Anel} \quad \sum F_x = T_3 \cos 60° + (-T_2) = 0$$
$$\text{Anel} \quad \sum F_y = T_3 \operatorname{sen} 60° + (-T_1) = 0$$

Visto que $T_1 = p$, podemos reescrever a segunda equação como

$$T_3 = \frac{T_1}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{p}{\operatorname{sen} 60°} = 1{,}155p$$

Podemos agora usar esse resultado na primeira equação do anel:

$$T_2 = T_3 \cos 60° = p \frac{\cos 60°}{\operatorname{sen} 60°} = 0{,}577p$$

Portanto, podemos expressar todas as três tensões como múltiplos do peso p do motor, o qual supomos ser conhecido. Resumindo,

$$T_1 = p$$
$$T_2 = 0{,}577p$$
$$T_3 = 1{,}155p$$

AVALIAR: nossos resultados mostram que a corrente presa ao teto exerce uma força sobre o anel de módulo T_3, que é *maior* do que o peso do motor. Embora isso pareça estranho, note que o componente vertical dessa força é igual a T_1, que por sua vez é igual a p. Porém, como essa força também possui um componente horizontal, o módulo T_3 deve ser maior do que p. Portanto, a corrente presa ao teto é a que está submetida à maior tensão e a mais susceptível à ruptura.

Você pode ter pensado inicialmente que o corpo mais importante nesse problema fosse o motor. Mas, para obter equações suficientes para solucionar o problema, tivemos também que considerar as forças que atuam sobre o segundo corpo (o anel que liga as correntes). Situações como essa são razoavelmente comuns em problemas referentes a equilíbrio, por isso tenha essa técnica em mente.

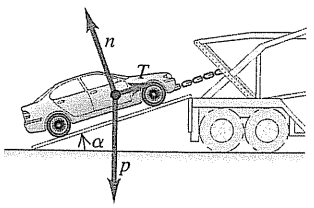
Exemplo 5.4

UM PLANO INCLINADO Um carro de peso p está em repouso sobre a rampa de um rebocador (Figura 5.4a). Somente um cabo ligando o carro ao rebocador impede o carro de deslizar para baixo ao longo da rampa. (O carro não está freado nem engrenado.) Ache a tensão no cabo e a força que a rampa exerce sobre os pneus do carro.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o carro está em equilíbrio, portanto mais uma vez usamos a primeira lei de Newton. A rampa exerce uma força à parte sobre cada pneu do carro, mas para simplificar, agrupamos todas elas em uma única força. Para simplificar ainda mais, supomos que há muito pouco atrito sobre o carro e, portanto, ignoramos o componente dessa força sobre o carro, que atua em

(a) Carro sobre a rampa.



(b) Diagrama do corpo livre para o carro.
Substituímos o peso pelos seus componentes.

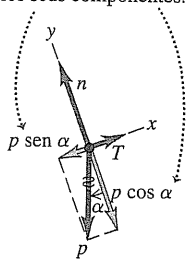


Figura 5.4 Um cabo mantém um carro em repouso sobre uma rampa.

paralelo à rampa (Figura 4.2b). (Retomaremos a discussão sobre a força de atrito na Seção 5.3.) Logo, podemos afirmar que a rampa exerce somente uma força sobre o carro, que é *perpendicular* à rampa. Essa força aparece porque os átomos na superfície da rampa resistem a ter os átomos dos pneus espremidos entre eles. Como na Seção 4.1, designamos essa força como força *normal* (Figura 4.2a). As duas variáveis-alvo são o módulo n da força normal e o módulo T da tensão no cabo.

PREPARAR: a Figura 5.4b mostra um diagrama do corpo livre para o carro. As três forças que atuam sobre o carro são seu peso (módulo p), a tensão no cabo (módulo T) e a força que a rampa exerce sobre os pneus do carro (módulo n). Note que a força normal atua de baixo para cima e da direita para a esquerda porque está impedindo que o carro penetre nas esteiras sólidas.

Escolhemos os eixos x e y para serem perpendicular e paralela ao plano da rampa, como indicado. Essa escolha torna o problema mais fácil de analisar porque somente a força do peso possui ambos os componentes x e y. Se escolhêssemos os eixos nos planos horizontal e vertical, nossa tarefa seria mais difícil porque necessitaríamos achar os componentes x e y para *ambas* as forças (a força normal e a tensão).

Note que o ângulo α entre a rampa e a horizontal é o mesmo ângulo α entre o vetor peso $\vec{p}$ e a normal ao plano da rampa.

EXECUTAR: para escrever os componentes x e y da primeira lei de Newton, necessitamos encontrar os componentes do peso. Uma complicação é que o ângulo α na Figura 5.4b *não* é medido a partir do eixo $+Ox$ para o eixo $+Oy$. Portanto, *não podemos* usar diretamente as Equações (1.6) para achar os componentes. (Talvez seja bom rever a Seção 1.8 para você verificar se entendeu este ponto importante.)

Uma alternativa para encontrar os componentes de $\vec{p}$ é considerar os triângulos retângulos indicados na Figura 5.4b. O seno de α é o módulo do componente x de $\vec{p}$ (ou seja, o lado do triângulo oposto ao ângulo α) dividido pelo módulo p (a hipotenusa do triângulo). Analogamente, o cosseno de α é o módulo do componente y (o lado do triângulo adjacente ao ângulo α) dividido pelo módulo p. Ambos os componentes são negativos, de modo que $p_x = -p \operatorname{sen} \alpha$ e $p_y = -p \cos \alpha$.

Outra abordagem é reconhecer que um componente de $\vec{p}$ deve envolver o seno de α enquanto o outro componente envolve o cosseno de α. Para decidir qual é qual, desenhe um diagrama do corpo livre de modo que o ângulo α seja notadamente menor ou maior que 45°. (Você terá que resistir à tendência natural de dese-

nhar ângulos tais que se aproximem de 45°.) Na Figura 5.4b, α é menor que 45°, de modo que o seno de α é menor que o cosseno de α. A figura mostra que o componente x de $\vec{p}$ é menor do que o componente y, de modo que o componente x deve envolver o seno de α e o componente y deve envolver o cosseno de α. Novamente, obtemos $p_x = p \text{ sen } \alpha$ e $p_y = -p \cos \alpha$.

Na Figura 5.4b, desenhamos uma linha ondulada sobre o vetor original que representa o peso para que ele não seja contado duas vezes. Pelas condições de equilíbrio, temos

$$\sum F_x = T + (-p\text{sen}\alpha) = 0$$
$$\sum F_y = n + (-p\cos\alpha) = 0$$

Verifique se você compreende como esses sinais estão relacionados com a escolha das coordenadas. Lembre-se de que, por definição, T, p e n são *módulos* de vetores e, portanto, são sempre positivos.

Resolvendo essas equações e explicitando T e n, achamos

$$T = p \text{ sen}\alpha$$
$$n = p \cos\alpha$$

AVALIAR: nossas respostas para T e n dependem do valor de α; podemos verificar essa dependência analisando alguns casos especiais. Se o ângulo α for zero, então sen $\alpha = 0$ e cos a = 1. Nesse caso, a rampa seria horizontal; nenhuma tensão T seria necessária para sustentar o carro e a força normal n seria igual ao peso. Se o ângulo α for 90°, então sen $\alpha = 1$ e cos a = 0. Nesse caso, a tensão T seria igual ao peso p e a força normal n seria zero. São estes os resultados que você esperaria nesses casos particulares?

ATENÇÃO Força normal e peso podem não ser iguais Trata-se de um erro comum supor, automaticamente, que o módulo n da força normal é igual ao peso p. Mas nosso resultado mostra que, em geral, isso *não* é verdadeiro. É sempre recomendável tratar n como uma variável e solucionar o seu valor, como fizemos aqui.

Como observação final, perguntamos como as respostas para T e n seriam afetadas se o carro não estivesse em repouso, mas sim fosse puxado para cima da rampa com velocidade escalar constante. Essa também é uma situação de equilíbrio, visto que a velocidade do carro é constante. Logo, os cálculos seriam exatamente iguais, e T e n teriam os mesmos valores obtidos para o carro em repouso. (É verdade que T deve ser maior do que p sen α para *iniciar* o movimento do carro para cima da rampa, mas isso não foi o que perguntamos.)

Exemplo 5.5

TENSÃO EM TORNO DE UMA POLIA SEM ATRITO Blocos de granito estão sendo retirados de uma pedreira e transportados para cima de um plano inclinado de 15°. Por razões ambientais, o barro também está sendo despejado na pedreira para preencher buracos antigos. Para simplificar o processo, você projeta um sistema no qual o bloco de granito sobre um carrinho com rodas de aço (peso p_1, incluindo o bloco e o carrinho) é puxado para cima sobre trilhos de aço por um balde cheio de barro (peso p_2, incluindo o barro e o balde) que cai verticalmente para o interior da pedreira (Figura 5.5a). Desprezando o peso do cabo e os atritos na polia e nas rodas, determine a relação entre os pesos p_1 e p_2 para que o sistema se mova com velocidade escalar constante.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o carrinho e o balde se movem com uma velocidade constante (ou seja, em linha reta a uma velocidade escalar constante). Logo, cada corpo está em equilíbrio e não podemos aplicar a primeira lei de Newton a eles.

Nossas duas variáveis-alvo são os pesos p_1 e p_2. As forças que atuam sobre o balde são o seu peso p_2 e uma tensão de baixo para cima exercida pelo cabo. O carrinho possui *três* forças atuando sobre ele; o seu peso p_1, uma força normal com módulo n exercida pelos trilhos e uma força de tensão proveniente do cabo. (Ignoramos o atrito, considerando que os trilhos não exercem nenhuma força paralela à inclinação.) Essa é exatamente a mesma situação do carro sobre a rampa no Exemplo 5.4. Como

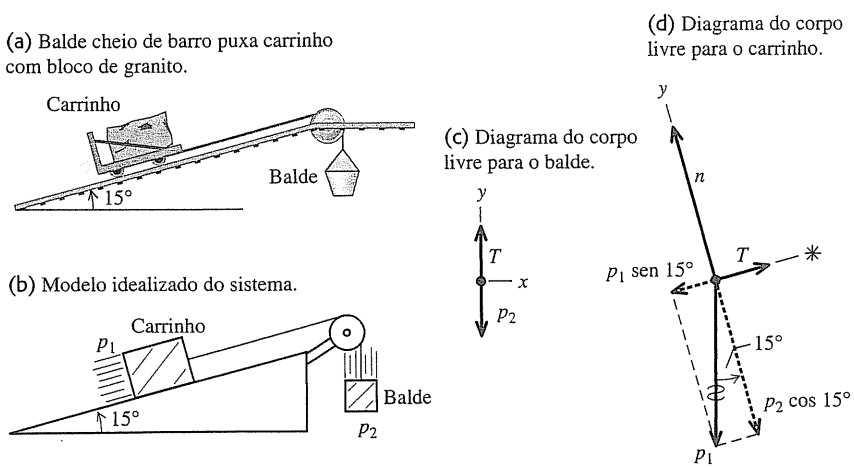


Figura 5.5 (a) A situação. (b) Nosso modelo idealizado. (c), (d) Nossos diagramas do corpo livre.

naquele caso, as forças sobre o carrinho não estão orientadas ao longo da mesma direção e por isso necessitaremos usar ambos os componentes da primeira lei de Newton na Equação 5.2).

Assumimos que o cabo possua peso desprezível e, portanto, as forças de tensão que a corda exerce sobre o carrinho e sobre o balde possuem o mesmo módulo T.

PREPARAR: nosso modelo idealizado do sistema é mostrado na Figura 5.5b e as figuras 5.5c e 5.5d mostram os nossos diagramas do corpo livre. Note que temos a liberdade de orientar os eixos de modo diferente para cada corpo; as escolhas indicadas são as mais convenientes. Como fizemos com o carro no Exemplo 5.4, representamos o peso do bloco de granito em termos dos componentes x e y.

EXECUTAR: usando a relação $\Sigma F_y = 0$ para o balde com o barro na Figura 5.5c, achamos

$$\sum F_y = T + (-p_2) = 0 \qquad \text{logo} \qquad T = p_2$$

Usando a relação $\Sigma F_x = 0$ para o carrinho com o bloco na Figura 5.5d, achamos

$$\sum F_x = T + (-p_1 \operatorname{sen} 15°) = 0 \qquad \text{logo} \qquad T = p_1 \operatorname{sen} 15°$$

Igualando as duas expressões para T, encontramos

$$p_2 = p_1 \operatorname{sen} 15° = 0{,}26 p_1$$

AVALIAR: nossa análise não depende da direção do movimento, somente do fato de a velocidade ser constante. Portanto, o sistema pode se deslocar com velocidade escalar constante em *qualquer* direção, desde que o peso do balde com o barro seja igual a 26% do peso total do carrinho com o bloco. O que aconteceria se p_2 fosse maior que 0,26 p_1? Ou se fosse menor que 0,26 p_1?

Note que não foi necessário usar a equação $\Sigma F_y = 0$ para o carrinho com o bloco; isso seria útil apenas para obter o valor de n. Você é capaz de mostrar que $n = p_1 \cos 15°$?

Teste sua compreensão da Seção 5.1 Um semáforo de peso p está suspenso por dois cabos leves, um de cada lado. Cada cabo forma um ângulo de 45° com a horizontal. Qual é a tensão em cada cabo? i) $p/2$; ii) $p/\sqrt{2}$; iii) p; iv) $p\sqrt{2}$; v) $2p$. ∎

5.2 Uso da segunda lei de Newton: dinâmica das partículas

Agora estamos preparados para discutir problemas de *dinâmica*. Nesses problemas, aplicamos a segunda lei de Newton para corpos sobre os quais a força resultante é *diferente* de zero e, portanto, *não* estão em equilíbrio; mas sim em aceleração. A força resultante sobre o corpo é igual ao produto da massa pela aceleração do corpo:

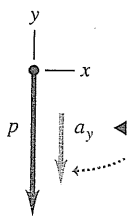
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad (5.3)$$

(segunda lei de Newton, forma vetorial)

(a)

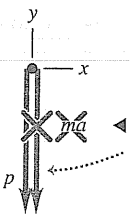
Somente a força da gravidade atua sobre um corpo em queda livre.

(b) Diagrama do corpo livre correto.



◀ **CERTO!** Você pode seguramente desenhar o vetor de aceleração ao lado do diagrama.

(c) Diagrama do corpo livre incorreto.



◀ **ERRADO** Este vetor não pertence a um diagrama do corpo livre porque $m\vec{a}$ *não* é uma força.

Figura 5.6 Diagrama do corpo livre correto e incorreto, para um corpo em queda livre.

Normalmente usaremos esta relação na forma dos componentes:

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad (5.4)$$

(segunda lei de Newton, forma dos componentes)

A seguinte estratégia para a solução de problemas é muito semelhante à recomendada na Seção 5.1 para problemas de equilíbrio. Estude essa estratégia com cuidado, acompanhe como ela é empregada nos exemplos resolvidos e tente aplicá-la quando for resolver os problemas no final do capítulo. Lembre-se de que *todos* os problemas de dinâmica podem ser resolvidos usando-se essa estratégia.

ATENÇÃO $m\vec{a}$ **não pertence a diagramas do corpo livre** Lembre-se de que a grandeza $m\vec{a}$ é o *resultado* das forças que atuam sobre um corpo, *não* uma força propriamente dita; ela não puxa nem empurra nada nas vizinhanças do corpo. Ao desenhar o diagrama do corpo livre para um corpo que está em aceleração (como a fruta na Figura 5.6a), tome cuidado para *não* incluir 'a força $m\vec{a}$', porque *essa força não existe* (Figura 5.6c). Revise a Seção 4.3, caso esse ponto não esteja claro para você. Algumas vezes desenhamos o vetor $\vec{a}$ *ao longo do* diagrama do corpo livre, como na Figura 5.6b; nesse caso, a aceleração *nunca* deve ser desenhada com uma extremidade tocando o corpo (posição reservada somente para as forças que atuam sobre o corpo).

Estratégia para a solução de problemas 5.2

SEGUNDA LEI DE NEWTON: DINÂMICA DE PARTÍCULAS

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* você deve usar a segunda lei de Newton para resolver *qualquer* problema que envolva forças atuando sobre um corpo em aceleração.

Identifique a variável-alvo — geralmente uma aceleração ou uma força. Se a variável-alvo for diferente disso, você deverá aplicar outro conceito. Por exemplo, suponha que você queira determinar a velocidade com que um trenó está se deslocando, quando chega ao pé de uma colina. Isso significa que a sua variável é a velocidade final do trenó. Com a segunda lei de Newton, você encontrará a aceleração do trenó e, então, usará as relações de aceleração constante da Seção 2.4 para achar a velocidade a partir da aceleração.

PREPARAR *o problema* usando os seguintes passos:

1. Faça um esquema da situação física. Identifique um ou mais corpos que se movem para os quais você deve aplicar a segunda lei de Newton.
2. Desenhe um diagrama do corpo livre para cada corpo escolhido. Esteja ciente de que incluiu todas as forças que atuam *sobre* o corpo, mas tome cuidado também para *não* incluir nenhuma força exercida *pelo* corpo sobre outros corpos. Para cada força no seu diagrama, tente responder à seguinte pergunta: "Que outro corpo está aplicando essa força?" Nunca inclua a grandeza $m\vec{a}$ no seu diagrama do corpo livre; ela não é uma força!
3. Identifique o *módulo* de cada força com símbolos algébricos. (Lembre-se de que os módulos são sempre positivos. Sinais negativos aparecem posteriormente, quando você extrai os componentes das forças.) Geralmente uma das forças é o peso do corpo; ele é normalmente identificado como $p = mg$. Caso o valor numérico da massa seja dado, você pode calcular o peso correspondente.
4. Mostre seus eixos de coordenadas x e y no diagrama do corpo livre. Verifique se indicou a direção positiva de cada eixo. Caso você saiba a direção e o sentido da aceleração, geralmente é mais simples escolher um dos eixos com essa direção e sentido. Caso existam dois ou mais corpos, você pode usar eixos de coordenadas separados para cada corpo.
5. Além da segunda lei de Newton, $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$, identifique outras equações que possam ser úteis. (A cada variável deve corresponder uma equação.) Por exemplo, você poderá necessitar de uma ou mais equações para o movimento com aceleração constante. Se há mais de um corpo envolvido, podem existir relações entre os movimentos dos corpos; por exemplo, podem estar conectados por uma corda. Expresse quaisquer dessas relações sob forma algébrica como relações entre as acelerações dos diversos corpos.

EXECUTAR *a solução* conforme segue:

1. Determine os componentes das forças ao longo dos eixos de coordenadas de cada objeto. Quando for representar uma força em termos dos seus componentes, desenhe uma linha ondulada sobre cada vetor força que tenha sido substituído pelos seus respectivos componentes para não contar os vetores duas vezes
2. Escreva as equações da segunda lei de Newton, Equações (5.4), usando uma equação separada para cada componente.
3. Liste todas as grandezas conhecidas e desconhecidas e identifique as variáveis-alvo.
4. Verifique se você possui equações para todas as variáveis-alvo. Caso tenha menos equações do que variáveis-alvo, volte ao item 5 da etapa anterior. Caso tenha mais, pode ser que haja uma grandeza desconhecida não identificada como tal.
5. Faça a parte fácil – a matemática! Solucione as equações para achar as variáveis.

AVALIAR *sua resposta:* sua resposta possui as unidades corretas? (Quando for o caso, use a conversão $1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$.) O sinal algébrico está correto? (No caso do problema de um trenó deslizando colina abaixo, você pode ter orientado o eixo x positivo de cima para baixo na colina. Se obtiver aceleração negativa do trenó — ou seja, a aceleração é de baixo para cima na colina — há um erro nos seus cálculos.) Se possível, analise casos específicos ou extremos e compare os resultados com os esperados pela sua intuição. Pergunte-se: "Este resultado faz sentido?"

Exemplo 5.6

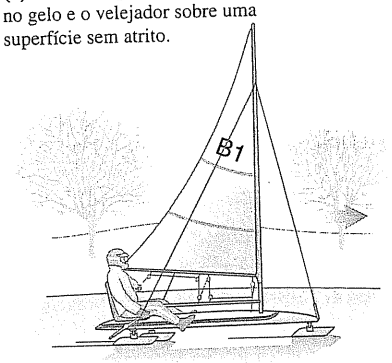
MOVIMENTO RETILÍNEO COM FORÇA CONSTANTE Um barco projetado para deslizar no gelo está em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito (Figura 5.7a). Sopra um vento (ao longo da direção dos apoios no gelo) de modo que 4,0 s após a partida, o barco atinge uma velocidade de 6,0 m/s (cerca de 22 km/h). Qual é a força horizontal constante F_V que o vento exerce sobre o barco? A massa total do barco mais a massa do velejador é igual a 200 kg.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como nossa variável-alvo é uma das forças (F_V) que atua sobre o barco, usaremos a segunda lei de Newton. Essa lei envolve forças e aceleração, mas a aceleração não é dada; precisamos achá-la. Supondo-se que o vento exerça uma força constante, a aceleração resultante é constante e podemos usar uma das fórmulas de aceleração constante da Seção 2.4.

PREPARAR: a Figura 5.7b mostra nosso diagrama do corpo livre para o barco e o velejador considerados como uma unidade. As forças que atuam sobre esse corpo são o peso p, a força normal n exercida pela superfície e a força horizontal constante F_V

(a) Um barco projetado para deslizar no gelo e o velejador sobre uma superfície sem atrito.



(b) Diagrama do corpo livre para o barco e o velejador.

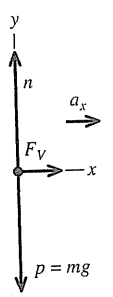


Figura 5.7 (a) A situação. (b) Nosso diagrama do corpo livre.

(nossa variável-alvo). A força resultante e, portanto, a aceleração estão orientadas para a direita, por isso escolhemos essa direção para o eixo x positivo.

Para achar a aceleração x, note o que nos é dado sobre o movimento do barco: ele parte do repouso, de modo que sua velocidade inicial é $v_{0x} = 0$, e atinge uma velocidade $v_x = 6{,}0$ m/s após um tempo decorrido de $t = 4{,}0$ s. Uma equação que podemos usar para relacionar a aceleração a_x a essas grandezas é a Equação (2.8), $v_x = v_{0x} + a_x t$.

EXECUTAR: as grandezas *conhecidas* são a massa $m = 200$ kg, as velocidades inicial e final $v_{0x} = 0$ e $v_x = 6{,}0$ m/s e o tempo decorrido $t = 4{,}0$ s. As três grandezas *desconhecidas* são a aceleração a_x, a força normal n e a força horizontal F_V (a variável-alvo). Logo, necessitamos de três equações.

As primeiras duas equações são as equações x e y para a segunda lei de Newton. A força F_V está orientada na direção positiva de x, enquanto as forças n e mg estão orientadas nas direções positiva e negativa de y, respectivamente. Logo, temos

$$\sum F_x = F_V = ma_x$$
$$\sum F_y = n + (-mg) = 0$$

A terceira equação necessária é a relação de aceleração constante

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

Para achar F_V, primeiro solucionamos a equação de aceleração constante para a_x e depois a substituímos pela equação ΣF_x:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{6{,}0\ \text{m/s} - 0\ \text{m/s}}{4{,}0\ \text{s}} = 1{,}5\ \text{m/s}^2$$
$$F_V = ma_x = (200\ \text{kg})(1{,}5\ \text{m/s}^2) = 300\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Um kg · m/s^2 é igual a 1 newton (N), portanto a resposta final é

$$F_V = 300\ \text{N}$$

Note que não necessitamos de forma alguma da equação ΣF_y para determinar F_v:. Usaríamos essa equação somente para achar a força normal n:

$$n - mg = 0$$
$$n = mg = (200\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)$$
$$= 2{,}0 \times 10^3\ \text{N}$$

AVALIAR: nossas respostas para F_V e n possuem as unidades corretas para uma força, como era esperado. O módulo n da força normal é igual a mg, o peso combinado do barco e do velejador, porque a superfície é horizontal e essas são as únicas forças verticais atuantes. Parece razoável que a força F_V seja substancialmente *menor* do que mg?

Exemplo 5.7

MOVIMENTO RETILÍNEO COM ATRITO Suponha que uma força de atrito horizontal constante de 100 N oponha-se ao movimento do barco do Exemplo 5.6. Qual é agora a força constante F_v que o vento deve aplicar sobre o barco para provocar a mesma aceleração constante de $a_x = 1{,}5$ m/s^2?

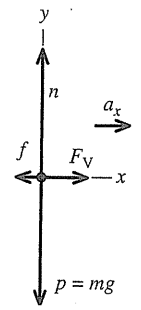


Figura 5.8 Diagrama do corpo livre para o barco e o velejador considerando uma força de atrito $\vec{f}$ que se opõe ao movimento.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: também neste caso a variável-alvo é F_V. Temos a aceleração x, de modo que precisaremos somente da segunda lei de Newton para achar F_V.

PREPARAR: um novo diagrama do corpo livre é indicado na Figura 5.8. A diferença entre este e aquele indicado na Figura 5.7b é a inclusão da força de atrito $\vec{f}$. (Note que seu *módulo* f = 100 N é uma grandeza sempre positiva, mas seu *componente* no eixo Ox é negativo, igual a $-f$ ou -100 N.)

EXECUTAR: agora as duas forças possuem componentes x: a força do vento e a força de atrito. O componente x da segunda lei de Newton fornece

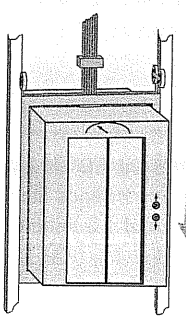
$$\sum F_x = F_V + (-f) = ma_x$$
$$F_V = ma_x + f = (200\ \text{kg})(1{,}5\ \text{m/s}^2) + (100\ \text{N}) = 400\ \text{N}$$

AVALIAR: como não há atrito, faz-se necessária uma força F_V maior do que a do Exemplo 5.6. Necessitamos de 100 N para superar o atrito e de mais 300 N para obter a aceleração necessária.

Exemplo 5.8

TENSÃO NO CABO DE UM ELEVADOR Um elevador e sua carga possuem massa total igual a 800 kg (Figura 5.9a). O elevador está inicialmente descendo com velocidade igual a 10,0 m/s; a seguir ele atinge o repouso em uma distância de 25,0 m. Ache a tensão T no cabo de suporte enquanto o elevador está diminuindo de velocidade até atingir o repouso.

(a) Elevador descendo.



(b) Diagrama do corpo livre para o elevador.

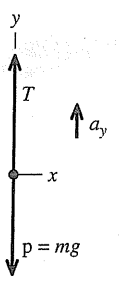


Figura 5.9 (a) A situação. (b) Nosso diagrama do corpo livre.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a variável-alvo é a tensão T, que determinaremos por meio da segunda lei de Newton. Como no Exemplo 5.6, teremos que determinar a aceleração usando as fórmulas de aceleração constante.

PREPARAR: nosso diagrama do corpo livre na Figura 5.9b mostra as duas forças que atuam sobre o elevador: seu peso p e a força de tensão T do cabo. O elevador está se deslocando de cima para baixo com velocidade escalar decrescente, portanto sua aceleração é de baixo para cima; optamos por essa direção para o eixo positivo y.

O elevador está se movendo na direção negativa de y, portanto sua velocidade inicial v_{0y} e o deslocamento $y - y_0$ são ambos negativos: $v_{0y} = -10{,}0$ m/s e $y - y_0 = -25{,}0$ m/s. A velocidade final é $v_y = 0$. Para achar a aceleração a_y a partir dessa informação, usaremos a Equação (2.13) na forma $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0)$. Quando obtivermos a_y, vamos substituí-la pelo componente y da segunda lei de Newton na Equação (5.4).

EXECUTAR: primeiramente, vamos escrever a segunda lei de Newton. A força de tensão atua de baixo para cima enquanto o peso atua de cima para baixo; logo,

$$\sum F_y = T + (-p) = ma_y$$

Solucionamos a variável-alvo T como

$$T = p + ma_y = mg + ma_y = m(g + a_y)$$

Para determinar a_y, reescrevemos a equação da aceleração constante $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0)$:

$$a_y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2(y - y_0)} = \frac{(0)^2 - (-10{,}0\ \text{m/s})^2}{2(-25{,}0\ \text{m})} = +2{,}00\ \text{m/s}^2$$

A aceleração é de baixo para cima (positiva), exatamente como deveria ser, em se tratando de um movimento de cima para baixo com velocidade escalar decrescente.

Agora podemos substituir a aceleração na equação para a tensão:

$$T = m(g + a_y) = (800\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2 + 2{,}0\ \text{m/s}^2) = 9440\ \text{N}$$

AVALIAR: a tensão é 1600 N *maior* do que o peso. Isso faz sentido: a força resultante deve ser orientada de baixo para cima, para fornecer a aceleração de baixo para cima que faz o elevador parar. Você consegue perceber que chegaríamos ao mesmo resultado para a_y e T, se o elevador se deslocasse *de baixo para cima* e *ganhasse* velocidade escalar a uma taxa de 2,0 m/s²?

Exemplo 5.9

PESO APARENTE DENTRO DE UM ELEVADOR EM ACELERAÇÃO Uma garota de 50,0 kg está sobre uma balança dentro do elevador do Exemplo 5.8 (Figura 5.10a). Qual é a leitura da balança?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a balança lê o módulo da força de cima para baixo exercida *pela* passageira *sobre* a balança. Pela terceira lei de Newton, essa força possui módulo igual ao da força normal de baixo para cima, exercida *pela* balança *sobre* a passageira. Logo, podemos resolver o problema calculando o módulo n da força normal.

Acharemos n aplicando a segunda lei de Newton para a passageira. Já conhecemos a aceleração dela; é a mesma do elevador, que calculamos no Exemplo 5.8.

PREPARAR: a Figura 5.10b mostra o diagrama do corpo livre para a passageira. As forças que atuam sobre ela são seu peso $p = mg = (50{,}0\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2) = 490$ N e a força normal n exercida pela balança. (A força de tensão, que desempenhou uma função importante no Exemplo 5.8, não aparece aqui porque ela não atua diretamente sobre a passageira. O que empurra de baixo para cima os pés dela é a balança, *não* o elevador.) Pelo Exemplo 5.8, a aceleração y do elevador e da mulher é $a_y = +2{,}0\ \text{m/s}^2$.

EXECUTAR: pela segunda lei de Newton, temos

$$\sum F_y = n + (-mg) = ma_y$$
$$n = mg + ma_y = m(g + a_y)$$
$$= (50{,}0\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2 + 2{,}0\ \text{m/s}^2) = 590\ \text{N}$$

AVALIAR: nossa resposta para n implica que, enquanto o elevador está parando, a balança empurra a passageira para cima com uma força de 590 N. Pela terceira lei de Newton, ela empurra a balança para baixo com a mesma força; portanto, a leitura da balança é de 590 N, que é 100 N a mais do que seu peso real. A leitura da balança denomina-se **peso aparente**. A tensão que a passageira *sente* nos pés e nas pernas durante o movimento é maior do que a tensão que ela sente quando o elevador está parado ou se movendo com velocidade constante.

O que a passageira sentiria se o elevador acelerasse *de cima para baixo*, de modo que $a_y = -2{,}0\ \text{m/s}^2$? Seria esse o caso se o elevador se movesse de baixo para cima com redução na velocidade escalar, ou se movesse de cima para baixo com aumento na velocidade escalar. Para obter a resposta para essa situação, simplesmente inserimos o novo valor de a_y na equação para n:

$$n = m(g + a_y) = (50{,}0\ \text{kg})[9{,}80\ \text{m/s}^2 + (-2{,}0\ \text{m/s}^2)]$$
$$= 390\ \text{N}$$

Agora a passageira sente como se pesasse somente 390 N, ou 100 N *a menos* do que seu peso real.

Você também pode sentir esses efeitos: tente dar alguns passos dentro de um elevador que está parando após descer (quando seu peso aparente é maior do que seu peso real p) ou parando após subir (quando seu peso aparente é menor do que p).

(a) Passageira de um elevador que desce.

(b) Diagrama do corpo livre para a passageira.

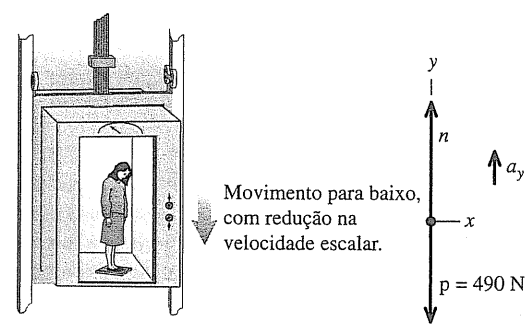


Figura 5.10 (a) A situação. (b) Nosso diagrama do corpo livre.

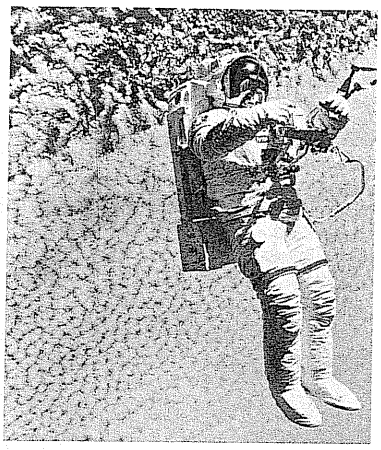


Figura 5.11 Um astronauta em órbita não sente seu peso porque ele possui a mesma aceleração da espaçonave — e *não* porque ele está 'fora da atração da gravidade da Terra'. (Se estivesse, o astronauta e a espaçonave não poderiam permanecer em órbita, e sim sairiam da atração terrestre e voariam para o espaço sideral.)

Peso aparente e imponderabilidade aparente

Vamos generalizar o Exemplo 5.9. Quando uma passageira de massa m está sobre a balança dentro do elevador com aceleração a_y, a leitura do peso aparente dela é

$$n = m(g + a_y)$$

Quando o elevador está acelerando para cima, a_y é positivo e n é maior do que o peso da passageira $p = mg$. Quando o elevador está acelerando para baixo, a_y é negativo e n é menor que o peso. Se a passageira não souber que o elevador está acelerando, ela pode ter a sensação de que seu peso está mudando; é precisamente isso que a balança indica.

Ocorre um caso extremo quando o elevador está acelerando para baixo com $a_y = -g$, ou seja, quando ele está em queda livre. Nesse caso, $n = 0$ e o peso aparente é zero dando a *impressão* de que ela não possui peso. De modo análogo, um astronauta orbitando a Terra numa espaçonave experimenta uma *aparente imponderabilidade* (Figura 5.11). Em cada um desses casos, o peso real não é zero porque ainda existe uma atração gravitacional. Porém, o efeito dessa queda livre é semelhante ao existente quando o corpo está no espaço sideral sem nenhuma força gravitacional atuando sobre ele. Nos dois casos, a pessoa e o respectivo veículo (o elevador ou a espaçonave) estão caindo juntos com a mesma aceleração g, de modo que não existe nenhuma força empurrando a pessoa contra o piso do elevador ou contra a parede da espaçonave.

Exemplo 5.10

ACELERAÇÃO DESCENDO A MONTANHA Um tobogã cheio de estudantes em férias (peso total p) escorrega para baixo em uma encosta coberta de neve. A montanha possui uma inclinação constante α e o tobogã está tão bem lubrificado que não existe qualquer atrito. Qual é a aceleração do tobogã?

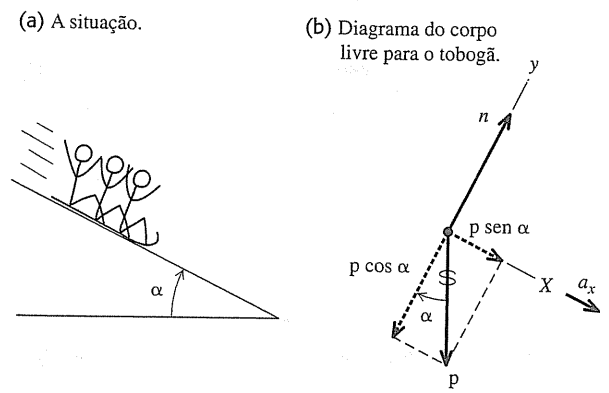


Figura 5.12 Nossos esquemas para esse problema.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: nossa variável-alvo é a aceleração, que determinaremos por meio da segunda lei de Newton. Não há atrito, por isso as únicas forças que atuam sobre o tobogã são seu peso p e a força normal n exercida pela montanha. Como no Exemplo 5.4 (Seção 5.1), a superfície está inclinada, de modo que a força normal não é vertical, nem se opõe ao peso. Logo, devemos usar ambos os componentes de $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ na Equação (5.4).

PREPARAR: a Figura 5.12 mostra nosso esquema e o diagrama do corpo livre. Escolhemos um eixo paralelo e outro perpendicular ao plano da montanha, de modo que a aceleração (que é paralela à montanha) está orientada ao longo da direção positiva x.

EXECUTAR: a força normal possui somente um componente y, mas o peso possui o componente x e o componente y: $p_x = p$ sen α e $p_y = -p$ cos α. (Compare com o Exemplo 5.4, no qual o componente x do peso era $-p$ sen α. A diferença é que o eixo Ox estava orientado para cima no Exemplo 5.4, enquanto na Figura 5.12b está orientado para baixo.) A linha ondulada na Figura 5.12b remete ao fato de que decompusemos o peso nos seus componentes.

A aceleração está claramente na direção $+x$, portanto $a_y = 0$. A segunda lei de Newton na forma de componentes fornece

$$\sum F_x = p \operatorname{sen}\alpha = ma_x$$
$$\sum F_y = n - p\cos\alpha = ma_y = 0$$

Como $p = mg$, a equação do componente x fornece que $mg \operatorname{sen}\alpha = ma_x$, ou

$$a_x = g \operatorname{sen}\alpha$$

Note que não necessitamos da equação do componente y para achar a aceleração. Essa é a vantagem de escolher o eixo x ao longo da direção da aceleração! O que o componente y revela é o módulo da força normal que a montanha exerce sobre o tobogã:

$$n = p\cos\alpha = mg\cos\alpha$$

AVALIAR: a massa não aparece no resultado final da aceleração. Isso significa que *qualquer* tobogã, independentemente de sua massa e do número de passageiros, escorrega para baixo de uma montanha sem atrito, com uma aceleração g sen α. Se o plano for horizontal, $\alpha = 0$ e $a_x = 0$ (o tobogã não se acelera); se o plano for vertical, $\alpha = 90°$ e $a_x = g$ (o tobogã está em queda livre).

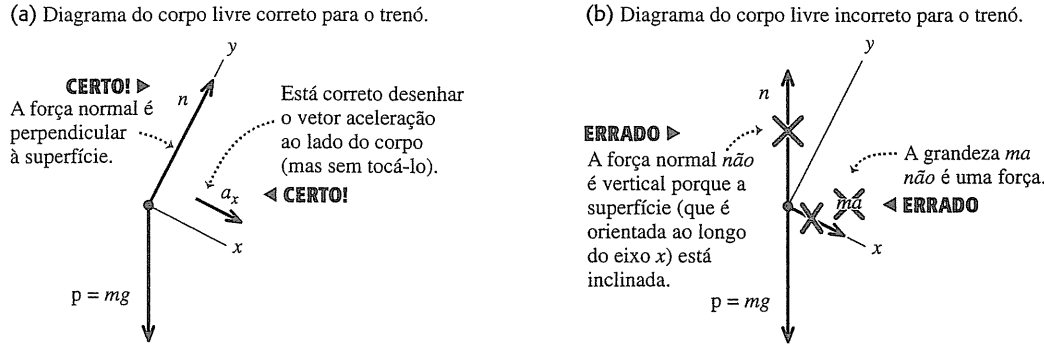


Figura 5.13 Diagramas correto e incorreto para um tobogã em uma montanha sem atrito.

Observe também que a força normal n não é igual ao peso do tobogã (compare com o Exemplo 5.4, na Seção 5.1). Não necessitamos desse resultado agora, mas ele será útil em um exemplo posterior.

ATENÇÃO Erros comuns em diagramas do corpo livre A Figura 5.13 mostra tanto um modo correto (Figura 5.13a) quanto um modo *incorreto* (Figura 5.13b) de desenhar o diagrama do corpo livre do tobogã. O diagrama na Figura 5.13b está errado por dois motivos: a força normal deve ser desenhada ortogonalmente à superfície, e é completamente absurdo incluir a 'força $m\vec{a}$'. Se você se lembrar de que a 'normal' significa 'perpendicular' e que $m\vec{a}$ não é propriamente uma força, não cometerá esses erros.

Exemplo 5.11

DOIS CORPOS COM A MESMA ACELERAÇÃO Você empurra uma bandeja de 1,0 kg pelo balcão do refeitório com uma força constante de 9,0 N. Conforme a bandeja se move, ela empurra um frasco de leite de 0,50 kg (Figura 5.14a). A bandeja e o frasco deslizam sobre uma superfície horizontal que está tão encerada que o atrito é desprezível. Calcule a aceleração da bandeja e do frasco e a força horizontal que a bandeja exerce sobre o frasco.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: nossas *duas* variáveis-alvo são a aceleração do sistema composto pela bandeja e pelo frasco, e a força da bandeja sobre o frasco. Novamente usaremos a segunda lei de Newton, mas teremos de aplicá-la a dois corpos diferentes para obter duas equações (uma para cada variável-alvo).

PREPARAR: podemos adotar qualquer um dos seguintes métodos.

Método 1: podemos tratar o frasco de leite (massa m_{FL}) e a bandeja (massa m_B) como corpos separados, cada qual com o seu próprio diagrama do corpo livre (figuras 5.14b e 5.14c). Note que a força F que você exerce sobre a bandeja não aparece no diagrama do corpo livre para o frasco de leite. Em vez disso, o que faz o frasco acelerar é a força do módulo $F_{B\text{ em }FL}$ exercida sobre ele pela bandeja. De acordo com a terceira lei de Newton, o frasco exerce uma força de igual módulo sobre a bandeja: $F_{FL\text{ em }B} = F_{B\text{ em }FL}$. Consideramos a aceleração orientada na direção positiva de x; tanto a bandeja quanto o frasco se movem com a mesma aceleração a_x.

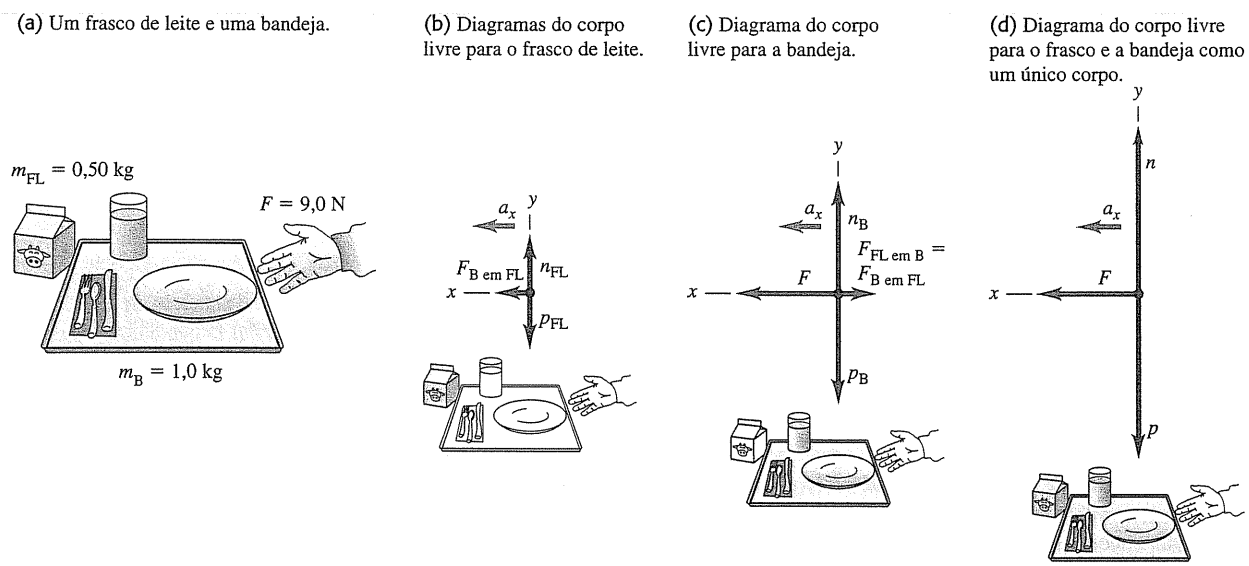


Figura 5.14 Uma bandeja e um frasco de leite empurrados sobre o balcão do refeitório.

Método 2: podemos tratar a bandeja e o frasco de leite como um corpo composto com massa total $m = m_B + m_{FL} = 1{,}50$ kg (Figura 5.14d). A única força horizontal que atua sobre esse corpo composto é a força F que você exerce. As forças $F_{B\text{ em }FL}$ e $F_{FL\text{ em }B}$ não entram em jogo porque são *internas* a esse corpo composto e, de acordo com a segunda lei de Newton, somente as forças *externas* afetam a aceleração de um corpo (Seção 4.3). Logo, necessitaremos de uma equação adicional para achar o módulo $F_{B\text{ em }FL}$ usando esse método; obteremos essa equação também aplicando a segunda lei de Newton ao frasco de leite, como no Método 1.

EXECUTAR: *Método 1:* as equações do componente x da segunda lei de Newton para a bandeja e para o frasco são

$$\text{Bandeja } \sum F_x = F - F_{FL\text{ em }B} = F - F_{B\text{ em }FL} = m_B a_x$$
$$\text{Frasco } \sum F_x = F_{B\text{ em }FL} = m_{FL} a_x$$

São duas equações simultâneas para as duas variáveis-alvo a_x e $F_{B\text{ em }FL}$. (Duas equações são tudo o que precisamos, o que significa que os componentes y não são necessários neste exemplo.) Um modo fácil de resolver as duas equações para a_x é somá-las; isso elimina $F_{B\text{ em }FL}$, fornecendo

$$F = m_B a_x + m_{FL} a_x = (m_B + m_{FL}) a_x$$

e

$$a_x = \frac{F}{m_B + m_{FL}} = \frac{9{,}0\text{ N}}{1{,}0\text{ kg} + 0{,}50\text{ kg}} = 6{,}0\text{ m/s}^2$$

Substituindo esse valor na equação para o frasco, obtemos

$$F_{B\text{ em }FL} = m_{FL} a_x = (0{,}50\text{ kg})(6{,}0\text{ m/s}^2) = 3{,}0\text{ N}$$

Método 2: o componente x da segunda lei de Newton para o corpo composto de massa m é

$$\sum F_x = F = ma_x$$

e a aceleração desse corpo composto é

$$a_x = \frac{F}{m} = \frac{9{,}0\text{ N}}{1{,}50\text{ kg}} = 6{,}0\text{ m/s}^2$$

Então, ao analisar o frasco de leite por si só, observamos que imprimir nele uma aceleração de 6,0 m/s² requer que a bandeja exerça uma força:

$$F_{B\text{ em }FL} = m_{FL} a_x = (0{,}50\text{ kg})(6{,}0\text{ m/s}^2) = 3{,}0\text{ N}$$

AVALIAR: seja qual for o método, os resultados são os mesmos, como era esperado. Para conferir as respostas, note que há forças diferentes atuando nos dois lados da bandeja: $F = 9{,}0$ N no lado direito e $F_{FL\text{ em }B} = 3{,}0$ N no lado esquerdo. Portanto, a força horizontal sobre a bandeja é $F - F_{FL\text{ em }B} = 6{,}0$ N, exatamente o suficiente para acelerar uma bandeja de 1,0 kg a 6,0 m/s².

O método de considerar dois corpos um único funciona *somente* se os dois corpos possuem o mesmo módulo, direção *e* sentido de aceleração. Quando a aceleração é diferente, devemos tratar os dois corpos separadamente, como no próximo exemplo.

Exemplo 5.12

DOIS CORPOS COM ACELERAÇÕES DE MESMO MÓDULO

Na Figura 5.15a, um cavaleiro com massa m_1 desliza sobre um trilho de ar horizontal sem atrito em um laboratório de física. Ele está ligado a um peso de laboratório de massa m_2 por meio de um fio leve, flexível e não deformável, que passa sobre uma pequena polia sem atrito. Calcule a aceleração de cada corpo e a tensão no fio.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o cavaleiro e o peso estão acelerando, portanto, novamente devemos usar a segunda lei de Newton. As três variáveis-alvo são a tensão T no fio e as acelerações dos dois corpos.

PREPARAR: os dois corpos se deslocam em direções diferentes — uma horizontal e outra vertical — de modo que não podemos considerá-los unidos como fizemos no Exemplo 5.11. A Figura 5.15b e a Figura 5.15c mostram nossos diagramas do corpo livre e sistemas de coordenadas separados para cada corpo. É conveniente considerar ambos os corpos acelerando nas direções positivas dos eixos, por isso escolhemos a direção positiva de y, orientada de cima para baixo, para o peso de laboratório. (É perfeitamente correto usar eixos de coordenadas diferentes para os dois corpos.)

Não existe atrito na polia, e consideramos o fio sem massa, de modo que a tensão T é a mesma em todos os pontos do fio; ele aplica uma força de módulo T em cada corpo. (Se quiser, revise o Exemplo Conceitual 4.10 na Seção 4.5, onde discutimos a força de tensão exercida por um fio sem massa.) Os pesos são $m_1 g$ e $m_2 g$.

Embora as *direções* das duas acelerações sejam diferentes, seus *módulos* são iguais. Isso ocorre porque o fio não se estica. Portanto, os dois corpos devem percorrer as mesmas distâncias, no mesmo intervalo de tempo, e as suas velocidades escalares em qualquer instante devem ser iguais. Quando a velocidade varia, isso se dá por valores iguais em um dado tempo, de modo que as acelerações de ambos os corpos devem ter o mesmo módulo a. Podemos expressar essa relação como

$$a_{1x} = a_{2y} = a$$

Graças a essa relação, temos efetivamente somente *duas* variáveis-alvo: a e a tensão T.

EXECUTAR: para o cavaleiro no trilho, a segunda lei de Newton fornece

$$\text{Cavaleiro: } \sum F_x = T = m_1 a_{1x} = m_1 a$$
$$\text{Cavaleiro: } \sum F_y = n + (-m_1 g) = m_1 a_{1y} = 0$$

Para o peso de laboratório, as únicas forças estão na direção de y e

$$\text{Peso de laboratório } \sum F_y = m_2 g + (-T) = m_2 a_{2y} = m_2 a$$

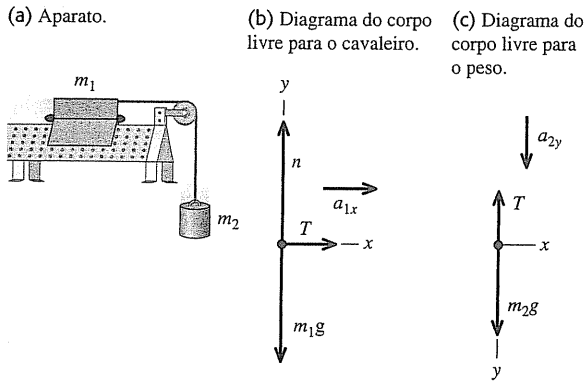


Figura 5.15 (a) A situação. (b), (c) Diagramas do corpo livre.

Nessas equações usamos as relações $a_{1y} = 0$ (o cavaleiro não acelera verticalmente) e $a_{1x} = a_{2y} = a$ (os dois objetos possuem o mesmo módulo de aceleração).

A equação x para o cavaleiro e a equação para o peso de laboratório fornecem duas equações simultâneas envolvendo as variáveis-alvo T e a:

$$\text{Cavaleiro} \qquad T = m_1 a$$

$$\text{Peso de laboratório:} \qquad m_2 g - T = m_2 a$$

Somando-se essas equações, podemos eliminar T e obtemos

$$m_2 g = m_1 a + m_2 a = (m_1 + m_2) a$$

de modo que o módulo da aceleração de cada corpo é

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$$

Substituindo esse valor na primeira equação (para o cavaleiro), obtemos

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

AVALIAR: a aceleração é menor do que g, como era esperado; o peso de laboratório acelera mais lentamente porque a tensão do fio o puxa de volta.

Vemos que a tensão T *não* é igual ao peso $m_2 g$ da massa m_2, sendo, porém, *menor* do que o peso por um fator de $m_1/(m_1 + m_2)$. Caso T *fosse* igual ao peso $m_2 g$, então o peso de laboratório estaria em equilíbrio, mas não está.

ATENÇÃO Tensão e peso podem ser diferentes É um erro comum supor que, para um objeto preso a um fio vertical, a tensão no fio deve ser igual ao peso do objeto. Foi esse o caso no Exemplo 5.5, no qual a aceleração era zero, mas isso certamente estaria errado neste exemplo! A única abordagem segura é *sempre* tratar a tensão como uma variável, como fizemos aqui.

Para finalizar, vamos verificar alguns casos especiais. Se $m_1 = 0$, então o peso de laboratório deveria estar em queda livre e não haveria nenhuma tensão no fio. As equações fornecem $T = 0$ e $a = g$ quando $m_1 = 0$. Quando $m_2 = 0$, esperamos que não exista nenhuma aceleração nem tensão no fio; nesses casos as equações fornecem $T = 0$ e $a = 0$.

Teste sua compreensão da Seção 5.2 Suponha que você segure o cavaleiro do Exemplo 5.12, de modo que ele e o peso estejam inicialmente em repouso. Você dá um empurrão para a esquerda no cavaleiro (Figura 5.15a) e depois o solta. O fio permanece esticado enquanto o cavaleiro se move para a esquerda, pára instantaneamente e, a seguir, move-se para a direita. No instante em que o cavaleiro possui velocidade zero, qual é a tensão no fio? i) maior que no Exemplo 5.12; ii) igual ao Exemplo 5.12; iii) menor que no Exemplo 5.12, mas maior que zero; iv) igual a zero. ∎

5.3 Forças de atrito

Vimos diversos problemas nos quais o corpo fica em repouso ou desliza sobre superfícies que exercem forças sobre ele. Quando dois corpos interagem por contato (toque) direto entre suas superfícies, tratamos essa interação como *força de contato*. A força normal é um exemplo de força de contato; nesta seção, examinaremos outra força de contato, que é a força de atrito.

O atrito é importante em muitos aspectos de nossa vida cotidiana. O óleo no motor de um automóvel minimiza o atrito entre as partes móveis, porém, não fosse o atrito entre os pneus do carro e o solo, não poderíamos dirigir um carro nem fazer curvas. O arraste do ar — a força de atrito exercida pelo ar sobre um corpo que nele se move — faz aumentar o consumo de combustível de um carro, mas possibilita o uso do pára-quedas. Sem atrito, os pregos pulariam facilmente, os bulbos das lâmpadas se desenroscariam sem nenhum esforço e o hóquei no gelo seria impraticável (Figura 5.16).

Atrito estático e atrito cinético

Quando você tenta deslocar ao longo do solo uma pesada caixa cheia de livros, não consegue movê-la, a menos que aplique uma força superior a um certo valor mínimo. Depois que a caixa começa a se mover, normalmente você consegue mantê-la em movimento com uma força menor do que a aplicada para iniciar o movimento. Se você retira alguns livros da caixa, precisa fazer uma força menor tanto para começar o movimento quanto para mantê-lo. Quais as conclusões gerais que podemos extrair desse comportamento?

Primeiramente, quando um corpo está em repouso ou desliza sobre uma superfície, podemos sempre decompor as forças de contato em componentes perpendiculares e paralelos à superfície (Figura 5.17). Chamamos o vetor componente perpendicular à superfície de força normal e

Figura 5.16 A prática do hóquei no gelo depende decisivamente do atrito entre os patins do jogador e o gelo. Quando o atrito é muito elevado, o jogador se locomove muito lentamente; quando o atrito é muito pequeno, o jogador dificilmente evita sua queda.

a representamos por $\vec{n}$. O vetor componente paralelo à superfície (e perpendicular a $\vec{n}$) é a **força de atrito**, representada por $\vec{f}$. Caso as superfícies em contato não possuam atrito, $\vec{f}$ é igual a zero, mas ainda existe uma força normal. (Superfícies sem atrito são idealizações inatingíveis, como uma corda sem massa. Mas podemos assim considerá-las, quando o atrito for suficientemente pequeno.) O sentido da força de atrito é sempre contrário ao sentido do movimento relativo entre as duas superfícies.

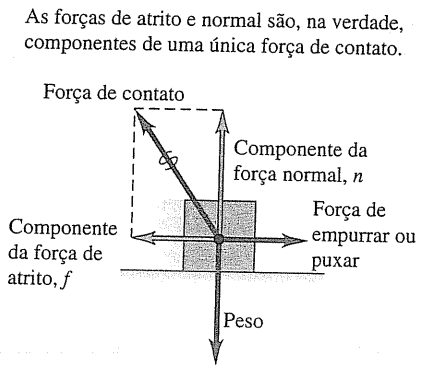


Figura 5.17 Quando um bloco é empurrado ou puxado ao longo de uma superfície, esta exerce uma força de contato sobre o bloco.

O tipo de atrito que atua quando um corpo está deslizando sobre uma superfície denomina-se **força de atrito cinético** $\vec{f}_c$. O adjetivo 'cinético' e o índice inferior 'c' servem para lembrar que existe um movimento relativo entre as duas superfícies. O *módulo* da força de atrito cinético geralmente cresce quando a força normal cresce. Por isso, você realiza uma força maior para arrastar uma caixa cheia de livros do que para arrastá-la quando ela está vazia. Esse princípio também é usado no sistema de freio de um carro: quanto mais as pastilhas de freio são comprimidas contra o disco de freio, maior é o efeito da freada. Em muitos casos, verifica-se experimentalmente que o módulo da força de atrito cinético f_c é *proporcional* ao módulo n da força normal. Em tais casos, podemos representar a relação pela equação

$$f_c = \mu_c n \qquad (5.5)$$

(módulo da força de atrito cinético)

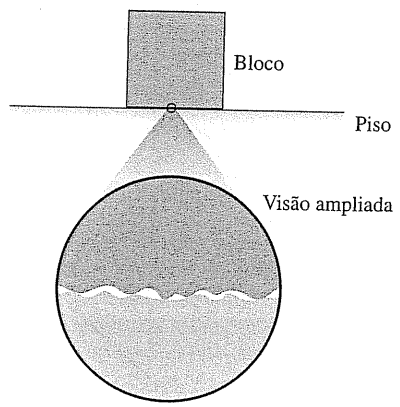
onde μ_c (pronuncia-se: "mi, índice c") possui um valor constante denominado **coeficiente de atrito cinético**. Quanto mais deslizante for uma superfície, menor será o seu coeficiente de atrito. Como se trata da razão entre duas grandezas, μ_c é um número puro sem unidades.

ATENÇÃO Forças de atrito e normal são sempre perpendiculares Lembre-se de que a Equação (5.5) não é uma equação vetorial porque $\vec{f}_c$ e $\vec{n}$ são sempre perpendiculares. Em vez disso, representa uma relação escalar entre os módulos das duas forças.

Tabela 5.1 Valores aproximados dos coeficientes de atrito

Materiais	Coeficiente de Atrito Estático, μ_s	Coeficiente de Atrito Cinético, μ_c
Aço com aço	0,74	0,57
Alumínio com aço	0,61	0,47
Cobre com aço	0,53	0,36
Latão com aço	0,51	0,44
Zinco com ferro doce	0,85	0,21
Cobre com ferro doce	1,05	0,29
Vidro com vidro	0,94	0,40
Cobre com vidro	0,68	0,53
Teflon® com Teflon®	0,04	0,04
Teflon® com aço	0,04	0,04
Borracha com concreto (seco)	1,0	0,8
Borracha com concreto (úmido)	0,30	0,25

A Equação (5.5) é apenas uma representação aproximada de um fenômeno muito complexo. Em nível microscópico, a força de atrito e a força normal decorrem de interações intermoleculares (fundamentalmente de natureza elétrica) entre duas superfícies rugosas nos pontos onde elas se tocam (Figura 5.18). À medida que um bloco desliza sobre um piso, ligações microscópicas se formam e se rompem, e o número total dessas ligações é variável; portanto, a força de atrito cinético não é rigorosamente constante. Alisar as superfícies em contato pode, na verdade, aumentar o atrito, visto que mais moléculas se tornam aptas a formar ligações; juntar duas superfícies lisas de um mesmo metal pode produzir uma 'solda a frio'. Os óleos lubrificantes fazem diminuir o atrito porque uma película de óleo se forma entre as duas superfícies (como no caso do pistão e das paredes do cilindro no motor de um carro), impedindo-as de entrar em contato efetivo.



Em nível microscópico, até as superfícies lisas são ásperas: elas tendem a prender e a tornarem-se aderentes.

Figura 5.18 A força de atrito e a força normal decorrem de interações entre moléculas nos pontos mais elevados das superfícies de contato entre o bloco e o piso.

A Tabela 5.1 mostra alguns valores típicos de μ_c. Embora esses valores sejam dados com dois algarismos significativos, eles são apenas aproximados, visto que forças de atrito cinético podem depender da velocidade do corpo em relação à superfície. Vamos ignorar esses efeitos e supor que μ_c e f_c sejam independentes da velocidade, de modo que possamos nos concentrar nos casos mais simples. A Tabela 5.1 também apresenta valores do coeficiente de atrito estático, que será definido mais adiante.

A força de atrito também pode atuar quando *não* existe movimento relativo. Quando você tenta arrastar uma caixa cheia de livros, ela pode não se mover porque o solo exerce uma força igual e contrária. Essa força denomina-se **força de atrito estático** $\vec{f}_s$. Na Figura 5.19 a, a caixa está em repouso, equilibrada pela ação do peso $\vec{p}$ e pela força normal $\vec{n}$. exercida de baixo para cima pelo solo sobre a caixa, que possui o mesmo módulo do peso ($n = p$). Agora amarramos uma corda na caixa (Figura 5.19b) e aumentamos gradualmente a tensão T na corda. No início, a caixa permanece em repouso porque, à medida que T cresce, a força de atrito estático f_s também cresce (permanecendo com o mesmo módulo de T).

Em dado ponto, T torna-se maior do que o máximo valor da força de atrito estático f_s que a superfície pode exercer. Então a caixa 'quebra o vínculo' (a tensão é capaz de quebrar as ligações moleculares entre as superfícies da caixa e do solo) e começa a deslizar. A Figura 5.19c mostra um diagrama das forças quando T atinge esse valor crítico. Quando T supera esse valor, a caixa não está mais em equilíbrio. Para um dado par de superfícies, o valor máximo de f_s depende da força normal. A experiência mostra que esse valor máximo $(f_s)_{máx}$ é aproximadamente *proporcional* a n; chamamos o fator de proporcionalidade de μ_s de **coeficiente de atrito estático.** Na Tabela 5.1 são apresentados alguns valores típicos de μ_s. Em uma situação particular, a força de atrito estático pode ter qualquer valor entre zero (quando não existe nenhuma outra paralela à superfície) até um valor máximo dado por $\mu_s n$. Em símbolos,

$$f_s \leq \mu_s n \qquad (5.6)$$

(módulo da força de atrito estático)

Como a Equação (5.5), essa equação *não* é uma relação vetorial, e sim uma relação entre módulos de vetores. O sinal de igual só vale quando a força T, paralela à superfície, atingiu seu valor crítico e o movimento está na iminência de começar (Figura 5.19c). Quando T for menor do que esse valor (Figura 5.19b), o sinal da desigualdade é válido. Nesse caso é necessário usar a condição de equilí-

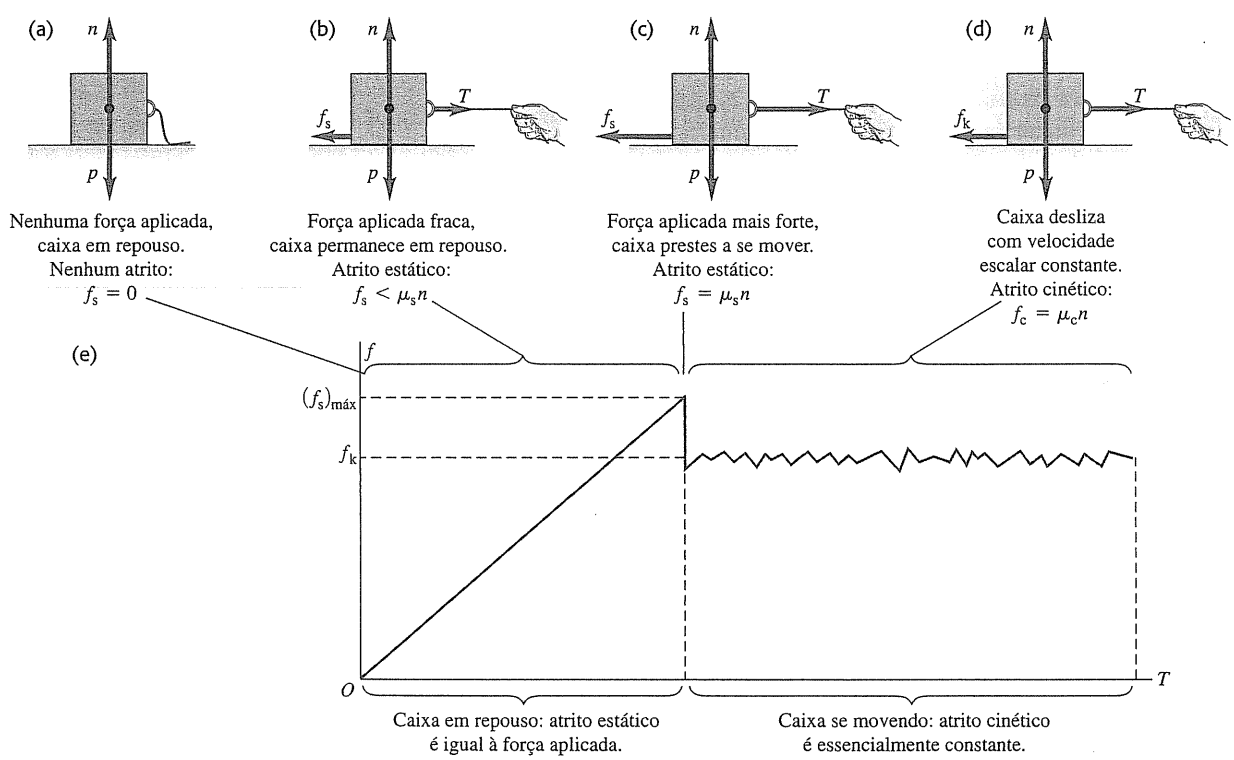


Figura 5.19 (a), (b), (c) Quando não existe movimento relativo entre as superfícies, o módulo da força de atrito estático f é menor do que ou igual a $\mu_s n$. (d) Quando existe movimento relativo, o módulo da força de atrito cinético f_c é igual a $\mu_c n$. (e) Um gráfico do módulo f da força de atrito em função do módulo T da força aplicada T. A força de atrito cinética varia um pouco à medida que as ligações intermoleculares se formam e se rompem.

brio ($\sum \vec{F} = \mathbf{0}$) para achar f_s. Quando não existe nenhuma força aplicada ($T = 0$), como na Figura 5.19a, então também não existe nenhuma força de atrito estático ($f_s = 0$).

Logo que o deslizamento começa (Figura 5.19d), a força de atrito normalmente *diminui*; manter a caixa deslizando é mais fácil do que produzir o início do movimento. Portanto, o coeficiente de atrito cinético é geralmente *menor* do que o coeficiente de atrito estático para um dado par de superfícies, conforme mostra a Tabela 5.1. Quando começamos sem nenhuma força aplicada ($T = 0$) e gradualmente aumentamos a força, ocorrerá uma pequena variação da força de atrito, conforme indicado na Figura 5.19e.

Em alguns casos, as superfícies podem alternadamente aderir (atrito estático) e deslizar (atrito cinético). Essa é a causa daquele som horrível feito pelo giz quando ele é colocado numa posição errada ao escrevermos sobre o quadro-negro. Outro fenômeno de aderência-deslizamento é o ruído que o limpador de pára-brisa faz quando o vidro está seco; ainda outro exemplo é o violento som produzido quando os pneus deslizam no asfalto. Um exemplo mais positivo é produzido pelo arco de um violino deslizando sobre a corda.

Quando um corpo desliza sobre uma camada de gás, o atrito pode se tornar muito pequeno. No trilho de ar linear usado em laboratórios de física, os cavaleiros são sustentados sobre uma camada de ar. A força de atrito depende da velocidade, porém para velocidades usuais, o coeficiente de atrito efetivo é da ordem de 0,001.

Exemplo 5.13

ATRITO EM UM MOVIMENTO HORIZONTAL Você está tentando mover um engradado de 500 N sobre um piso plano. Para iniciar o movimento, você precisa aplicar uma força horizontal de módulo igual a 230 N. Depois da 'quebra do vínculo' e de iniciado o movimento, você necessita apenas de 200 N para manter o movimento com velocidade constante. Qual é o coeficiente de atrito estático e o coeficiente de atrito cinético?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: tanto o estado de repouso quanto o estado em que o corpo se move com velocidade constante são estados de equilíbrio, logo podemos usar a primeira lei de Newton expressa pelas Equações (5.2). Também necessitaremos das relações expressas nas equações (5.5) e (5.6), para achar as variáveis-alvo μ_s e μ_c.

PREPARAR: seja qual for a situação, há quatro forças atuando sobre o engradado: a força do peso de cima para baixo (módulo $p = 500$ N), a força normal de baixo para cima (módulo n) exercida pelo piso, uma força de tensão (módulo T) para a direita, exercida pela corda e uma força de atrito para a esquerda, exercida pelo piso. As figuras 5.20a e 5.20b mostram nosso desenho e o diagrama do corpo livre para o instante imediatamente anterior ao início do movimento, quando a força de atrito estático possui o seu valor máximo $(f_s)_{máx} = \mu_s n$. Quando a caixa está se

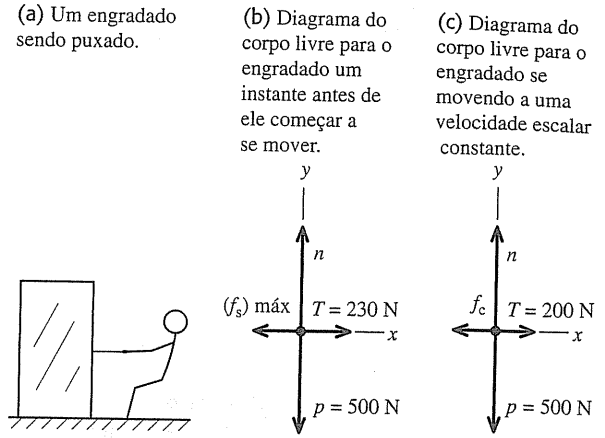


Figura 5.20 Nossos desenhos para esse problema.

movendo para a direita com velocidade constante, a força de atrito se transforma na força cinética (Figura 5.20c). Como a corda na Figura 5.20a está em equilíbrio, a tensão é a mesma em ambas as extremidades. Logo, a força de tensão que a corda exerce sobre o engradado possui o mesmo módulo que a força que você exerce sobre a corda.

EXECUTAR: um instante antes de o engradado começar a se mover (Figura 5.20b), temos

$$\sum F_x = T + (-(f_s)_{máx}) = 0 \quad \text{então} \quad (f_s)_{máx} = T = 230 \text{ N}$$
$$\sum F_y = n + (-p) = 0 \quad \text{então} \quad n = p = 500 \text{ N}$$

Então usamos a Equação (5.6), $(f_s)_{máx} = \mu_s n$, para achar o valor de μ_s:

$$\mu_s = \frac{(f_s)_{máx}}{n} = \frac{230 \text{ N}}{500 \text{ N}} = 0{,}46$$

Depois que o engradado começa a se mover, e as forças são indicadas como na Figura 5.20c, achamos

$$\sum F_x = T + (-f_c) = 0 \quad \text{então} \quad f_c = T = 200 \text{ N}$$
$$\sum F_y = n + (-p) = 0 \quad \text{então} \quad n = p = 500 \text{ N}$$

Usando $f_c = \mu_c n$, da Equação (5.5), obtemos

$$\mu_c = \frac{f_c}{n} = \frac{200 \text{ N}}{500 \text{ N}} = 0{,}40$$

AVALIAR: é mais fácil manter o movimento do engradado com velocidade constante do que iniciar o seu movimento, de modo que o coeficiente de atrito cinético é menor do que o coeficiente de atrito estático.

Exemplo 5.14

O ATRITO ESTÁTICO PODE SER MENOR QUE O VALOR MÁXIMO No Exemplo 5.13, qual é a força de atrito se o engradado está em repouso sobre uma superfície e uma força horizontal de 50 N é aplicada sobre ele?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a força aplicada é menor que o valor máximo da força de atrito estático, $(f_s)_{máx} = 230$ N. Logo, o engradado permanece em repouso e a força resultante que atua sobre ele é igual a zero. A variável-alvo é o módulo f_s da força de atrito.

PREPARAR: o diagrama do corpo livre é o mesmo da Figura 5.20b, mas com a substituição de $(f_s)_{máx}$ por f_s e $T = 230$ N por $T = 50$ N.

EXECUTAR: pelas condições de equilíbrio, Equação (5.2), temos

$$\sum F_x = T + (-f_s) = 0 \qquad \text{então} \qquad f_s = T = 50 \text{ N}$$

AVALIAR: nesse caso, f_s é menor do que o valor máximo $(f_s)_{máx} = \mu_s n$. A força de atrito pode impedir o movimento do engradado toda vez que uma força horizontal menor do que 230 N for aplicada.

Exemplo 5.15

MINIMIZAÇÃO DO ATRITO CINÉTICO No Exemplo 5.13, suponha que você tente mover o engradado amarrando uma corda em torno dele e puxando a corda para cima com um ângulo de 30° com a horizontal. Qual é a força que você deve fazer para manter o movimento com velocidade constante? O esforço que você faz é maior ou menor do que quando aplica uma força horizontal? Suponha $p = 500$ N e $\mu_c = 0{,}40$.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o engradado está em equilíbrio porque sua velocidade é constante, portanto novamente aplicamos a primeira lei de Newton. Como o engradado está em movimento, o solo exerce uma força de atrito cinético. A variável-alvo é o módulo T da força de tensão.

PREPARAR: a Figura 5.21 é um diagrama do corpo livre mostrando as forças que atuam sobre o engradado. A força de atrito cinético f_c continua sendo igual a $\mu_c n$, mas agora a força normal n não é mais igual ao peso do engradado. A força exercida pela corda tem um componente vertical que tende a levantar o engradado do solo.

EXECUTAR: a partir das condições de equilíbrio e da equação $f_c = \mu_c n$, obtemos

$$\sum F_x = T\cos 30° + (-f_c) = 0 \qquad \text{logo} \qquad T\cos 30° = \mu_c n$$
$$\sum F_y = T\,\text{sen}\,30° + n + (-p) = 0 \quad \text{logo} \quad n = p - T\,\text{sen}\,30°$$

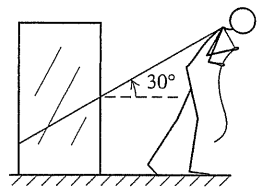
Temos um sistema de duas equações com duas incógnitas T e n. Para resolvê-lo, podemos eliminar uma variável-alvo e resolver a equação resultante para a outra variável-alvo. Existem diversos modos para fazer isso; um deles é substituir o valor de n da segunda equação na primeira equação:

$$T\cos 30° = \mu_c(p - T\,\text{sen}\,30°)$$

Então, resolvemos essa equação explicitando o valor de T, com o seguinte resultado

$$T = \frac{\mu_c p}{\cos 30° + \mu_c\,\text{sen}\,30°} = 188 \text{ N}$$

(a) Puxando um engradado com uma força que forma um ângulo com a horizontal.



(b) Diagrama do corpo livre para o engradado em movimento.

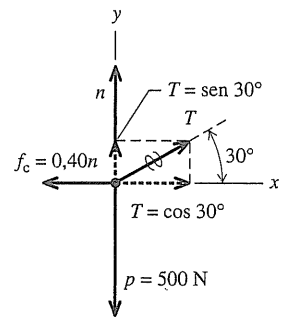


Figura 5.21 Nossos desenhos para esse problema.

Podemos substituir esse resultado em qualquer uma das duas equações para obter n. Se usamos a segunda equação, obtemos

$$n = p - T\,\text{sen}\,30° = (500 \text{ N}) - (188 \text{ N})\,\text{sen}\,30° = 406 \text{ N}$$

AVALIAR: note que a força normal é menor do que o peso do engradado ($p = 500$ N) porque o componente vertical da tensão puxa o engradado para cima. Apesar disso, a força que você faz é ligeiramente menor do que quando você aplica uma força horizontal de 200 N, como no Exemplo 5.13. Tente puxar a um ângulo de 22°; você notará que a força necessária é menor ainda (ver o Problema Desafiador 5.123).

Exemplo 5.16

MOVIMENTO DE UM TOBOGÃ COM ATRITO I Vamos voltar ao problema do tobogã estudado no Exemplo 5.10 (Seção 5.2). A graxa envelheceu, e agora existe um coeficiente de atrito cinético μ_c. A inclinação é apenas suficiente para que o tobogã se desloque com velocidade constante. Deduza uma expressão para o ângulo de inclinação em função de p e de μ_c.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a variável-alvo é o ângulo de inclinação α. O tobogã está em equilíbrio devido à sua velocidade constante, portanto usamos a primeira lei de Newton. Há três forças atuando sobre o tobogã: seu peso, a força normal e a força de atrito cinético. Como o movimento é de cima para baixo pela encosta da montanha, a força de atrito cinético (que é oposta ao movimento do tobogã pela encosta) está orientada para cima.

PREPARAR: a Figura 5.22 mostra um desenho e um diagrama do corpo livre. Escolhemos um eixo perpendicular e outro paralelo à superfície e decompomos o peso nessas duas direções, conforme indicado. (Compare com a Figura 5.12b, no Exemplo 5.10). O módulo da força de atrito é dada pela Equação (5.5), $f_c = \mu_c n$.

EXECUTAR: as condições de equilíbrio são:

$$\sum F_x = p\,\text{sen}\,\alpha + (-f_c) = p\,\text{sen}\,\alpha - \mu_c n = 0$$
$$\sum F_y = n + (-p\cos\alpha) = 0$$

(Usamos a relação $f_c = \mu_c n$ na equação para os componentes x.) Reagrupando, obtemos

$$\mu_c n = p\,\text{sen}\,\alpha \qquad \text{e} \qquad n = p\cos\alpha$$

(a) A situação. (b) Diagrama do corpo livre para o tobogã.

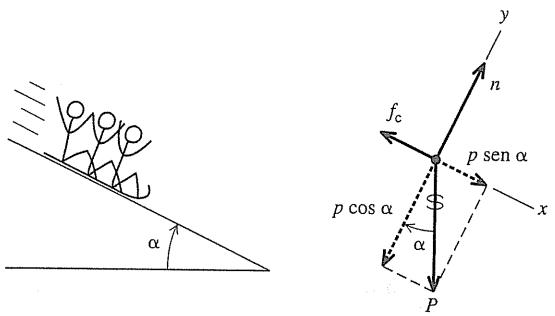


Figura 5.22 Nossos desenhos para esse problema.

Assim como no Exemplo 5.10, a força normal n *não* é igual ao peso p. Quando dividimos a primeira dessas equações pela segunda, achamos

$$\mu_c = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha \qquad \text{logo} \qquad \alpha = \text{arctg}\,\mu_c$$

AVALIAR: o peso p não aparece nessa expressão. Qualquer tobogã, independentemente de seu peso, desliza para baixo de um plano inclinado com velocidade constante, quando o coeficiente de atrito cinético for igual à tangente do ângulo da inclinação. Quanto mais íngreme for a inclinação, maior deverá ser o coeficiente de atrito cinético para que o tobogã deslize para baixo com velocidade constante.

Exemplo 5.17

MOVIMENTO DE UM TOBOGÃ COM ATRITO II O mesmo tobogã com o mesmo coeficiente de atrito do Exemplo 5.16 *acelera* para baixo de uma encosta mais íngreme. Deduza uma expressão para a aceleração em termos de g, α, μ_c e p.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o tobogã está acelerando e, portanto, não está mais em equilíbrio; vamos aplicar a segunda lei de Newton, $\sum\vec{F} = m\vec{a}$, na sua forma de componentes conforme a Equação (5.4). Nossa variável-alvo é a aceleração para baixo da encosta.

PREPARAR: a Figura 5.23 mostra nossos desenhos. O diagrama do corpo livre (Figura 5.23b) é quase o mesmo do diagrama no Exemplo 5.16. O componente y de aceleração do tobogã a_y ainda é igual a zero, mas o componente x a_x, não.

(a) A situação. (b) Diagrama do corpo livre para o tobogã.

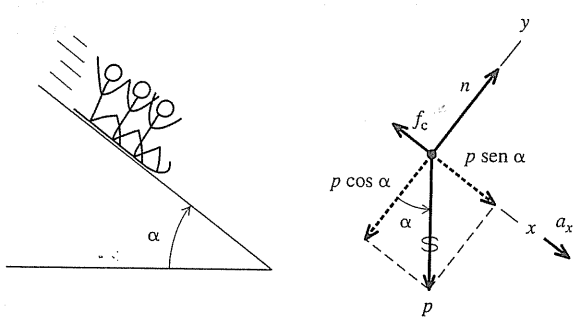


Figura 5.23 Nossos desenhos para esse problema.

EXECUTAR: é conveniente expressar o peso como $p = mg$. Então, aplicando a segunda lei de Newton, obtemos o par de equações

$$\sum F_x = mg\,\text{sen}\,\alpha + (-f_c) = ma_x$$
$$\sum F_y = n + (-mg\cos\alpha) = 0$$

Pela segunda equação e pela Equação (5.5), obtemos uma expressão para f_c:

$$n = mg\cos\alpha$$
$$f_c = \mu_c n = \mu_c mg\cos\alpha$$

Substituindo esse resultado na equação para o componente x:

$$mg\,\text{sen}\,\alpha + (-\mu_c mg\cos\alpha) = ma_x$$
$$a_x = g(\text{sen}\,\alpha - \mu_c\cos\alpha)$$

AVALIAR: esse resultado faz sentido? Para conferir, discutimos agora alguns casos especiais. Em primeiro lugar, se a montanha fosse vertical, $\alpha = 90°$, então sen$\alpha = 1$, cos$\alpha = 0$ e $a_x = g$. Trata-se de uma queda livre, um resultado esperado. Em segundo lugar, para um ângulo α em uma situação sem atrito, $\mu_c = 0$. Então $a_x = g$ sen α. Essa situação é a mesma do Exemplo 5.10 e obtemos o mesmo resultado. A seguir, suponha que o atrito seja apenas suficiente para fazer o tobogã se deslocar com velocidade constante. Nesse caso, $a_x = 0$ e nosso resultado fornece

$$\text{sen}\,\alpha = \mu_c\cos\alpha \qquad \text{e} \qquad \mu_c = \text{tg}\,\alpha$$

Obtivemos novamente o mesmo resultado do Exemplo 5.16. Finalmente, pode acontecer que o atrito seja tão elevado que $\mu_c\cos\alpha$ seja maior do que senα. Nesse caso, a_x será negativo; se fornecermos ao tobogã um empurrão para ele descer a montanha, ele poderá iniciar o movimento, mas terá uma velocidade decrescente e, por fim, cessará.

Praticamente exaurimos o problema do tobogã, porém, ainda existe uma lição a ser aprendida; a partir de um exemplo muito simples, estudamos casos cada vez mais complexos. O resultado mais geral apresentado no presente exemplo abrangeu *todos* os anteriores como casos especiais. Não é necessário decorar este pacote, visto que ele é útil somente para este conjunto de problemas. Porém, é conveniente que você tente entender nossa solução e o significado dela.

Uma variante final que você pode desejar tentar é o caso em que você empurra inicialmente o tobogã para cima. O sentido da força de atrito agora se inverte, de modo que a aceleração é diferente da encontrada para o movimento para baixo. Verifica-se que a expressão de a_x é a mesma que a encontrada neste exemplo, exceto pelo fato de que no lugar do sinal negativo existe um sinal positivo. Você é capaz de provar isso?

Atrito de rolamento

É muito mais fácil mover um armário cheio sobre um carrinho com rodas do que arrastá-lo pelo piso. Mas, quanto mais fácil? Podemos definir um **coeficiente de atrito de rolamento** μ_r como a força horizontal necessária para um deslocamento com velocidade constante sobre uma superfície plana dividida pela força normal de baixo para cima exercida pela superfície. Os engenheiros de transportes chamam μ_r de *resistência de tração*. Valores típicos de μ_r são de 0,002 a 0,003 para rodas de aço sobre trilhos de aço

e de 0,01 a 0,02 para pneus de borracha sobre concreto. Esses valores mostram a razão pela qual um trem que se desloca sobre trilhos gasta muito menos combustível do que um caminhão em uma auto-estrada.

Exemplo 5.18

MOVIMENTO COM ATRITO DE ROLAMENTO O peso de um carro comum é cerca de 12.000 N. Se o coeficiente de atrito de rolamento for $\mu_r = 0{,}015$, qual a força horizontal necessária para deslocar este carro com velocidade constante em uma estrada plana? Despreze a resistência do ar.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o carro está se deslocando com velocidade constante, portanto trata-se de um problema envolvendo equilíbrio, que usa a primeira lei de Newton. As quatro forças que atuam sobre o carro são o peso, a força normal de baixo para cima, a força para trás do atrito de rolamento e a força para frente desconhecida F (nossa variável-alvo).

PREPARAR: o diagrama do corpo livre é semelhante ao da Figura 5.20c do Exemplo 5.13, mas com a força de atrito cinético substituída pela força de atrito de rolamento f_r e com a força de tensão substituída pela força desconhecida F.

EXECUTAR: como no Exemplo 5.13, a primeira lei de Newton para os componentes verticais revela que a força normal tem módulo igual ao peso do carro. Logo, pela definição de μ_R, a força de atrito de rolamento f_r é

$$f_r = \mu_r n = (0{,}015)(12000\,\text{N}) = 180\,\text{N}$$

Pela primeira lei de Newton para os componentes *horizontais*, uma força motriz para a frente com esse módulo seria necessária para manter o carro com velocidade constante.

AVALIAR: a força necessária é relativamente pequena, razão pela qual é possível empurrar um carro com as mãos. (Como ocorre no caso do deslizamento, é mais fácil manter um carro em movimento de rolamento do que fazê-lo iniciar esse movimento.) Desprezamos a resistência do ar, que é uma boa aproximação, caso o carro esteja se movendo lentamente. Mas nas estradas a resistência do ar produz um efeito maior do que o atrito de rolamento.

Convidamos você a aplicar essa análise ao engradado do Exemplo 5.13. Caso o engradado estivesse sobre um carrinho com rodas de borracha com $\mu_r = 0{,}02$, seria necessária apenas uma força de 10 N para manter o engradado com velocidade constante. Você é capaz de verificar isso?

Resistência de um fluido e velocidade terminal

Se você colocar sua mão para fora da janela de um carro que se move com alta velocidade, ficará convencido da existência da **resistência de um fluido**, a força que um fluido (um gás ou um líquido) exerce sobre o corpo que se move através dele. O corpo que se move exerce uma força sobre o fluido para afastá-lo do seu caminho. Pela terceira lei de Newton, o fluido exerce sobre o corpo uma força igual e contrária.

A força da resistência de um fluido possui *direção e sentido* sempre contrários aos da velocidade do corpo em relação ao fluido. O *módulo* da força da resistência de um fluido normalmente cresce com a velocidade do corpo através do fluido. Esse comportamento é muito diferente da força de atrito cinético entre superfícies em contato, que normalmente não depende da velocidade. Para baixas velocidades, o módulo f da força da resistência de um fluido é aproximadamente proporcional à velocidade do corpo v:

$$f = kv \tag{5.7}$$

(resistência de um fluido para baixas velocidades)

onde k é um fator de proporcionalidade que depende da forma e do tamanho do corpo e das propriedades do fluido. Quando o movimento ocorre no ar para velocidade de uma bola de tênis lançada ou para velocidades maiores que esta, a força é aproximadamente proporcional a v^2 em vez de v. Ela é, então, chamada de **arraste do ar**, ou simplesmente *arraste*. Aviões, gotas de chuva e ciclistas, todos sofrem a ação do arraste do ar. Nesse caso, a Equação (5.7) deve ser substituída por

$$f = Dv^2 \tag{5.8}$$

(resistência de um fluido para altas velocidades)

Devido à dependência com v^2, o arraste do ar cresce rapidamente com a velocidade. O arraste do ar sobre um automóvel é desprezível para baixas velocidades, mas é comparável à resistência de rolamento quando o carro atinge a velocidade máxima permitida para uma auto-estrada. O valor de D depende da forma e do tamanho do corpo e da densidade do ar. Convidamos você a mostrar que as unidades da constante k na Equação (5.7) são N · s/m ou kg/s e que as unidades da constante D na Equação (5.8) são N · s^2/m^2 ou kg/m.

Devido aos efeitos da resistência do fluido, um objeto caindo em um fluido *não* terá aceleração constante. Para descrever seu movimento não podemos usar as fórmulas do movimento com aceleração constante deduzidas no Capítulo 2. Em vez disso, é necessário fazer nova solução aplicando a segunda lei de Newton. Vamos considerar o seguinte caso: você solta uma pedra em um lago, e ela cai até o fundo (Figura 5.24a). Nesse caso, a força de resistência do fluido é dada pela Equação (5.7). Qual é a aceleração, a velocidade e a posição da pedra em função do tempo?

O diagrama do corpo livre está indicado na Figura 5.24b. Consideramos o sentido positivo do eixo como de cima para baixo e desprezamos a força de empuxo da água. Como a pedra está se deslocando de cima para baixo, sua velocidade escalar v é igual à sua velocidade y v_y, e a força de resistência de um fluido está orientado na direção $-y$. Não existe nenhum componente x, e a segunda lei de Newton fornece

$$\sum F_y = mg + (-kv_y) = ma_y$$

Quando a pedra começa o movimento $v_y = 0$, a força resistiva é nula, e a aceleração inicial é $a_y = g$. À medida

(a) Uma pedra caindo na água.

(b) Diagrama do corpo livre para a pedra na água.

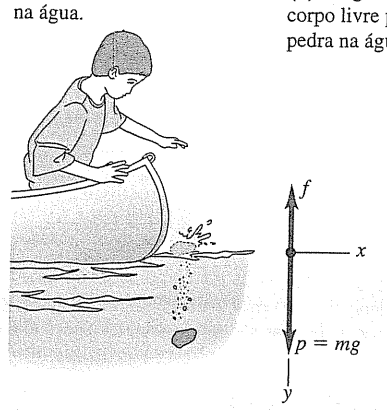


Figura 5.24 Uma pedra que cai em um fluido (água).

que sua velocidade aumenta, a força resistiva também aumenta, até que finalmente ela se torna igual ao peso. Nesse instante, $mg - kv_y = 0$, a aceleração se anula e não ocorrerá mais nenhum aumento de velocidade. A velocidade final v_t, denominada **velocidade terminal**, é dada por $mg - kv_t = 0$ ou

$$v_t = \frac{mg}{k} \tag{5.9}$$

(velocidade terminal, resistência do fluido $f = kv$)

A Figura 5.25 mostra como a aceleração, a velocidade e a posição da pedra variam em função do tempo. À medida que o tempo passa, a aceleração tende a zero, e a velocidade tende ao valor v_t (lembre-se de que escolhemos o sentido positivo do eixo Oy como de cima para baixo). A inclinação do gráfico de y *versus* t tende a ficar constante à medida que a velocidade se torna constante.

Para ver como os gráficos na Figura 5.25 foram deduzidos, devemos achar a relação entre velocidade e tempo durante o intervalo antes de o corpo atingir a velocidade terminal. Voltamos à segunda lei de Newton, que agora reescrevemos usando $a_y = dv_y/dt$:

$$m\frac{dv_y}{dt} = mg - kv_y$$

Depois de reagrupar os termos e substituir mg/k por v_t, integramos ambos os membros, notando que $v_y = 0$ quando $t = 0$:

$$\int_0^v \frac{dv_y}{v_y - v_t} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt$$

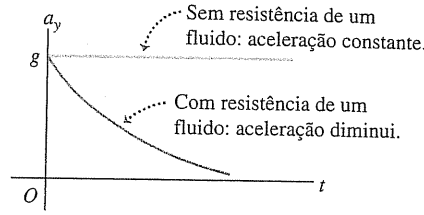
Que se integra em

$$\ln\frac{v_t - v_y}{v_t} = -\frac{k}{m}t \qquad \text{ou} \qquad 1 - \frac{v_y}{v_t} = e^{-(k/m)t}$$

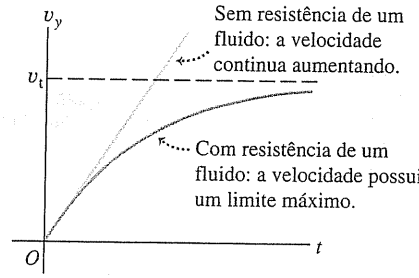
e, finalmente,

$$v_y = v_t[1 - e^{-(k/m)t}] \tag{5.10}$$

Aceleração *versus* tempo.



Velocidade *versus* tempo.



Posição *versus* tempo.

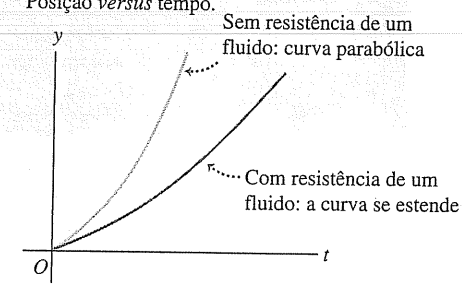


Figura 5.25 Gráficos do movimento de um corpo que cai sem a resistência de um fluido e com a resistência de um fluido proporcionalmente à velocidade escalar.

Note que v_y só se torna igual à velocidade terminal v_t no limite, quando t tende ao infinito; a pedra não atinge o valor-limite em nenhum intervalo de tempo finito.

A derivada de v_y fornece a_y em função do tempo, e a integral de v_y fornece y em função do tempo. Deixamos para você a tarefa de completar as deduções (veja o Exercício 5.46); os resultados são

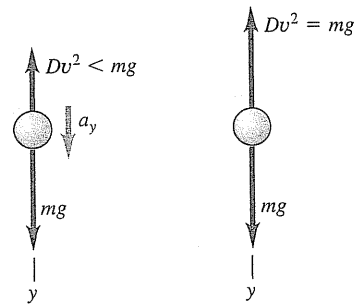
$$a_y = ge^{-(k/m)t} \tag{5.11}$$

$$y = v_t\left[t - \frac{m}{k}(1 - e^{-(k/m)t})\right] \tag{5.12}$$

Agora examine novamente a Figura 5.25 que mostra os gráficos das três últimas equações.

Ao deduzirmos a velocidade terminal na Equação (5.9), admitimos que a resistência do fluido seja proporcional à velocidade. Para um objeto caindo no ar com velocidade elevada, de modo que a resistência do fluido seja proporcional a Dv^2, como na Equação (5.8), a velocidade terminal é atingida quando Dv^2 se iguala ao peso mg (Figura 5.26a). Convidamos você a provar que a velocidade terminal v_t é dada por

(a) Diagramas do corpo livre para a queda com arraste do ar.



Antes da velocidade terminal: objeto acelera, força de arraste menor que o peso.

Na velocidade terminal v_t: objeto em equilíbrio, força de arraste se iguala ao peso.

(b) Um pára-quedista caindo em velocidade terminal.

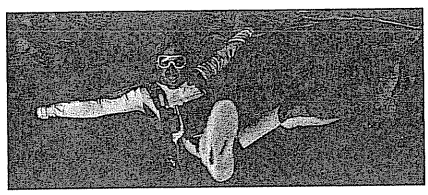


Figura 5.26 (a) Arraste do ar e velocidade terminal. (b) Ao mudar as posições dos braços e das pernas durante a queda, um pára-quedista pode alterar o valor da constante D na Equação (5.8) e, portanto, ajustar o valor da sua velocidade terminal [(Equação (5.13)].

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{D}} \tag{5.13}$$

(velocidade terminal, resistência do fluido $f = Dv^2$)

Essa expressão da velocidade terminal explica por que um objeto mais pesado tende a cair com uma velocidade maior do que a de um objeto mais leve. Dois objetos que possuem a mesma forma, porém massas diferentes (digamos um bola de tênis e uma bola de chumbo de mesmo raio), possuem o mesmo valor de D; porém, diferentes valores de m. O objeto de maior massa tem uma velocidade escalar maior e cai com maior velocidade. O mesmo raciocínio explica por que uma folha de papel cai mais rapidamente quando é amassada em forma de bola; a massa m é a mesma, porém, o tamanho menor produz um valor de D menor (um arraste do ar menor para uma dada velocidade) e um valor de v_t maior. Pára-quedistas usam o mesmo princípio para controlar sua descida (Figura 5.26b).

A Figura 5.27 mostra as trajetórias de uma bola de beisebol com e sem arraste do ar, admitindo um coeficiente $D = 1{,}3 \times 10^{-3}$ kg/m (apropriado para uma bola batida ao nível do mar). Você pode notar que o alcance da bola e a altura máxima atingida são substancialmente menores do

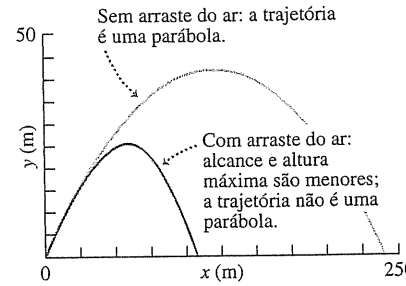


Figura 5.27 Trajetórias simuladas por computador de uma bola de beisebol lançada a 50 m/s, formando um ângulo de 35° sobre a horizontal. Note que as escalas são diferentes nos eixos horizontal e vertical.

que o cálculo de arraste zero poderia sugerir. Portanto, a trajetória da bola que calculamos no Exemplo 3.8 (Seção 3.3), ignorando-se o arraste do ar, é bastante irreal. O arraste do ar é uma parte importante do jogo de beisebol!

Exemplo 5.19

VELOCIDADE TERMINAL DE UM PÁRA-QUEDISTA Para um corpo humano caindo no ar em posição horizontal (Figura 5.26b), o valor da constante D na Equação (5.8) é aproximadamente igual a 0,25 kg/m. Considerando um pára-quedista leve de 50,0 kg, ache a sua velocidade terminal.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este exemplo usa a relação entre velocidade terminal, massa e coeficiente de arraste.

PREPARAR: usamos a Equação (5.13) para achar a variável-alvo v_t.

EXECUTAR: para $m = 50$ kg, encontramos

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{D}} = \sqrt{\frac{(50\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)}{0{,}25\text{ kg/m}}}$$

$$= 44\text{ m/s} \qquad (\text{aproximadamente } 160\text{ km/h})$$

AVALIAR: a velocidade terminal é proporcional à raiz quadrada da massa do pára-quedista, portanto, um pára-quedista mais robusto, com o mesmo coeficiente de arraste D, mas o dobro da massa, teria uma velocidade terminal de $\sqrt{2} = 1{,}41$ vezes maior, ou 63 m/s. (Um pára-quedista com massa maior também teria mais área frontal e conseqüentemente um coeficiente de arraste maior; portanto, sua velocidade terminal seria um pouco menor do que 63 m/s.) Até a velocidade terminal do pára-quedista mais leve é bastante alta, por isso esses mergulhos no ar não duram muito. Um salto de uma altura de 2.800 m na velocidade terminal leva apenas (2800 m)/(44 m/s) = 64 s.

Quando o pára-quedista libera o pára-quedas, o valor de D aumenta significativamente, e a velocidade terminal do pára-quedas e do pára-quedista sofre redução drástica para um valor muito mais lento.

Teste sua compreensão da Seção 5.3 Considere uma caixa colocada sobre diferentes superfícies. a) Em quais situações *não* há força de atrito atuando sobre a caixa? b) Em quais situações há uma força de atrito *estático* atuando sobre a caixa?

c) Em quais situações há uma força de atrito *cinético* atuando sobre a caixa? i) A caixa está em repouso sobre uma superfície horizontal áspera; ii) A caixa está em repouso sobre uma superfície áspera inclinada; iii) A caixa está no leito plano e de superfície áspera na traseira de um caminhão — o caminhão está se movendo a uma velocidade constante por uma estrada reta e plana, e a caixa permanece no mesmo lugar, no meio do leito da carroceria; iv) A caixa está no leito plano e de superfície áspera na traseira de um caminhão — o caminhão está acelerando para cima por uma estrada reta e plana, e a caixa permanece no mesmo lugar, no meio do leito da carroceria. v) A caixa está no leito plano e de superfície áspera na traseira de um caminhão — o caminhão está subindo pela encosta de uma montanha, e a caixa está deslizando em direção ao fundo do caminhão. ∎

5.4 Dinâmica do movimento circular

Discutimos o movimento circular uniforme na Seção 3.4. Mostramos que, quando uma partícula se desloca ao longo de uma circunferência com velocidade escalar constante, a aceleração da partícula é sempre orientada para o centro do círculo (perpendicular à velocidade instantânea). O módulo a_{rad} da aceleração é constante, sendo dado em termos da velocidade v e do raio R por

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} \qquad (5.14)$$

(movimento circular uniforme)

O índice inferior 'rad' é um lembrete de que a aceleração da partícula é sempre orientada para o centro do círculo, perpendicular à velocidade instantânea. Explicamos na Seção 3.4 por que essa aceleração é chamada *aceleração centrípeta*.

Podemos também representar a aceleração centrípeta, a_{rad}, em termos do *período* T, o tempo necessário para uma revolução:

$$T = \frac{2\pi R}{v} \qquad (5.15)$$

Em termos do período, a_{rad} é dada por

$$a_{\text{rad}} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \qquad (5.16)$$

(movimento circular uniforme)

O movimento circular uniforme, como qualquer movimento de uma partícula, é governado pela segunda lei de Newton. A aceleração da partícula orientada para o centro deve ser produzida por alguma força, ou diversas forças, tais que a soma vetorial $\sum\vec{F}$ seja um vetor sempre orientado para o centro do círculo (Figura 5.28). O módulo da aceleração é constante, logo o módulo da força resultante F_{total} também é constante. Caso a força para dentro deixe de atuar, a partícula é expelida para fora do círculo descrevendo uma linha reta tangente ao círculo (Figura 5.29).

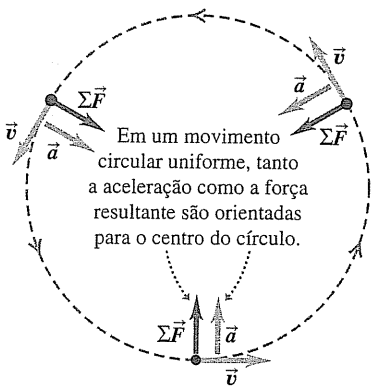


Figura 5.28 Em um movimento circular uniforme, tanto a aceleração, como a força resultante são orientadas para o centro do círculo.

O módulo da aceleração radial é dado por $a_{\text{rad}} = v^2/R$, logo o módulo F_{total} da força resultante sobre uma partícula de massa m em um movimento circular uniforme é dado por

$$F_{\text{total}} = ma_{\text{rad}} = m\frac{v^2}{R} \qquad (5.17)$$

(movimento circular uniforme)

O movimento circular uniforme pode ser produzido por *qualquer* conjunto de forças, desde que a força resultante $\sum\vec{F}$ seja sempre orientada para o centro do círculo e possua módulo constante. Note que o corpo não precisa se mover em torno de um círculo completo: a Equação (5.17) é válida para *qualquer* trajetória que possa ser considerada como parte de um arco circular.

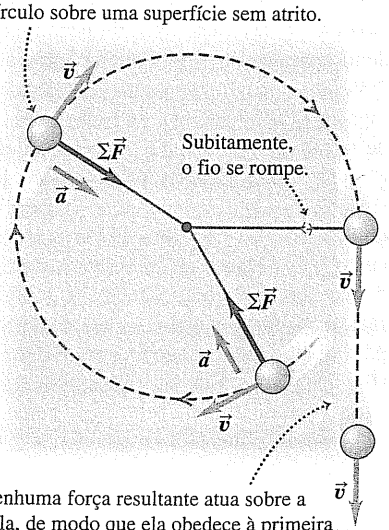
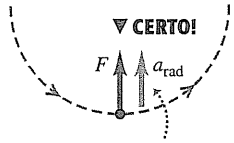


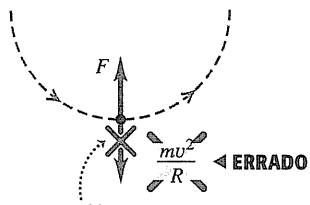
Figura 5.29 O que acontece quando a força orientada para o centro deixa de atuar sobre um corpo em um movimento circular?

(a) Diagrama do corpo livre correto.



Se você incluir a aceleração, desenhe-a ao lado do corpo, para mostrar que ela não é uma força.

(b) Diagrama do corpo livre incorreto.



A grandeza mv^2/R *não é* uma força — ela não pertence a um diagrama do corpo livre.

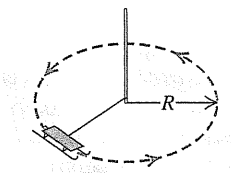
Figura 5.30 Diagramas do corpo livre (a) correto e (b) incorreto para um corpo em movimento circular uniforme.

ATENÇÃO Evite usar a 'força centrífuga' A Figura 5.30 mostra tanto a forma correta (Figura 5.30a) quanto a incorreta (Figura 5.30b) de um diagrama do corpo livre para um movimento circular uniforme. A Figura 5.30b está incorreta porque inclui uma força extra para fora com módulo $m(v^2/R)$ para 'manter o corpo no lugar' ou para 'mantê-lo em equilíbrio'. Há três razões para não se considerar essa força para fora, usualmente chamada de 'força centrífuga' ('centrífuga' significa 'fugindo do centro'). Em primeiro lugar, o corpo não 'fica no lugar'; ele está em movimento constante descrevendo uma trajetória circular. Como a direção da velocidade varia constantemente, o corpo acelera e não está em equilíbrio. Em segundo lugar, caso existisse uma força adicional orientada para fora de modo a equilibrar a força orientada para dentro, não existiria nenhuma força resultante para dentro para causar o movimento circular uniforme, e o corpo deveria se mover em linha reta (Figura 5.29). Em terceiro lugar, a quantidade $m(v^2/R)$ não é uma força; ela corresponde ao membro $m\vec{a}$ de $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ e não deve aparecer em $\sum\vec{F}$ (Figura 5.30a). É verdade que o passageiro de um carro que se desloca seguindo a trajetória circular de uma estrada plana tende a deslizar para fora da curva em resposta a uma 'força centrífuga'. Mas, conforme vimos na Seção 4.2, o que realmente ocorre é que o passageiro tende a manter seu movimento retilíneo, enquanto o lado externo do carro se 'desloca para dentro' do passageiro à medida que o carro faz a curva (Figura 4.11c). Em um sistema de referência inercial não existe nenhuma 'força centrífuga' atuando sobre o corpo. Não voltaremos a mencionar essa força e recomendamos fortemente que você evite também o seu uso.

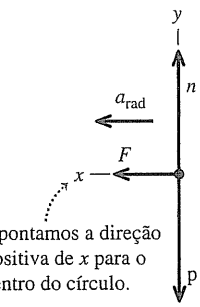
Exemplo 5.20

FORÇA NO MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME Um trenó com massa de 25,0 kg está em repouso sobre uma superfície horizontal de gelo, essencialmente sem atrito. Ele está amarrado a um poste fixado no gelo por uma corda de 5,0 m. Quando empurrado, o trenó gira uniformemente e faz um círculo em torno do poste (Figura 5.31a). Considerando que o trenó completa cinco revoluções por minuto, ache a força F exercida sobre ele pela corda.

(a) Um trenó em movimento circular uniforme.



(b) O diagrama do corpo livre para o trenó.



Apontamos a direção positiva de x para o centro do círculo.

Figura 5.31 (a) A situação. (b) O diagrama do corpo livre.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o trenó está se deslocando em um movimento circular uniforme e, portanto, possui uma aceleração radial. Aplicaremos a segunda lei de Newton ao trenó, para achar o módulo F da força exercida pela corda (nossa variável-alvo).

PREPARAR: a Figura 5.31b mostra o diagrama do corpo livre para o trenó. A aceleração possui apenas um componente x, orientado para o centro do círculo, por isso é designado como a_{rad}. A aceleração não é dada, por isso necessitaremos determinar seu valor usando a Equação (5.14) ou a Equação (5.16).

EXECUTAR: a aceleração na direção y é igual a zero, portanto a força resultante nessa direção também é nula e a força normal possui o mesmo módulo do peso. Para a direção x, a segunda lei de Newton fornece

$$\sum F_x = F = ma_{rad}$$

Podemos determinar a aceleração centrípeta a_{rad} usando a Equação (5.16). O trenó se move em um círculo de raio $R = 5{,}0$ m com um período $T = (60{,}0\text{ s})/(5\text{ rev}) = 12{,}0$ s, logo

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2(5{,}0\text{ m})}{(12{,}0\text{ s})^2} = 1{,}37\text{ m/s}^2$$

Alternativamente, podemos usar primeiro a Equação (5.15) para achar a velocidade escalar v:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(5{,}0\text{ m})}{12{,}0\text{ s}} = 2{,}62\text{ m/s}$$

A seguir, usar a Equação (5.14),

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} = \frac{(2{,}62\text{ m/s})^2}{5{,}0\text{ m}} = 1{,}37\text{ m/s}^2$$

Logo, o módulo F da força exercida pela corda é

$$F = ma_{rad} = (25{,}0\text{ kg})(1{,}37\text{ m/s}^2)$$
$$= 34{,}3\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2 = 34{,}3\text{ N}$$

AVALIAR: seria necessária uma força maior, caso o trenó se movesse em torno do círculo a uma velocidade escalar v maior. Na verdade, se v dobrasse enquanto R permanecesse o mesmo, F seria quatro vezes maior. Você pode demonstrar isso? Como F varia se v permanece o mesmo, mas o raio R dobrasse?

Exemplo 5.21

O PÊNDULO CÔNICO Um inventor propõe a construção de um pêndulo usando um peso de massa m na extremidade de um fio de comprimento L. Em vez de oscilar para a frente e para trás, o peso se move em um círculo horizontal com velocidade escalar constante v, e o fio faz um ângulo β constante com a direção vertical (Figura 5.32a). Esse sistema é chamado de pêndulo cônico porque o fio de suspensão descreve um cone. Ache a tensão F no fio e o período T (o tempo para uma revolução do peso) em função do ângulo β.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: para achar as duas variáveis, a tensão F e o período T, necessitamos de duas equações. Estas serão os componentes horizontal e vertical da segunda lei de Newton aplicada ao peso. Encontraremos a aceleração do peso em direção ao centro do círculo usando uma das equações do movimento circular.

PREPARAR: um diagrama do corpo livre para o peso e um sistema de coordenadas estão indicados na Figura 5.32b. As forças sobre o peso na posição indicada são o peso mg e a tensão F no fio. Note que o centro da trajetória circular está no mesmo plano horizontal que o peso, e não na extremidade superior do fio. O componente horizontal da tensão é a força que produz a aceleração horizontal a_{rad} em direção ao centro do círculo.

EXECUTAR: o sistema não possui aceleração vertical, e a força horizontal é orientada para o centro do círculo; razão pela qual usamos o símbolo a_{rad}. A equação $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ fornece

$$\sum F_x = F\operatorname{sen}\beta = ma_{rad}$$
$$\sum F_y = F\cos\beta + (-mg) = 0$$

Trata-se de um sistema de duas equações envolvendo as variáveis-alvo F e β. A equação para $\sum F_y$ fornece $F = mg/\cos\beta$; substituindo esse resultado na equação para $\sum F_x$ e usando $\operatorname{sen}\beta/\cos\beta = \operatorname{tg}\beta$, encontramos

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a_{rad}}{g}$$

Para relacionar β ao período T, usamos a Equação (5.16) para a_{rad}. O raio do círculo é $R = L\operatorname{sen}\beta$, logo

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 L\operatorname{sen}\beta}{T^2}$$

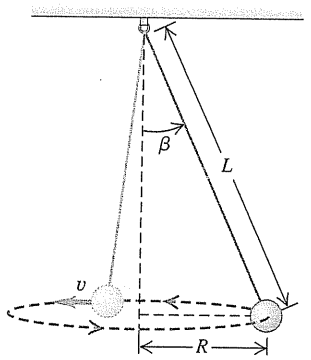
Substituindo isso em $\operatorname{tg}\beta = a_{rad}/g$, obtemos

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{4\pi^2 L\operatorname{sen}\beta}{gT^2}$$

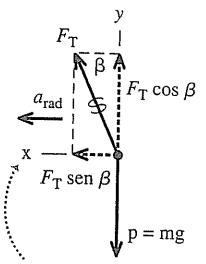
que podemos reescrever como

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\beta}{g}}$$

(a) A situação.



(b) Diagrama do corpo livre para a bola.



Orientamos o sentido positivo do eixo Ox para o centro do círculo.

Figura 5.32 (a) A situação. (b) Nosso diagrama do corpo livre.

AVALIAR: para um dado comprimento L, à medida que o período T se torna menor, $\cos\beta$ diminui, o ângulo β aumenta e a tensão $F = mg/\cos\beta$ também aumenta. Contudo, o ângulo β nunca pode ser igual a 90°; isso exigiria que $T = 0$, $F = \infty$, e $v = \infty$. Um pêndulo cônico não serviria como um relógio muito bom, porque o período depende diretamente de β.

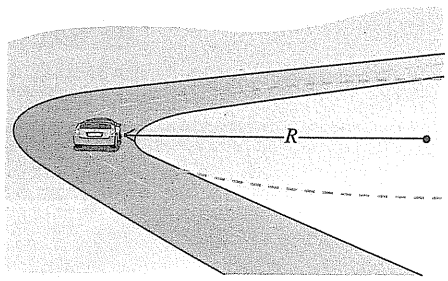
Exemplo 5.22

CONTORNANDO UMA CURVA PLANA O carro do Exemplo 3.11 (Seção 3.4) está fazendo uma curva plana com raio R (Figura 5.33a). Se o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a estrada for igual a μ_s, qual a velocidade máxima $v_{máx}$ com a qual o carro pode completar a curva sem deslizar?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a aceleração do carro enquanto faz a curva possui módulo $a_{rad} = v^2/R$. Logo, a velocidade escalar máxima $v_{máx}$ (nossa variável-alvo) corresponde à aceleração máxima a_{rad} e à força horizontal máxima sobre o carro em direção ao centro da sua trajetória circular. A única força horizontal que atua sobre o carro é a força de atrito exercida pela estrada. Portanto, necessitaremos da segunda lei de Newton e do que aprendemos sobre a força de atrito na Seção 5.3.

(a) Um carro contorna uma curva em uma estrada plana.



(b) Diagrama do corpo livre para o carro.

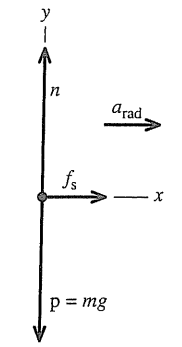


Figura 5.33 (a) A situação. (b) Diagrama do corpo livre.

PREPARAR: a Figura 5.33b mostra um diagrama do corpo livre para o carro que inclui o seu peso $p = mg$ e as duas forças exercidas pela estrada, a força normal n e a força de atrito horizontal f. A força de atrito deve ser orientada para o centro do círculo para causar a aceleração radial. Como o carro não se desloca na direção radial (ele não desliza em direção ao centro do círculo nem se afasta dele), a força de atrito é estática com um módulo máximo $f_{máx} = \mu_s n$ [Equação (5.6)].

EXECUTAR: a aceleração em direção ao centro da trajetória circular é $a_{rad} = v^2/R$ e não há aceleração vertical. Logo, temos

$$\sum F_x = f = ma_{rad} = m\frac{v^2}{R}$$
$$\sum F_y = n + (-mg) = 0$$

A segunda equação mostra que $n = mg$. A primeira equação mostra que a força de atrito *necessária* para manter o carro em uma trajetória circular aumenta com a velocidade do carro. Porém, a força de atrito máxima *disponível* é $f_{máx} = \mu_s n = \mu_s mg$, que é constante e determina a velocidade máxima do carro. Substituindo $f_{máx}$ por f e $v_{máx}$ por v na equação $\sum F_x$, obtemos

$$\mu_s mg = m\frac{v_{máx}^2}{R}$$

logo a velocidade escalar máxima é

$$v_{máx} = \sqrt{\mu_s gR}$$

Como exemplo, se $\mu_s = 0{,}96$ e $R = 230$ m, então

$$v_{máx} = \sqrt{(0{,}96)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(230\ \text{m})} = 47\ \text{m/s}$$

ou cerca de 170 km/h. Essa é a velocidade máxima para este raio.

AVALIAR: se a velocidade do carro é menor do que $\sqrt{\mu_s gR}$, a força de atrito necessária é menor do que o valor máximo possível $f_{máx} = \mu_s mg$ e o carro pode fazer a curva facilmente. Se você tenta fazer a curva com velocidade maior do que a velocidade máxima, o carro ainda pode descrever uma circunferência sem derrapar, mas o raio deve ser maior e o carro sairá da pista.

Note que a aceleração centrípeta máxima (denominada 'aceleração lateral' no Exemplo 3.11) é igual a $\mu_s g$. Se o coeficiente de atrito é reduzido, a aceleração centrípeta máxima e a $v_{máx}$ também são reduzidas. Por isso, é melhor contornar uma curva a baixa velocidade, se a estrada está molhada ou coberta de gelo (qualquer uma dessas situações podem reduzir o valor de μ_s).

Exemplo 5.23

CONTORNANDO UMA CURVA INCLINADA Para um carro se deslocando a uma certa velocidade, é possível inclinar o plano da curva em um ângulo exato para que não seja necessário absolutamente nenhum atrito para manter o raio da curva do carro. Nesse caso, o carro pode completar a curva sem deslizar, mesmo sobre uma pista de gelo. (A corrida de trenós se baseia nesse princípio.) Um engenheiro propõe reconstruir a curva do Exemplo 5.22 de modo que um carro com velocidade v possa completar a curva com segurança, mesmo quando não existe atrito (Figura 5.34a). Qual deve ser o ângulo β da inclinação lateral da curva?

SOLUÇÃO

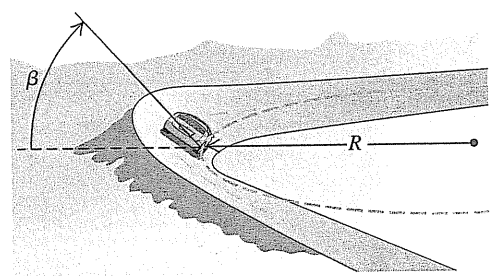
IDENTIFICAR: sem nenhum atrito, as únicas duas forças que atuam sobre o carro são seu peso e a força normal. Como a estrada é inclinada, a força normal (que atua perpendicularmente à superfície da estrada) possui um componente horizontal. Esse componente provoca a aceleração horizontal do carro em direção ao centro da trajetória curva do carro. Como forças e aceleração estão envolvidas, usaremos a segunda lei de Newton para achar a variável-alvo β.

PREPARAR: o diagrama do corpo livre (Figura 5.34b) é semelhante ao diagrama do pêndulo cônico no Exemplo 5.21 (Figura 5.32b). A força normal que atua sobre o carro desempenha a função da tensão que atua sobre o peso do pêndulo.

EXECUTAR: a força normal $\vec{n}$ é ortogonal ao plano da estrada e faz um ângulo β com a vertical. Logo, ela possui um componente vertical $n\cos\beta$ e um componente horizontal $n\text{sen}\beta$, como indicado na Figura 5.34b. A aceleração na direção x é a aceleração centrípeta, $a_{rad} = v^2/R$; não existe nenhuma aceleração vertical. Portanto, as equações da segunda lei de Newton são

$$\sum F_x = n\text{sen}\beta = ma_{rad}$$
$$\sum F_y = n\cos\beta + (-mg) = 0$$

(a) Um carro contorna uma curva em uma estrada inclinada.



(b) Diagrama do corpo livre para o carro.

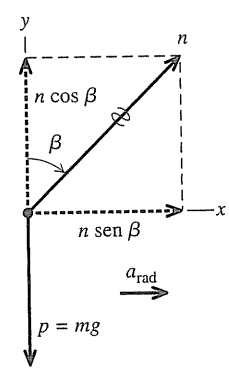


Figura 5.34 (a) A situação. (b) Diagrama do corpo livre.

A equação para $\sum F_y$ fornece $n = mg/\cos\beta$. Substituindo esse resultado na equação para $\sum F_x$, encontramos uma expressão para o ângulo de inclinação:

$$\text{tg}\beta = \frac{a_{\text{rad}}}{g}$$

Essa é a mesma expressão que encontramos no Exemplo 5.21. Finalmente, substituindo a expressão $a_{\text{rad}} = v^2/R$, obtemos

$$\text{tg}\beta = \frac{v^2}{gR}$$

AVALIAR: o ângulo de inclinação depende da velocidade e do raio. Para um dado raio, nenhum ângulo pode ser correto para todas as velocidades. No projeto de auto-estradas e de estradas de ferro, as curvas são compensadas para uma inclinação exata relativa a uma velocidade média do tráfego sobre elas. Se $R = 230$ m e $v = 25$ m/s (uma velocidade de auto-estrada em torno de 88 km/h), então

$$\beta = \text{arctg}\frac{(25\text{ m/s})^2}{(9{,}8\text{ m/s}^2)(230\text{ m})} = 15°$$

Esse valor está próximo dos intervalos de ângulos usados efetivamente nas auto-estradas. Usando o mesmo raio e $v = 47$ m/s do Exemplo 5.22, obtemos $\beta = 44°$; tais inclinações íngremes são encontradas em pistas de corridas de automóveis.

Curvas inclinadas e o vôo de aviões

Os resultados do Exemplo 5.23 também se aplicam ao cálculo do ângulo correto para a inclinação de um avião quando ele faz uma curva voando ao longo de um plano (Figura 5.35). Quando um avião voa em linha reta a uma velocidade escalar e a uma altura constantes, o seu peso é precisamente equilibrado pela força de levantamento $\vec{L}$ exercida pelo ar. (A força de levantamento, de baixo para cima, que o ar exerce sobre as asas é uma reação à força de empurrar que as asas exercem sobre o ar, enquanto se movem nele.) Para fazer um avião mudar de direção, o piloto inclina o avião para um lado, de modo que a força de levantamento tenha um componente horizontal, como indicado na Figura 5.35. (O piloto também muda o ângulo em que as asas 'cortam' o ar, de modo que o componente vertical do levantamento continua a equilibrar o peso.) O ângulo de inclinação está relacionado à velocidade escalar v do avião e o raio R da curva pela mesma expressão que no Exemplo 5.23: $\text{tg}\beta = v^2/gR$. Para um avião fazer uma curva fechada (R pequeno) em alta velocidade (v grande), o valor tg β deve ser elevado e o ângulo de inclinação β deve aproximar-se de 90°.

Podemos também aplicar os resultados do exemplo 5.23 ao *piloto* do avião. O diagrama do corpo livre para o piloto do avião é exatamente igual ao mostrado na Figura 5.34b. A força normal $n = mg/\cos\beta$ é exercida sobre o piloto pelo assento. Como no Exemplo 5.9, n fornece o peso aparente do piloto, que é maior do que seu peso real mg.

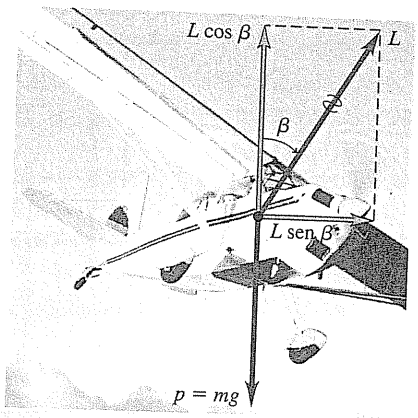


Figura 5.35 Um avião se inclina para um lado para mudar de direção. O componente vertical da força de levantamento $\vec{L}$ equilibra a força da gravidade; o componente horizontal de $\vec{L}$ provoca a aceleração v^2/R.

Em uma curva fechada com um grande ângulo de inclinação β, o peso aparente do piloto pode ser muito elevado: $n = 5{,}8\,mg$ para um ângulo $\beta = 80°$ e $n = 9{,}6\,mg$ para um ângulo $\beta = 84°$. Os pilotos ficam momentaneamente cegos nessas curvas excessivamente fechadas porque o peso aparente do sangue cresce com o mesmo fator e o coração humano não é suficientemente forte para bombear até o cérebro esse sangue aparentemente 'muito pesado'.

Movimento em um círculo vertical

Nos exemplos 5.20, 5.21, 5.22 e 5.23, os corpos se movem em círculos situados em planos horizontais. O movimento circular uniforme em um círculo *vertical* em princípio não tem nenhuma diferença, contudo, nesse caso o peso do corpo deve ser considerado cuidadosamente. O seguinte exemplo esclarecerá esse ponto.

Exemplo 5.24

MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME EM UM CÍRCULO VERTICAL Um passageiro na roda-gigante de um parque de diversões move-se em um círculo vertical de raio R com velocidade constante v. Supondo que o assento permaneça sempre na vertical durante o movimento, deduza relações para a força que o assento exerce sobre o passageiro no topo do círculo e em seu ponto inferior.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: tanto no topo do círculo quanto na sua base, a variável-alvo é o módulo n da força normal que o assento exerce sobre o passageiro. Encontraremos essa força em cada posição, usando a segunda lei de Newton e as equações do movimento circular uniforme.

PREPARAR: a Figura 5.36a mostra a velocidade e a aceleração do passageiro nas duas posições. Note que a aceleração aponta *de cima para baixo* no *topo* do círculo, mas *de baixo para cima* na sua *base*. Em cada posição, as únicas forças atuantes são verticais: a força normal de baixo para cima e a força da gravidade de

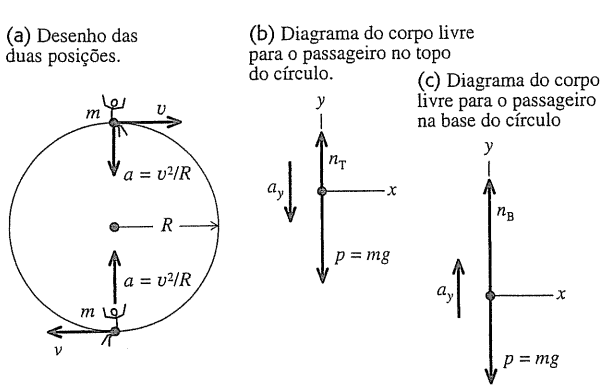


Figura 5.36 Nossos desenhos para esse problema.

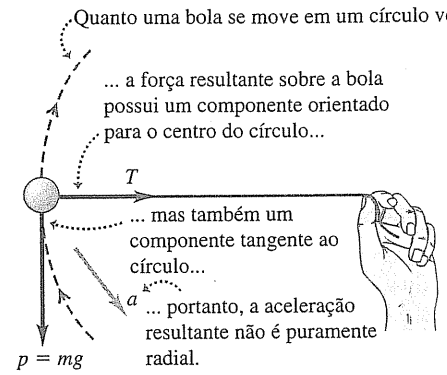


Figura 5.37 Uma bola girando em um círculo vertical.

cima para baixo. Logo, precisamos somente do componente vertical da segunda lei de Newton.

EXECUTAR: as figuras 5.36b e 5.36c mostram a situação, indicando diagramas do corpo livre para os dois pontos. Consideramos a vertical de baixo para cima como o sentido positivo da coordenada y nos dois casos. Seja n_T a força normal exercida de baixo para cima pelo assento sobre o passageiro no topo do círculo e n_B a força normal exercida pelo assento sobre o passageiro na base do círculo. No topo, a aceleração possui módulo v^2/R, porém, seu componente vertical é negativo porque seu sentido é de cima para baixo, para dentro do círculo. Logo, $a_y = -v^2/R$, e a segunda lei de Newton fornece

$$\text{Topo:} \quad \sum F_y = n_T + (-mg) = -m\frac{v^2}{R} \quad \text{ou}$$

$$n_T = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right)$$

No ponto inferior, a aceleração é de baixo para cima, portanto $a_y = +v^2/R$, e a segunda lei de Newton é

$$\text{Base:} \quad \sum F_y = n_B + (-mg) = +m\frac{v^2}{R} \quad \text{ou}$$

$$n_B = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right)$$

AVALIAR: o resultado para n_T revela que no topo da roda-gigante a força normal exercida pelo assento sobre o passageiro possui módulo *menor* do que o peso do passageiro, $p = mg$. Caso a roda girasse com velocidade suficiente tal que $g - v^2/R$ se tornasse igual a zero, o assento não aplicaria *nenhuma* força, e o passageiro ficaria quase solto no ar. Caso v fosse ainda maior, n_T se tornaria negativo; isso significa que seria necessária a aplicação de uma força de cima para baixo (como a fornecida pelo cinto de um assento) para manter o passageiro no assento. Por outro lado, a força normal n_B na base é sempre *maior* do que o peso do passageiro. Você sente o assento empurrá-lo para cima mais firmemente do que quando você está em repouso. Notamos que n_T e n_B são os valores do *peso aparente* do passageiro no topo e na base do círculo (Seção 5.2).

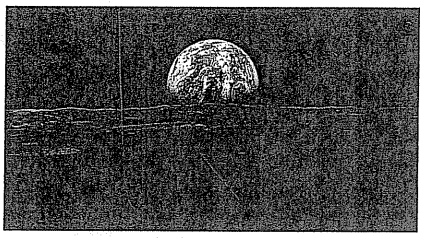
Quando você amarra um fio a um objeto e o faz girar em um círculo vertical, a análise no Exemplo 5.24 não se aplica diretamente. A razão é que a velocidade v agora *não* é constante; em cada ponto da trajetória, exceto no topo e na base do círculo, a força resultante (e, portanto, a aceleração) *não* aponta para o centro do círculo (Figura 5.37). Logo, tanto $\sum\vec{F}$ quanto $\vec{a}$ possuem componentes tangentes ao círculo, o que significa que a velocidade varia. Logo, esse é um exemplo de um movimento circular *não uniforme* (veja a Seção 3.4). Ainda pior, não podemos usar as fórmulas do movimento com aceleração constante para relacionar as velocidades em diversos pontos porque *nem* o módulo nem a direção da aceleração permanecem constantes. As relações necessárias entre as velocidades nesses pontos são mais facilmente obtidas usando-se o conceito de energia. Consideraremos esses problemas no Capítulo 7.

Teste sua compreensão da Seção 5.4 Satélites são mantidos em órbita pela força da atração gravitacional do nosso planeta. Um satélite em uma órbita de raio menor move-se a uma velocidade mais elevada do que um satélite em uma órbita de raio maior. Com base nessa informação, o que você conclui sobre a atração gravitacional da Terra para o satélite? (i) Ela aumenta à medida que aumenta a distância da Terra; (ii) É a mesma seja qual for a distância da Terra; (iii) Diminui à medida que aumenta a distância da Terra; (iv) Essa informação por si só não é suficiente para responder a essa pergunta. ∎

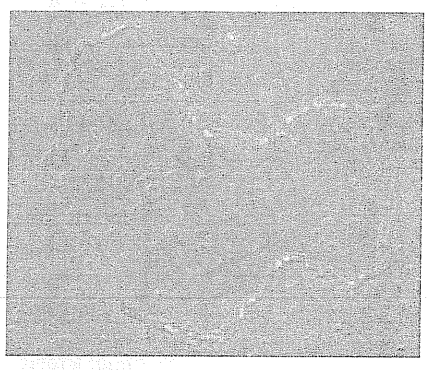
*5.5 As forças fundamentais da natureza

Discutimos diversos tipos de forças — incluindo o peso, a tensão, o atrito, a resistência do fluido e a força normal — e encontraremos outras forças na continuação de nossos estudos de física. Porém, quantos tipos diferentes de força existem? Nossos conhecimentos atuais mostram que todas as forças podem ser descritas por apenas quatro classes de forças *fundamentais*, ou interações entre partículas (Figura 5.38). Duas delas são familiares em nossa vida cotidiana. As outras duas envolvem interações entre partículas subatômicas que não podem ser observadas diretamente com os sentidos.

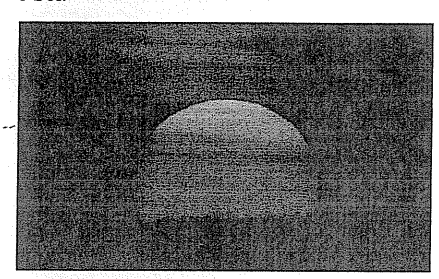
(a) Forças gravitacionais mantêm os planetas unificados.



(b) Forças eletromagnéticas formam as moléculas.



(c) Interações fortes liberam energia para energizar o Sol.



(d) Interações fracas desempenham um papel na explosão de estrelas.

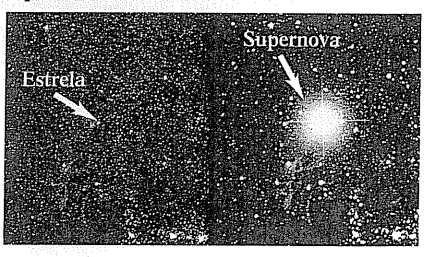


Figura 5.38 Exemplos das interações fundamentais na natureza. (a) A Lua e a Terra são mantidas unificadas e em órbita pelas forças gravitacionais. (b) As forças eletromagnéticas atuam entre os átomos para formar moléculas, como nesta microfotografia de força atômica do DNA do plasmídeo de uma bactéria. (c) As forças fortes entre partículas nucleares são responsáveis pelas reações termonucleares no centro do Sol; a energia liberada nos atinge sob a forma de luz solar. (d) As forças fracas, características de interações entre partículas subatômicas denominadas neutrinos, desempenham um papel crucial quando uma estrela explode e se transforma em uma supernova.

Das duas classes familiares, as **interações gravitacionais** foram as primeiras a ser estudadas com detalhes. O *peso* de um corpo resulta da atração gravitacional que a Terra exerce sobre ele. A atração gravitacional mútua entre as várias partes da Terra mantém o nosso planeta unificado (figura 5.38a). Newton concluiu que a atração gravitacional que o Sol exerce sobre a Terra mantém a Terra em uma órbita quase circular em torno do Sol. No Capítulo 12, as interações gravitacionais serão estudadas com detalhes, e analisaremos o papel vital por elas desempenhado no movimento de planetas e de satélites.

A segunda classe familiar, as **interações eletromagnéticas**, inclui as forças elétricas e magnéticas. Se você passar um pente no cabelo, ele poderá ser usado para atrair fragmentos de papel ou pequenas penas; essa interação decorre da carga elétrica sobre o pente. Todos os átomos contêm cargas elétricas positivas e negativas, de modo que os átomos e as moléculas interagem por meio de forças elétricas (Figura 5.38b). As forças de contato, incluindo a força normal, o atrito e a resistência de um fluido, são combinações de todas essas forças exercidas pelos átomos de um corpo sobre átomos vizinhos de outro corpo. As forças *magnéticas* ocorrem nas interações entre ímãs ou entre um ímã e um objeto de ferro. Elas aparentam constituir uma categoria diferente, porém as interações magnéticas são na verdade produzidas por cargas elétricas em movimento. Por exemplo, no eletroímã, uma corrente elétrica passa através de uma bobina e produz interações magnéticas. Estudaremos as interações elétricas e magnéticas na segunda metade deste volume.

As forças gravitacionais não desempenham nenhum papel significativo em estruturas atômicas e moleculares, porque as forças elétricas são extraordinariamente mais fortes. A repulsão elétrica entre dois prótons é 10^{35} vezes maior do que a atração gravitacional entre eles. Porém, as cargas elétricas negativas dos astros são iguais às respectivas cargas elétricas positivas, de modo que a força elétrica entre dois astros é igual a zero. As forças gravitacionais passam então a ser dominantes no movimento dos planetas e na estrutura interna das estrelas.

As outras duas classes de interações são menos familiares. Uma delas, a **interação forte**, é responsável pela força de coesão que mantém os núcleos no interior de um átomo. Os núcleos contêm os nêutrons, que são neutros, e os prótons, que são cargas positivas. Os prótons se repelem mutuamente, e os núcleos não seriam estáveis caso não existisse uma força atrativa para compensar essa repulsão elétrica. Por essa razão, a interação forte é também conhecida como *força nuclear*. Ela só atua em distâncias mais curtas do que as distâncias da interação eletromagnética, porém, dentro do limite de seu alcance ela é muito mais forte. A interação forte é responsável também pelas reações termonucleares que ocorrem no centro do Sol, que geram o calor e a luz solares (Figura 5.38c).

Para fazer o bloco se mover, é mais fácil empurrá-lo para cima do plano ou para baixo do plano? Por quê?

Q5.11 Uma caixa com livros está em repouso sobre um piso plano. Você deseja movê-la ao longo do piso com velocidade constante. Por que a força que você exerce puxando a caixa com um ângulo θ acima da horizontal é menor do que a força que você exerce empurrando a caixa com um ângulo θ abaixo da horizontal?

Q5.12 Quais das seguintes atividades você poderia fazer (ou não) em um mundo sem atrito? Explique seu raciocínio. (a) Ao dirigir, contornar uma curva de estrada sem inclinação; (b) Saltar no ar; (c) Começar a caminhar sobre uma calçada horizontal; (d) Subir uma escada vertical; (e) Mudar de pista em uma estrada.

Q5.13 Caminhar sobre uma superfície escorregadia de gelo pode ser mais cansativo do que caminhar por um pavimento comum. Por quê?

Q5.14 Quando você está descalço em pé sobre uma banheira úmida, o apoio parece ser razoavelmente seguro, embora o risco de escorregar seja grande. Explique isso em termos do coeficiente de atrito estático e do coeficiente de atrito cinético.

Q5.15 Você está empurrando uma caixa grande do fundo para a frente de um elevador de carga enquanto ele se move para o próximo andar. Em qual situação a força que você deve aplicar para mover a caixa é menor e em qual é maior: quando o elevador está acelerando de baixo para cima, quando está acelerando de cima para baixo ou quando está se deslocando a uma velocidade escalar constante. Explique.

Q5.16 A Lua está acelerando em direção à Terra. Por que ela não está se aproximando de nós?

Q5.17 Uma revista de automóveis chama uma curva com raio decrescente de 'a desgraça do motorista inexperiente'. Explique.

Q5.18 É comum ouvirmos dizer que 'o atrito sempre se opõe ao movimento'. Dê pelo menos um exemplo em que (a) o atrito estático *causa* movimento e (b) o atrito cinético *causa* movimento.

Q5.19 Se existe uma força resultante atuando sobre uma partícula que descreve um movimento circular uniforme, por que a velocidade escalar da partícula permanece constante?

Q5.20 O ângulo de inclinação lateral de uma curva foi calculado para uma velocidade de 80 km/h. Contudo, a estrada está coberta de gelo e você pretende ter a cautela de se mover lentamente, abaixo desse limite. O que ocorrerá com seu carro? Por quê?

Q5.21 Você faz uma bola girar na extremidade de um fio leve descrevendo uma trajetória circular horizontal com velocidade constante. O fio pode chegar a estar efetivamente no plano horizontal? Em caso negativo, o fio se inclina acima ou abaixo do plano horizontal? Por quê?

Q5.22 A força centrífuga não foi incluída nos diagramas indicados nas figuras. 5.34b e 5.35b. Explique por quê.

Q5.23 Um professor faz uma rolha de borracha girar na extremidade de um fio em um plano horizontal na sala de aula. Aproxima-se de Carolina, que está sentada na primeira fila, e diz que irá largar o fio quando a rolha estiver passando em frente do seu rosto. Carolina deve se preocupar?

Q5.24 Para manter dentro de certos limites as forças que atuam sobre os passageiros de uma montanha-russa, uma curva projetada para fazer uma volta completa (*loop-the-loop*) deve possuir, em vez de ser um círculo vertical perfeito, um raio de curvatura na base maior do que o raio de curvatura no topo. Explique.

Q5.25 Uma bola de tênis é solta do alto de um tubo cilíndrico sem ar; em outra experiência, ela é solta do alto do tubo cilíndrico com ar. Você examina fotografias de múltipla exposição tiradas das duas experiências. Das fotos obtidas, como você poderia identificar as duas quedas, ou isso não é possível?

Q5.26 Você joga uma bola de beisebol diretamente de baixo para cima com velocidade escalar v_0. Quando ela retorna ao ponto de onde foi lançada, como essa velocidade se relaciona com v_0 (a) na ausência da resistência do ar e (b) na presença da resistência do ar? Explique.

Q5.27 Você joga uma bola de beisebol diretamente de baixo para cima. Se a resistência do ar *não* for desprezada, como se compara o tempo que a bola leva para subir do ponto de onde ela foi lançada até sua altura máxima com o tempo que ela leva para descer da sua altura máxima até o ponto onde ela foi lançada? Explique sua resposta.

Q5.28 Você pega duas bolas de tênis idênticas e enche uma delas com água. Você as larga simultaneamente do topo de um prédio alto. Desprezando-se a resistência do ar, qual das bolas chega primeiro ao solo? Explique. E no caso de não desprezarmos a resistência do ar, qual é a resposta?

Q5.29 Um bola que está em repouso é solta e sofre a resistência do ar à medida que cai. Qual dos gráficos na Figura 5.39 representa melhor a sua aceleração em função do tempo?

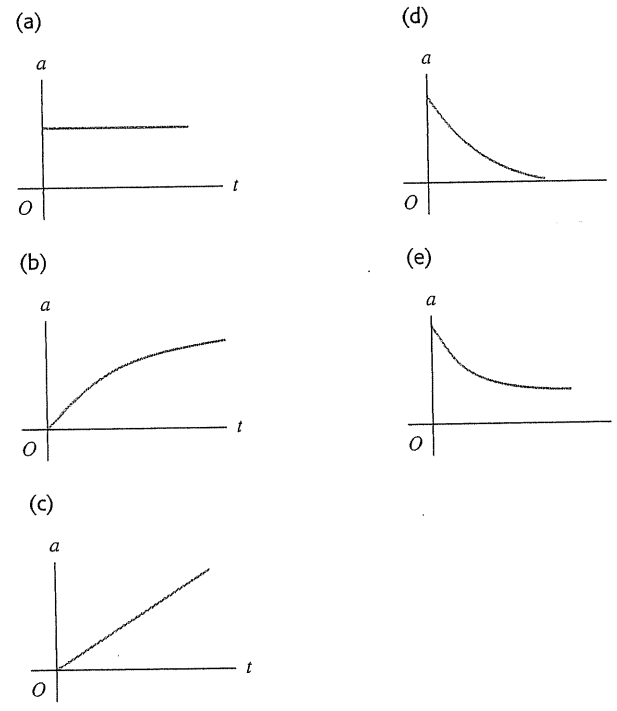


Figura 5.39 questão Q 5.29.

Q5.30 Um bola que está em repouso é solta e sofre a resistência do ar à medida que cai. Qual dos gráficos na Figura 5.40 representa melhor a sua velocidade vertical em função do tempo?

Q5.31 Quando pode uma bola de beisebol ter um componente da aceleração de baixo para cima? Explique em termos das forças sobre a bola e em termos dos componentes da velocidade em comparação com a velocidade terminal. A resistência do ar não deve ser desprezada.

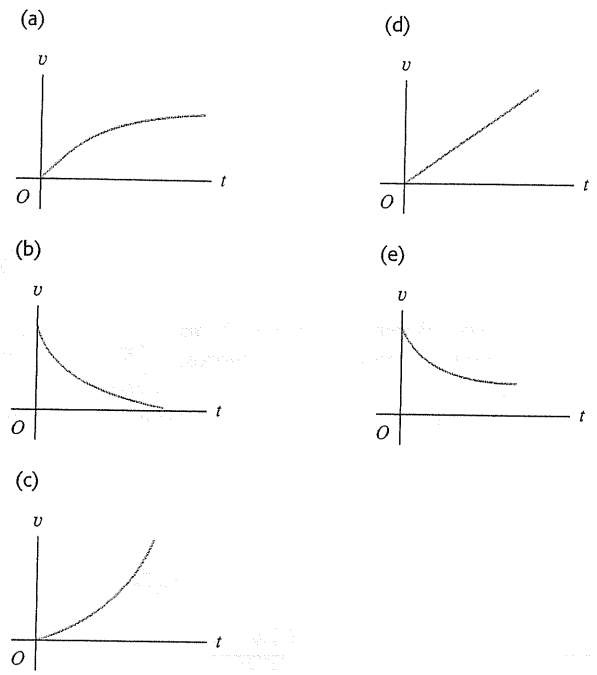


Figura 5.40 Questão Q 5.30.

Q5.32 Quando uma bola de beisebol se move com arraste do ar, ela percorre uma distância horizontal maior quando sobe até a altura máxima de sua trajetória ou quando desce da altura máxima até o solo? Ou essa distância é igual nos dois casos? Explique em termos das forças que atuam sobre a bola.

Q5.33 "Uma bola é lançada da extremidade de uma montanha elevada. Independentemente do ângulo de lançamento, devido à resistência do ar, ela por fim acabará caindo verticalmente de cima para baixo." Justifique essa afirmação.

Exercícios

Seção 5.1 Uso da primeira lei de newton: partículas em equilíbrio

5.1 Dois pesos de 25,0 N estão suspensos nas extremidades opostas de uma corda que passa sobre uma polia leve e sem atrito. O centro da polia está ligado a uma corrente presa ao teto. a) Qual a tensão na corda? b) Qual a tensão na corrente p?

5.2 Na Figura 5.41, cada bloco suspenso possui peso p. As polias não possuem atrito e as cordas possuem peso desprezível. Calcule em cada caso a tensão T na corda em termos do peso p. Para cada caso inclua um diagrama do corpo livre ou diagramas necessários para obter sua resposta.

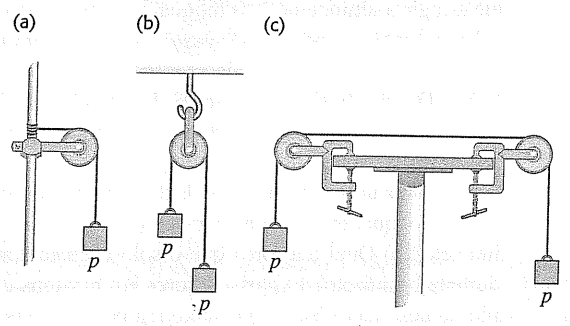


Figura 5.41 Exercício 5.2.

5.3 Uma bola de demolição está suspensa por uma pesada corrente uniforme com massa de 26,0 kg. a) Ache a tensão máxima e mínima na corrente. b) Qual é a tensão em um ponto localizado a três quartos acima da base da corrente?

5.4 Um arqueólogo aventureiro passa de um rochedo para outro deslocando-se lentamente com as mãos por meio de uma corda esticada entre os rochedos. Ele pára e fica em repouso no meio da corda (Figura 5.42). A corda se romperá se a tensão for maior do que $2{,}50 \times 10^4$ N e se a massa do nosso herói for de 90,0 kg. a) Se $\theta = 10{,}0°$, qual é a tensão na corda? b) Qual deve ser o menor valor de θ para a corda não se romper?

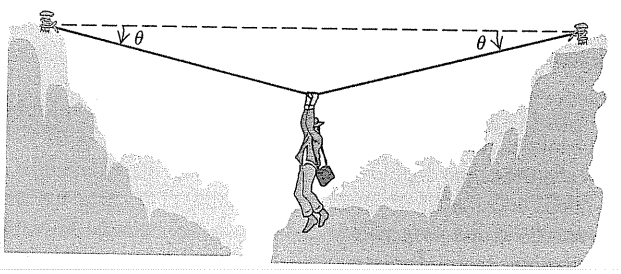


Figura 5.42 Exercício 5.4.

5.5 Um quadro está suspenso em uma parede por dois fios ligados em seus cantos superiores. Se os dois fios fazem o mesmo ângulo com a vertical, qual deve ser o ângulo se a tensão em cada fio for igual a 0,75 do peso do quadro? (Despreze o atrito entre a parede e o quadro.)

5.6 Resolva o problema do Exemplo 5.5 usando um sistema em que o eixo Ox seja horizontal e o eixo Oy seja vertical. Você encontra a mesma resposta usando esse conjunto diferente de eixos?

5.7 Uma rua de São Paulo possui uma inclinação de 17,5° com a horizontal. Qual é a força paralela à rua necessária para impedir que um carro de 1390 kg desça a ladeira dessa rua?

5.8 Uma bola grande de um guindaste de demolição é mantida em equilíbrio por dois cabos de aço leves (Figura 5.43). Se a massa m da bola for igual a 4090 kg, qual é a) a tensão T_B no cabo que faz um ângulo de 40° com a vertical? b) a tensão T_A no cabo horizontal?

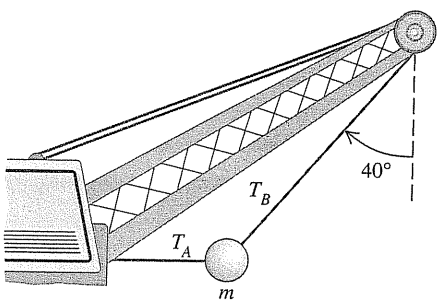


Figura 5.43 Exercício 5.8.

5.9 Ache a tensão em cada corda na Figura 5.44, sabendo que o peso suspenso é p.

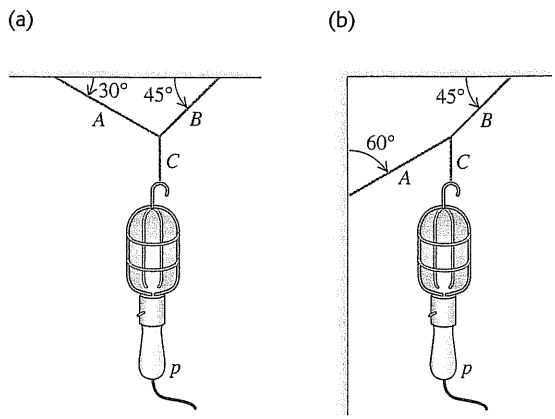


Figura 5.44 Exercício 5.9.

5.10 Um carro de 1130 kg está seguro por um cabo leve, sobre uma rampa muito lisa (sem atrito), como indicado na Figura 5.45. O cabo forma um ângulo de 31,0° sobre a superfície da rampa, e a rampa ergue-se 25,0° acima da horizontal. a) Desenhe um diagrama do corpo livre para o carro. b) Ache a tensão no cabo. c) Com que intensidade a superfície da rampa empurra o carro?

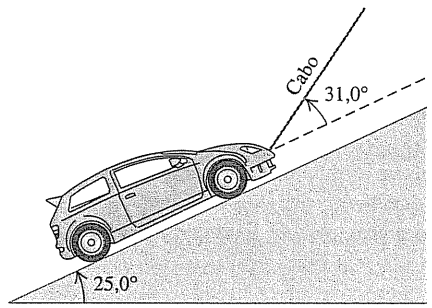


Figura 5.45 Exercício 5.10.

5.11 Um homem empurra um piano de 180 kg, de modo que ele desliza com velocidade constante para baixo de uma rampa inclinada de 11,0° acima da horizontal. Despreze o atrito que atua sobre o piano. Calcule o módulo da força aplicada pelo homem, se ela for a) paralela ao plano inclinado e b) paralela ao piso.

5.12 Na Figura 5.46, o peso p é igual a 60,0 N. a) Qual é a tensão na corda diagonal? b) Ache os módulos das forças horizontais $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ que devem ser exercidas para manter em equilíbrio esse sistema.

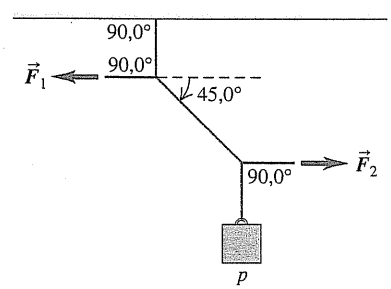


Figura 5.46 Exercício 5.12.

5.13 Uma bola sólida e uniforme, de 45,0 kg e diâmetro de 32,0 cm está presa a um suporte vertical livre de atrito por um fio de 30,0 cm e massa desprezível (Figura 5.47). a) Faça um diagrama do corpo livre para a bola e use-a para achar a tensão no fio. b) Qual é a força que a bola exerce sobre a parede?

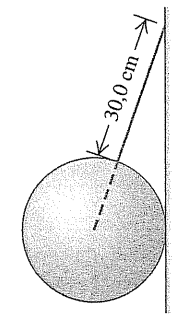


Figura 5.47 Exercíco 5.13.

5.14 Dois blocos, cada um com peso p, são mantidos em equilíbrio em um plano inclinado sem atrito (Figura 5.48). Em termos de p e do ângulo a do plano inclinado, determine a tensão a) na corda que conecta os dois blocos; b) na corda que conecta o bloco A com a parede. c) Calcule o módulo da força que o plano inclinado exerce sobre cada bloco. d) Interprete suas respostas para os casos $\alpha = 0$ e $\alpha = 90°$.

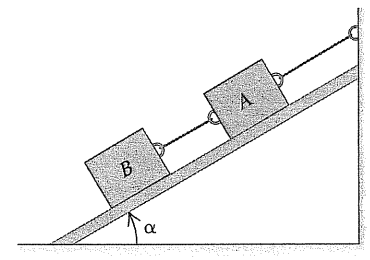


Figura 5.48 Exercício 5.14.

5.15 Um fio horizontal segura uma bola sólida e uniforme de massa m sobre uma rampa inclinada, que forma um ângulo de 35,0° acima do plano horizontal. A superfície dessa rampa é perfeitamente lisa, e o fio está direcionado para o sentido oposto ao centro da bola (Figura 5.49). a) Desenhe um diagrama do corpo livre para a bola. b) Qual é a força que a superfície da rampa exerce sobre a bola? c) Qual é a tensão no fio?

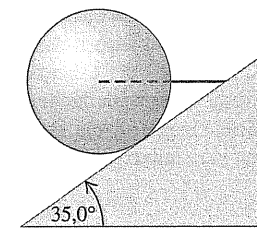


Figura 5.49 Exercício 5.15.

Seção 5.2 Uso da segunda lei de Newton: dinâmica das partículas

5.16 O motor de um foguete de 125 kg (incluindo toda a carga) produz uma força vertical constante (a *propulsão*) de 1720 N. No interior desse foguete, uma fonte de energia de 15,5 N está em repouso sobre o piso. a) Ache a aceleração do foguete. b) Quando ele atingir a altitude de 120 m, qual é a força que o piso exerce sobre a fonte de energia? (*Sugestão*: comece com um diagrama do corpo livre para a fonte de energia.)

5.17 A Queda da *Genesis*. Em 08 de setembro de 2004, a espaçonave *Genesis* caiu no deserto de Utah porque seu pára-quedas não abriu. A cápsula de 210 kg atingiu a Terra a 311 km/h e penetrou o solo a uma profundidade de 81,0 cm. a) Supondo que fosse constante, qual era a sua aceleração (em m/s^2 e em g) durante o impacto? b) Qual é a força que o solo exerceu sobre a cápsula durante o impacto? Expresse a força em newtons e como múltiplo do peso da cápsula. c) Quanto tempo durou essa força?

5.18 Três trenós estão sendo puxados horizontalmente sobre uma superfície de gelo horizontal e sem atrito, através de cordas horizontais (Figura 5.50). A força de puxar é horizontal e possui módulo de 125 N. Ache a) a aceleração do sistema e b) a tensão nas cordas *A* e *B*.

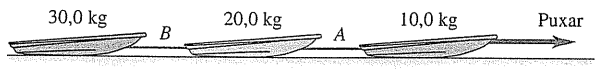


Figura 5.50 Exercício 5.18.

5.19 Máquina de Atwood. Uma carga de tijolos com 15,0 kg é suspensa pela extremidade de uma corda que passa sobre uma pequena polia sem atrito. Um contrapeso de 28,0 kg está preso na outra extremidade da corda, conforme mostra a Figura 5.51. O sistema é libertado a partir do repouso. a) Desenhe um diagrama do corpo livre para a carga de tijolos e outro para o contrapeso. b) Qual é o módulo da aceleração de baixo para cima da carga de tijolos? c) Qual é a tensão na corda durante o movimento da carga? Como essa tensão é relacionada com a carga? Como essa tensão é relacionada com o contrapeso?

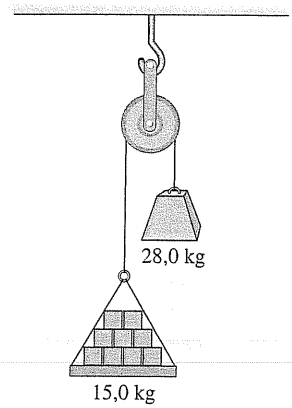


Figura 5.51 Exercício 5.19.

5.20 Um bloco de gelo de 8,0 kg é libertado a partir do repouso no topo de uma rampa sem atrito de comprimento igual a 1,50 m e desliza para baixo atingindo uma velocidade de 2,50 m/s na base da rampa. a) Qual é o ângulo entre a rampa e a horizontal? b) Qual seria a velocidade escalar do gelo na base, se o movimento sofresse a oposição de uma força de atrito constante de 10,0 N, paralela à superfície da rampa?

5.21 Uma corda leve está amarrada a um bloco com massa de 4,0 kg, que está em repouso sobre uma superfície horizontal e sem atrito. A corda horizontal passa por uma polia sem atrito e sem massa, e um bloco com massa *m* está suspenso na outra ponta. Quando os blocos são soltos, a tensão na corda é de 10,0 N. a) Desenhe dois diagramas do corpo livre, um para o bloco de 4,0 kg e outro para o bloco com massa *m*. b) Qual é a aceleração de cada bloco? b) Ache a massa *m* do bloco suspenso. d) Como a tensão se relaciona com o peso do bloco suspenso?

5.22 Projeto pista de pouso. Um avião de carga decola de um campo plano rebocando dois planadores, um atrás do outro. A massa de cada planador é de 700 kg, e a resistência total (arraste do ar mais atrito com a pista) em cada um pode ser considerada constante e igual a 2500 N. A tensão no cabo de reboque entre o avião de carga e o primeiro planador não deve exceder a 12000 N. a) Se a decolagem exige uma velocidade escalar de 40 m/s, qual deve ser a extensão mínima da pista? b) Qual é a tensão na corda de reboque entre os dois planadores, enquanto eles aceleram para a decolagem?

5.23 Uma rocha de 750,0 kg é erguida de uma pedreira com 125 m de profundidade, por uma corrente longa e uniforme, com massa de 575 kg. Essa corrente tem força uniforme, mas em qualquer ponto ela pode suportar uma tensão máxima não superior a 2,50 vezes o seu peso, sem que se rompa. a) Qual é a aceleração máxima que a rocha pode atingir para conseguir sair da pedreira e b) quanto tempo leva para ela ser içada à aceleração máxima, considerando-se que parte do repouso?

5.24 Peso aparente. Um estudante de física de 550 N está sobre uma balança portátil apoiada sobre o piso de um elevador de 850 kg (incluindo o estudante), que está suspenso por um cabo. Quando o elevador começa a se mover, a leitura da balança indica 450 N. a) Ache a aceleração do elevador (módulo, direção e sentido). b) Qual é a aceleração, quando a leitura da balança indica 670 N? c) Se a leitura da balança indicar zero, o estudante terá motivo para se preocupar? Explique. d) Qual é a tensão do cabo nos itens (a) e (c)?

5.25 Uma estudante de física está jogando hóquei em uma mesa de ar (uma superfície sem atrito) e verifica que, ao lançar o disco com uma velocidade de 3,80 m/s ao longo do comprimento da mesa (1,75 m) em uma das extremidades dela, o disco flutua 2,50 cm para a direita até chegar à outra extremidade, mas ainda possui um componente de velocidade ao longo do comprimento de 3,80 m/s. Ela acerta ao concluir que a mesa não está nivelada e também acerta ao calcular sua inclinação a partir dessa informação. Qual é o ângulo da inclinação?

5.26 Um foguete de teste de 2540 kg é lançado verticalmente da plataforma de lançamento. Seu combustível (de massa desprezível) provê uma força propulsora tal que sua velocidade vertical em função do tempo é dada por $v(t) = At + Bt^2$, onde *A* e *B* são constantes e o tempo é medido a partir do instante em que o combustível entra em combustão. No instante da ignição, o foguete possui uma aceleração de baixo para cima de 1,50 m/s^2; 1,0 s depois, a velocidade de baixo para cima é de 2,0 m/s. a) Determine *A* e *B*, incluindo suas unidades SI. b) No instante de 4,0 s após a ignição, qual é a aceleração do foguete e c) qual força propulsora o combustível em combustão exerce sobre ele, supondo que não haja resistência do ar? Expresse a propulsão em newtons e como múltiplo do peso do foguete. d) Qual é a propulsão inicial em função do combustível?

Seção 5.3 Forças de atrito

5.27 Diagramas do corpo livre. As duas etapas iniciais para aplicar a segunda lei de Newton para resolver um problema são isolar um corpo para análise e, a seguir, fazer um diagrama do corpo livre para indicar as forças que atuam sobre o corpo escolhido. Desenhe diagramas do corpo livre para as seguintes situações: a) um bloco de massa *M* deslizando para baixo ao longo de um plano inclinado, sem atrito e formando um ângulo α com a horizontal; b) um bloco de massa *M* deslizando para cima ao longo de um plano inclinado, sem atrito e formando um ângulo α com a horizontal; c) um bloco de massa *M* deslizando para cima ao longo de um plano inclinado com atrito cinético, formando um ângulo a com a horizontal.

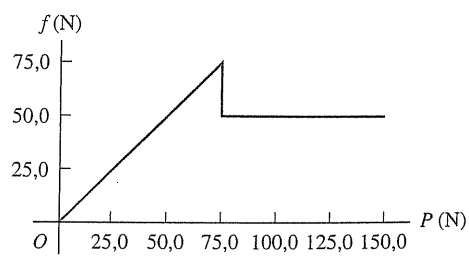


Figura 5.52 Exercício 5.28.

5.28 Em um laboratório que conduz experiências sobre atrito, um bloco de 135 N repousa sobre uma mesa de superfície horizontal rugosa, que é puxada por um fio horizontal. A força de puxar cresce lentamente até o bloco começar a se mover e continua a aumentar depois disso. A Figura 5.52 mostra um gráfico da força de atrito que atua sobre esse bloco em função da força de puxar. a) Identifique as regiões do gráfico em que ocorrem o atrito estático e o atrito cinético. b) Ache os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco e a mesa. c) Por que o gráfico se inclina de baixo para cima na primeira parte, mas depois se nivela? d) Como seria o gráfico, se um tijolo de 135 N fosse colocado sobre o bloco e quais seriam os coeficientes de atrito nesse caso?

5.29 Um carregador de supermercado empurra uma caixa com massa de 11,2 kg sobre uma superfície horizontal com uma velocidade constante de 3,50 m/s. O coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a superfície é 0,20. a) Que força horizontal o trabalhador deve aplicar para manter o movimento? b) Se a força calculada na parte a) for removida, que distância a caixa deslizará até parar?

5.30 Uma caixa com bananas pesando 40,0 N está em repouso sobre uma superfície horizontal. O coeficiente de atrito estático entre a caixa e a superfície é igual a 0,40, e o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a superfície é igual a 0,20. a) Se nenhuma força horizontal for aplicada sobre a caixa, quando ela estiver em repouso, qual será o valor da força de atrito exercida sobre a caixa? b) Se um macaco aplicar uma força horizontal de 6,0 N sobre a caixa, quando ela estiver em repouso, qual será o valor da força de atrito exercida sobre a caixa? c) Qual a força horizontal mínima que o macaco deve aplicar sobre a caixa para que ela comece a se mover? d) Qual a força horizontal mínima que o macaco deve aplicar sobre a caixa para que ela, depois de começar a se mover, possa manter-se em movimento com velocidade constante? e) Se o macaco aplicar sobre a caixa uma força horizontal de 18,0 N, qual será o valor da força de atrito exercida sobre a caixa?

5.31 Uma caixa de ferramentas de 45,0 kg está em repouso sobre um piso horizontal. Você exerce sobre ela uma força de puxar horizontal que aumenta gradualmente e observa que a caixa só começa a se mover quando a sua força ultrapassa 313 N. A partir daí, você deve reduzir sua força de puxar para 208 N para mantê-la em movimento a uma velocidade regular de 25,0 cm/s. a) Quais são os coeficientes de atrito estático e cinético entre a caixa e o piso? b) Qual força de puxar você deve exercer para provocar uma aceleração de 1,10 m/s^2? c) Suponha que você estivesse realizando a mesma experiência, mas na superfície lunar, onde a aceleração da gravidade é de 1,62 m/s^2. i) Qual o módulo da força para iniciar o movimento? ii) Qual seria a aceleração, se fosse mantida a força determinada no item b)?

5.32 Uma caixa de laranjas de 85 N está sendo empurrada ao longo de um piso horizontal. À medida que ela se move, sua velocidade diminui a uma taxa constante de 0,90 m/s a cada segundo. A força aplicada possui componente horizontal de 20 N e um componente vertical de 25 N de cima para baixo. Calcule o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e piso.

5.33 Você está baixando duas caixas por uma rampa, uma sobre a outra, e como indica a Figura 5.53 você faz isso puxando uma corda paralela à superfície da rampa.As duas caixas se movem juntas, a uma velocidade escalar constante de 15,0 cm/s. O coeficiente do atrito cinético entre a rampa e a caixa inferior é 0,444, e o coeficiente de atrito estático entre as duas caixas é 0,800. a) Qual força você deve aplicar para realizar isso? b) Qual o módulo, a direção e o sentido da força de atrito sobre a caixa superior?

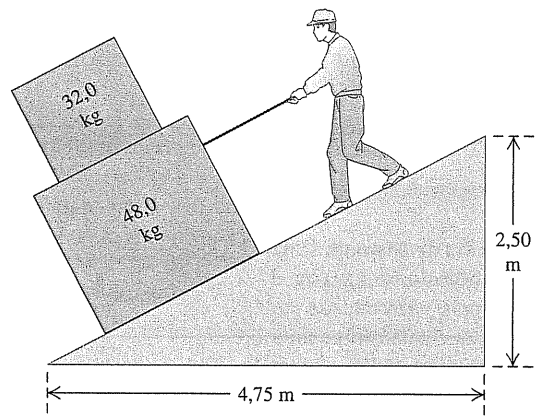


Figura 5.53 Exercício 5.33.

5.34 Distância de freada. a) Se o coeficiente de atrito cinético entre os pneus e um pavimento seco for de 0,80, qual é a menor distância para fazer um carro parar bloqueando o freio, quando o carro se desloca a 28,7 m/s? b) Sobre um pavimento molhado, o coeficiente de atrito cinético se reduz a 0,25. A que velocidade você poderia dirigir no pavimento molhado para que o carro parasse na mesma distância calculada em (a)? (*Nota:* Bloquear os freios *não* é a maneira mais segura de parar.)

5.35 Coeficiente de atrito. Uma arruela polida de latão desliza ao longo de uma superfície de aço até parar. Usando os valores da Tabela 5.1, quantas vezes mais longe ela poderia deslizar com a mesma velocidade inicial se a arruela fosse revestida de Teflon?

5.36 Considere o sistema indicado na Figura 5.54. O bloco A pesa 45 N e o bloco B, 25 N. Suponha que o bloco B desça com velocidade constante. a) Ache o coeficiente de atrito cinético entre o bloco A e o topo da mesa. b) Suponha que um gato, também com peso 45 N, caia no sono sobre o bloco A. Se o bloco B agora se move livremente, qual é sua aceleração (módulo, direção e sentido)?

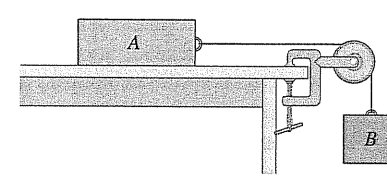


Figura 5.54 Exercícios 5.36 e 5.41; Problema 5.77.

5.37 Duas caixas estão ligadas por uma corda sobre uma superfície horizontal (Figura 5.55). A caixa A possui massa m_A e a caixa B possui massa m_B. O coeficiente de atrito cinético entre cada caixa e a superfície é μ_c. As caixas são empurradas para a direita com velocidade constante por uma força horizontal $\vec{F}$. Em termos de m_A, de m_B e de μ_c, calcule a) o módulo da força $\vec{F}$; b) a tensão na corda que conecta os blocos. Inclua um diagrama do corpo livre ou os diagramas que você usou para achar suas respostas.

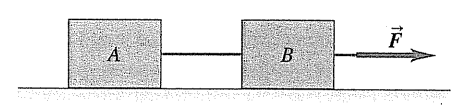


Figura 5.55 Exercício 5.37.

5.38 Atrito de rolamento. Duas rodas de bicicleta são lançadas rolando com a mesma velocidade inicial de 3,50 m/s ao longo de uma estrada retilínea. Medimos, então, a distância percorrida por cada uma até o momento em que a velocidade se reduziu à metade do valor inicial. O pneu de uma delas está inflado com uma pressão de 1,6 atm (1 atm = $1{,}013 \cdot 10^5$ N/m^2) e percorreu uma distância de 18,0 m. O da outra está inflado com uma pressão de 4 atm e percorreu uma distância de 92,0 m. Calcule o coeficiente de atrito de rolamento μ_r para cada roda. Suponha que a força horizontal resultante seja devida apenas ao atrito de rolamento.

5.39 Rodas. Você verifica que é necessária uma força de 160 N para deslizar uma caixa ao longo da superfície de um piso plano, a uma velocidade escalar constante. O coeficiente de atrito estático é 0,52 e o coeficiente de atrito cinético é 0,47. Se você colocasse a caixa sobre um carrinho de massa 5,3 kg e com coeficiente de atrito de rolamento 0,018, qual aceleração horizontal essa força de 160 N forneceria?

5.40 Você verifica que é necessária uma força horizontal de 200 N para mover uma caminhonete vazia ao longo de uma estrada plana, a uma velocidade escalar de 2,4 m/s. Então, você carrega a caminhonete e calibra os pneus, de modo que o peso total aumenta 42%, enquanto o coeficiente de atrito de rolamento diminui 19%. Agora, qual força horizontal será necessária para mover a caminhonete ao longo da mesma estrada, à mesma velocidade? A velocidade é baixa o suficiente para permitir que se despreze a resistência do ar.

5.41 Como indicado na Figura 5.54, o bloco A (massa de 2,25 kg) está em repouso sobre o topo de uma mesa. Ele é ligado a um bloco B (massa de 1,30 kg) por uma corda horizontal que passa sobre uma polia leve e sem atrito. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco A e o topo da mesa é de 0,450. Depois que os blocos são libertados, ache a) a velocidade de cada bloco depois de terem se movido 3,0 cm; b) a tensão na corda. Inclua um diagrama do corpo livre ou os diagramas que você usou para achar suas respostas.

5.42 Uma caixa de livros de 25,0 kg está em repouso sobre uma rampa que faz um ângulo α com a horizontal. O coeficiente de atrito cinético é de 0,25 e o coeficiente de atrito estático é de 0,35. a) A medida que o ângulo α aumenta, qual é o ângulo mínimo no qual a caixa começa a deslizar? b) Para esse ângulo, ache a aceleração depois que a caixa começa a deslizar. c) Para esse ângulo, ache a velocidade da caixa após ter percorrido 5,0 m ao longo do plano inclinado.

5.43 Um engradado grande de massa m está em repouso sobre um piso horizontal. Os coeficientes de atrito entre o piso e o engradado são μ_c e μ_s. Uma mulher o empurra para baixo exercendo uma força $\vec{F}$ formando um ângulo θ abaixo da horizontal. a) Ache o módulo da força $\vec{F}$ necessária para manter o engradado se movendo com velocidade constante. b) Se μ_s for maior do que um valor limite, a mulher não conseguirá mover o engradado por mais força que ela faça. Calcule esse valor crítico de μ_s.

5.44 Uma caixa de massa m é arrastada ao longo de um assoalho horizontal que possui um coeficiente de atrito cinético μ_c por uma corda que puxa para cima formando um ângulo θ acima da horizontal com uma força de módulo F. a) Ache o módulo da força necessária para manter a caixa se movendo com velocidade constante em termos de m, de μ_c, de θ e de g. b) Sabendo que você está estudando física, um instrutor pergunta-lhe qual seria a força necessária para fazer deslizar um paciente de 90,0 kg puxando-o com uma força que forma um ângulo de 25° acima da horizontal. Arrastando pesos amarrados a um par de sapatos velhos sobre o piso e usando um dinamômetro, você calculou $\mu_c = 0{,}35$. Use esse valor e o resultado da parte (a) para responder à pergunta feita pelo instrutor.

5.45 Os blocos A, B e C são dispostos como indicado na Figura 5.56, e ligados por cordas de massas desprezíveis. O peso de A é de 25,0 N e o peso de B também é de 25,0 N. O coeficiente de atrito cinético entre cada bloco e a superfície é igual 0,35. O bloco C desce com velocidade constante. a) Desenhe dois diagramas do corpo livre separados mostrando as forças que atuam sobre A e sobre B. b) Ache a tensão na corda que liga o bloco A ao B. c) Qual é o peso do bloco C? d) Se a corda que liga o bloco A ao B fosse cortada, qual seria a aceleração do bloco C?

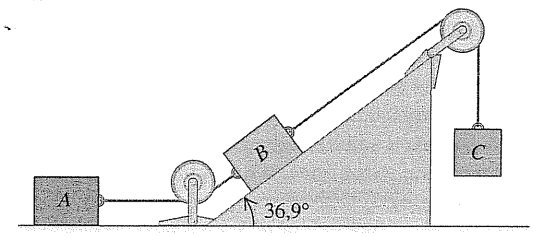


Figura 5.56 Exercício 5.45.

5.46 Partindo da Equação (5.10), deduza as equações (5.11) e (5.12).

5.47 a) No Exemplo 5.19 (Seção 5.3), qual seria o valor de D necessário para que o pára-quedista tivesse $v_t = 42$ m/s? b) Se a filha do pára-quedista, cuja massa é de 45 kg, está caindo no ar e possui o mesmo D (0,25 kg/m) que o pai, qual seria a velocidade terminal da filha?

5.48 Uma bola de beisebol é atirada verticalmente para cima. A força de arraste é proporcional a v^2. Em termos de g, qual é o componente y da aceleração quando a velocidade é igual à metade da velocidade terminal, supondo que a) ela se mova para cima? b) ela se mova de volta para baixo?

Seção 5.4 Dinâmica do movimento circular

5.49 A peça de uma máquina consiste de uma barra estreita de 40,0 cm de comprimento e possui pequenas massas de 1,15 kg presas por parafusos nas extremidades. Os parafusos podem suportar uma força máxima de 75,0 N, sem se soltarem. Essa barra gira sobre um eixo perpendicular a ela, no seu centro. a) À medida que a barra gira a uma taxa constante, sobre uma superfície horizontal sem atrito, qual é a velocidade escalar máxima que as massas podem ter, sem que os parafusos se soltem? b) Suponha que a máquina seja redesenhada, de modo que a barra gire a uma taxa constante, perfazendo um círculo vertical. É mais provável que um dos parafusos se solte quando a massa estiver no topo do círculo, ou na base do círculo? Use um diagrama do corpo livre para entender por quê. c) Usando o resultado obtido em (b), qual é a maior velocidade escalar que as massas podem ter, sem que um parafuso se solte?

5.50 Uma curva plana (não compensada com inclinação lateral) de uma estrada possui raio igual a 220,0 m. Um carro contorna a curva com uma velocidade de 25,0 m/s. Qual é o coeficiente de atrito mínimo capaz de impedir o deslizamento do carro? b) Suponha que a estrada esteja coberta de gelo e o coeficiente de atrito entre os pneus e o pavimento é apenas um terço do que foi obtido em (a). Qual deve ser a velocidade escalar máxima do carro, de modo que possa fazer a curva com segurança?

5.51 Um carro de 1125 kg e uma caminhonete de 2250 kg se aproximam de uma curva na estrada que possui raio 225 m. a) A que ângulo o engenheiro deve inclinar essa curva, de modo que veículos com deslocamento de 65,0 mi/h possam contorná-la com segurança, seja qual for o estado dos pneus? A caminhonete mais pesada deve seguir mais lentamente do que o carro mais leve? b) Considerando que o carro e a caminhonete fazem a curva a 65,0 mi/h, ache a força normal sobre cada veículo em função da superfície da estrada.

5.52 Um 'balanço gigante' de um parque de diversões consiste em um eixo vertical central com diversos braços horizontais ligados em sua extremidade superior (Figura 5.57). Cada braço suspende um assento por meio de um cabo de 5,0 m de comprimento, e a extremidade superior do cabo está presa ao braço a uma distância de 3,0 m do eixo central. a) Calcule o tempo para uma revolução do balanço quando o cabo que suporta o assento faz um ângulo de 30,0° com a vertical. b) O ângulo depende do passageiro para uma dada taxa de revolução?

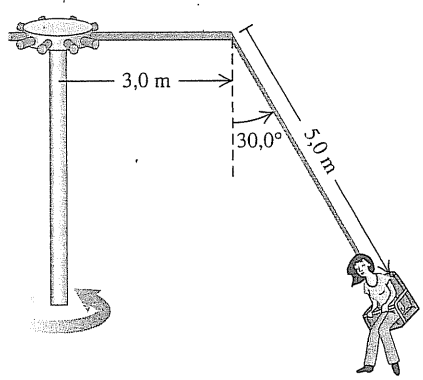


Figura 5.57 Exercício 5.52.

5.53 Em outra versão do 'balanço gigante' (Exercício 5.52),o assento é conectado a dois cabos, como indicado na Figura 5.58, uma das quais é horizontal. O assento balança em um círculo horizontal, a uma taxa de 32,0 rpm (rev/min). Considerando que o assento pesa 255 N e uma pessoa de 825 N está sentada sobre ele, ache a tensão em cada cabo.

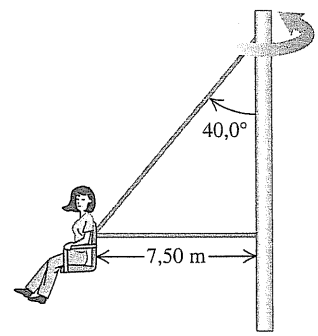


Figura 5.58 Exercício 5.53.

5.54 Um pequeno botão sobre uma plataforma circulante horizontal com diâmetro de 0,320 m gira junto com a plataforma com 40,0 rev/min, desde que o botão não esteja a uma distância maior do que 0,150 m do eixo. a) Qual é o coeficiente de atrito estático entre o botão e a plataforma? b) Qual é a distância máxima ao eixo da plataforma que o botão pode ser colocado sem que ele deslize, se a plataforma gira com 60,0 rev/min?

5.55 Estação espacial girando. Um problema para a vida humana no espaço exterior é o peso aparente igual a zero. Um modo de contornar o problema seria fazer a estação espacial girar em torno do centro com uma taxa constante. Isso criaria uma 'gravidade artificial' na borda externa da estação espacial. a) Se o diâmetro da estação espacial for igual a 800 m, quantas revoluções por minuto seriam necessárias a fim de que a aceleração da 'gravidade artificial' fosse igual a 9,8 m/s^2? b) Se a estação espacial fosse projetada para viajantes que querem ir a Marte, seria desejável simular a aceleração da gravidade na superfície de Marte (3,7 m/s^2). Quantas revoluções por minuto seriam necessárias nesse caso?

5.56 Uma roda-gigante no Japão possui um diâmetro de 100 m. Ela faz uma revolução a cada 60 segundos. a) Calcule a velocidade de um passageiro quando a roda-gigante gira a essa taxa. b) Um passageiro pesa 882 N em uma balança no solo. Qual é seu peso aparente no ponto mais alto e no ponto mais baixo da roda-gigante? c) Qual deveria ser o tempo de uma revolução para que o peso aparente no ponto mais alto fosse igual a zero? d) Nesse caso, qual deveria ser o peso aparente no ponto mais baixo?

5.57 Um avião faz uma volta circular em um plano vertical (um *loop*) com um raio de 150 m. A cabeça do piloto sempre aponta para o centro do círculo. A velocidade do avião não é constante; o avião vai mais devagar no topo do círculo e tem velocidade maior na base do círculo. a) No topo do círculo, o piloto possui peso aparente igual a zero. Qual é a velocidade do avião nesse ponto? b) Na base do círculo, a velocidade do avião é de 280 km/h. Qual é o peso aparente do piloto nesse ponto? O peso real do piloto é de 700 N.

5.58 Uma mulher de 50,0 kg pilota um avião mergulhando verticalmente para baixo e muda o curso para cima, de modo que o avião passa a descrever um círculo vertical. a) Se a velocidade do avião na base do círculo for igual a 95,0 m/s, qual será o raio mínimo do círculo para que a aceleração neste ponto não supere 4,0g? b) Qual é seu peso aparente nesse ponto?

5.59 Fique seco! Uma corda é amarrada em um balde de água e o balde gira em um círculo vertical de raio 0,600 m. Qual deve ser a velocidade mínima do balde no ponto mais elevado do círculo para que a água não seja expelida do balde?

5.60 Uma bola de boliche de 71,2 N está presa ao teto por uma corda de 3,80 m. A bola é empurrada para um lado e libertada; ela então oscila para frente e para trás, como um pêndulo. Quando a corda passa pela vertical, a velocidade da bola é igual a 4,20 m/s. a) Qual é o módulo, a direção e o sentido da aceleração da bola nesse instante? b) Qual é a tensão na corda nesse instante?

Problemas

5.61 Duas cordas estão conectadas a um cabo de aço que segura um peso suspenso, como indicado na Figura 5.59. a) Desenhe um diagrama do corpo livre mostrando as forças que atuam sobre o nó que liga as duas cordas ao cabo de aço. Com base no diagrama de força, qual das duas cordas terá a maior tensão? b) Se a tensão máxima que cada corda pode sustentar sem se romper é de 5000 N, determine o valor máximo do peso pendente que essas cordas podem suportar com segurança. Ignore o peso das cordas e do cabo de aço.

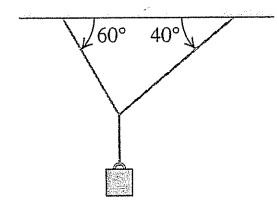


Figura 5.59 Problema 5.61.

5.62 Na Figura 5.60, um trabalhador levanta um peso p puxando uma corda para baixo com uma força $\vec{F}$. A polia superior está presa ao teto por meio de uma corrente, e a polia inferior está presa ao peso por meio de outra corrente. Ache em termos de p a ten-

são em cada corrente e o módulo da força $\vec{F}$, quando o peso é levantado com velocidade constante. Inclua um diagrama do corpo livre ou os diagramas necessários para obter sua resposta. Despreze os pesos das polias, das correntes e da corda.

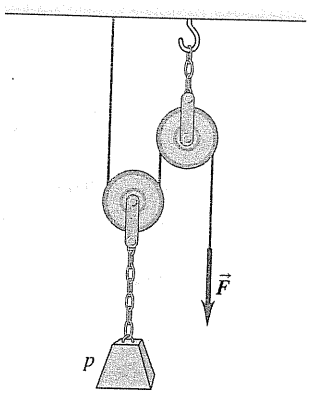


Figura 5.60 Problema 5.62.

5.63 Uma corda com massa. Em quase todos os problemas deste livro, as massas dos cabos, cordas e fios são tão pequenas em comparação com os outros corpos que podemos desprezá-las. Porém, quando a corda é o *único* objeto do problema, obviamente a sua massa não pode ser desprezada. Por exemplo, suponha que você amarre as extremidades de uma corda em dois suportes verticais para secar roupas (Figura 5.61). A corda possui massa M e cada extremidade faz um ângulo θ com a horizontal. Determine a) a tensão nas extremidades da corda; b) a tensão em seu ponto inferior. c) Por que θ não pode ser igual a zero? (Veja o item Q5.3 das Questões para Discussão.) d) Discuta seus resultados para os itens a) e (b) no limite em que $\theta \to 90°$. A corda para secar roupa ou qualquer cabo flexível preso em suas extremidades sob ação do próprio peso adquire a forma de uma *catenária*. Para um tratamento mais avançado dessa curva, veja SYMON, K. R. *Mechanics*, 3. ed. Addison-Wesley, Reading, MA, 1971. p. 237-241.

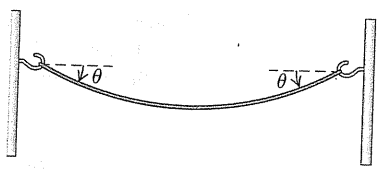


Figura 5.61 Problema 5.63.

5.64 Outra corda com massa. Um bloco de massa M é amarrado na extremidade inferior de uma corda de massa m e comprimento L. Uma força $\vec{F}$ constante é aplicada de baixo para cima na extremidade superior da corda, fazendo com que o bloco e a corda sejam acelerados para cima. Ache a tensão na corda a uma distância x da sua extremidade superior, onde x pode ter qualquer valor entre 0 e L.

5.65 Um bloco de massa m_1 está sobre um plano inclinado com um ângulo de inclinação α e está ligado por uma corda que passa sobre uma polia pequena a um segundo bloco suspenso de massa m_2 (Figura 5.62). O coeficiente de atrito cinético é μ_c e o coeficiente de atrito estático é μ_s. a) Ache a massa m_2 para a qual o bloco de massa m_1 sobe o plano com velocidade constante depois que ele entra em movimento. b) Ache a massa m_2 para a qual o bloco de massa m_1 desce o plano com velocidade consta depois que ele entra em movimento. c) Para que valores de m_2 blocos permanecem em repouso depois de eles serem liberta a partir do repouso?

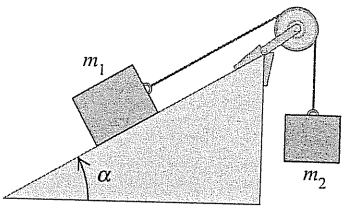


Figura 5.62 Problema 5.65.

5.66 a) O bloco A da Figura 5.63 pesa 60,0 N. O coeficiente atrito estático entre o bloco e a superfície sobre a qual ele se ap é de 0,25. O peso p é igual a 12,0 N, e o sistema está em equi brio. Calcule a força de atrito exercida sobre o bloco A. b) Ache peso p máximo que permite ao sistema ficar em equilíbrio.

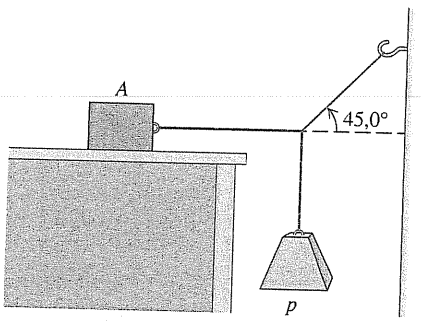


Figura 5.63 Problema 5.66.

5.67 O bloco A da Figura 5.64 pesa 1,20 N e o bloco B pesa 3,60 N O coeficiente de atrito cinético entre todas as superfícies é 0,30 Determine o módulo da força horizontal $\vec{F}$ necessária para arrastar o bloco B para a esquerda com velocidade constante, quand a) o bloco A está sobre o bloco B e se move com ele (Figura 5.64 b) o bloco A é mantido em repouso (Figura 5.64b).

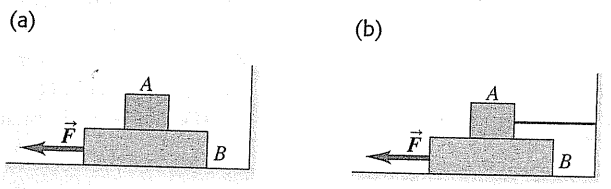


Figura 5.64 Problema 5.67.

5.68 Um lavador de vidraças empurra sua escova com velocidade constante para cima de uma janela vertical aplicando uma força $\vec{F}$, como indicado na Figura 5.65. A escova pesa 12,0 N e o coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0{,}150$. Ache a) o módulo da força $\vec{F}$; b) a força normal exercida pela janela sobre a escova.

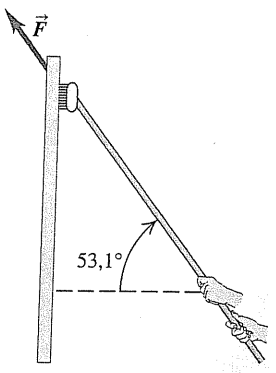


Figura 5.65 Problema 5.68.

5.69 O salto de uma pulga. Filmes de alta velocidade (3500 quadros por segundo) do salto de uma pulga de 210 μg forneceu os dados para o gráfico da aceleração da pulga em função do tempo indicado na Figura 5.66 (Veja "The Flying Leap of the Flea", por M. Rothschild et al., edição de novembro de 1973, *Scientific American*.) Essa pulga tem cerca de 2 mm de comprimento e seu salto forma um ângulo praticamente vertical de decolagem. Use as medidas mostradas no gráfico para responder a estas questões. a) Ache a força resultante externa *inicial* que atua sobre a pulga. Como ela se relaciona com o peso da pulga? b) Ache a força resultante externa *máxima* que atua sobre o salto da pulga. Quando essa força máxima ocorre? c) Use o gráfico para achar a velocidade escalar máxima da pulga.

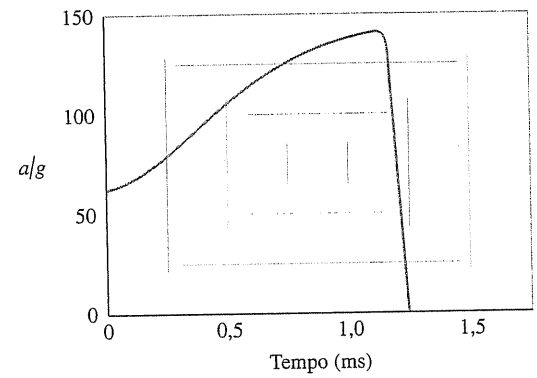


Figura 5.66 Problema 5.69.

5.70 Um foguete de 25000 kg é lançado verticalmente da superfície terrestre com velocidade constante. Durante o movimento considerado neste problema, suponha que g permanece constante (ver Capítulo 12). No interior do foguete, um instrumento de 15,0 N está suspenso por um fio capaz de suportar uma tensão de 35,0 N. a) Ache o tempo mínimo necessário para o foguete atingir a barreira do som (330 m/s) sem romper o cabo no seu interior e a força propulsora vertical máxima dos motores do foguete sob essas condições. b) A que distância acima da superfície terrestre está o foguete, quando rompe a barreira do som?

5.71 Você está em pé sobre uma balança portátil colocada no elevador de um prédio alto. Sua massa é 72 kg. O elevador parte do repouso e se desloca de baixo para cima com uma velocidade escalar que varia com o tempo, de acordo com $v(t) = (3{,}0\ \text{m/s}^2)t + (0{,}20\ \text{m/s}^3)t^2$. Quando $t = 4{,}0$ s, qual é a leitura da balança?

5.72 Projeto de um elevador. Você está projetando um elevador para um hospital. A força exercida sobre um passageiro pelo piso do elevador não deve exceder a 1,60 vezes o peso do passageiro. O elevador acelera de baixo para cima com aceleração constante por uma distância de 3,0 m e depois começa a reduzir a velocidade. Qual é a velocidade escalar máxima do elevador?

5.73 Você trabalha em uma empresa de transporte de carga. Sua função é ficar na base de uma rampa de 8,0 m de comprimento, com inclinação de 37° sobre o plano horizontal. Você retira os pacotes de uma correia transportadora e os coloca na rampa. O coeficiente de atrito cinético entre os pacotes e a rampa é $\mu_c = 0{,}30$. a) Qual é a velocidade inicial necessária para que um pacote na base da rampa chegue ao topo da rampa com velocidade escalar igual a zero? b) Sua colega deve apanhar os pacotes quando chegam ao topo da rampa, mas ela deixa escapar um, que desliza de volta para baixo. Qual é a velocidade escalar desse pacote, quando ele retorna a você

5.74 Um martelo está suspenso por uma corda leve presa ao topo do teto de um ônibus, teto esse que está paralelo à rua. O ônibus se desloca em linha reta sobre uma rua horizontal. Você observa que o martelo fica suspenso em repouso em relação ao ônibus, quando o ângulo entre a corda e o teto do ônibus é 74°. Qual é a aceleração do ônibus?

5.75 Uma máquina de lavar em aço está suspensa no interior de um engradado, a partir de um fio leve que está preso ao topo do engradado. Este desliza para baixo de uma longa rampa com inclinação que forma um ângulo de 37° acima do plano horizontal. A massa do engradado é de 180 kg. Você está sentado dentro do engradado (com uma lanterna); a sua massa é de 55 kg. À medida que o engradado desliza rampa abaixo, você nota que a lavadora fica em repouso em relação ao engradado quando o fio forma um ângulo de 68° com o topo do engradado. Qual é o coeficiente de atrito cinético entre a rampa e o engradado?

5.76 Hora do almoço! Você está dirigindo a sua motocicleta por uma rua molhada e segue de cima para baixo a um ângulo de 20° abaixo do plano horizontal. Quando você começa a descer pela encosta da colina, percebe que uma equipe de construção cavou um buraco profundo na rua, ao pé da colina. Um tigre siberiano que escapou do zoológico da cidade se alojou no buraco. Você pisa nos freios e trava as rodas no topo da colina, quando está se movendo com uma velocidade escalar de 20 m/s. A rua inclinada à sua frente tem 40 m de comprimento. a) Você vai cair no buraco e servir de almoço para o tigre ou você derrapa até parar antes de chegar ao buraco? (Os coeficientes de atrito entre os pneus da motocicleta e o pavimento úmido são $\mu_s = 0{,}90$ e $\mu_c = 0{,}70$.) b) Qual deve ser a sua velocidade escalar inicial antes de chegar ao buraco?

5.77 No sistema indicado na Figura 5.54, o bloco A possui massa m_A e o bloco B possui massa m_B e a corda que liga os blocos possui massa *diferente de zero* m_{corda}. A corda possui comprimento total L e a polia possui raio muito pequeno. Ignore qualquer concavidade na parte horizontal da corda. a) Se não existe atrito entre o bloco A e o topo da mesa, ache a aceleração dos blocos no instante em que um comprimento d da corda fica suspenso verticalmente entre a polia e o bloco B. À medida que o bloco B cai, o módulo da aceleração cresce, diminui ou permanece constante? Explique. b) Considere $m_A = 2{,}0$ kg, $m_B = 0{,}400$ kg, $m_{\text{corda}} = 0{,}160$ kg e $L = 1{,}0$ m. Se existe atrito entre o bloco A e o topo da mesa, com $\mu_c = 0{,}200$ e $\mu_s = 0{,}250$, calcule o valor da distância mínima d tal que os blocos comecem a se mover se eles estão inicialmente em repouso. c) Repita a parte (b) para o caso $m_{\text{corda}} = 0{,}040$ kg. Os blocos se moverão nesse caso?

5.78 Se o coeficiente de atrito estático entre a superfície de uma mesa e uma corda com massa grande é μ_s, qual é a fração da corda que pode ficar suspensa abaixo da extremidade da mesa sem que a corda deslize para baixo?

5.79 Uma caixa com 30,0 kg está inicialmente em repouso sobre o piso de uma caminhonete de 1500 kg. O coeficiente de atrito estático entre a caixa e o piso da caminhonete é 0,30 e o coeficiente de atrito cinético é 0,20. Antes de cada aceleração fornecida abaixo, a caminhonete estava se deslocando do sul para o norte com velocidade constante. Ache o módulo e a direção da força de atrito que atua sobre a caixa. a) quando a caminhonete possuía aceleração de 2,20 m/s^2 do sul para o norte; b) quando a caminhonete possuía aceleração de 3,40 m/s^2 do norte para o sul.

5.80 Processo de trânsito. Você é convocado como testemunha no julgamento de uma violação de trânsito. Os fatos são estes:

um motorista freou bruscamente e parou com aceleração constante. Medidas tomadas dos pneus e das marcas da derrapagem indicam que ele travou as rodas do carro, que o carro percorreu 192 pés antes de parar e que o coeficiente de atrito cinético entre a rua e os pneus era 0,750. A acusação é a de que ele estava em excesso de velocidade em uma área de 45 milhas/h. Ele alega inocência. Qual é a sua conclusão, culpado ou inocente? Qual era a velocidade do motorista quando ele freou?

5.81 Duas bolas idênticas de 15,0 kg, e 25,0 cm de diâmetro cada uma, estão suspensas por dois fios de 35,0 cm, como indicado na Figura 5.67. Todo o aparato é suportado por um único fio de 18,0 cm e as superfícies das bolas são perfeitamente lisas. a) Ache a tensão em cada um dos três fios. b) Qual é a força exercida por uma bola sobre a outra?

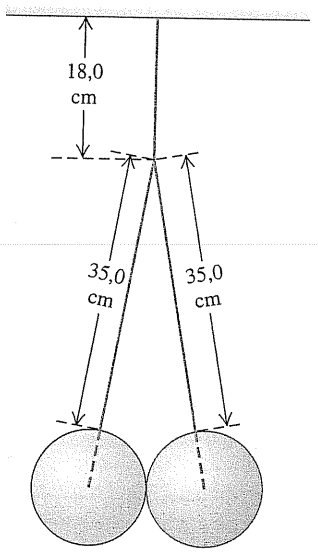


Figura 5.67 Problema 5.81.

5.82 Perda de carga. Uma caixa de 12,0 kg está em repouso sobre o piso de um caminhão. Os coeficientes de atrito entre a caixa e o piso são $\mu_s = 0{,}19$ e $\mu_c = 0{,}15$. O caminhão pára obedecendo a uma placa de parada obrigatória e recomeça a se mover com uma aceleração de 2,20 m/s^2. Se a caixa está a 1,80 m da traseira do caminhão quando o caminhão começa a se mover, quanto tempo se passará até a caixa cair do caminhão? Qual distância o caminhão percorre nesse intervalo de tempo?

5.83 O bloco A da Figura 5.68 pesa 1,40 N e o bloco B pesa 4,20 N. O coeficiente de atrito cinético entre todas as superfícies é 0,30. Determine o módulo da força horizontal $\vec{F}$ necessária para arrastar o bloco B para a esquerda com velocidade constante, considerando que A está conectado ao bloco B por meio de uma corda leve e flexível que passa sobre uma polia fixa sem atrito.

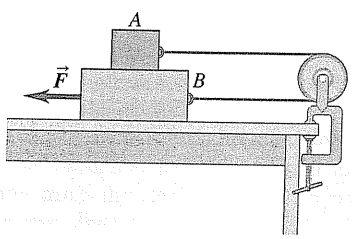


Figura 5.68 Problema 5.83.

5.84 Você faz parte da equipe de projeto para uma exploração do planeta Marte, onde $g = 3{,}7$ m/s^2. Uma exploradora deve deixar o veículo de exploração que se desloca horizontalmente a 33 m/s quando estiver 1200 m acima da superfície, e então, mover-se em queda livre por 20 s. Nesse instante, um sistema portátil de propulsão avançada (PAPS, do inglês *portable advanced propulsion* system) deve exercer uma força constante que diminuirá a velocidade da exploradora até chegar a zero no instante em que ela toca a superfície. A massa total (exploradora, roupa espacial, equipamento e PAPS) é de 150 kg. Despreze a variação da massa do PAPS. Ache os componentes horizontal e vertical da força que o PAPS deve exercer e por quanto tempo o PAPS deve exercê-la. Despreze a resistência do ar.

5.85 O bloco A da Figura 5.69 possui massa de 4,0 kg e o bloco B possui massa de 12,0 kg. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco B e a superfície horizontal é 0,25. a) Determine a massa do bloco C, sabendo que o bloco B está se movendo para a direita e aumenta de velocidade com uma aceleração igual a 2,0 m/s^2. b) Qual é a tensão em cada corda quando o bloco B possui essa aceleração?

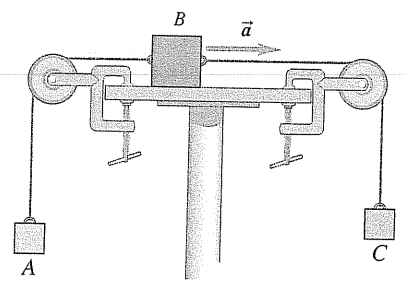


Figura 5.69 Problema 5.85.

5.86 Dois blocos estão conectados por uma corda que passa sobre uma polia fixa sem atrito e repousam sobre planos inclinados (Figura 5.70). a) Como os blocos devem se mover quando forem soltos a partir do repouso? b) Qual é a aceleração de cada bloco? c) Qual é a tensão na corda?

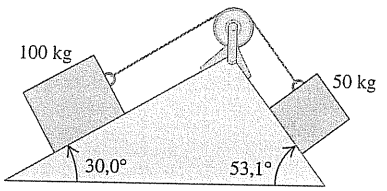


Figura 5.70 Problema 5.86.

5.87 Determine a aceleração de cada bloco da Figura 5.71 em função de m_1, de m_2 e de g. Não existe nenhum atrito em nenhuma parte do sistema.

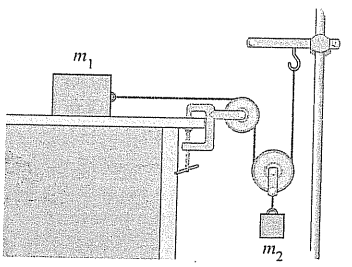


Figura 5.71 Problema 5.87.

5.88 Um bloco B de massa de 5 kg está sobre um bloco A de massa de 8 kg, que por sua vez está sobre o topo de uma mesa horizontal (Figura 5.72). Não há atrito entre o bloco A e o topo da mesa, mas o coeficiente de atrito cinético entre o bloco A e o topo da mesa é 0,750. Um fio leve ligado ao bloco A passa sobre uma polia fixa sem atrito e o bloco C está suspenso na outra extremidade do fio. Qual deve ser o maior valor da massa m_c que o bloco C deve possuir para que os blocos A e B deslizem juntos quando o sistema for libertado a partir do repouso?

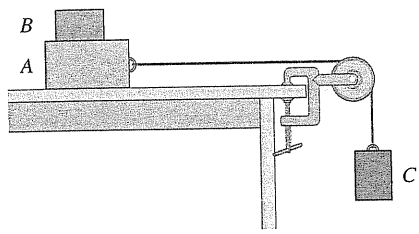


Figura 5.72 Problema 5.88.

5.89 Dois objetos com massas de 5,0 kg e 2,0 kg estão suspensos a 0,600 m acima do solo presos nas extremidades de uma corda de 6,0 m que passa sobre uma polia fixa sem atrito. Os dois objetos partem do repouso. Calcule a altura máxima atingida pelo objeto de 2,0 kg.

5.90 Atrito em um elevador. Você está dentro de um elevador que sobe para o décimo oitavo andar do seu prédio. O elevador sobe com uma aceleração $a = 1{,}90\ \text{m/s}^2$. Ao seu lado está uma caixa contendo seu computador novo; a massa total da caixa com o conteúdo é de 28,0 kg. Enquanto o elevador está acelerando para cima, você empurra horizontalmente a caixa com velocidade constante para a porta do elevador. Se o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e o piso do elevador é $\mu_c = 0{,}32$, qual é o módulo da força que você deve aplicar?

5.91 Qual deve ser a aceleração do carrinho da Figura 5.73 para que o bloco A não caia? O coeficiente de atrito estático entre o bloco e o carrinho é μ_s. Como seria o comportamento do bloco descrito por um observador no carrinho?

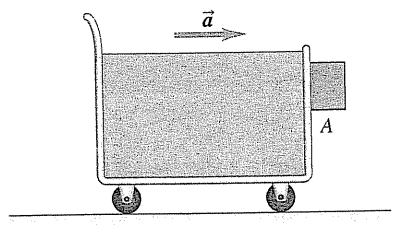


Figura 5.73 Problema 5.91.

5.92 Dois blocos de massas 4,0 kg e 8,0 kg estão ligados por um fio e deslizam 30° para baixo de um plano inclinado (Figura 5.74). O coeficiente de atrito cinético entre o bloco de 4,0 kg e o plano é igual a 0,25; e o coeficiente entre o bloco de 8,0 kg e o plano é igual a 0,35. a) Qual é a aceleração de cada bloco? b) Qual é a tensão na corda? c) O que ocorreria se as posições dos blocos fossem invertidas, isto é, se o bloco de 4,0 kg estivesse acima do bloco de 8,0 kg?

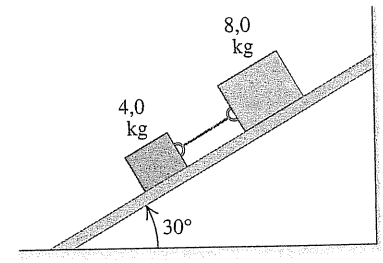


Figura 5.74 Problema 5.92.

5.93 Um bloco A, com peso $3p$, desliza sobre um plano inclinado S com inclinação de 36,9° a uma velocidade constante, enquanto a prancha B, com peso p, está em repouso sobre A. A prancha está ligada por uma corda no topo do plano (Figura 5.75). a) Faça um diagrama de todas as forças que atuam sobre A. b) Se o coeficiente de atrito cinético entre A e B for igual ao coeficiente de atrito cinético entre S e A, calcule o seu valor.

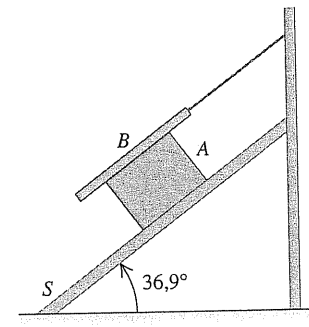


Figura 5.75 Problema 5.93.

5.94 Acelerômetro. A Figura 5.76 mostra um sistema que pode ser usado para medir a sua aceleração. Um observador que caminha sobre a plataforma mede o ângulo θ que o fio que sustenta a bola leve forma com o plano vertical. Não há atrito em nenhum ponto. a) Como θ se relaciona com a aceleração do sistema? b) Se $m_1 = 250$ kg e $m_2 = 1250$ kg, qual é o ângulo θ? c) Se você pode variar m_1 e m_2, qual é o maior ângulo θ a ser atingido? Explique como você deve ajustar m_1 e m_2 para isso.

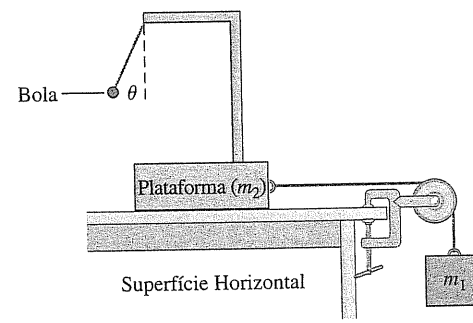


Figura 5.76 Problema 5.94.

5.95 Curva inclinada I. Uma curva com raio de 120 m em uma estrada plana possui uma inclinação lateral correta para uma velocidade de 20 m/s. Caso um carro contorne essa curva com 30 m/s, qual deve ser o coeficiente de atrito estático mínimo entre os pneus e a estrada para que o carro não derrape?

5.96 Curva inclinada II. Considere uma estrada molhada com inclinação lateral como no Exemplo 5.23 (Seção 5.4), no qual há um coeficiente de atrito estático de 0,30 e um coeficiente de atrito cinético de 0,25 entre os pneus e a estrada. O raio da curva é $R = 50$ m. a) Se o ângulo de inclinação lateral for $\beta = 25°$, qual é a velocidade *máxima* que um carro pode ter antes que ele deslize *para cima* do plano inclinado? b) Qual a velocidade *mínima* que um carro pode ter antes que ele deslize *para baixo* do plano inclinado?

5.97 Velocidade máxima segura. Em seu percurso diário até o campus da faculdade, você segue por uma rua que faz uma grande curva com o formato aproximado do arco de um círculo. Há uma placa no início da curva, sinalizando para o limite de velocidade máxima de 55 mi/h. Você observa também que a rua é plana, na parte curva — ou seja, não há inclinação nesse ponto. Em um dia seco, com pouco tráfego, você contorna a curva a uma velocidade escalar constante de 80 milhas/h e sente que o carro pode derrapar, caso não reduza a velocidade rapidamente. Você conclui que sua velocidade escalar está no limite de segurança para essa curva e por isso reduz a velocidade. Entretanto, você se lembra de ter lido que, em pavimento seco, os pneus novos possuem um coeficiente de atrito estático de aproximadamente 0,76, ao passo que, sob as piores condições de dirigibilidade no inverno, você pode encontrar gelo na pista para o qual o coeficiente de atrito estático pode baixar a 0,20. A ocorrência de gelo nessa pista não é rara, por isso você se pergunta se o limite de velocidade na placa serve para o pior cenário. a) Estime o raio da curva a partir da sua experiência de 80 milhas/h em curva seca. b) Use essa estimativa para determinar o limite máximo de velocidade na curva, sob as piores condições de gelo na pista. Como o seu resultado se relaciona com o limite de velocidade na placa? A placa está confundindo os motoristas? c) Em um dia chuvoso, o coeficiente de atrito estático seria de aproximadamente 0,37. Qual é a velocidade máxima segura para a curva quando a pista está molhada? A sua resposta ajuda a compreender o sinal de velocidade máxima?

5.98 Você está viajando em um ônibus escolar. Quando o ônibus contorna uma curva plana com velocidade constante, uma lancheira com massa de 0,500 kg suspensa no teto do ônibus por um fio de 1,80 m de comprimento permanece em repouso em relação ao ônibus quando o fio faz um ângulo de 30,0° com a vertical. Nessa posição, a lancheira está a 50,0 m de distância do centro das curva. Qual é a velocidade v do ônibus?

5.99 O problema do macaco e das bananas. Um macaco de 20 kg segura firmemente uma corda que passa sobre uma polia sem atrito e está amarrada a um cacho de bananas com 20 kg (Figura 5.77). O macaco olha para cima, vê as bananas e começa a subir pela corda para alcançá-las. a) À medida que o macaco sobe, o cacho de bananas permanece em repouso, sobe ou desce? b) À medida que o macaco sobe, a distância entre ele e o cacho de bananas permanece a mesma, aumenta ou diminui? c) O macaco larga a corda. O que acontece com a distância entre o macaco e o cacho de bananas durante a queda? d) Antes de chegar ao chão, o macaco agarra a corda para impedir sua queda. O que ocorre com o cacho de bananas?

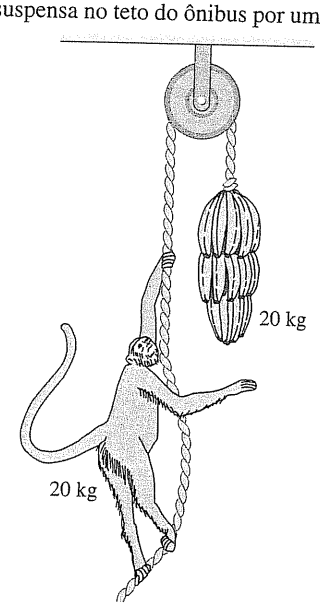


Figura 5.77 Problema 5.99.

5.100 Uma pedra é lançada para baixo sobre a água com velocidade igual a 3 mg/k, onde k é o coeficiente da Equação (5.7). Supondo que a relação entre a resistência do fluido e a velocidade seja dada pela Equação (5.7), ache a velocidade da pedra em função do tempo.

5.101 Um pedaço de rocha com massa de 3,0 kg cai a partir do repouso em um meio viscoso. Sobre a rocha atua uma força resultante de cima para baixo de módulo igual a 18,0 N (uma combinação entre o peso e a força de empuxo exercida pelo meio) e uma força de resistência do fluido $f = kv$, onde v é a velocidade em m/s e $k = 2{,}20$ N · s/m. (Veja a Seção 5.3.) a) Ache a aceleração inicial a_0. b) Ache a aceleração quando a velocidade é de 3,0 m/s. c) Ache a velocidade quando a aceleração é de $0{,}1a_0$. d) Ache a velocidade terminal v_t. e) Ache a posição, a velocidade e a aceleração 2,0 s depois de o movimento começar. f) Ache o tempo necessário para que a velocidade seja de $0{,}9v_T$.

5.102 Uma rocha com massa m desliza com velocidade inicial v_0 sobre uma superfície horizontal. Uma força retardadora F_r que a superfície exerce sobre a rocha é proporcional à raiz quadrada da velocidade instantânea da rocha ($F_r = -kv^{1/2}$). a) Obtenha expressões para a velocidade e a posição da rocha em função do tempo. b) Quando a rocha chega ao repouso, em termos de m, k e v_0? c) Qual é a distância da rocha em relação ao seu ponto de partida quando chega ao repouso, em termos de m, k e v_0?

5.103 Um fluido exerce uma força de empuxo de baixo para cima sobre um objeto imerso nele. Ao deduzir a Equação (5.9), a força de empuxo exercida sobre um objeto pelo fluido foi ignorada. Mas, em algumas situações, onde a densidade do objeto não é muito maior do que a densidade do fluido, não é possível desprezar a força de empuxo. No caso de uma esfera de plástico que cai Na água, a velocidade escalar terminal é 0,36 m/s ignorando-se a força de empuxo, mas você chega ao cálculo de 0,24 m/s. Qual fração do peso representa a força de empuxo?

5.104 O bloco de 4,0 kg da Figura 5.78 está preso a um eixo vertical por meio de dois fios. Quando o sistema gira em torno desse eixo, os fios ficam dispostos como indicado no diagrama e a tensão no fio superior é de 80,0 N. a) Qual é a tensão no fio inferior? b) Quantas revoluções por minuto o sistema executa? c) Ache o número de revoluções por minuto para que o fio inferior comece a ficar frouxo. d) Explique o que ocorre quando o número de revoluções por minuto for menor do que o calculado no item (c).

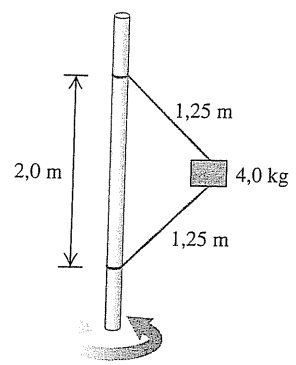


Figura 5.78 Problema 5.104.

5.105 A Equação (5.10) se aplica ao caso em que a velocidade inicial é igual a zero. a) Deduza a equação correspondente para o caso de $v_y(t)$ quando o objeto em queda apresenta uma velocidade inicial de cima para baixo com módulo v_0. b) Para o caso em que $v_0 < v_t$, desenhe um grá-

fico de v_y em função de t e assinale v_t no gráfico. c) Repita o item (b) para o caso em que $v_0 > v_t$. d) Discuta o que o seu resultado revela sobre $v_y(t)$ quando $v_0 = v_t$.

5.106 Uma pequena rocha move-se na água, e a força exercida sobre ela pela água é dada pela Equação (5.7). A velocidade escalar terminal da rocha é medida como sendo 2,0 m/s. A rocha é projetada *de baixo para cima* a uma velocidade escalar inicial de 6,0 m/s. Despreze a força de empuxo sobre a rocha. a) Na ausência de resistência do fluido, que altura a rocha atingirá e quanto tempo ela levará para atingir a altura máxima? b) Incluindo-se os efeitos da resistência do fluido, quais são as respostas à questão no item (a)?

5.107 Você observa um carro esporte de 1350 kg se deslocando ao longo de um pavimento plano, em linha reta. As únicas forças horizontais que atuam sobre ele são uma força de rolamento constante e a resistência do ar (proporcional ao quadrado da sua velocidade). Você coleta os seguintes dados durante um intervalo de tempo de 25 s: quando sua velocidade escalar é 32 m/s, o carro reduz a velocidade a uma taxa de $-0{,}42$ m/s^2, e quando a sua velocidade escalar é reduzida para 24 m/s ele reduz para $-0{,}30$ m/s^2. a) Ache o coeficiente de atrito de rolamento e a constante de arraste do ar D. b) A qual velocidade escalar constante esse carro descerá por uma inclinação que forma um ângulo de 2,2° com o plano horizontal? c) Como a velocidade escalar constante para uma inclinação de ângulo β se relaciona com a velocidade escalar terminal desse carro esporte, se ele cair de um rochedo alto? Suponha que em ambos os casos a força de resistência do ar seja proporcional ao quadrado da velocidade escalar, e a constante de arraste do ar é a mesma.

5.108 Uma pessoa de 70 kg está em uma carroça de 30 kg que se move a 12 m/s no topo de uma colina cujo formato é o do arco de um círculo de raio 40 m. a) Qual é o peso aparente da pessoa, enquanto a carroça passa sobre o topo da colina? b) Determine a velocidade escalar máxima com que a carroça pode se deslocar no topo da colina, sem perder contato com a superfície. A sua resposta depende da massa da carroça ou da massa da pessoa? Explique.

5.109 Carrossel. Duas irmãs gêmeas, Margarida e Madalena estão brincando em um carrossel (um disco paralelo ao solo com um eixo de rotação central) no parquinho da escola. Cada gêmea possui massa de 30,0 kg. Uma camada de gelo faz o carrossel ficar sem atrito. O carrossel gira com uma taxa constante enquanto as gêmeas estão sobre ele. Margarida, a uma distância de 1,80 m do centro do carrossel, deve segurar um dos postes verticais do carrossel com uma força horizontal de 60,0 N para impedir seu deslizamento. Madalena está na periferia do carrossel a uma distância de 3,60 m do centro. a) Qual deve ser a força horizontal exercida por Madalena para impedir seu deslizamento? b) Caso Madalena deslize, qual será sua velocidade horizontal ao sair do carrossel?

5.110 Considere uma passageira com massa de 85 kg em uma roda-gigante como aquela do Exemplo 5.24 (Seção 5.4). Os assentos percorrem o trajeto em um círculo com raio de 35 m. A roda-gigante gira a uma velocidade escalar constante e executa uma revolução completa a cada 25 s. Calcule o módulo, a direção e o sentido da força resultante exercida pelo assento sobre o passageira, quando ela está a) um quarto da revolução depois do seu ponto mais baixo e b) um quarto da revolução depois do seu ponto mais alto.

5.111 No rotor de um parque de diversões, as pessoas ficam em pé contra uma parede interna de um cilindro oco vertical com raio de 2,5 m. O cilindro começa a girar e quando ele atinge uma rotação de 0,60 rev/s, o piso onde as pessoas se apóiam desce cerca de 0,5 m. As pessoas ficam presas contra a parede. a) Faça um diagrama de forças para um passageiro, depois que o piso abaixou. b) Qual deve ser o coeficiente de atrito estático mínimo necessário para que o passageiro não escorregue para baixo na nova posição do piso? c) A sua resposta do item (b) depende da massa do passageiro? (*Nota:* Quando a viagem termina, o cilindro volta lentamente para o repouso. Quando ele diminui de velocidade as pessoas escorregam para baixo até o piso.)

5.112 Um veterano de física está trabalhando em um parque de diversões para pagar a mensalidade da faculdade. Ele pilota uma moto no interior de uma esfera de plástico transparente. Ao ganhar velocidade suficiente, ele descreve um círculo vertical com raio igual a 13,0 m. O veterano possui massa de 70,0 kg e sua moto possui massa de 40,0 kg. a) Qual é sua velocidade mínima no topo do círculo para que os pneus da moto não percam o contato com a esfera? b) Na base do círculo sua velocidade é igual à metade do valor encontrado em (a). Qual é o módulo da força normal exercida pela esfera sobre a moto nesse ponto?

5.113 Segundas intenções. Você está dirigindo Landau clássico com um 'paquera' que está sentada do lado do passageiro no banco dianteiro. O Landau possui assentos muito largos. Você gostaria que seu paquera sentasse mais perto de você e decide usar a física para atingir seu objetivo romântico fazendo uma volta rápida. a) Para que lado (esquerdo ou direito) você deve fazer o carro girar para que ele se desloque para perto de você? b) Se o coeficiente de atrito estático entre o assento e seu paquera for igual a 0,35 e você mantiver uma velocidade constante de 20 m/s, qual deve ser o raio máximo da curva que você pode fazer para que ele ainda deslize para o seu lado?

5.114 Um pequeno bloco de massa m repousa sobre o topo de uma mesa horizontal sem atrito a uma distância r de um buraco situado no centro da mesa (Figura 5.79). Um fio ligado ao bloco pequeno passa através do buraco e tem um bloco maior de massa M ligado em sua outra extremidade. O pequeno bloco descreve um movimento circular uniforme com raio r e velocidade v. Qual deve ser o valor de v para que o bloco grande permaneça imóvel quando libertado?

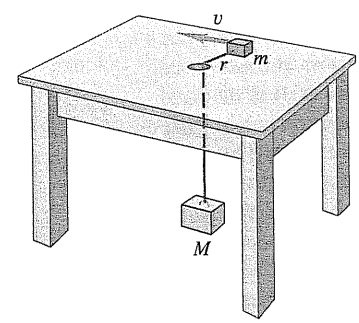


Figura 5.79 Problema 5.114.

5.115 Uma pequena conta pode deslizar sem atrito ao longo de um aro circular situado em um plano vertical com raio igual a 0,100 m. O aro gira com uma taxa constante de 4,0 rev/s em torno de um diâmetro vertical (Figura 5.80) a) Ache o ângulo β para o qual a conta está em equilíbrio vertical. (É claro que ela

possui uma aceleração radial orientada para o eixo da rotação.) b) Verifique se é possível a conta "subir" até uma altura igual ao centro do aro. c) O que ocorreria se o aro girasse com 1,0 rev/s?

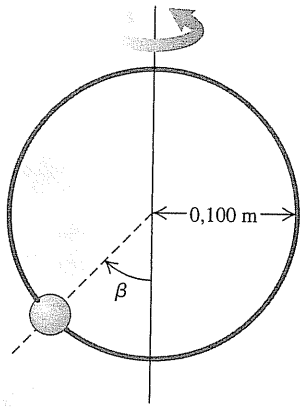


Figura 5.80 Problema 5.115.

5.116 Um aeromodelo de massa 2,20 kg move-se no plano x-y de tal modo que suas coordenadas x e y variam com o tempo de acordo com $x(t) = \alpha - \beta t^3$ e $y(t) = \gamma t - \delta t^2$, onde $\alpha = 1{,}50$m, $\beta = 0{,}120$ m/s^3, $\gamma = 30{,}0$ m/s, e $\delta = 10{,}0$ m/s^2. a) Ache os componentes x e y da força resultante sobre o plano em função do tempo. b) Faça um esboço da trajetória do avião entre $t = 0$ e $t = 3{,}0$ s e desenhe sobre seu esboço vetores indicando a força resultante para $t = 0$, $t = 1{,}0$ s, $t = 2{,}0$ s e $t = 3{,}0$ s. Para cada um desses tempos, relacione a direção da força resultante com a direção em que o avião está fazendo a volta, e verifique se o avião está aumentando de velocidade, ou diminuindo de velocidade (ou nenhuma das hipóteses). c) Qual o módulo e a direção da força resultante para $t = 3{,}0$ s?

5.117 Uma partícula se move sobre uma superfície sem atrito ao longo da trajetória indicada na Figura 5.81. (A figura mostra uma vista de topo sobre a superfície.) A partícula está inicialmente em repouso no ponto A, a seguir ela começa a mover-se até o ponto B à medida que ganha velocidade com uma taxa constante. De B até C a partícula se move ao longo de uma trajetória circular com velocidade constante. A velocidade permanece constante ao longo do trecho retilíneo de C até D. De D até E a partícula se move ao longo de uma trajetória circular, mas agora sua velocidade está diminuindo com uma taxa constante. A velocidade continua a diminuir com uma taxa constante enquanto a partícula se move de E até F; a partícula entra em repouso no ponto F. (Os intervalos de tempo entre os pontos marcados não são iguais.) Para cada ponto marcado por ponto em negrito, desenhe flechas para indicar a velocidade, a aceleração e a força resultante sobre a partícula. Use flechas maiores ou menores para representar os vetores que possuem módulos maiores ou menores.

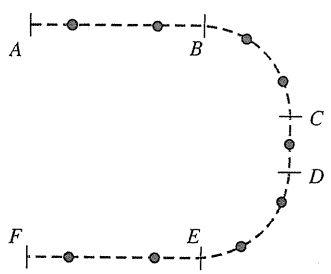


Figura 5.81 Problema 5.117.

5.118 Um pequeno carro guiado por controle remoto possui massa de 1,60 kg e se move com velocidade constante $v = 12{,}0$ m/s em um círculo vertical no interior de um cilindro metálico oco de raio igual a 5,0 m (Figura 5.82). Qual é o módulo da força normal exercida pela parede do cilindro sobre o carro a) No ponto A (na base do círculo vertical)? b) E no ponto B (no topo do círculo vertical)?

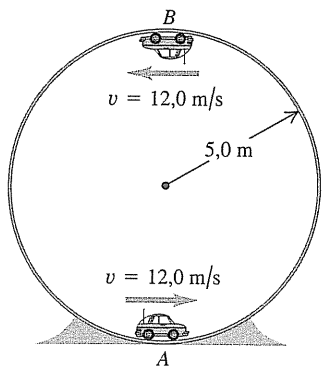


Figura 5.82 Problema 5.118.

5.119 Um pequeno bloco de massa m é colocado no interior de um cone invertido que gira em torno do eixo vertical de modo que o tempo para uma revolução é igual a T (Figura 5.83). As paredes do cone fazem um ângulo β com a vertical. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e o cone é μ_s. Para que o bloco permaneça a uma altura h acima do vértice do cone, qual deve ser o valor máximo e o valor mínimo de T?

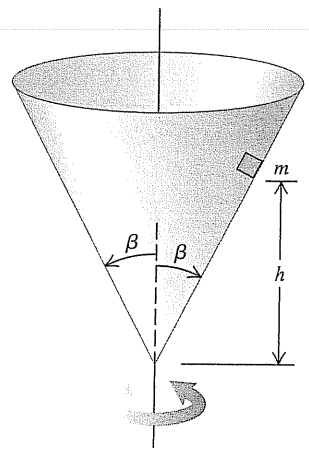


Figura 5.83 Problema 5.119.

Problemas desafiadores

5.120 Movimento da cunha. Uma cunha de massa M repousa sobre o topo horizontal de uma mesa sem atrito. Um bloco de massa m é colocado sobre a cunha (Figura 5.84a). Não existe nenhum atrito entre o bloco e a cunha. O sistema é libertado a partir do repouso. a) Ache a aceleração da cunha e os componentes horizontais e verticais da aceleração do bloco. b) Suas respostas ao item (a) se reduzem ao valor esperado quando M for muito grande? c) Em relação a um observador estacionário, qual é forma da trajetória do bloco?

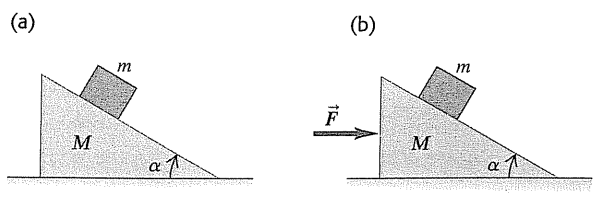


Figura 5.84 Problemas desafiadores 5.120 e 5.121.

5.121 Uma cunha de massa M repousa sobre o topo horizontal de uma mesa sem atrito. Um bloco de massa m é colocado sobre a cunha, e uma força horizontal $\vec{F}$ é aplicada sobre a cunha (Figura 5.84b). Qual deve ser o módulo de $\vec{F}$ para que o bloco permaneça a uma altura constante em relação ao topo da mesa?

5.122 Uma caixa de peso p é acelerada para cima de uma rampa por uma corda que exerce uma tensão T. A rampa faz um ângulo α com a horizontal e a corda faz um ângulo θ acima da rampa. O coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a rampa é μ_c. Mostre que para qualquer valor de a, a aceleração é máxima quando $\theta = \text{arctg}\mu_c$ (desde que a caixa permaneça em contato com a rampa).

5.123 Ângulo para força mínima. Uma caixa de peso p é puxada com velocidade constante ao longo de um piso plano por uma força $\vec{F}$ que faz um ângulo θ acima da horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre a caixa e piso é μ_c. a) Ache F em termos de θ, de μ_c e de p. b) Para $p = 400$ N e $\mu_c = 0{,}25$, ache F para θ variando de 0° a 90° em incrementos de 10°. Faça um gráfico de F *versus* θ. c) Com base na expressão geral obtida em (a), calcule o valor de θ para o qual o valor de F é o mínimo necessário para manter o movimento com velocidade constante. (*Sugestão:* Em um ponto onde uma função passa por um mínimo, como se comportam a primeira e a segunda derivadas da função? Aqui F é uma função de θ.) Para o caso especial $p = 400$ N e $\mu_c = 0{,}25$, avalie o valor de θ ótimo e compare seu resultado com o gráfico construído na parte (b).

5.124 Bola de beisebol em queda. Uma bola de beisebol é lançada do telhado de um edifício muito alto. À medida que a bola cai, o ar exerce uma força de arraste proporcional ao quadrado da velocidade da bola ($f = Dv^2$). a) Em um diagrama, mostre a direção e o sentido do movimento e indique com a ajuda de vetores todas as forças que atuam sobre a bola. b) Aplique a segunda lei de Newton e, com base na equação resultante, descreva as propriedades gerais do movimento. c) Mostre que a bola atinge uma velocidade terminal dada pela Equação (5.13). d) Deduza a expressão da velocidade em função do tempo. (*Nota:*

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a}\text{arctgh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

onde

$$\text{tgh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

define a tangente hiperbólica.)

5.125 Máquina de Atwood dupla. Na Figura 5.85, as massas m_1 e m_2 estão conectadas por um fio leve A que passa sobre uma polia leve e sem atrito B. O eixo da polia B é conectado por um segundo fio leve C que passa sobre uma segunda polia leve e sem atrito D a uma massa m_3. A polia D está fixa ao teto através do seu eixo. O sistema é libertado a partir do repouso. Em termos de m_1, de m_2, de m_3 e de g, qual é a) a aceleração do bloco m_3? b) a aceleração da polia B? c) a aceleração do bloco m_1? d) a aceleração do bloco m_2? e) a tensão na corda A? f) a tensão na corda C? g) O que suas expressões fornecem para $m_1 = m_2$ e $m_3 = m_1 + m_2$? O resultado era esperado?

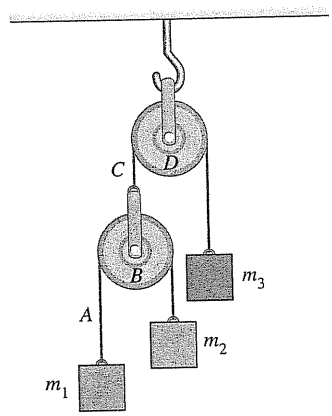


Figura 5.85 Problema desafiador 5.125.

5.126 As massas dos blocos A e B da Figura 5.86 são 20,0 kg e 10,0 kg, respectivamente. Os blocos estão inicialmente em repouso sobre o solo e são conectados por um fio leve que passa sobre uma polia leve e sem atrito. Uma força de baixo para cima $\vec{F}$ é aplicada sobre a polia. Ache a aceleração $\vec{a}_A$ do bloco A e a aceleração $\vec{a}_B$ do bloco B quando F é a) 124 N; b) 294 N; c) 424 N.

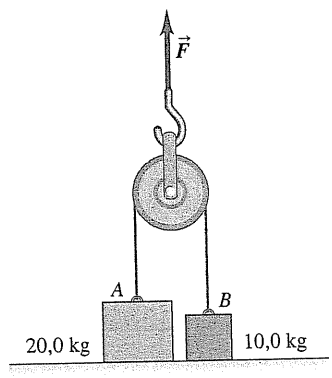


Figura 5.86 Problema Desafiador 5.126.

5.127 Uma bola é mantida em repouso na posição A indicada na Figura 5.87 por meio de dois fios leves. O fio horizontal é cortado, e a bola começa a oscilar como um pêndulo. O ponto B é o ponto mais afastado do lado direito da trajetória das oscilações. Qual é razão entre a tensão do fio na posição B e a tensão do fio na posição A antes de o fio horizontal ser cortado?

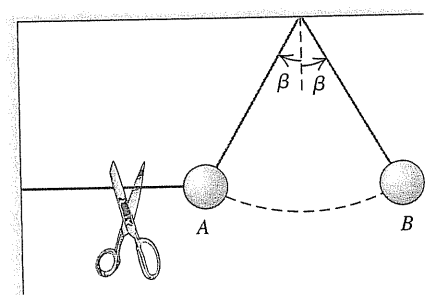
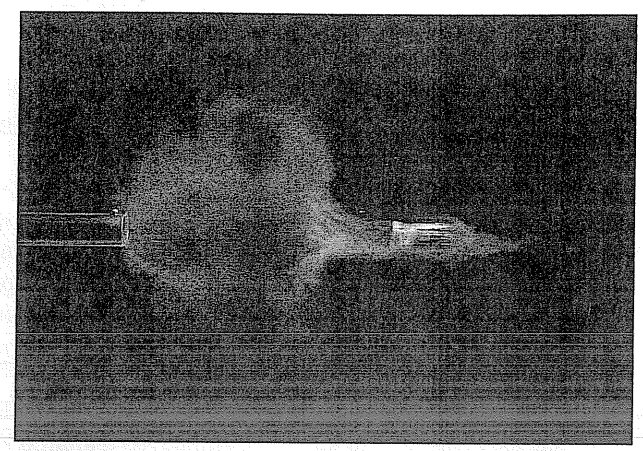


Figura 5.87 Problema desafiador 5.127.

TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA

6



Quando uma espingarda é disparada, a expansão de gases que ocorre no cano da arma empurra o projétil para fora. De acordo com a terceira lei de Newton, o projétil exerce tanta força sobre os gases quanto estes sobre o projétil. Seria correto afirmar que o *projétil* realiza um trabalho sobre os *gases*?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- O que significa uma força realizar um trabalho sobre um corpo e como calcular a quantidade de trabalho realizado.
- A definição de energia cinética (energia do movimento) de um corpo e o que isso significa na física.
- Como o trabalho total realizado sobre um corpo acarreta em variação na energia cinética e como usar esse princípio para solucionar problemas de mecânica.
- Como usar a relação entre o trabalho total e a variação na energia cinética quando as forças não são constantes, o corpo segue uma trajetória curva ou ambos.
- Como solucionar problemas envolvendo potência (a taxa de realização de um trabalho).

Suponha que você queira calcular a velocidade de uma flecha lançada de um arco. Você aplica a segunda lei de Newton e as demais técnicas, já aprendidas, para a solução de problemas, porém defronta-se com uma dificuldade inesperada: quando o arqueiro libera a flecha, o arco exerce uma força *variável* que depende da posição da flecha. Em vista disso, os métodos simples que você aprendeu não são suficientes para calcular a velocidade. Não se preocupe, ainda não terminamos de estudar a mecânica e existem outros métodos para abordar esse tipo de problema.

O novo método, que será aqui apresentado, usa os conceitos de *trabalho* e *energia*. A importância do conceito de energia reside no *princípio da conservação da energia*: a energia é uma grandeza que pode ser convertida de uma forma para outra, mas que não pode ser criada nem destruída. No motor de um automóvel, a energia química armazenada no combustível é convertida parcialmente em energia térmica e parcialmente na energia mecânica que acelera o automóvel. Em um forno de microondas, a energia eletromagnética obtida da companhia que fornece energia elétrica é convertida na energia térmica que cozinha o alimento. Nesses e em outros processos, a energia *total* permanece constante, ou seja, a soma de todas as formas de energia envolvidas permanece a mesma. Nenhuma exceção à essa conclusão foi jamais encontrada.

Usaremos o conceito de energia no restante deste livro para estudar uma imensa variedade de fenômenos físicos. Esse conceito o ajudará a compreender por que um agasalho conserva você quente, como o disparador de *flash* de uma máquina fotográfica pode produzir um feixe instantâneo de luz e qual o significado da famosa equação de Einstein $E = mc^2$.

Contudo, neste capítulo, concentraremos nossa atenção na mecânica. Aprenderemos a calcular uma forma importante de energia chamada *energia cinética*, ou energia do movimento, e como ela se relaciona com o conceito de *trabalho*. Consideraremos também a *potência*, definida como a taxa de variação com o tempo da realização de um trabalho. No Capítulo 7, expandiremos os conceitos de trabalho e de energia cinética, aprofundando os conceitos de energia e conservação da energia.

6.1 Trabalho

Você provavelmente concorda que é um trabalho árduo puxar um sofá pesado ao longo da sala, levantar uma pilha de enciclopédias do chão até uma estante elevada ou

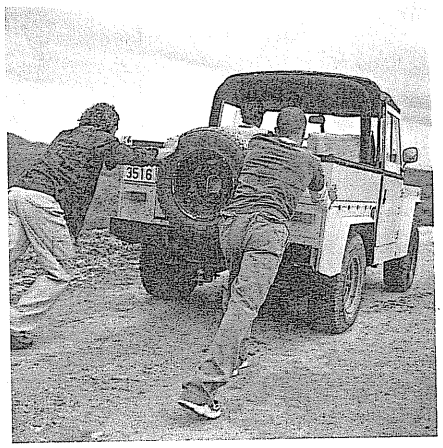


Figura 6.1 Essas pessoas estão realizando um trabalho enquanto empurram o carro enguiçado porque elas exercem uma força sobre o carro, enquanto ele se desloca.

empurrar um automóvel enguiçado em uma estrada. Na verdade, todos esses exemplos correspondem ao significado cotidiano da palavra *trabalho* — ou seja, qualquer atividade que necessita de um esforço físico ou intelectual.

Na física, o **trabalho** possui uma definição muito mais precisa. Usando essa definição, verificaremos que em qualquer movimento, por mais complicado que seja, o trabalho total realizado por todas as forças sobre uma partícula é igual à variação de sua *energia cinética* — uma grandeza relacionada com a velocidade da partícula. Essa relação é empregada mesmo quando as forças aplicadas não são constantes, ou seja, um problema difícil ou impossível de resolver apenas com as técnicas já aprendidas nos capítulos 4 e 5. Assim, os conceitos de trabalho e de energia cinética nos habilitam a resolver problemas de mecânica que não poderíamos resolver com os conceitos anteriores.

Nesta seção, veremos como definir trabalho e como calculá-lo em diferentes situações envolvendo forças *constantes*. Embora já saibamos como resolver problemas para os quais as forças sejam constantes, ainda assim o conceito de trabalho é útil para resolver tais problemas. Mais adiante neste capítulo, desenvolveremos as relações entre trabalho e energia cinética e veremos como aplicar esses conceitos a problemas em que essas forças *não* são constantes.

Os três exemplos de trabalho descritos anteriormente — puxar um sofá, levantar enciclopédias e empurrar um automóvel — possuem algo em comum. Em cada caso, você realiza um trabalho exercendo uma *força* sobre o corpo enquanto ele se *move* de um local para outro, ou seja, ocorre um *deslocamento* do corpo (Figura 6.1). Você realiza um trabalho maior quando a força é maior (você empurra o carro com mais intensidade) ou quando o deslocamento é maior (você desloca o carro por uma distância maior ao longo da estrada).

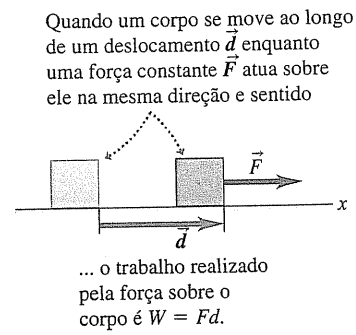


Figura 6.2 O trabalho realizado por uma força constante que atua na mesma direção e no mesmo sentido do deslocamento.

A definição física de trabalho pauta-se nessas observações. Considere um corpo que se desloca a uma distância d ao longo de uma linha reta. (Por enquanto, consideraremos o corpo como uma partícula e poderemos, então, ignorar qualquer rotação ou mudança em sua forma.) Enquanto o corpo se move, uma força com módulo constante $\vec{F}$ atua sobre ele na mesma direção e no mesmo sentido de seu deslocamento $\vec{d}$ (Figura 6.2). Definimos o **trabalho** W realizado pela força constante nessas condições como o produto da força de módulo F e o deslocamento de módulo d:

$$W = Fd \qquad (6.1)$$

(força constante atuando na direção e no sentido do deslocamento retilíneo)

O trabalho realizado sobre o corpo é tanto maior quanto maior for ou a força F ou o deslocamento d, conforme nossas observações anteriores.

A unidade SI de trabalho é o **joule** (abreviada pela letra J e pronunciada como 'jaule', nome dado em homenagem ao físico inglês do século XIX James Prescott Joule). Pela Equação (6.1), vemos que, em qualquer sistema de unidades, a unidade de trabalho é dada pela unidade de força multiplicada pela unidade de deslocamento. A unidade SI de força é o newton e a unidade de deslocamento é o metro, de modo que a unidade de trabalho joule é equivalente a um *newton · metro* (N · m):

$$1 \text{ joule} = (1 \text{ newton})\,(1 \text{ metro}) \text{ ou } 1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

No sistema inglês, a unidade de força é a libra (lb), a unidade de deslocamento é o pés (pé) e a unidade de trabalho é o *pés-libra* (pé · lb). As seguintes conversões são úteis:

$$1 \text{ J} = 0{,}7376 \text{ pé} \cdot \text{lb} \qquad 1 \text{ pé} \cdot \text{lb} = 1{,}356 \text{ J}$$

Para exemplificar a Equação (6.1), pense em um homem empurrando um carro enguiçado. Se ele empurra o carro ao longo de um deslocamento $\vec{d}$ com uma força constante $\vec{F}$ na direção do movimento, a quantidade de

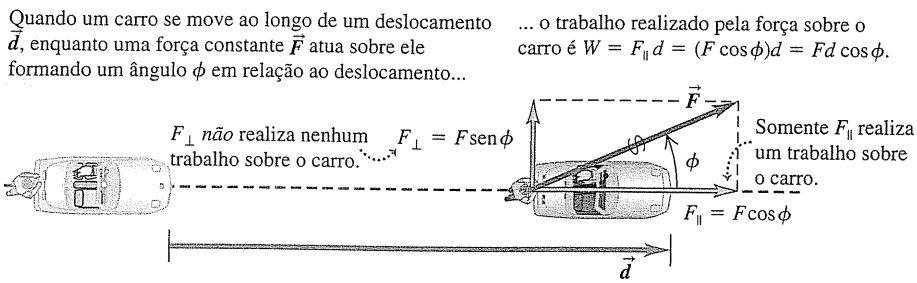


Figura 6.3 O trabalho realizado por uma força constante que forma um ângulo em relação ao deslocamento.

trabalho que ele realiza sobre o carro é dada pela Equação (6.1): $W = Fd$. Entretanto, e se alguém empurra o carro de modo a formar um ângulo ϕ com o seu deslocamento (Figura 6.3)? Nesse caso, $\vec{F}$ possui um componente $F_{\parallel} = F\cos\phi$ na direção do deslocamento e um componente $F_{\perp} = F\text{sen}\,\phi$ que é perpendicular ao deslocamento. (Outras forças devem atuar sobre o carro para que ele se mova ao longo de $\vec{d}$, não na direção de $\vec{F}$. Porém, estamos interessados apenas no trabalho que a pessoa realiza e, por isso, vamos considerar somente a força que ela exerce.) No caso em questão, somente o componente paralelo $F_{\parallel}$ é atuante no movimento do carro; portanto, definimos o trabalho como o produto desse componente de força pelo módulo do deslocamento. Logo, $W = F_{\parallel}d = (F\cos\phi)d$ ou

$$W = Fd\cos\phi \qquad (6.2)$$

(força constante, deslocamento retilíneo)

Estamos supondo que F e ϕ permanecem constantes durante o deslocamento. Quando $\phi = 0$, de modo que $\vec{F}$ está na mesma direção e no mesmo sentido do deslocamento $\vec{d}$, então $\cos\phi = 1$ e retornamos para a Equação (6.1).

A Equação (6.2) possui a forma de um *produto escalar* entre dois vetores, introduzido na Seção1.10: $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\phi$. Talvez você queira rever aquela seção. Usando essa definição, podemos escrever a Equação (6.2) de modo mais compacto como

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \qquad (6.3)$$

(força constante, deslocamento retilíneo)

ATENÇÃO Trabalho é uma grandeza escalar É importante entender que o trabalho é uma grandeza *escalar*, embora seja obtido a partir do cálculo do produto escalar de duas grandezas vetoriais (a força e o deslocamento). Uma força de 5 N atuando de leste para oeste em um corpo que se move 6 m de leste para oeste realiza o mesmo trabalho que o de uma força de 5 N atuando do sul para o norte em um corpo que se move 6 m do sul para o norte.

Exemplo 6.1

TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA CONSTANTE a) Esteban exerce uma força uniforme de 210 N sobre o carro enguiçado da Figura 6.3, conforme o desloca por uma distância de 18 m. O carro também está com um pneu furado, de modo que para manter o movimento retilíneo Esteban deve empurrá-lo a um ângulo de 30° em relação à direção do movimento. Quanto trabalho ele realiza? b) Disposto a cooperar mais, Esteban empurra outro carro enguiçado com uma força uniforme $\vec{F} = (160\,\text{N})\hat{\imath} - (40\,\text{N})\hat{\jmath}$. O deslocamento do carro é $\vec{d} = (14\,\text{m})\hat{\imath} + (11\,\text{m})\hat{\jmath}$. Quanto trabalho Esteban realiza neste caso?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: em ambos os itens (a) e (b), a variável-alvo é o trabalho W, realizado por Esteban. Em cada caso, a força é constante e o deslocamento é retilíneo; logo, podemos usar a Equação (6.2) ou (6.3).

PREPARAR: como o ângulo entre $\vec{F}$ e $\vec{d}$ é dado explicitamente no item (a), podemos aplicar diretamente a Equação (6.2). No item (b), o ângulo não é fornecido, então o melhor é calcular o produto escalar na Equação (6.3) pelos componentes de $\vec{F}$ e $\vec{d}$, como na Equação (1.21): $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$.

EXECUTAR: a) Pela Equação (6.2),

$$W = Fd\cos\phi = (210\,\text{N})(18\,\text{m})\cos 30° = 3{,}3 \times 10^3\,\text{J}$$

b) Os componentes de $\vec{F}$ são $F_x = 160$ N e $F_y = -40$ N, e os componentes de $\vec{d}$ são $x = 14$ m e $y = 11$ m. (Não há componente z para vetor algum.) Logo, pelas equações (1.21) e (6.3),

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \vec{d} = F_x x + F_y y \\ &= (160\,\text{N})(14\,\text{m}) + (-40\,\text{N})(11\,\text{m}) \\ &= 1{,}8 \times 10^3\,\text{J} \end{aligned}$$

AVALIAR: em cada caso, o trabalho realizado por Esteban é maior do que 1000 J. Isso demonstra que 1 joule corresponde a uma quantidade relativamente pequena de trabalho.

Trabalho: positivo, negativo ou nulo

No Exemplo 6.1, o trabalho realizado para empurrar os carros era positivo. Mas é importante entender que o trabalho também pode ser negativo ou nulo. Essa observação mostra a diferença essencial entre o conceito físico de trabalho e a definição 'cotidiana' de trabalho. Quando a força possui um componente na *mesma direção* e no *mesmo sentido*

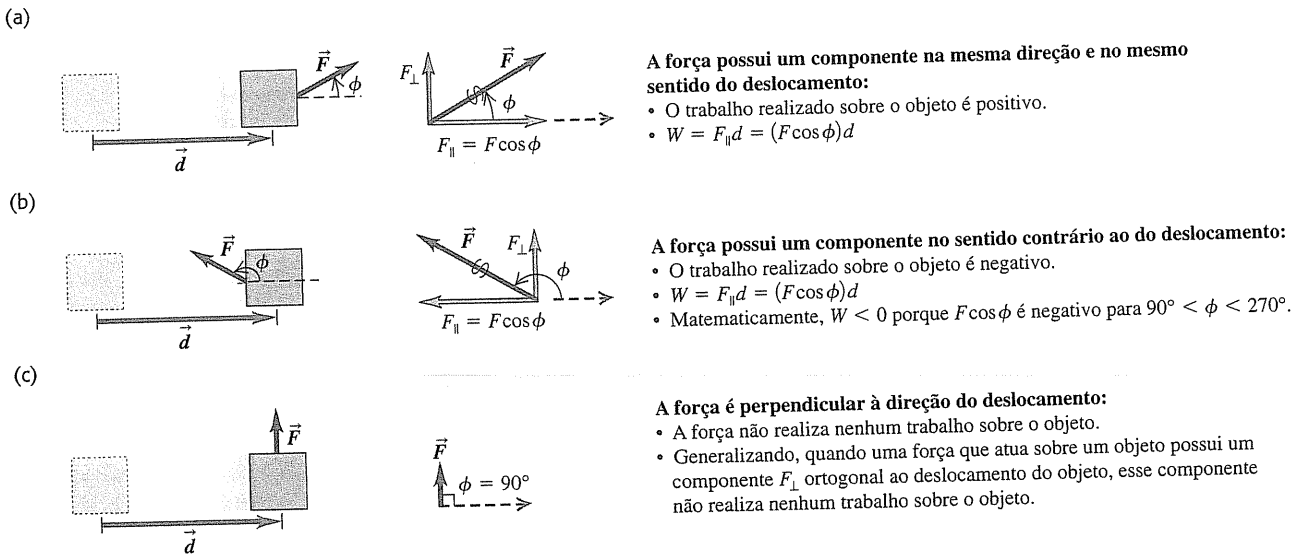


Figura 6.4 Uma força constante $\vec{F}$ pode realizar um trabalho positivo, negativo ou nulo, dependendo do ângulo entre $\vec{F}$ e o deslocamento $\vec{d}$.

do deslocamento (ϕ entre zero e 90°), cos ϕ na Equação (6.2) é positivo e o trabalho W é *positivo* (Figura 6.4a). Quando a força possui um componente na *mesma* direção, mas no sentido *contrário* ao do deslocamento (ϕ entre 90° e 180°), cos ϕ é negativo e o trabalho W é *negativo* (Figura 6.4b). Quando a força é *perpendicular* ao deslocamento, $\phi = 90°$ e o trabalho realizado pela força é igual a *zero* (Figura 6.4c). O trabalho negativo e o trabalho nulo merecem um exame mais cuidadoso, de modo que daremos alguns exemplos.

Existem diversas situações em que uma força atua, mas não realiza nenhum trabalho. Você poderia imaginar que faz um trabalho duro ao manter um haltere suspenso no ar por cinco minutos (Figura 6.5), porém você não realiza nenhum trabalho sobre o haltere porque não há nenhum deslocamento. Você fica cansado porque as fibras musculares do seu braço realizam trabalho ao se contrair e dilatar continuamente. Entretanto, esse trabalho é realizado por uma parte do braço sobre outra parte, e *não* sobre o haltere. (Na Seção 6.2 faremos mais comentários sobre o trabalho realizado por uma parte de um corpo sobre outra parte.) Mesmo quando caminha com um livro na mão em um piso horizontal, você não realiza nenhum trabalho sobre o livro. Nesse caso, o livro sofre um deslocamento, porém a força (vertical) que você exerce para sustentar o livro não possui nenhum componente na direção (horizontal) do deslocamento. Então, $\phi = 90°$ na Equação (6.2) e cos $\phi = 0$. Quando um corpo desliza ao longo de uma superfície, o trabalho realizado pela força normal sobre o corpo é igual a zero; e quando uma bola presa a um fio gira com movimento circular uniforme, o trabalho realizado pela tensão no fio sobre a bola também é igual a zero. Em ambos os exemplos, o trabalho realizado é igual a zero porque a força aplicada não possui nenhum componente na direção do deslocamento.

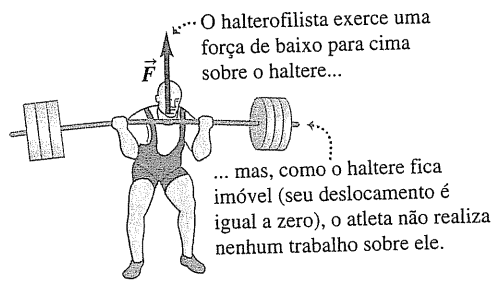
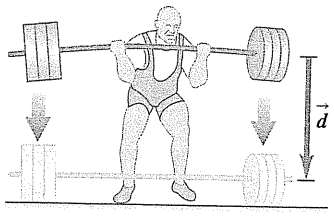


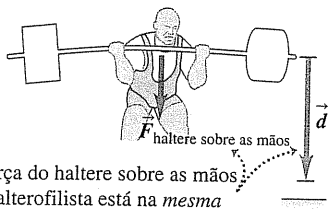
Figura 6.5 Um halterofilista não realiza nenhum trabalho sobre um haltere, contanto que o mantenha estático.

Afinal, o que significa realizar um trabalho *negativo*? A resposta deriva da terceira lei de Newton. Quando um halterofilista abaixa um haltere como na Figura 6.6a, suas mãos e o haltere movem-se juntos com o mesmo deslocamento $\vec{d}$. O haltere exerce uma força $\vec{F}_{\text{H em M}}$ sobre sua mão na mesma direção e no mesmo sentido do deslocamento, de modo que o trabalho realizado pelo *haltere* sobre sua *mão* é positivo (Figura 6.6b). Pela terceira lei de Newton, as mãos do halterofilista exercem sobre o haltere uma força igual e contrária: $\vec{F}_{\text{M em H}} = -\vec{F}_{\text{H em M}}$ (Figura 6.6c). A força que impede o haltere de despencar no piso atua em sentido contrário ao do deslocamento do haltere. Logo, o trabalho realizado pelas *mãos* sobre o *haltere* é negativo. Como as mãos e o haltere possuem o mesmo deslocamento, o trabalho realizado pelas mãos sobre o haltere é de sinal contrário ao do trabalho realizado pelo haltere sobre as mãos. Em geral, quando um corpo realiza um trabalho negativo sobre outro corpo, este corpo realiza um trabalho *positivo* sobre o primeiro.

(a) O halterofilista apóia um haltere no piso.

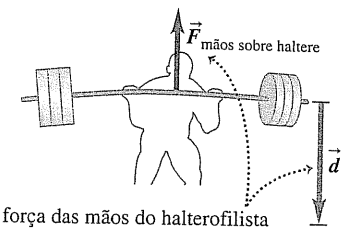


(b) O trabalho realizado pelo haltere sobre as mãos do halterofilista é *positivo*.



A força do haltere sobre as mãos do halterofilista está na *mesma* direção e sentido do deslocamento das mãos.

(c) O trabalho realizado pelas mãos do halterofilista sobre o haltere é *negativo*.



A força das mãos do halterofilista sobre o haltere está na direção e no sentido *contrários* ao deslocamento do haltere.

Figura 6.6 As mãos deste halterofilista realizam um trabalho negativo sobre um haltere enquanto o haltere realiza um trabalho positivo sobre suas mãos.

ATENÇÃO Fique atento para quem está realizando o trabalho Sempre nos referimos ao trabalho realizado *por* uma força específica *sobre* um determinado corpo. Certifique-se sempre de especificar com precisão a força que realiza o trabalho mencionado. Quando você levanta um livro, está exercendo sobre ele uma força de baixo para cima e, portanto, o deslocamento do livro é de baixo para cima, de modo que o trabalho realizado pela força sobre o livro é positivo. Porém, o trabalho realizado pela força *gravitacional* (o peso) sobre o livro é *negativo* porque a força gravitacional exercida de cima para baixo possui sentido contrário ao do deslocamento de baixo para cima.

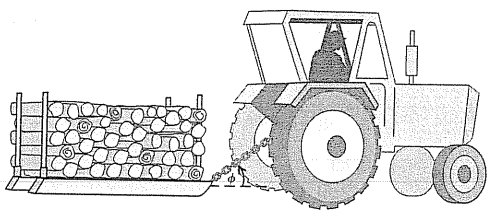
Trabalho total

Como calcular o trabalho quando *diversas* forças atuam sobre um corpo? Um método é usar a Equação (6.2) ou a Equação (6.3) para calcular o trabalho que cada força realiza sobre o corpo. A seguir, como o trabalho é uma grandeza escalar, o trabalho *total* W_{tot} realizado por todas as forças sobre o corpo é a soma algébrica de todos os trabalhos realizados pelas forças individuais. Um método alternativo para calcular o trabalho total W_{tot} consiste em calcular a soma vetorial de todas as forças que atuam sobre o corpo (ou seja, a força resultante) e a seguir usar essa soma vetorial como $\vec{F}$ na Equação (6.2) ou na Equação (6.3). Apresentamos um exemplo que ilustra esses dois métodos.

Exemplo 6.2

TRABALHO REALIZADO POR DIVERSAS FORÇAS Um fazendeiro engata um trenó carregado de madeira ao seu trator e o puxa até uma distância de 20 m ao longo de um terreno horizontal (Figura 6.7a). O peso total do trenó carregado é igual a 14.700 N. O trator exerce uma força constante de 5000 N, formando um ângulo de 36,9° acima da horizontal, como indicado na Figura 6.7b. Existe uma força de atrito de 3500 N que se opõe ao movimento. Calcule o trabalho que cada força realiza sobre o trenó e o trabalho total realizado por todas as forças.

(a)



(b) Diagrama do corpo livre para o trenó.

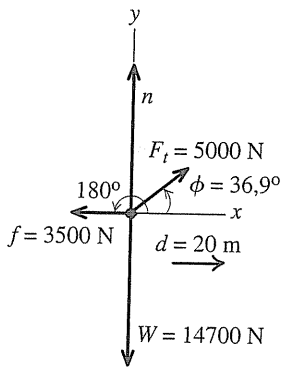


Figura 6.7 Cálculo do trabalho realizado sobre um trenó carregado de madeira sendo puxado por um trator.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como cada força é constante e o deslocamento é retilíneo, podemos calcular o trabalho aplicando os conceitos estudados nesta seção. Determinaremos o trabalho total de duas formas: 1) somando o trabalho realizado sobre o trenó por cada força e 2) achando o trabalho total realizado pela força resultante sobre o trenó.

PREPARAR: como estamos lidando com forças, primeiramente desenhamos um diagrama do corpo livre, mostrando todas as forças que atuam sobre o trenó, e escolhemos um sistema de coordenadas (Figura 6.7b). Para cada força — peso, força normal, força do trator e força de atrito —, conhecemos o ângulo entre o deslocamento (na direção positiva de x) e a força. Assim, podemos calcular o trabalho que cada força executa pela Equação (6.2).

Como fizemos no Capítulo 5, a força resultante derivará da soma dos componentes das quatro forças. A segunda lei de Newton diz que pelo fato de o movimento do trenó ser puramente horizontal, a força resultante possui somente um componente horizontal.

EXECUTAR: o trabalho realizado pelo peso W_p é igual a zero porque sua direção é perpendicular ao deslocamento (compare isso com a Figura 6.4c.) Pela mesma razão, o trabalho realizado pela força normal W_n também é igual a zero. Logo, $W_p = W_n = 0$. (A propósito, você consegue ver que o módulo da força normal é menor do que o peso? Compare o Exemplo 5.15 na Seção 5.3, que tem um diagrama do corpo livre muito parecido.)

Falta considerar a força F_T exercida pelo trator e a força de atrito f. Pela Equação (6.2), o trabalho W_T realizado pelo trator é

$$W_T = F_T d\cos\phi = (5000\text{ N})(20\text{ m})(0{,}800) = 80000\text{ N}\cdot\text{m} = 80\text{ kJ}$$

A força de atrito $\vec{f}$ possui sentido contrário ao do deslocamento, de modo que $\phi = 180°$ e $\cos\phi = -1$. O trabalho W_f realizado pela força de atrito é

$$W_f = fd\cos 180° = (3500\text{ N})(20\text{ m})(-1) = -70000\text{ N}\cdot\text{m} = -70\text{ kJ}$$

O trabalho total W_{tot} realizado por todas as forças sobre o trenó é a soma *algébrica* do trabalho que cada força realiza:

$$W_{tot} = W_p + W_n + W_T + W_f = 0 + 0 + 80\text{ kJ} + (-70\text{ kJ}) = 10\text{ kJ}$$

No método alternativo, inicialmente calculamos a soma *vetorial* de todas as forças que atuam sobre o corpo (ou seja, a força resultante) e a seguir usamos essa soma vetorial para achar o trabalho total. A soma vetorial pode ser mais facilmente calculada usando-se os componentes. Pela Figura 6.7b

$$\sum F_x = F_T\cos\phi + (-f) = (5000\text{ N})\cos 36{,}9° - 3500\text{ N} = 500\text{ N}$$

$$\sum F_y = F_T\operatorname{sen}\phi + n + (-W) = (5000\text{ N})\operatorname{sen} 36{,}9° + n - 14.700\text{ N}$$

Nós não precisamos de fato da segunda equação; sabemos que o componente y da força é perpendicular ao deslocamento, logo ela não realiza trabalho. Além disso, não existe aceleração no eixo Oy e de qualquer forma o trabalho é nulo, pois $\sum F_y$ é mesmo igual a zero. Logo, o trabalho total é dado pelo trabalho da força resultante no eixo Ox:

$$W_{tot} = (\sum\vec{F})\cdot\vec{d} = (\sum F_x)d = (500\text{ N})(20\text{ m}) = 10000\text{ J} = 10\text{ kJ}$$

AVALIAR: nós obtemos o mesmo resultado tanto para W_{tot} quanto para o encontrado calculando-se o trabalho que cada força realizou separadamente.

Note que a força resultante na direção de x é *diferente* de zero, o que significa que o trenó deve acelerar enquanto se move. Na Seção 6.2, retomaremos esse exemplo e veremos como usar o conceito de trabalho para explorar o movimento do trenó.

Teste sua compreensão da Seção 6.1 Um elétron se move em linha reta de oeste para leste com velocidade constante de 8×10^7 m/s. Sobre ele atuam forças elétricas, magnéticas e gravitacionais. O trabalho total realizado sobre o elétron em um deslocamento de 1 m é i) positivo; ii) negativo; iii) zero; iv) não há informação suficiente para responder. ■

6.2 Energia cinética e o teorema do trabalho-energia

O trabalho total realizado pelas forças externas sobre um corpo é relacionado com o deslocamento do corpo, ou seja, com variações da posição do corpo. Contudo, o trabalho total também é relacionado com a *velocidade* do corpo.

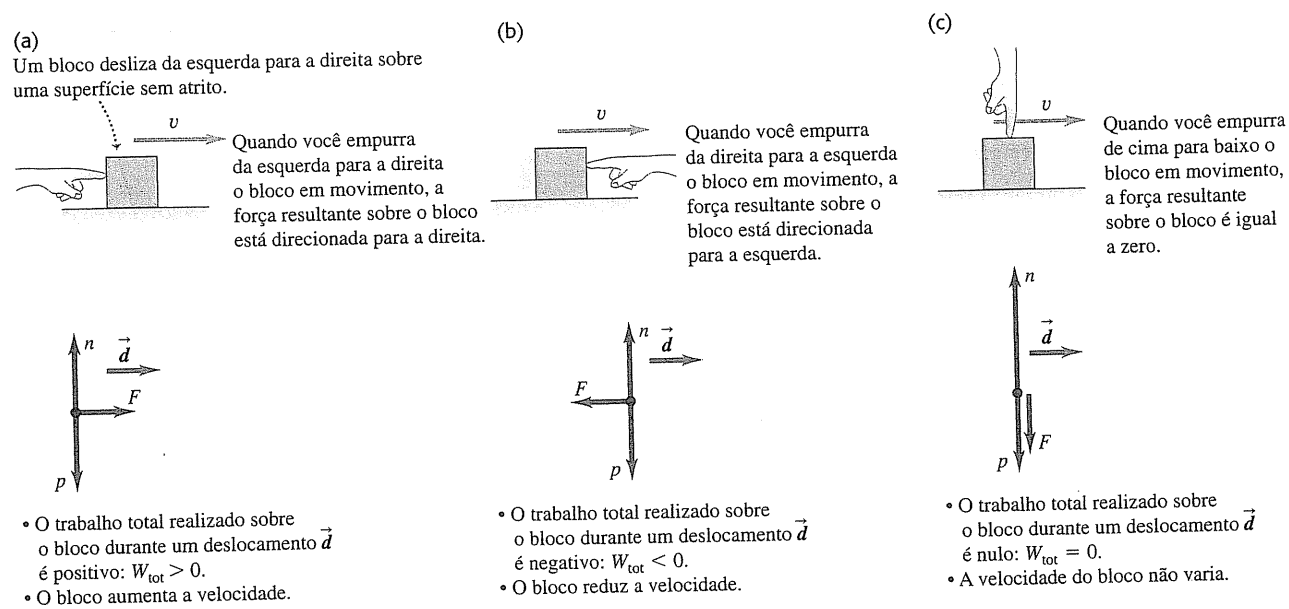


Figura 6.8 A relação entre o trabalho total realizado sobre um corpo e a variação da velocidade escalar do corpo.

Para ver isso, considere a Figura 6.8, que mostra três exemplos de um bloco deslizando sobre uma mesa sem atrito. As forças que atuam sobre o bloco são seu peso $\vec{p}$, a força normal $\vec{n}$ e a força $\vec{F}$ exercida pela mão sobre ele.

Na Figura 6.8a, a força resultante sobre o bloco está na mesma direção e no mesmo sentido do seu deslocamento. Pela segunda lei de Newton, isso significa que o corpo acelera; pela Equação (6.1), isso também significa que o trabalho total W_{tot} realizado sobre o bloco é positivo. O trabalho total na Figura 6.8b é *negativo* porque a força resultante se opõe ao deslocamento; nesse caso o bloco diminui de velocidade. A força resultante é nula na Figura 6.8c, de modo que a velocidade permanece constante e o trabalho total sobre o bloco é igual a zero. Concluímos que *quando uma partícula sofre um deslocamento, ela aumenta de velocidade se* $W_{tot} > 0$, *diminui de velocidade quando* $W_{tot} < 0$ *e a velocidade permanece constante se* $W_{tot} = 0$.

Vamos fazer essas observações de modo mais quantitativo. Considere uma partícula de massa m movendo-se ao longo do eixo Ox sob a ação de uma força resultante constante de módulo F orientada no sentido positivo do eixo Ox (Figura 6.9). A aceleração da partícula é constante, sendo dada pela segunda lei de Newton, $F = ma_x$. Suponha que a velocidade varie de v_1 a v_2 enquanto a partícula vai do ponto x_1 ao ponto x_2 realizando um deslocamento $d = x_2 - x_1$. Usando a equação do movimento com aceleração constante, Equação (2.13), e substituindo v_{0x} por v_1, v_x por v_2 e $(x - x_0)$ por d, obtemos

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a_x d$$

$$a_x = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2d}$$

Quando multiplicamos essa equação por m e igualamos a força resultante F com ma_x, achamos

$$F = ma_x = m\frac{v_2^2 - v_1^2}{2d} \quad \text{e} \tag{6.4}$$

$$Fd = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

O produto Fd é o trabalho realizado pela força resultante F e, portanto, é o trabalho total W_{tot} realizado por todas as forças que atuam sobre a partícula. A grandeza $\frac{1}{2}mv^2$ denomina-se **energia cinética** K da partícula:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{6.5}$$

(definição de energia cinética).

Analogamente ao trabalho, a energia cinética é uma grandeza escalar; ela depende somente da massa e do módulo da velocidade da partícula, e não da direção do movimento (Figura 6.10). Um carro (encarado como uma partícula) possui a mesma energia cinética quando se desloca de sul para norte a 10 m/s ou quando se desloca de oeste para leste a 10 m/s. A energia cinética nunca pode ser negativa, sendo igual a zero somente quando a partícula está em repouso.

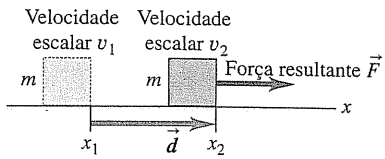


Figura 6.9 Uma força resultante constante $\vec{F}$ realiza um trabalho sobre um corpo em movimento.

Podemos agora interpretar a Equação (6.4) em termos do trabalho e da energia cinética. O primeiro termo do membro direito da Equação (6.4) é $K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$, a energia cinética final da partícula (ou seja, depois do deslocamento). O segundo termo do membro direito é a energia cinética inicial, $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$, e a diferença entre os dois termos é a *variação* da energia cinética. Logo, a Equação (6.4) diz que:

O trabalho realizado pela força resultante sobre a partícula fornece a variação da energia cinética da partícula:

$$W_{tot} = K_2 - K_1 = \Delta K \tag{6.6}$$

(teorema do trabalho-energia)

Esse resultado é conhecido como **teorema do trabalho-energia**.

O teorema do trabalho-energia concorda com as situações do bloco descritas na Figura 6.8. Quando W_{tot} é *positivo*, a energia cinética *aumenta* (a energia final K_2 é maior do que a energia inicial K_1) e a velocidade final da partícula é maior do que sua velocidade inicial. Quando

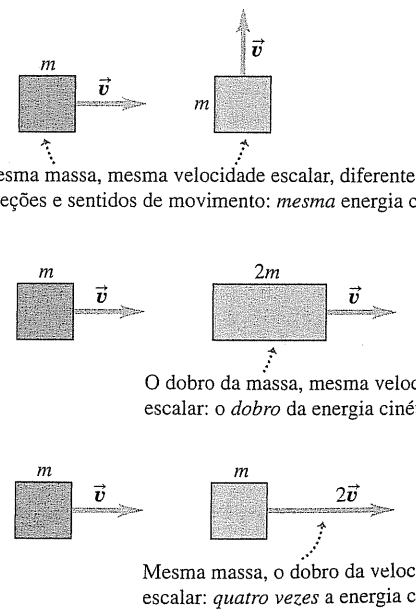


Figura 6.10 Comparação da energia cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ de diferentes corpos.

W_{tot} é *negativo*, a energia cinética *diminui* (K_2 é menor do que K_1) e a velocidade final da partícula é menor do que sua velocidade inicial. Quando $W_{tot} = 0$, a energia cinética é constante ($K_1 = K_2$) e a velocidade não se altera. Convém ressaltar que o teorema do trabalho-energia nos informa somente sobre variações da *velocidade escalar*, não sobre o vetor velocidade, visto que a energia cinética não depende da direção da velocidade.

Pelas equações (6.4) ou (6.6), a energia cinética e o trabalho devem possuir as mesmas unidades. Logo, o joule é a unidade SI tanto para a energia cinética quanto para o trabalho (e, como veremos mais tarde, para todos os tipos de energia). Para conferir esse resultado, note que as unidades SI para $K = \frac{1}{2}mv^2$ são kg · (m/s)^2 ou kg · m^2/s^2; lembrando que 1 N = 1 kg · m/s^2, logo

$$1\ \text{J} = 1\ \text{N} \cdot \text{m} = 1\ (\text{kg} \cdot \text{m/s}^2) \cdot \text{m} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$$

No sistema inglês, a unidade de energia cinética e de trabalho é

$$1\ \text{pé} \cdot \text{lb} = 1\ \text{pé} \cdot \text{slug} \cdot \text{pé/s}^2 = 1\ \text{slug} \cdot \text{pé}^2/\text{s}^2$$

Como empregamos as leis de Newton para deduzir o teorema do trabalho-energia, podemos usá-lo somente para um sistema de referência inercial. Note também que o teorema do trabalho-energia é válido para *qualquer* sistema de referência inercial, porém os valores de W_{tot} e de $K_2 - K_1$ podem diferir de um sistema de referência inercial para outro (porque o deslocamento e a velocidade de um corpo possuem valores diferentes para cada sistema de referência inercial).

Deduzimos o teorema do trabalho-energia para o caso especial de um movimento retilíneo com forças constantes e, nos exemplos seguintes, vamos aplicá-lo somente para esse caso especial. Mostraremos na próxima seção que o teorema é válido no caso geral, mesmo quando as forças não são constantes e a trajetória é uma curva.

Estratégia para a solução de problemas 6.1

TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: o teorema do trabalho-energia, $W_{tot} = K_2 - K_1$, é extremamente útil para relacionar a velocidade escalar v_1 de um corpo em um ponto do seu movimento à sua velocidade escalar v_2 em outro ponto. (É menos útil em problemas que envolvem o *tempo* que um corpo leva para ir do ponto 1 ao ponto 2, porque o teorema do trabalho-energia não envolve tempo. Nesse caso, é melhor usar as relações entre tempo, posição, velocidade e aceleração descritas nos capítulos 2 e 3.)

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. Escolha a posição inicial e a posição final do corpo e desenhe um diagrama do corpo livre mostrando todas as forças que atuam sobre o corpo.
2. Escolha um sistema de coordenadas. (Quando o movimento é retilíneo, geralmente é mais fácil ter as posições inicial e final ao longo do eixo x.)
3. Faça uma lista de todas as grandezas conhecidas e desconhecidas e defina quais grandezas desconhecidas são as suas incógnitas. A incógnita pode ser a velocidade escalar inicial ou final do corpo, o módulo de uma das forças que atuam sobre o corpo ou o seu deslocamento.

EXECUTAR *a solução:* calcule o trabalho W realizado por cada força. Se a força for constante e o deslocamento for retilíneo, você poderá aplicar a Equação (6.2) ou a Equação (6.3). (Ainda neste capítulo, veremos como lidar com várias forças e trajetórias em curva.) Certifique-se de verificar os sinais; quando uma força possui um componente na mesma direção e no mesmo sentido do deslocamento, W é positivo; quando uma força possui um componente na mesma direção, mas com sentido contrário ao do deslocamento, o trabalho é negativo; quando uma força é ortogonal ao deslocamento, o trabalho é igual a zero.

Para calcular o trabalho total W_{tot}, faça a soma de todos os trabalhos realizados pelas forças individuais que atuam sobre o corpo. Em alguns casos é mais fácil calcular a soma vetorial de todas as forças que atuam sobre o corpo (ou seja, a força resultante) e, a seguir, usar essa soma vetorial para calcular o trabalho total; esse valor também é igual a W_{tot}.

Escreva expressões para a energia cinética inicial K_1 e para a energia cinética final K_2. Note que a energia cinética envolve a *massa* do corpo, não seu *peso*; se for dado o peso do corpo, será necessário calcular a massa pela relação $p = mg$.

Finalmente, use a relação $W_{tot} = K_2 - K_1$ para resolver a incógnita. Lembre-se de que o lado direito dessa equação representa a energia cinética *final* menos a energia cinética *inicial*, nunca o inverso.

AVALIAR *sua resposta:* verifique se a sua resposta faz sentido em termos físicos. É fundamental lembrar que a energia cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ nunca pode ser negativa. Se você chegar a um valor negativo de K, talvez tenha trocado as energias cinética inicial e final na equação $W_{tot} = K_2 - K_1$ ou cometido um erro de sinal em algum dos cálculos do trabalho.

Exemplo 6.3

USO DO TRABALHO E DA ENERGIA PARA CALCULAR A VELOCIDADE Vamos examinar novamente o trenó da Figura 6.7 e os números do final do Exemplo 6.2. Suponha que a velocidade inicial v_1 é 2,0 m/s. Qual é a velocidade escalar do trenó após um deslocamento de 20 m?

IDENTIFICAR: como temos a velocidade inicial $v_1 = 2{,}0$ m/s e queremos calcular a velocidade final, usaremos o teorema do trabalho-energia, Equação (6.6) ($W_{tot} = K_2 - K_1$).

PREPARAR: a Figura 6.11 mostra nosso desenho para este caso. A direção do movimento está no sentido positivo de x.

EXECUTAR: no Exemplo 6.2, encontramos para o trabalho total de todas as forças: $W_{tot} = 10$ kJ, de modo que a energia cinética do trenó carregado deve aumentar em 10 kJ.

Para escrever as expressões para as energias cinéticas inicial e final, necessitamos da massa do trenó e de sua carga. Sabemos que o *peso* é 14.700 N, portanto a massa é

$$m = \frac{p}{g} = \frac{14700\ \text{N}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 1500\ \text{kg}$$

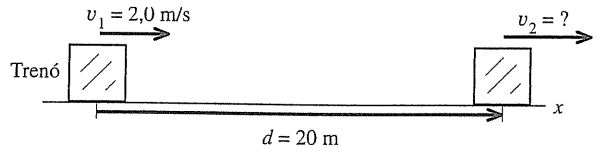


Figura 6.11 Nosso desenho para o problema.

Então, a energia cinética inicial K_1 é dada por

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(1500\text{ kg})(2{,}0\text{ m/s})^2 = 3000\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$$
$$= 3000\text{ J}$$

A energia cinética final K_2 é

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(1500\text{ kg})v_2^2$$

onde v_2 é a velocidade desconhecida que desejamos calcular. A Equação (6.6) fornece

$$K_2 = K_1 + W_{\text{tot}} = 3000\text{ J} + 10000\text{ J} = 13000\text{ J}$$

Igualando as duas relações anteriores de K_2, substituindo 1 J = 1 kg · m^2/s^2 e explicitando v_2, achamos

$$v_2 = 4{,}2\text{ m/s}$$

AVALIAR: o trabalho total é positivo, de modo que a energia cinética aumenta ($K_2 > K_1$) e a velocidade aumenta ($v_2 > v_1$). Este problema pode também ser resolvido sem o uso do teorema do trabalho-energia. Achamos a aceleração de $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ e a seguir usamos as equações para o movimento com aceleração constante para achar v_2. Como a aceleração está sobre o eixo Ox,

$$a = a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{(5000\text{ N})\cos 36{,}9° - 3500\text{ N}}{1500\text{ kg}}$$
$$= 0{,}333\text{ m/s}^2$$

logo, pela Equação (2.13),

$$v_2^2 = v_1^2 + 2ad = (2{,}0\text{ m/s})^2 + 2(0{,}333\text{ m/s}^2)(20\text{ m})$$
$$= 17{,}3\text{ m}^2/\text{s}^2$$
$$v_2 = 4{,}2\text{ m/s}$$

Esse resultado é igual ao obtido quando usamos o teorema do trabalho-energia, porém, naquela solução, evitamos a etapa intermediária do cálculo da aceleração. Neste e no próximo capítulo, você encontrará vários problemas que *podem ser* resolvidos sem usar os conceitos de trabalho e de energia, entretanto, notará que a solução torna-se mais fácil usando as considerações de energia. Quando um problema puder ser resolvido por dois métodos diferentes, o uso de ambos os métodos (como fizemos neste exemplo) é um bom meio de conferir os resultados.

Exemplo 6.4

FORÇAS SOBRE A CABEÇA DE UM MARTELO Em um bate-estaca, um martelo de aço de 200 kg é elevado até uma altura de 3,0 m acima do topo de uma viga I vertical que deve ser cravada no solo (Figura 6.12a). A seguir, o martelo é solto, enterrando mais 7,4 cm a viga I. Os trilhos verticais que guiam a cabeça do martelo exercem sobre ele uma força de atrito constante igual a 60 N. Use o teorema do trabalho-energia para achar a) a velocidade da cabeça do martelo no momento em que atinge a viga I e b) a força média exercida pela cabeça do martelo sobre a mesma viga. Despreze os efeitos do ar.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: usaremos o teorema do trabalho-energia para relacionar a velocidade escalar da cabeça do martelo em diferentes pontos e as forças que atuam sobre ela. Há *três* pontos de interesse: ponto 1, onde a cabeça do martelo parte do repouso; ponto 2, onde ocorre o seu primeiro contato com a viga I; e o ponto 3, onde a cabeça do martelo pára (Figura 6.12a). As duas incógnitas são a velocidade escalar da cabeça do martelo no ponto 2 e a força que ela exerce entre os pontos 2 e 3. Logo, vamos aplicar o teorema do trabalho-energia duas vezes: uma para o movimento de 1 a 2 e outra para o movimento de 2 a 3.

PREPARAR: a Figura 6.12b mostra as forças verticais que atuam sobre a cabeça do martelo em sua queda livre, do ponto 1 ao ponto 2. (Podemos desprezar qualquer força horizontal que porventura exista, porque ela não realiza nenhum trabalho, uma vez que a cabeça do martelo se move verticalmente.) Nesta parte do movimento, nossa incógnita é a velocidade escalar v_2 da cabeça do martelo.

A Figura 6.12c mostra as forças verticais que atuam sobre a cabeça do martelo durante o movimento do ponto 2 ao ponto 3. Além das forças mostradas na Figura 6.12b, a viga I exerce uma força normal de baixo para cima com módulo n sobre a cabeça do martelo. Na verdade, essa força varia até a cabeça do martelo parar, mas para simplificar vamos tratar n como uma constante. Portanto, n representa o valor *médio* dessa força de baixo para cima durante o movimento. Nossa incógnita para esta parte do movimento é a força que a *cabeça do martelo* exerce sobre a viga I; é a força de reação à força normal exercida pela viga I e, portanto, pela terceira lei de Newton, seu módulo também é n.

EXECUTAR: a) Do ponto 1 ao ponto 2, as forças verticais são o peso de cima para baixo $p = mg$ = (200 kg) (9,8 m/s^2) = 1960 N e a força de atrito de baixo para cima f = 60 N. Logo, a força resultante de cima para baixo é $p - f$ = 1900 N. O deslocamento da cabeça do martelo de cima para baixo do ponto 1 ao ponto 2 é d_{12} = 3,0 m. Portanto, o trabalho total quando a cabeça do martelo vai do ponto 1 ao ponto 2 é

$$W_{\text{tot}} = (p - f)d_{12} = (1900\text{ N})(3{,}0\text{ m}) = 5700\text{ J}$$

No ponto 1, a cabeça do martelo está em repouso, então sua energia cinética inicial K_1 é igual a zero. Logo, a energia cinética K_2 no ponto 2 equivale ao trabalho total realizado sobre a cabeça do martelo entre os pontos 1 e 2:

$$W_{\text{tot}} = K_2 - K_1 = K_2 - 0 = \frac{1}{2}mv_2^2 - 0$$
$$v_2 = \sqrt{\frac{2W_{\text{tot}}}{m}} = \sqrt{\frac{2(5700\text{ J})}{200\text{ kg}}} = 7{,}55\text{ m/s}$$

Esse é o valor da velocidade da cabeça do martelo no ponto 2, no momento em que ele atinge a viga I.

b) No deslocamento de cima para baixo da cabeça do martelo, entre os pontos 2 e 3, a força resultante de cima para baixo que atua sobre ele é $p - f - n$ (Figura 6.12c). O trabalho total realizado sobre a cabeça do martelo durante esse deslocamento é

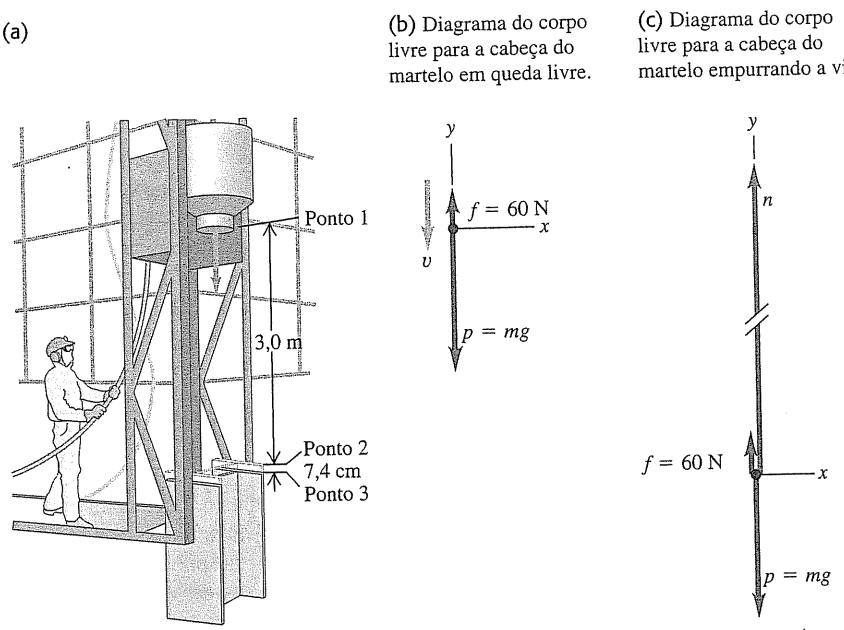


Figura 6.12 (a) Um bate-estaca crava no solo uma viga em forma de I. (b) e (c) Diagramas do corpo livre. Os comprimentos dos vetores não estão em escala.

$$W_{tot} = (p - f - n)d_{23}$$

A energia cinética inicial para essa parte do movimento é K_2, que pelo item (a) equivale a 5700 J. A energia cinética final é $K_3 = 0$, uma vez que a cabeça do martelo termina em repouso. Então, pelo teorema do trabalho-energia,

$$W_{tot} = (p - f - n)d_{23} = K_3 - K_2$$

$$n = p - f - \frac{K_3 - K_2}{d_{23}}$$

$$= 1960\text{ N} - 60\text{ N} - \frac{0\text{ J} - 5700\text{ J}}{0{,}074\text{ m}}$$

$$= 79000\text{ N}$$

A força que a cabeça do martelo exerce de cima para baixo sobre a viga I possui esse mesmo módulo, 79000 N (cerca de 9 toneladas) — mais de 40 vezes o peso da cabeça do martelo.

AVALIAR: a variação total da energia cinética da cabeça do martelo desde o ponto 1 até o ponto 3 é igual a zero; uma força resultante relativamente pequena produz trabalho positivo em um deslocamento grande e, a seguir, uma força resultante relativamente grande produz trabalho negativo em um deslocamento muito menor. O mesmo ocorre quando você acelera lentamente o seu carro e a seguir colide com uma parede de tijolos. A força resultante, relativamente grande, necessária para reduzir a energia cinética até zero é a responsável pelos danos ao seu carro — e possivelmente a você.

O significado da energia cinética

O Exemplo 6.4 fornece um raciocínio para entender o significado físico da energia cinética. A cabeça do martelo parte do repouso, e sua energia cinética quando atinge a viga I é igual ao trabalho total realizado pela força resultante sobre a cabeça do martelo até esse ponto. Esse resultado é em geral verdadeiro: para acelerar uma partícula de massa m a partir do repouso (energia cinética zero) até uma velocidade v, o trabalho total realizado sobre ela deve ser igual à variação da energia cinética desde zero até $K = \frac{1}{2}mv^2$:

$$W_{tot} = K - 0 = K$$

Portanto, *a energia cinética de uma partícula é igual ao trabalho total realizado para acelerá-la a partir do repouso até sua velocidade presente* (Figura 6.13). A definição $K = \frac{1}{2}mv^2$, Equação (6.5), não foi escolhida ao acaso; ela é a *única* definição que corresponde ao significado físico da energia cinética.

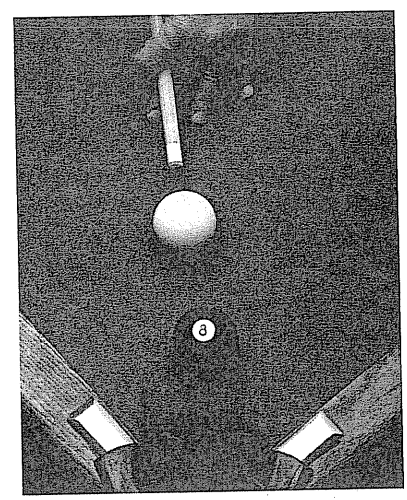


Figura 6.13 Quando um jogador de sinuca bate na bola da vez que está em repouso, a energia cinética da bola após ser atingida é igual ao trabalho realizado sobre ela pelo taco. Quanto maior forem a força exercida pelo taco e a distância percorrida pela bola enquanto está em contato com ele, maior será a energia cinética da bola.

Na segunda parte do Exemplo 6.4 a energia cinética da cabeça do martelo foi usada para realizar um trabalho sobre a viga I e cravá-la no solo. Isso nos permite fazer outra interpretação para a energia cinética: *a energia cinética de uma partícula é igual ao trabalho total que ela pode realizar no processo de ser conduzida até o repouso.* Isso explica por que você puxa a mão e o braço para trás quando apanha uma bola no ar. No intervalo em que a bola chega ao repouso, ela realiza um trabalho (força vezes distância) sobre a sua mão que é igual à energia cinética inicial da bola. Puxando sua mão para trás, você maximiza a distância na qual a força atua e minimiza a força exercida sobre sua mão.

Exemplo conceitual 6.5

COMPARANDO ENERGIAS CINÉTICAS Dois barcos que deslizam no gelo, como o descrito no Exemplo 5.6 (Seção 5.2), apostam corrida sobre um lago horizontal sem atrito (Figura 6.14). Os barcos possuem massas m e $2m$, respectivamente. A vela de um barco é idêntica à do outro, de modo que o vento exerce a mesma força constante $\vec{F}$ sobre cada barco. Os dois barcos partem do repouso e a distância entre a partida e a linha de chegada é igual a d. Qual dos dois barcos chegará ao final da linha com a maior energia cinética?

SOLUÇÃO

Se você simplesmente usasse a definição matemática de energia cinética, $K = \frac{1}{2}mv^2$, da Equação (6.5), a resposta deste problema não seria óbvia. O barco de massa $2m$ possui massa maior, de modo que você poderia pensar que ele teria a maior energia cinética no final da linha. Porém, o barco menor, de massa m, cruzaria a linha de chegada com velocidade maior, e você poderia pensar que *ele* teria a maior energia cinética no final da linha. Como podemos decidir?

O método correto para resolvermos este problema é lembrarmos que *a energia cinética de uma partícula é igual ao trabalho total realizado para acelerá-la a partir do repouso até sua velocidade presente.* Os dois barcos percorrem o mesmo deslocamento d, e somente a força horizontal F, paralela ao deslocamento, realiza trabalho sobre os dois barcos. Logo, o trabalho total realizado entre os pontos inicial e final é o *mesmo* para cada barco, $W_{tot} = Fd$. Na linha final, cada barco possui uma energia cinética igual ao trabalho total W_{tot} realizado sobre ele, porque os barcos partiram do repouso. Logo, os dois barcos possuem a *mesma* energia cinética na linha de chegada!

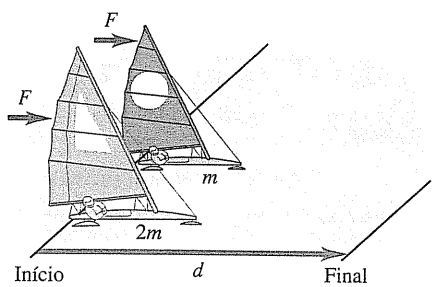


Figura 6.14 Uma competição entre barcos que deslizam no gelo.

Você poderia supor que esta questão envolve uma 'pegadinha', mas não se trata disto. Ao entender realmente o significado físico de grandezas como a energia cinética, você poderá resolver os problemas mais facilmente e com melhor interpretação da física. Note que não dissemos nada sobre o tempo que cada barco leva até chegar ao final da linha. Isso porque o teorema do trabalho-energia não faz nenhuma referência ao tempo; somente o deslocamento é importante para o trabalho. Na verdade, o barco de massa m leva menos tempo para chegar à linha de chegada do que o barco de massa $2m$, devido à sua maior aceleração.

Trabalho e energia cinética em sistemas compostos

Nesta seção tomamos o cuidado de usar o teorema do trabalho-energia somente para corpos considerados *partículas*, ou seja, massas pontuais que se movem. Novas sutilezas surgem para sistemas mais complexos que devem ser representados por diversas partículas com movimentos diferentes. Não podemos analisar essas sutilezas com detalhes neste capítulo, mas apresentamos a seguir um exemplo.

Considere um menino em pé apoiado sobre patins sem atrito sobre uma superfície horizontal, de frente para uma parede rígida (Figura 6.15). Ele empurra a parede e inicia um movimento para a direita. As forças que atuam sobre ele são seu peso $\vec{p}$, as forças normais de baixo para cima $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ exercidas pelo solo sobre seus patins e a força horizontal $\vec{F}$ que a parede exerce sobre ele. Como não existe deslocamento vertical, $\vec{p}$, $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ não realizam trabalho. A força horizontal $\vec{F}$ acelera o menino para a direita, porém as partes do corpo sobre as quais ela atua (suas mãos) não se movem. Portanto, a força horizontal $\vec{F}$ também não realiza trabalho. Então, de onde vem a energia cinética do menino?

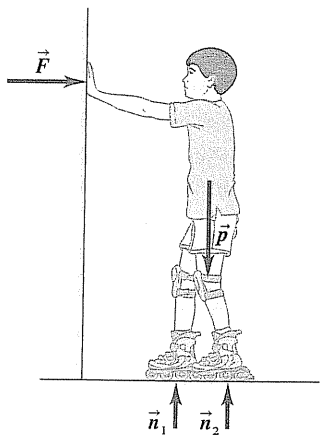


Figura 6.15 Forças externas atuando sobre um patinador que empurra uma parede. O trabalho realizado por essas forças é igual a zero, mas, apesar disso, sua energia cinética variou.

A dificuldade é que não podemos representar o menino simplesmente como uma partícula. Diferentes partes do corpo dele possuem movimentos diferentes; suas mãos permanecem paradas sobre a parede, porém o seu torso se afasta da parede. As diversas partes do corpo interagem entre si, e uma parte poderá exercer forças e realizar trabalho sobre a outra. Sendo assim, a energia cinética *total* do corpo pode variar, embora nenhum trabalho seja realizado pelas forças externas aplicadas sobre o corpo (como a força da parede). No Capítulo 8 estudaremos com mais detalhes o movimento de um conjunto de partículas que interagem entre si. Verificaremos que, de modo análogo ao do menino deste exemplo, a energia cinética total do sistema pode variar, mesmo quando o trabalho das forças externas atuando sobre o sistema for igual a zero.

Teste sua compreensão da Seção 6.2 Classifique os seguintes corpos por ordem da sua energia cinética, da menor para a maior. (i) um corpo de 2,0 kg movendo-se a 5,0 m/s; (ii) um corpo de 1,0 kg inicialmente em repouso, que passa a ter realizado sobre si 30 J de trabalho; (iii) um corpo de 1,0 kg inicialmente movendo-se a 4,0 m/s e que passa a ter 20 J de trabalho realizado sobre si; (iv) um corpo de 2,0 kg inicialmente movendo-se a 10 m/s e que passa a realizar um trabalho de 80 J sobre outro corpo. ■

6.3 Trabalho e energia com forças variáveis

Até o momento, neste capítulo consideramos apenas *forças constantes*. Porém, o que ocorre quando você comprime uma mola? Quanto mais ela se comprime, maior é o esforço para você empurrar, de modo que a força que você exerce *não* é constante. Também restringimos nossos estudos ao movimento *retilíneo*. Podemos imaginar diversas situações em que as forças aplicadas variam em módulo, direção e sentido e o corpo se desloca em uma trajetória curva. É necessário estarmos aptos para calcular o trabalho realizado nesses casos gerais. Felizmente, verificaremos que o teorema do trabalho-energia permanece válido, mesmo quando consideramos forças variáveis e quando o corpo descreve uma trajetória curva.

Trabalho realizado por uma força variável em movimento retilíneo

Para acrescentar uma complicação de cada vez, vamos considerar um movimento retilíneo no qual a força F_x possui um componente x paralelo ao deslocamento, mas o módulo da força é variável. (Um exemplo do cotidiano é dirigir um carro por uma estrada retilínea com sinais de parada que fazem o motorista alternar entre pisar no acelerador e frear.) Suponha uma partícula movendo-se ao longo do eixo Ox, de um ponto x_1 a um ponto x_2 (Figura 6.16a). A Figura 6.16b mostra um gráfico do componente

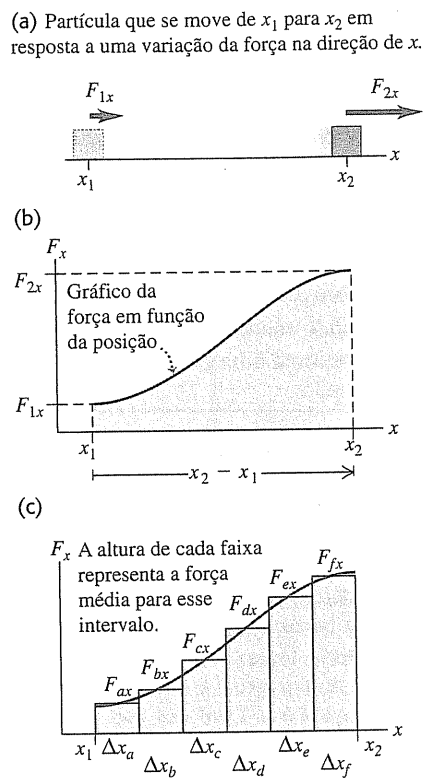


Figura 6.16 Cálculo do trabalho realizado por uma força variável F_x na direção de x, enquanto uma partícula se move de x_1 para x_2.

x da força em função da coordenada x da partícula. Para calcularmos o trabalho realizado por essa força, dividimos o deslocamento total em pequenos segmentos Δx_a, Δx_b e assim por diante (Figura 6.16c). Aproximamos o trabalho realizado pela força no deslocamento Δx_a como a força média F_{ax} neste intervalo multiplicada pelo deslocamento Δx_a. Fazemos isso para cada segmento e depois somamos os resultados de todos os segmentos. O trabalho realizado pela força no deslocamento de x_1 a x_2 é dado aproximadamente por

$$W = F_{ax}\Delta x_a + F_{bx}\Delta x_b + \cdots$$

À medida que o número de segmentos aumenta e a largura de cada segmento torna-se cada vez menor, essa soma fornece (no limite) a *integral* de F_x de x_1 a x_2:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\, dx \qquad (6.7)$$

(componentes x da força variável, deslocamento retilíneo)

Note que $F_{ax}\Delta x_a$ representa a *área* da primeira faixa vertical indicada na Figura 6.16c e que a integral na Equação (6.7) representa a área abaixo da curva da Figura 6.16b no deslocamento de x_1 a x_2. *Em um gráfico da força em função da posição, o trabalho total realizado pela força é representado pela área abaixo da curva entre a posição*

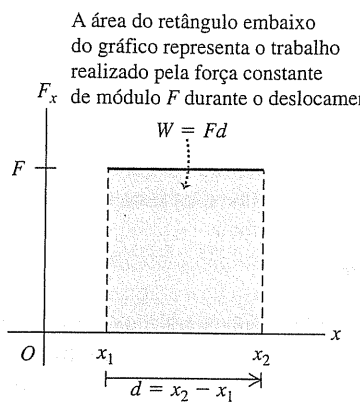


Figura 6.17 O trabalho realizado por uma força F constante no sentido do eixo Ox enquanto uma partícula se move de x_1 a x_2.

inicial e a posição final. Uma interpretação alternativa para a Equação (6.7) é que o trabalho W é igual à força média no intervalo considerado, multiplicada pelo deslocamento.

A Equação (6.7) também se aplica no caso particular em que o componente x da força F for constante. Nesse caso, F_x pode ser retirada da integral

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx = F_x\int_{x_1}^{x_2} dx = F_x(x_2 - x_1) \text{ (força constante)}$$

Porém, $x_2 - x_1 = d$, o deslocamento total da partícula. Portanto, no caso de uma força F constante, a Equação (6.7) diz que $W = Fd$, concordando com a Equação (6.1). A interpretação do trabalho como a área abaixo da curva de F_x em função de x também vale para uma força constante; $W = Fd$ é a área de um retângulo de altura F e largura d (Figura 6.17).

Vamos agora aplicar o que aprendemos ao caso da deformação de molas. Para esticar a mola de uma distância x além de sua posição não deformada, devemos aplicar uma força de módulo F em cada uma de suas extremidades (Figura 6.18). Quando o alongamento x não é muito grande, verifica-se que o módulo F é diretamente proporcional ao módulo do deslocamento x:

$$F_x = kx \qquad (6.8)$$

(força necessária para esticar uma mola)

onde k é uma constante denominada **constante da força** (ou **constante da mola**). As unidades de k são a força dividida pela distância: N/m em unidades SI e lb/pé (libras/pés) em unidades inglesas. Para a mola fraca típica de um brinquedo, a constante da mola é aproximadamente igual a 1 N/m; para molas duras, como as molas de suspensão de um automóvel, k é aproximadamente igual a 10^5 N/m. A observação de que a força é diretamente proporcional ao deslocamento quando o deslocamento não é muito grande foi feita em 1678 por Robert Hooke, sendo conhecida como **lei de Hooke**. Na realidade, ela não deveria ser chamada de 'lei', visto que é uma relação específica e não uma lei geral da natureza. As molas reais não obedecem à Equação (6.8) de modo exato, contudo ela é um modelo idealizado bastante útil. A lei de Hooke será discutida com mais detalhes no Capítulo 11.

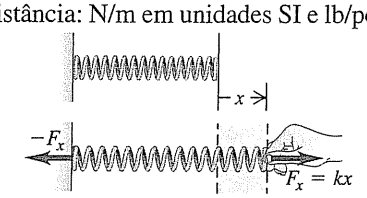


Figura 6.18 A força necessária para esticar a mola ideal é diretamente proporcional ao seu alongamento: $F = kx$.

Para esticar qualquer mola devemos realizar um trabalho. Aplicamos forças iguais e opostas às extremidades da mola e gradualmente aumentamos as forças. Mantemos a extremidade esquerda da mola em repouso, de modo que a força que atua nessa extremidade não realiza trabalho. A força que atua na extremidade móvel *realiza* trabalho. A Figura 6.19 mostra um gráfico da força F_x em função de x, o alongamento da mola. O trabalho realizado por F quando o alongamento varia de zero a um valor máximo X é dado por

$$W = \int_0^X F_x\,dx = \int_0^X kx\,dx = \frac{1}{2}kX^2 \qquad (6.9)$$

Podemos também obter esse resultado graficamente. A área do triângulo sombreado indicado na Figura 6.19, que representa o trabalho total realizado pela força, é igual ao produto da base pela altura dividido por dois, ou seja

$$W = \frac{1}{2}(X)(kX) = \frac{1}{2}kX^2$$

Essa equação diz também que o trabalho é a força *média* $kX/2$ multiplicada pelo deslocamento total X. Vemos que o trabalho total é proporcional ao *quadrado* do alongamento total X. Para esticar em 2 cm uma mola ideal, você deve realizar um trabalho quatro vezes maior do que o necessário para esticá-la em 1 cm.

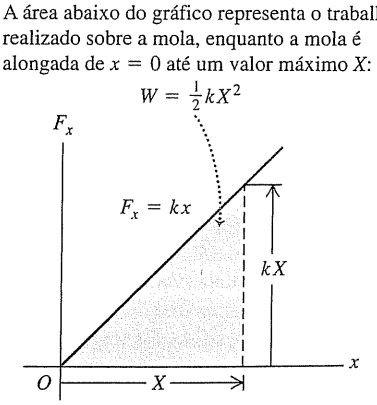
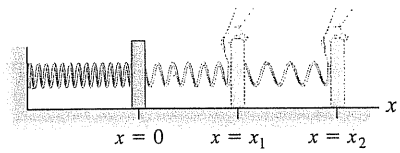


Figura 6.19 Cálculo do trabalho realizado para esticar a mola em um alongamento X.

(a) Alongando uma mola de x_1 a x_2.



(b) Gráfico da força pela distância.

A área trapezoidal sob o gráfico representa o trabalho realizado sobre a mola para alongá-la de $x = x_1$ para $x = x_2$: $W = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$

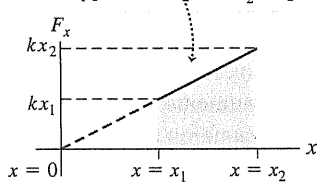


Figura 6.20 Cálculo do trabalho realizado para esticar uma mola de uma extensão a outra maior.

A Equação (6.9) supõe que a mola estava inicialmente sem nenhuma deformação. Se a mola sofre um alongamento inicial x_1, o trabalho realizado para esticá-la até um alongamento final x_2 (Figura 6.20a) é dado por

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \qquad (6.10)$$

Você deve usar seu conhecimento de geometria para se convencer de que a área trapezoidal abaixo do gráfico na Figura 6.20b é dada pela expressão na Equação (6.10).

Se a mola possui espaço entre as espirais, ela também pode ser comprimida, e a lei de Hooke vale igualmente quando a mola é esticada ou quando ela é comprimida. Nesse caso, a força F e o deslocamento x possuem sentidos contrários aos indicados na Figura 6.18, de modo que F_x e x na Equação (6.8) possuem sinais negativos. Como F_x e x estão invertidos, a força continua no mesmo sentido do deslocamento, e o trabalho será novamente positivo. Desse modo, o trabalho total continua sendo dado pela Equação (6.9) ou pela Equação (6.10), mesmo quando X é negativo ou quando x_1 ou x_2, ou ambos, são negativos.

ATENÇÃO Trabalho realizado sobre uma mola *versus* trabalho realizado por uma mola Note que a Equação (6.10) fornece o trabalho que *você* deve produzir *sobre* uma mola para mudar seu comprimento. Por exemplo, se você estica uma mola que está originalmente em repouso, então $x_1 = 0$, $x_2 > 0$ e $W > 0$: a força que você aplica em uma das extremidades da mola está no mesmo sentido do deslocamento, e o trabalho que você produz é positivo. Por outro lado, o trabalho que a *mola* realiza sobre o corpo ao qual está atrelado é dado pela *negativa* da Equação (6.10). Dessa forma, ao puxar a mola, ela realiza um trabalho negativo sobre você. Prestar atenção ao sinal do trabalho eliminará qualquer confusão mais adiante!

Exemplo 6.6

TRABALHO REALIZADO SOBRE UMA BALANÇA DE MOLA

Uma mulher pesando 600 N está em pé sobre uma balança de mola contendo uma mola rígida (Figura 6.21). No equilíbrio, a mola está comprimida 1,0 cm sob a ação do seu peso. Calcule a constante da mola e o trabalho total realizado pela força de compressão sobre a mola.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: no equilíbrio, a força de baixo para cima exercida pela mola contrabalanceia a força de cima para baixo do peso da mulher. Usaremos esse princípio e a Equação (6.8) para determinar a força constante k, e usaremos a Equação (6.10) para calcular o trabalho W que a mulher realiza sobre a mola, para comprimi-la.

PREPARAR: consideramos valores de x positivos para o alongamento da mola (de baixo para cima na Figura 6.21), de modo que o deslocamento da mola (x) e o componente x da força que a mulher exerce sobre ela (F_x) sejam ambos negativos.

EXECUTAR: o topo da mola é deslocado por $x = -1{,}0$ cm $= -0{,}010$ m, e a força que a mulher realiza sobre a mola é $F_x = -600$ N. Pela Equação (6.8), a força constante é

$$k = \frac{F_x}{x} = \frac{-600\text{ N}}{-0{,}010\text{ m}} = 6{,}0 \times 10^4\text{ N/m}$$

Então, usando $x_1 = 0$ e $x_2 = -0{,}010$ m na Equação (6.10),

$$W = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(6{,}0 \times 10^4\text{ N/m})(-0{,}010\text{ m})^2 - 0 = 3{,}0\text{ J}$$

AVALIAR: a força aplicada e o deslocamento no final da mola estavam na mesma direção e sentido, de modo que o trabalho realizado foi positivo – exatamente como calculamos. Nossa escolha arbitrária da direção positiva não possui nenhum efeito sobre a resposta para W. (Você pode comprovar isso assumindo a direção positiva de x como sendo de cima para baixo, correspondente à compressão. Você obterá os mesmos valores de k e W.)

Devido à escolha do eixo, tanto o componente da força quanto o deslocamento são negativos. O trabalho realizado *sobre* a mola é positivo.

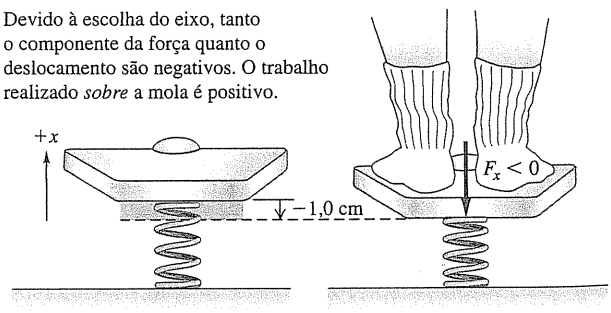


Figura 6.21 Comprimindo uma balança de mola.

Teorema do trabalho-energia para um movimento retilíneo com força variável

Na Seção 6.2 deduzimos o teorema do trabalho-energia, $W_{tot} = K_2 - K_1$, para o caso especial de um movimento retilíneo com força resultante constante. Podemos agora provar que esse teorema também vale para o caso em que a força varia com a posição. Como na Seção 6.2, vamos considerar uma partícula que sofre um deslocamento x quando submetida a uma força resultante cujo componente x é F_x, que agora é variável. Como na Figura 6.16, dividimos o deslocamento total x em um grande número de pequenos deslocamentos Δx. Podemos aplicar o teorema do trabalho-energia, Equação (6.6), para cada segmento porque o valor de F_x em cada pequeno segmento é aproximadamente constante. A variação da energia cinética no segmento Δx_a é igual ao trabalho $F_{ax}\,\Delta x_a$ e assim por diante. A variação total da energia cinética é a soma das variações da energia cinética nos segmentos individuais e, portanto, é igual ao trabalho total realizado sobre a partícula no deslocamento total. Desse modo, a fórmula $W_{tot} = \Delta K$ permanece válida tanto no caso de uma força constante quanto no caso em que a força varia.

Agora vamos fazer uma dedução alternativa para o teorema do trabalho-energia para o caso em que a força varia com a posição. Ela envolve uma troca da variável x para v_x na integral do trabalho. De início, notamos que a aceleração a de uma partícula pode ser expressa de vários modos, usando $a_x = dv_x/dt$, $v_x = dx/dt$, e a regra da derivação em cadeia:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt} = v_x\frac{dv_x}{dx} \tag{6.11}$$

Usando esse resultado na Equação (6.7), vemos que o trabalho total realizado pela força *resultante* F_x é

$$W_{tot} = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} ma_x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} mv_x\frac{dv_x}{dx}\,dx \tag{6.12}$$

Agora $(dv_x/dx)\,dx$ é a variação de velocidade dv_x durante o deslocamento dx, de modo que na Equação (6.12) podemos substituir dv_x por $(dv_x/dx)\,dx$. Com isso, a variável de integração muda de x para v_x, portanto os limites de integração devem ser trocados de x_1 a x_2 para os valores correspondentes de v_1 a v_2. Isso fornece

$$W_{tot} = \int_{v_1}^{v_2} mv_x\,dv_x$$

A integral de $v_x\,dv_x$ é simplesmente igual a $v_x^2/2$. Substituindo os limites da integral, achamos finalmente

$$W_{tot} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \tag{6.13}$$

Esse resultado é igual ao da Equação (6.6), portanto o teorema do trabalho-energia permanece válido mesmo sem a hipótese de que a força resultante é constante.

Exemplo 6.7

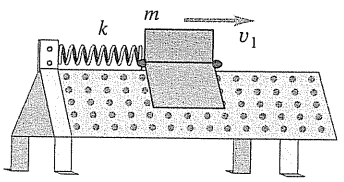
MOVIMENTO COM FORÇA VARIÁVEL Um cavaleiro com 0,100 kg de massa está ligado à extremidade de um trilho de ar horizontal por uma mola cuja constante é 20,0 N/m (Figura 6.22a). Inicialmente a mola não está esticada e o cavaleiro se move com velocidade igual a 1,50 m/s da esquerda para a direita. Ache a distância máxima d que o cavaleiro pode se mover para a direita a) supondo que o ar esteja passando no trilho e o atrito seja desprezível e b) supondo que o ar não esteja fluindo no trilho e o coeficiente de atrito cinético seja $\mu_c = 0{,}47$.

SOLUÇÃO

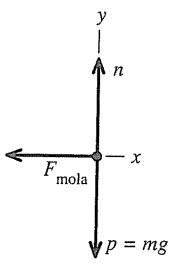
IDENTIFICAR: A força exercida pela mola não é constante, então *não* podemos usar as fórmulas para movimento com aceleração constante deduzidas no Capítulo 2 para resolver este problema. Em vez disso, usaremos o teorema do trabalho-energia, que envolve a distância percorrida (nossa variável-alvo) na fórmula para o trabalho.

PREPARAR: nas figuras 6.22b e 6.22c, escolhemos a direção positiva de x como sendo da esquerda para a direita (na direção do movimento do cavaleiro). Consideramos $x = 0$ na posição inicial do cavaleiro (quando a mola não está esticada) e $x = d$ (a variável-alvo) na posição onde o cavaleiro pára. O movimento é exclusivamente horizontal, logo somente forças horizontais realizam trabalho. Note que a Equação (6.10) fornece o trabalho realizado *sobre* a mola quando ela é esticada, mas para usar o teorema do trabalho-energia necessitamos do trabalho realizado *pela* mola *sobre* o cavaleiro — que é a negativa da Equação (6.10).

(a)



(b) Diagrama do corpo livre para o cavaleiro sem atrito.



(c) Diagrama do corpo livre para o cavaleiro com atrito cinético.

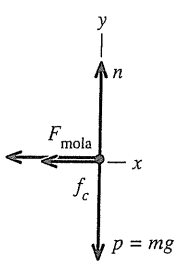


Figura 6.22 (a) Um cavaleiro ligado pela extremidade de uma mola presa a um trilho de ar. (b) e (c) Diagramas do corpo livre.

EXECUTAR: (a) Quando o cavaleiro se move de $x_1 = 0$ para $x_2 = d$, ele produz trabalho sobre a mola conforme é dado pela Equação (6.10): $W = \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}k(0)^2 = \frac{1}{2}kd^2$. O total de trabalho realizado pela mola sobre o cavaleiro é a negativa desse valor, ou seja, $-\frac{1}{2}kd^2$. A mola estica até que o cavaleiro fique momentaneamente em repouso, de modo que a energia cinética final do cavaleiro K_2 é igual a zero. A energia cinética inicial do cavaleiro é igual a $\frac{1}{2}mv_1^2$, onde $v_1 = 1{,}50$ m/s é a velocidade escalar inicial do cavaleiro. Usando o teorema do trabalho-energia, obtemos

$$-\frac{1}{2}kd^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Portanto, a distância d percorrida pelo cavaleiro é:

$$d = v_1\sqrt{\frac{m}{k}} = (1{,}50\ \text{m/s})\sqrt{\frac{0{,}100\ \text{kg}}{20{,}0\ \text{N/m}}}$$
$$= 0{,}106\ \text{m} = 10{,}6\ \text{cm}$$

Em seguida, a mola esticada puxa o cavaleiro de volta para a esquerda, de modo que o repouso é apenas instantâneo.

b) Quando o ar não circula, devemos incluir também o trabalho realizado pela força constante de atrito cinético. A força normal n possui módulo igual ao peso do cavaleiro, visto que o trilho é horizontal e não existe nenhuma outra força vertical. O módulo da força de atrito cinético é então $f_c = \mu_c n = \mu_c mg$. A força de atrito se opõe ao deslocamento, logo o trabalho realizado pela força de atrito é

$$W_{\text{atri}} = f_c d\cos 180° = -f_c d = -\mu_c mgd$$

O trabalho total é a soma de W_{atri} com o trabalho realizado pela mola, ou seja, $-\frac{1}{2}kd^2$. Portanto, de acordo com o teorema do trabalho-energia

$$-\mu_k mgd - \frac{1}{2}kd^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_1^2$$
$$-(0{,}47)(0{,}100\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)d - \frac{1}{2}(20{,}0\ \text{N/m})d^2$$
$$= -\frac{1}{2}(0{,}100\ \text{kg})(1{,}50\ \text{m/s})^2$$
$$(10{,}0\ \text{N/m})d^2 + (0{,}461\ \text{N})d - (0{,}113\ \text{N}\cdot\text{m}) = 0$$

Essa é uma equação do segundo grau para d. As duas soluções dessa equação são

$$d = \frac{-(0{,}461\ \text{N}) \pm \sqrt{(0{,}461\ \text{N})^2 - 4(10{,}0\ \text{N/m})(-0{,}113\ \text{N}\cdot\text{m})}}{2(10{,}0\ \text{N/m})}$$
$$= 0{,}086\ \text{m} \quad \text{ou} \quad -0{,}132\ \text{m}$$

Usamos o símbolo d para designar um deslocamento positivo, de modo que somente o valor do deslocamento positivo faz sentido. Logo, considerando o atrito, o cavaleiro se desloca até uma distância

$$d = 0{,}086\ \text{m} = 8{,}6\ \text{cm}$$

AVALIAR: considerando o atrito, o cavaleiro percorre uma distância menor e a mola estica menos, como esperado. Novamente, o repouso do cavaleiro é apenas instantâneo e a mola esticada puxa o cavaleiro para a esquerda; se ele vai retornar ou não depende do valor da força de atrito *estático*. Qual deveria ser o valor do coeficiente de atrito estático μ_s para impedir que o cavaleiro retorne para a esquerda?

Teorema do trabalho-energia para um movimento ao longo de uma curva

Podemos generalizar ainda mais nossa definição de trabalho de modo que inclua forças que variam em módulo, direção e sentido, bem como deslocamentos ao longo de trajetórias curvas. Suponha que uma partícula se desloque de um ponto P_1 a um ponto P_2 ao longo de uma curva, como indicado na Figura 6.23a. Dividimos o segmento da curva entre esses pontos em muitos vetores deslocamentos infinitesimais, e cada deslocamento típico será representado por $d\vec{l}$. Cada vetor $d\vec{l}$ é tangente à trajetória em cada posição considerada. Seja $\vec{F}$ a força em um ponto típico da trajetória curva, e seja ϕ o ângulo entre $\vec{F}$ e $d\vec{l}$ neste ponto. Então, o pequeno elemento de trabalho dW realizado sobre a partícula durante o deslocamento $d\vec{l}$ pode ser escrito como

$$dW = F\cos\phi\, dl = F_{\parallel}\, dl = \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

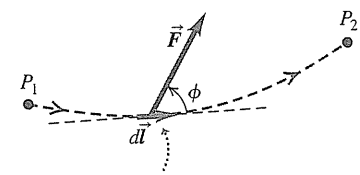
onde $F_{\parallel} = F\cos\phi$ é o componente de $\vec{F}$ na direção paralela a $d\vec{l}$ (Figura 6.23b). O trabalho total realizado por $\vec{F}$ sobre a partícula enquanto ela se desloca de P_1 a P_2 é

$$W = \int_{P_1}^{P_2} F\cos\phi\, dl = \int_{P_1}^{P_2} F_{\parallel}\, dl = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{l} \qquad (6.14)$$

(trabalho realizado em uma trajetória curva)

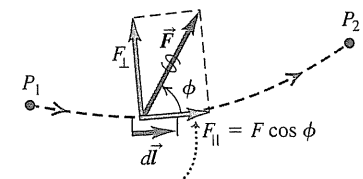
Podemos agora mostrar que o teorema do trabalho-energia, Equação (6.6), permanece verdadeiro mesmo para o caso de forças variáveis e deslocamentos ao longo de

(a)



Durante um deslocamento infinitesimal $d\vec{l}$, o trabalho dW realizado pela força $\boldsymbol{F}$ é dado por:
$dW = \vec{F}\cdot d\vec{l} = F\cos\phi\, dl$

(b)



A força que contribui para o trabalho realizado por $\vec{F}$ é o componente da força paralelo ao deslocamento, $F_{\parallel} = F\cos\phi$.

Figura 6.23 Uma força $\vec{F}$ que varia em módulo, direção e sentido atua sobre uma partícula que se desloca de um ponto P_1 a um ponto P_2 ao longo de uma curva.

uma trajetória curva. A força $\vec{F}$ permanece essencialmente constante em qualquer deslocamento infinitesimal $d\vec{l}$ ao longo da trajetória, de modo que podemos aplicar o teorema do trabalho-energia no caso do movimento retilíneo para este deslocamento. Portanto, a variação da energia cinética K da partícula nesse intervalo é igual ao trabalho $dW = F_{\parallel}\, dl = \vec{F} \cdot d\vec{l}$ realizado sobre a partícula. Somando essas quantidades infinitesimais de trabalho para todos os deslocamentos infinitesimais ao longo da trajetória, obtemos o trabalho total realizado, Equação (6.14), e isso é igual à variação total da energia cinética para a trajetória completa. Logo, $W_{\text{tot}} = \Delta K = K_2 - K_1$ é um resultado *geral*, qualquer que seja a trajetória e qualquer que seja o caráter da força aplicada. Isso pode ser demonstrado de modo mais rigoroso usando-se etapas como as descritas na dedução da Equação (6.11) à Equação (6.13) (veja o Problema Desafiador 6.104).

Note que somente o componente da força resultante paralelo ao deslocamento, $F_{\parallel}$, realiza trabalho sobre a partícula, de modo que somente esse componente pode alterar a velocidade e a energia cinética da partícula. O componente perpendicular à trajetória, $F_{\perp} = F\text{sen}\phi$, não produz nenhum efeito sobre o módulo da velocidade da partícula; ele apenas altera a direção da velocidade da partícula.

A integral indicada na Equação (6.14) denomina-se *integral de linha*. Para calcular essa integral em um problema específico, necessitamos de uma descrição detalhada da trajetória e de como a força $\vec{F}$ varia ao longo da trajetória. Geralmente expressamos a integral de linha em termos de alguma variável escalar, como no exemplo seguinte.

Exemplo 6.8

MOVIMENTO AO LONGO DE UMA CURVA I Em um piquenique familiar você foi designado a empurrar seu primo chato, João, em um balanço (Figura 6.24a). Seu peso é p; o comprimento da corrente é R e você empurra João até que as correntes façam um ângulo θ_0 com a vertical. Para isso, você empurra com uma força horizontal variável $\vec{F}$ que começa em zero e cresce gradualmente até um valor suficiente para que João e o balanço movam-se lentamente e permaneçam aproximadamente em equilíbrio. Qual é o trabalho total realizado por todas as forças sobre João? Qual é o trabalho realizado pela tensão T nas correntes? Qual é o trabalho que você realiza ao exercer a força variável $\vec{F}$? (Despreze o peso das correntes e do assento.)

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o movimento ocorre ao longo de uma curva, por isso usaremos a Equação (6.14) para calcular o trabalho realizado pela força resultante, pela força de tensão e pela força $\vec{F}$.

PREPARAR: a Figura 6.24b mostra o diagrama do corpo livre e o sistema de coordenadas. Substituímos as tensões nas duas correntes por uma tensão única T.

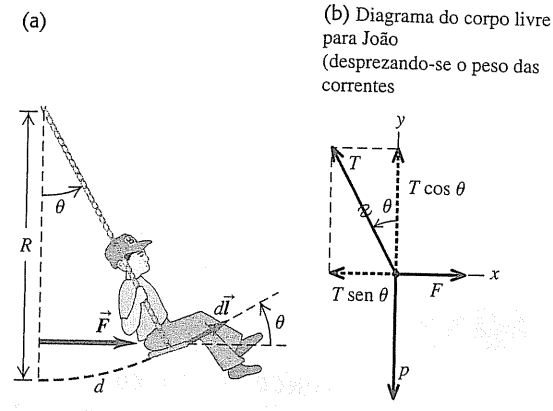


Figura 6.24 (a) Empurrando seu primo João em um balanço. (b) Diagrama do corpo livre.

EXECUTAR: há duas formas de calcular o trabalho total realizado durante o movimento: (1) calcular o trabalho total de cada força e depois somar todos os totais e (2) calcular o trabalho realizado pela força resultante. O segundo método é muito mais fácil neste caso porque João está em equilíbrio em cada ponto. Portanto, a força resultante sobre ele é igual a zero, a integral da força resultante na Equação (6.14) é igual a zero e o trabalho total realizado por todas as forças é igual a zero.

Também é fácil determinar o trabalho total pela tensão das correntes sobre João porque essa força é perpendicular ao deslocamento $d\vec{l}$ em todos os pontos da trajetória. Logo, em todos os pontos, o ângulo entre a tensão das correntes e o deslocamento é igual a 90° e o produto escalar na Equação (6.14) é igual a zero. Portanto, o trabalho realizado pela tensão nas correntes é igual a zero.

Para calcularmos o trabalho que você realiza ao exercer a força $\vec{F}$, devemos descobrir como ela varia em função do ângulo θ. A força resultante sobre João é nula; logo, $\sum F_x = 0$ e $\sum F_y = 0$. Pela Figura 6.24b, obtemos

$$\sum F_x = F + (-T\text{sen}\theta) = 0$$
$$\sum F_y = T\cos\theta + (-p) = 0$$

Eliminando T dessas duas equações, encontramos

$$F = p\,\text{tg}\,\theta$$

O ponto de aplicação da força $\vec{F}$ oscila no interior do arco d. O comprimento do arco d é igual ao raio R da circunferência multiplicado pelo ângulo θ (em radianos), logo $s = R\theta$. Embora o deslocamento $d\vec{l}$ corresponda a uma pequena variação de ângulo, $d\theta$ possui módulo dado por $dl = ds = R\, d\theta$. O trabalho realizado por $\vec{F}$ é

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int F\cos\theta\, ds$$

Agora expressamos essas grandezas em termos do ângulo variável θ, cujo valor aumenta de 0 para θ_0:

$$W = \int_0^{\theta_0} (p\,\text{tg}\,\theta)\cos\theta\,(R\, d\theta) = pR\int_0^{\theta_0} \text{sen}\,\theta\, d\theta$$
$$= pR(1 - \cos\theta_0)$$

AVALIAR: quando $\theta_0 = 0$, não existe deslocamento; nesse caso, $\cos\theta_0 = 1$ e $W = 0$, como era de esperar. Quando $\theta_0 = 90°$, então $\cos\theta_0 = 0$ e $W = pR$. Nesse caso, o trabalho realizado por você seria igual ao trabalho que realizaria caso elevasse João verticalmente até uma altura R com uma força igual ao seu peso p. De fato, o fator $R(1 - \cos\theta_0)$ é a variação de altura acima do solo durante o deslocamento, de modo que para qualquer valor de θ_0 o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ é a variação da altura multiplicada pelo peso. Este é um exemplo de um resultado mais geral que demonstraremos na Seção 7.1.

Exemplo 6.9

MOVIMENTO AO LONGO DE UMA CURVA II No Exemplo 6.8, o deslocamento infinitesimal $d\vec{l}$ (Figura 6.24a) possui módulo ds, um componente x de $ds\cos\theta$ e um componente y de $ds\,\text{sen}\,\theta$. Logo, $d\vec{l} = \hat{\imath}\,ds\cos\theta + \hat{\jmath}\,ds\,\text{sen}\,\theta$. Use essa expressão e a Equação (6.14) para calcular o trabalho realizado durante o movimento pela tensão das correntes, pela força da gravidade e pela força $\vec{F}$.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: novamente usaremos a Equação (6.14), mas agora usaremos a Equação (1.21) para determinar o produto escalar em termos dos componentes.

PREPARAR: usaremos o mesmo diagrama do corpo livre da Figura 6.24b, como no Exemplo 6.8.

EXECUTAR: pela Figura 6.24b, podemos escrever as três forças em termos dos vetores de unidade:

$$\vec{T} = \hat{\imath}(-T\,\text{sen}\,\theta) + \hat{\jmath}T\cos\theta$$
$$\vec{p} = \hat{\jmath}(-p)$$
$$\vec{F} = \hat{\imath}F$$

Para usar a Equação (6.14), devemos calcular o produto escalar de cada uma dessas forças com $d\vec{l}$. Pela Equação (1.21),

$$\vec{T}\cdot d\vec{l} = (-T\,\text{sen}\,\theta)(ds\cos\theta) + (T\cos\theta)(ds\,\text{sen}\,\theta) = 0$$
$$\vec{p}\cdot d\vec{l} = (-p)(ds\,\text{sen}\,\theta) = -p\,\text{sen}\,\theta\,ds$$
$$\vec{F}\cdot d\vec{l} = F(ds\cos\theta) = F\cos\theta\,ds$$

Como $\vec{T}\cdot d\vec{l} = 0$, a integral dessa grandeza é igual a zero e o trabalho realizado pela tensão nas correntes é igual a zero (exatamente como encontramos no Exemplo 6.8). Usando $ds = R\,d\theta$, como no Exemplo 6.8, obtemos que o trabalho realizado pela força da gravidade é

$$\int \vec{p}\cdot d\vec{l} = \int(-p\,\text{sen}\,\theta)\,R\,d\theta = -pR\int_0^{\theta_0}\text{sen}\,\theta\,d\theta$$
$$= -pR(1 - \cos\theta_0)$$

O trabalho realizado pela gravidade é negativo porque a gravidade puxa de cima para baixo enquanto João se move de baixo para cima. Finalmente, o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ é a integral $\int\vec{F}\cdot d\vec{l} = \int F\cos\theta\,ds$, que calculamos no Exemplo 6.8; a resposta é $+pR(1 - \cos\theta_0)$.

AVALIAR: para conferir nossas respostas, note que a soma de todas as três grandezas de trabalho é igual a zero. Isso corresponde exatamente ao que concluímos no Exemplo 6.8 aplicando o teorema do trabalho-energia.

O método de componentes é freqüentemente a forma mais conveniente de calcular produtos escalares. Use-o sempre que facilitar a sua vida!

Teste sua compreensão da Seção 6.3 No Exemplo 5.21 (Seção 5.4), analisamos um pêndulo cônico. A velocidade escalar do peso do pêndulo permanece constante enquanto ele percorre o círculo mostrado na Figura 5.32a. (a) Para um círculo completo, quanto trabalho a força de tensão F realiza sobre o peso do pêndulo? (i) um valor positivo; (ii) um valor negativo; (iii) zero. (b) Para um círculo completo, quanto trabalho o peso realiza sobre o peso do pêndulo? (i) um valor positivo; (ii) um valor negativo; (iii) zero. ∎

6.4 Potência

A definição de trabalho não faz nenhuma referência ao tempo. Quando você levanta verticalmente um haltere pesando 100 N até uma altura de 1,0 m com velocidade constante, você realiza um trabalho de (100 N) (1,0 m) = 100 J, independentemente de você levar 1 segundo, 1 hora ou 1 ano para realizá-lo. Contudo, muitas vezes precisamos saber quanto tempo levamos para realizar um trabalho. Isso pode ser descrito pela *potência*. Na linguagem comum 'potência' em geral é sinônimo de 'energia' ou 'força'. Na física, usamos uma definição muito mais precisa: **potência** é a *taxa* temporal da realização de um trabalho. Assim como trabalho e energia, a potência é uma grandeza escalar.

Quando um trabalho ΔW é realizado durante um intervalo de tempo Δt, o trabalho médio realizado por unidade de tempo ou **potência média** P_m é definido como

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad \text{(potência média)} \tag{6.15}$$

A taxa de realização de um trabalho pode não ser constante. Podemos definir uma **potência instantânea** P como o limite da razão indicada na Equação (6.15) quando Δt tende a zero:

$$P = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \quad \text{(potência instantânea)} \tag{6.16}$$

A unidade SI de potência é o **watt** (W), nome dado em homenagem ao inventor inglês James Watt. Um watt equivale a um joule por segundo: 1 W = 1 J/s (Figura 6.25). O quilowatt (1 kW = 10^3 W) e o megawatt (1 MW = 10^6 W) também são unidades muito usadas. No sistema inglês, o trabalho é expresso em pé-libras, e a unidade de potência é o pé-libra por segundo. Algumas vezes, usa-se também uma

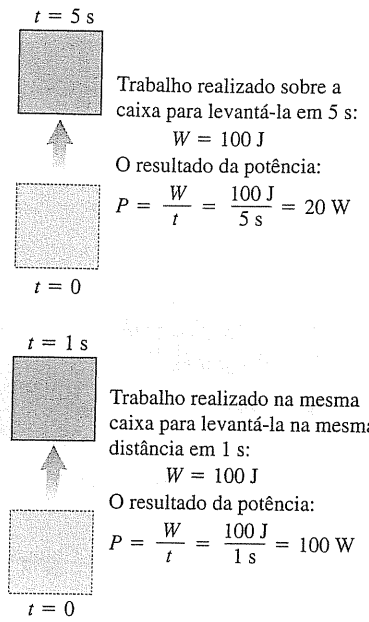


Figura 6.25 O mesmo total de trabalho é realizado em cada uma destas situações, mas a potência (a taxa de realização de um trabalho) é diferente.

unidade maior denominada *horsepower* (hp, que quer dizer 'potência de cavalo') (Figura 6.26):

$$1\ \text{hp} = 550\ \text{pés} \cdot \text{lb/s} = 33000\ \text{pés} \cdot \text{lb/min}$$

Ou seja, um motor de 1 hp funcionando a plena capacidade produz 33000 pés · libras de trabalho por minuto. Um fator de conversão útil é

$$1\ \text{hp} = 746\ \text{W} = 0{,}746\ \text{kW}$$

O watt é uma unidade familiar muito usada para potência *elétrica*; uma lâmpada de 100 W converte 100 J de energia elétrica em luz e calor a cada segundo. Porém, não existe nada intrinsecamente elétrico nos termos watt e quilowatt. Uma lâmpada pode ser avaliada em *horsepower* e o motor de um carro em quilowatt.

O *quilowatt-hora* (kW · h) é a unidade comercial de energia elétrica. Um quilowatt-hora é o trabalho total realizado em 1 h (3600 s) quando a potência é de 1 quilowatt (10^3 J/s), logo

$$1\ \text{kW} \cdot \text{h} = (10^3\ \text{J/s})\,(3600\ \text{s}) = 3{,}6 \times 10^6\ \text{J} = 3{,}6\ \text{MJ}$$

O quilowatt-hora é uma unidade de *trabalho* ou de *energia*, não é uma unidade de potência.

Na mecânica, também podemos escrever a potência em função da força e da velocidade. Suponha que uma força $\vec{F}$ atue sobre um corpo enquanto ele sofre um deslocamento vetorial $\Delta\vec{d}$. Se $F_\parallel$ for o componente da força $\vec{F}$ tangente à trajetória (paralelo a $\Delta\vec{d}$), então o trabalho realizado por essa força será $\Delta W = F_\parallel \Delta d$; a potência média será

$$P_m = \frac{F_\parallel \Delta d}{\Delta t} = F_\parallel \frac{\Delta d}{\Delta t} = F_\parallel v_m \qquad (6.17)$$

Figura 6.26 O valor do ***horsepower*** deriva de experiências conduzidas por James Watt, que mediu que um cavalo poderia produzir 33000 pés-libra de trabalho por minuto ao içar carvão de uma mina.

A potência instantânea P é o limite da potência média quando $\Delta t \to 0$:

$$P = F_\parallel v \qquad (6.18)$$

onde v é o módulo da velocidade instantânea. Podemos também escrever a Equação (6.18) em função do produto escalar:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad (6.19)$$

(taxa instantânea do trabalho realizado pela força $\vec{F}$)

Exemplo 6.10

FORÇA E POTÊNCIA Cada um dos dois motores a jato de um avião Boeing 767 desenvolve uma propulsão (força que acelera o avião) igual a 197000 N. Quando o avião está voando a 250 m/s (900 km/h), qual é a *potência instantânea* que cada motor desenvolve?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: nossa incógnita é a potência instantânea P, que é a taxa em que a propulsão realiza o trabalho.

PREPARAR: usaremos a Equação (6.18). A propulsão está no mesmo sentido da velocidade, de modo que $F_\parallel$ é exatamente igual à propulsão.

EXECUTAR: em $v = 250$ m/s, a potência desenvolvida por cada motor é

$$P = F_\parallel v = (1{,}97 \times 10^5\ \text{N})(250\ \text{m/s}) = 4{,}93 \times 10^7\ \text{W}$$

$$= (4{,}93 \times 10^7\ \text{W})\frac{1\ \text{hp}}{746\ \text{W}} = 66000\ \text{hp}$$

AVALIAR: a velocidade escalar dos aviões modernos está diretamente relacionada à potência dos seus motores (Figura 6.27). Os motores dos aviões maiores da década de 1950, movidos a hélice, desenvolviam cerca de 3400 hp ($2{,}5 \times 10^6$ W), com velocidades máximas de cerca de 600 km/h. Cada motor de um Boeing 767 desenvolve aproximadamente 20 vezes mais potência, permitindo que ele voe a cerca de 900 km/h e transporte uma carga muito mais pesada.

(a)

(b)

Figura 6.27 (a) Um avião movido a hélice e (b) Um avião a jato moderno.

Se os motores estão em propulsão máxima enquanto o avião está em repouso no solo, de modo que $v = 0$, os motores desenvolvem potência *nula*. Força e potência não são a mesma coisa!

Exemplo 6.11

UMA ESCALADA DE POTÊNCIA Uma velocista de Chicago com massa de 50,0 kg sobe correndo as escadas da Torre Sears em Chicago, o edifício mais alto dos Estados Unidos, com altura de 443 m (Figura 6.28). Para que ela atinja o topo em 15,0 minutos qual deve ser sua potência média em watts? E em quilowatts? E em *horsepower*?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: vamos considerar a velocista como uma partícula de massa m. Sua potência média P_m deve ser suficiente para elevá-la a uma velocidade escalar constante contra a gravidade.

PREPARAR: podemos calcular P_m de duas maneiras: (1) primeiramente, determinando quanto trabalho ela deve realizar e dividindo o resultado pelo tempo decorrido, como na Equação (6.15), ou (2) calculando a força média de baixo para cima que ela deve exercer (na direção da subida) e multiplicando o resultado pela sua velocidade de baixo para cima, como na Equação (6.17).

EXECUTAR: como no Exemplo 6.8, o trabalho realizado para elevar a massa m contra a gravidade é igual ao peso mg multiplicado pela altura h. Logo, o trabalho realizado por ela é

$$W = mgh = (50{,}0\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2)(443\ \text{m})$$
$$= 2{,}17 \times 10^5\ \text{J}$$

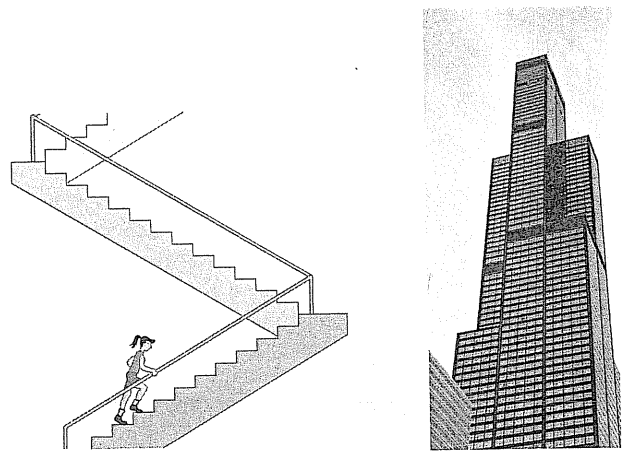


Figura 6.28 Qual a potência necessária para subir as escadas até o topo da Torre Sears em Chicago em 15 minutos?

O tempo é 15,0 min = 900 s; logo, pela Equação (6.15), sua potência média é

$$P_m = \frac{2{,}17 \times 10^5\ \text{J}}{900\ \text{s}} = 241\ \text{W} = 0{,}241\ \text{kW} = 0{,}323\ \text{hp}$$

Um método alternativo consiste em usar a Equação (6.17). A força exercida é vertical, e o componente vertical do módulo da velocidade média é dado por (443 m)/(900 s) = 0,492 m/s; portanto, a potência média é

$$P_m = F_\parallel v_m = (mg)v_m$$
$$= (50{,}0\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2)(0{,}492\ \text{m/s}) = 241\ \text{W}$$

cujo resultado é igual ao anterior.

AVALIAR: na verdade, a potência *total* da corredora é muito maior do que a calculada. A razão é que ela não é uma partícula, mas um conjunto de muitas partes que realizam trabalho ao se moverem, como o trabalho realizado para respirar e o produzido pelo movimento de suas pernas. O cálculo feito indica apenas a parte de sua potência total correspondente ao trabalho realizado para elevá-la até o topo do edifício.

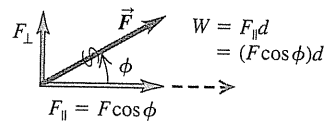
Teste sua compreensão da Seção 6.4 O ar que circunda um avião em vôo exerce uma força de arraste que atua em oposição ao movimento do avião. Quando o Boeing 767 do Exemplo 6.10 está voando em linha reta, a altitude constante e velocidade constante de 250 m/s, qual é a taxa em que a força de arraste produz trabalho sobre ele? (i) 132000 hp; (ii) 66000 hp; (iii) 0; (iv) −66000 hp; (v) −132000 hp. ∎

Resumo

Trabalho realizado por uma força: quando uma força constante $\vec{F}$ atua sobre uma partícula enquanto ela sofre um deslocamento retilíneo $\vec{d}$, o trabalho realizado por esta força é definido como o produto escalar de $\vec{F}$ e $\vec{d}$. A unidade de trabalho no sistema SI é 1 joule = 1 newton-metro (1 J = 1 N · m). O trabalho é uma grandeza escalar; ele possui um sinal algébrico (positivo ou negativo) mas não possui direção no espaço (exemplos 6.1 e 6.2).

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fs\cos\phi \qquad (6.2), (6.3)$$

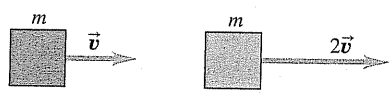
ϕ = ângulo entre $\vec{F}$ e $\vec{d}$



Energia cinética: a energia cinética K de uma partícula é igual ao trabalho realizado para acelerá-la a partir do repouso até a velocidade v. É também igual ao trabalho realizado para desacelerá-la até atingir o repouso. Dobrar m implica dobrar K. Dobrar v implica quadruplicar K. A energia cinética é uma grandeza escalar que não possui direção no espaço, ela é sempre positiva ou nula. Suas unidades são as mesmas de trabalho: 1 J = 1 N · m = 1 kg · m/s^2.

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (6.5)$$

Dobrando m o valor de K dobra.

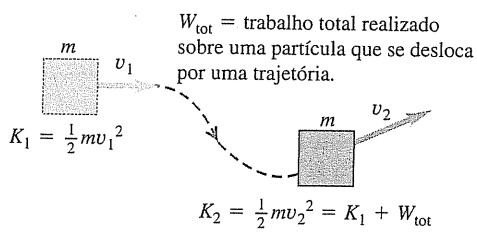


Dobrando v o valor de K quadruplica.

O teorema do trabalho-energia: quando forças atuam sobre uma partícula enquanto ela sofre um deslocamento, a energia cinética da partícula varia de uma quantidade igual ao trabalho total realizado por todas as forças que atuam sobre ela.

Essa relação é o teorema do trabalho-energia, que é sempre válido, independentemente de as forças serem constantes ou variáveis e de a trajetória ser retilínea ou curva. Ele se aplica somente para corpos que podem ser considerados partículas (exemplos 6.3 a 6.5).

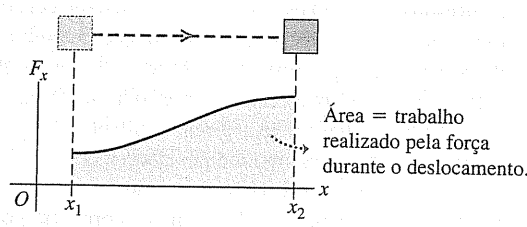
$$W_{tot} = K_2 - K_1 = \Delta K. \qquad (6.6)$$



Trabalho realizado por uma força variável ou sobre uma trajetória curva: quando uma força varia durante um deslocamento retilíneo, o trabalho realizado por ela é dado por uma integral, Equação (6.7). (Veja os exemplos 6.6 e 6.7.) Quando uma partícula segue uma trajetória curva, o trabalho realizado sobre ela por uma força $\vec{F}$ é dado por uma integral que envolve o ângulo ϕ entre a força e o deslocamento. Essa relação vale mesmo quando o módulo da força e quando o ângulo ϕ variam durante o deslocamento (exemplos 6.8 e 6.9).

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx \qquad (6.7)$$

$$W = \int_{P_1}^{P_2} F\cos\phi\,dl = \int_{P_1}^{P_2} F_\parallel\,dl = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{l} \qquad (6.14)$$

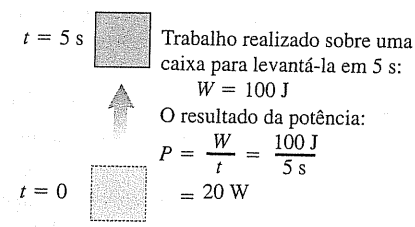


Potência: a potência é a taxa temporal de realização de um trabalho. A potência média P_m é a quantidade de trabalho ΔW realizada em um intervalo de tempo Δt e dividida por esse intervalo de tempo. A potência instantânea é o limite da velocidade média quando Δt tende a zero. Quando uma força $\vec{F}$ atua sobre uma partícula que se move com velocidade $\vec{v}$, a potência instantânea (taxa com a qual a força realiza trabalho) é o produto escalar de $\vec{F}$ e $\vec{v}$. A exemplo do trabalho e da energia cinética, a potência é uma grandeza escalar. A unidade de potência no sistema SI é 1 watt = 1 joule/segundo (1 W = 1 J/s). (Veja os exemplos 6.10 e 6.11.)

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad (6.15)$$

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \qquad (6.16)$$

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} \qquad (6.19)$$



Principais termos

constante da força, 193
energia cinética, 187
joule, 182
lei de Hooke, 193
potência, 198
potência instantânea, 198
potência média, 198
teorema do trabalho-energia, 187
trabalho, 182
watt, 198

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

É verdadeiro que o projétil realiza trabalho sobre os gases. Entretanto, como o projétil exerce sobre os gases uma força contrária à dos gases e do projétil no cano da arma, o trabalho produzido pelo projétil é *negativo* (Seção 6.1).

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

6.1 Resposta: (iii) O elétron possui velocidade constante, portanto sua aceleração é igual a zero e (de acordo com a segunda lei de Newton) a força resultante sobre o elétron também é nula. Logo, o trabalho total realizado por todas as forças (equivalente ao trabalho realizado pela força resultante) deve ser também, igual a zero. As forças individuais podem produzir trabalho diferente de zero, mas essa não é a questão.

6.2 Resposta: (iv), (i), (iii) e (ii) O corpo (i) possui energia cinética $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(2{,}0\text{ kg})(5{,}0\text{ m/s})^2 = 25$ J. O corpo (ii) possuía energia cinética inicial igual a zero e depois 30 J de trabalho realizado, portanto sua energia cinética final é $K_2 = K_1 + W = 0 + 30\text{ J} = 30$ J. O corpo (iii) possuía energia cinética inicial $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(1{,}0\text{ kg})(4{,}0\text{ m/s})^2 = 8{,}0$ J e, depois, teve 20 J de trabalho realizado sobre ele, portanto sua energia cinética final é $K_2 = K_1 + W = 8{,}0\text{ J} + 20\text{ J} = 28$ J. O corpo (iv) possuía energia cinética inicial $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(2{,}0\text{ kg})(10{,}0\text{ m/s})^2 = 100$ J; quando ele produziu 80 J de trabalho sobre outro corpo, o outro corpo produziu -80 J de trabalho sobre o corpo (iv), portanto a energia cinética final do corpo (iv) é $K_2 = K_1 + W = 100\text{ J} + (-80)\text{ J} = 20$ J.

6.3 Respostas: (a) (iii), (b) (iii) Em qualquer ponto do movimento do peso do pêndulo, a força de tensão e o peso atuam perpendicularmente ao movimento — ou seja, ambos atuam perpendicularmente a um deslocamento infinitesimal $d\vec{l}$ do peso do pêndulo. (Na Figura 5.32b, o deslocamento $d\vec{l}$ seria direcionado para fora no plano do diagrama do corpo livre.) Portanto, para cada força, o produto escalar no interior da integral na Equação (6.14) é $\vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$, e o trabalho realizado ao longo de qualquer parte da trajetória circular (incluindo um círculo completo) é $W = \int \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$.

6.4 Resposta: (v) O avião possui velocidade horizontal constante, portanto a força resultante horizontal sobre ele deve ser igual a zero. Logo, a força de arraste para trás deve ter o mesmo módulo que a força para a frente, devido à propulsão combinada dos dois motores. Isso significa que a força de arraste deve produzir trabalho *negativo* sobre o avião à mesma taxa com que a força da propulsão combinada produz trabalho *positivo*. A propulsão combinada realiza trabalho a uma taxa de 2 (66000 hp) = 132000 hp; logo, a força de arraste deve realizar trabalho à taxa de -132000 hp.

Questões para discussão

Q6.1 O sinal de muitas grandezas físicas depende da escolha das coordenadas. Por exemplo, g pode ser negativo ou positivo, dependendo se escolhemos o sentido de baixo para cima ou o sentido de cima para baixo como o eixo positivo. O mesmo se aplica ao trabalho? Em outras palavras, podemos tornar negativo um trabalho positivo em função da escolha das coordenadas? Explique.

Q6.2 Um elevador é suspenso pelos cabos mantendo velocidade constante. O trabalho total realizado sobre o elevador é positivo, negativo ou nulo? Explique.

Q6.3 Uma corda amarrada a um corpo é puxada, ocasionando aceleração ao corpo. Porém, de acordo com a terceira lei de Newton, o corpo puxa a corda em sentido contrário. O trabalho total realizado será, então, igual a zero? Caso seja, como pode a energia cinética do corpo variar? Explique.

Q6.4 Considerando que seja necessário um trabalho total W para dar a um objeto uma velocidade escalar v e uma energia cinética K, partindo do repouso, qual será a velocidade escalar do objeto (em termos de v) e a energia cinética (em termos de K) se realizarmos o dobro do trabalho sobre ele, também partindo do repouso?

Q6.5 Quando uma força resultante não nula e de módulo constante atua sobre um objeto que se move, pode o trabalho total realizado sobre o objeto ser zero? Explique e forneça um exemplo para ilustrar sua resposta.

Q6.6 No Exemplo 5.5 (Seção 5.1), como podemos comparar o trabalho realizado pela tensão no cabo sobre o balde com o trabalho realizado pela tensão no cabo sobre o carro?

Q6.7 No Exemplo 5.21 (Seção 5.4), do pêndulo cônico, qual força realiza trabalho sobre o peso do pêndulo enquanto ele balança?

Q6.8 Para os casos mostrados na Figura 6.29, o objeto é libertado do repouso no topo e não sofre resistência do ar. Em qual caso a massa terá (i) maior velocidade escalar no ponto inferior e (ii) o máximo de trabalho realizado quando chegar ao ponto inferior?

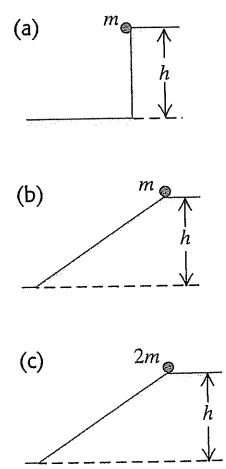


Figura 6.29
Questão 6.8.

Q6.9 Uma força $\vec{F}$ está na direção do eixo Ox e seu módulo depende de x. Faça um gráfico possível de F *versus* x de modo que a força realize um trabalho igual a zero sobre um objeto que se move de x_1 a x_2, embora o módulo da força não seja nulo em nenhum ponto x deste intervalo.

Q6.10 A energia cinética de um carro varia mais quando o carro acelera de 10 a 15 m/s ou quando ele acelera de 15 a 20 m/s? Explique.

Q6.11 Um tijolo de massa igual a 1,5 kg está caindo verticalmente com velocidade de 5,0 m/s. Um livro de 1,5 kg está deslizando sobre o assoalho com velocidade de 5,0 m/s. Um melão de massa igual a 1,5 kg está se deslocando com um vetor velocidade com um componente horizontal para a direita igual a 3,0 m/s e um componente vertical para cima igual a 4,0 m/s. Esses três objetos possuem a mesma velocidade ou a mesma velocidade escalar? Esses três objetos possuem a mesma energia cinética? Para cada resposta explique o raciocínio usado.

Q6.12 Pode o trabalho *total* realizado sobre um objeto durante um deslocamento ser negativo? Explique. Caso o trabalho total seja

negativo, pode seu módulo ser maior do que a energia cinética inicial do objeto? Explique.

Q6.13 Uma força resultante atua sobre um objeto e o acelera a partir do repouso até uma velocidade v_1. Ao fazer isso a força realiza um trabalho igual a W_1. Qual deve ser o fator do aumento do trabalho para que o objeto atinja uma velocidade final três vezes maior, novamente partindo do repouso?

Q6.14 Um caminhão descendo de um elevado possui muita energia cinética em relação a uma pessoa em repouso na estrada, mas nenhuma energia cinética em relação ao motorista do caminhão. Para esses dois sistemas de referência, o trabalho necessário para fazer o caminhão parar é o mesmo? Explique.

Q6.15 Você está segurando uma maleta pela alça, com o braço esticado para baixo, ao lado do corpo. A força exercida pela sua mão realiza trabalho sobre a maleta quando (a) você desce a uma velocidade escalar constante por um corredor horizontal e (b) sobe por uma escada rolante do primeiro ao segundo andar de um prédio? Em cada caso, justifique sua resposta.

Q6.16 Quando um livro desliza ao longo do topo de uma mesa, a força de atrito realiza um trabalho negativo sobre ele. A força de atrito nunca pode realizar um trabalho *positivo*? Explique. (*Sugestão:* pense em uma caixa apoiada na traseira de um caminhão.)

Q6.17 Cronometre o tempo que você leva para subir as escadas de um edifício. Calcule a taxa média de realização de trabalho contra a força da gravidade. Expresse sua resposta em watts e em *horsepower*.

Q6.18 Física mal-empregada. Muitos termos da física são mal-empregados na linguagem cotidiana. Em cada caso a seguir, explique os erros envolvidos. (a) Uma pessoa *forte* é chamada de *potente*. O que há de errado nesse uso do conceito de *potência*? (b) Quando um operário carrega um saco de concreto por um pátio de construção plano, as pessoas dizem que ele realizou muito *trabalho*. Ele realizou mesmo?

Q6.19 Uma propaganda de um gerador elétrico portátil diz que seu motor a diesel é capaz de gastar 28000 hp para gerar 30 MW de potência elétrica. Sabendo que 1 hp = 746 W, verifique se essa propaganda é ou não enganosa. Explique.

Q6.20 Um carro está sendo acelerado enquanto seu motor fornece uma potência constante. A aceleração do carro é maior no início ou no final do deslocamento? Explique.

Q6.21 Considere um gráfico da potência instantânea *versus* o tempo, com o eixo vertical da potência P começando em $P = 0$. Qual o significado físico da área abaixo da curva de P *versus* t entre as linhas verticais t_1 e t_2? Como você poderia achar a potência média desse gráfico? Faça um gráfico P *versus* t consistindo de duas seções de linhas retas e para o qual a potência máxima seja igual ao dobro da potência média.

Q6.22 Uma força resultante diferente de zero atua sobre um objeto. É possível que qualquer das seguintes grandezas seja constante: (a) a velocidade escalar da partícula; (b) o vetor velocidade da partícula; (c) a energia cinética da partícula?

Q6.23 Uma dada força é aplicada a uma mola ideal; a mola se alonga por uma distância x a partir do seu comprimento sem deformação e produz trabalho W. Caso seja aplicado o dobro da força, qual distância (em termos de x) a mola se alonga a partir do seu comprimento sem deformação e quanto trabalho (em termos de W) é necessário para alongá-la nessa distância?

Q6.24 Considerando que é necessário um trabalho W para alongar uma mola por uma distância x a partir do seu comprimento sem deformação, qual trabalho (em termos de W) é necessário para alongar a mola a uma distância *adicional* de x?

Exercícios

Seção 6.1 Trabalho

6.1 Um velho balde de carvalho com massa igual a 6,75 kg está pendurado em um poço na extremidade de uma corda. A corda passa sobre uma polia sem atrito no topo do poço, e você puxa horizontalmente a extremidade da corda para elevar lentamente o balde até uma altura de 4,0 m. a) Qual o trabalho realizado pela sua força ao puxar o balde para cima? b) Qual o trabalho realizado pela força da gravidade sobre o balde? c) Qual o trabalho total realizado sobre o balde?

6.2 Um caminhão-reboque puxa um carro por 5,0 km ao longo de uma estrada horizontal usando um cabo com tensão de 850 N. a) Quanto trabalho o cabo realiza sobre o carro, se ele o puxa horizontalmente? E se o cabo puxar a um ângulo de 35,0° acima da horizontal? b) Quanto trabalho o cabo realiza sobre o caminhão-reboque em ambos os casos do item (a)? c) Quanto trabalho a gravidade realiza sobre o carro no item (a)?

6.3 Um trabalhador de uma fábrica exerce uma força horizontal para empurrar por uma distância de 4,5 m um engradado de 30,0 kg ao longo de um piso plano. O coeficiente de atrito cinético entre o engradado e o piso é igual a 0,25. a) Qual o módulo da força aplicada pelo trabalhador? b) Qual o trabalho realizado por essa força sobre o engradado? c) Qual o trabalho realizado pelo atrito sobre o engradado? d) Qual o trabalho realizado sobre o engradado pela força normal? E pela força da gravidade? e) Qual o trabalho total realizado sobre o engradado?

6.4 Suponha que o trabalhador do Exercício 6.3 empurre o engradado para baixo de um plano inclinado de 30° abaixo da horizontal. a) Qual é o módulo da força aplicada pelo trabalhador para que o engradado se desloque com velocidade constante? b) Qual é o trabalho realizado por essa força sobre o engradado quando ele se desloca de 4,5 m? c) Qual é o trabalho realizado pelo atrito sobre o engradado durante esse deslocamento? d) Qual é o trabalho realizado sobre o engradado pela força normal? E pela força da gravidade? e) Qual é o trabalho total realizado sobre o engradado?

6.5 Um pintor de 75,0 kg sobe uma escada com 2,75 m de comprimento apoiada em uma parede vertical. A escada forma um ângulo de 30,0° com a escada. a) Quanto trabalho a gravidade realiza sobre o pintor? b) A resposta ao item (a) depende do fato de o pintor subir a uma velocidade escalar constante ou acelerar escada acima?

6.6 Dois rebocadores puxam um navio petroleiro. Cada rebocador exerce uma força constante de $1{,}80 \times 10^6$ N, uma a 14° na direção noroeste e outra a 14° na direção nordeste, e o petroleiro é puxado até uma distância de 0,75 km do sul para o norte. Qual é o trabalho total realizado sobre o petroleiro?

6.7 Dois blocos estão ligados por um fio muito leve que passa por uma polia sem massa e sem atrito. (Figura 6.30.) Deslocando-se com velocidade escalar constante, o bloco de 20,0 N se move 75,0 cm da esquerda para a direita e o bloco de 12,0 N move-se 75,0 cm de cima para baixo. Nesse processo, quanto trabalho é realizado a) sobre o bloco de 12,0 N i) pela gravidade; e ii) pela tensão no fio? b) Sobre o bloco de 20,0 N i) pela gravidade; ii) pela tensão no fio; iii) pelo atrito; e iv) pela força normal? c) Calcule o trabalho total realizado sobre cada bloco.

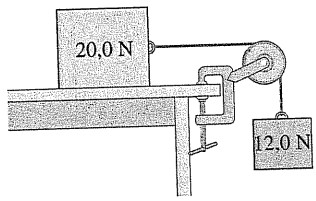


Figura 6.30 Exercício 6.7.

6.8 Um carrinho de supermercado carregado está sendo empurrado pelo pátio do estacionamento sob vento forte. Você aplica uma força constante $\vec{F} = (30\text{ N})\hat{\imath} - (40\text{ N})\hat{\jmath}$ ao carrinho enquanto ele percorre um deslocamento $\vec{d} = (-9{,}0\text{ m})\hat{\imath} - (3{,}0\text{ m})\hat{\jmath}$. Quanto trabalho a força exercida por você realiza sobre o carrinho de supermercado?

6.9 Uma bola de 0,800 kg é amarrada à extremidade de um fio de 1,60 m de comprimento e balançada de modo a perfazer um círculo vertical. a) Por um círculo completo, com início em qualquer ponto, calcule o trabalho total realizado sobre a bola i) pela tensão no fio; e ii) pela gravidade. b) Repita o item (a) para o movimento ao longo de um semicírculo, do ponto mais baixo ao ponto mais alto da trajetória.

Seção 6.2 Energia cinética e o teorema do trabalho-energia

6.10 a) Calcule a energia cinética, em joules, de um automóvel de 750 kg viajando a 65 mi/h. b) Qual é o fator da variação da energia cinética quando a velocidade é reduzida pela metade? c) Com que velocidade (em mi/h) o carro teria que viajar para ter metade da energia cinética obtida no item (a)?

6.11 Cratera de meteoro. Há cerca de 50000 anos, um meteoro colidiu com a superfície terrestre. Medições recentes (2005) estimam que esse meteoro tivesse massa aproximada de $1{,}4 \times 10^8$ kg (cerca de 150000 toneladas) e que tenha atingido o solo a 12 km/s. a) Quanta energia cinética esse meteoro liberou para o solo? b) Como essa energia se relaciona com a energia liberada por uma bomba nuclear de 1,0 megaton? (Uma bomba de um megaton libera a mesma energia que um milhão de toneladas de TNT e 1,0 tonelada de TNT libera $4{,}184 \times 10^9$ J de energia.)

6.12 Algumas energias cinéticas típicas. a) Quantos joules de energia cinética uma pessoa de 75,0 kg tem quando caminha e quando corre? b) No modelo atômico de Bohr, o elétron de hidrogênio possui uma velocidade escalar orbital de 2190 km/s. Qual é sua energia cinética? (Consulte o Apêndice F.) c) Se você largar um peso de 1,0 kg da altura do seu ombro, quantos joules de energia cinética ele terá quando atingir o solo? d) É razoável afirmar que uma criança de 30 kg pode correr o suficiente para ter 100 J de energia cinética?

6.13 A massa de um próton tem 1836 vezes a massa de um elétron. a) Um próton está se deslocando a uma velocidade v. A qual velocidade escalar (em termos de v) um elétron teria a mesma energia cinética do próton? b) Um elétron possui energia cinética K. Se um próton possui a mesma velocidade escalar do elétron, qual é a sua energia cinética (em termos de K)?

6.14 Uma melancia de 4,80 kg é largada (sem velocidade inicial) da extremidade do telhado de um edifício a uma altura de 25,0 m. A resistência do ar é desprezível. a) Calcule o trabalho realizado pela gravidade sobre a melancia durante seu deslocamento do telhado ao solo. b) Imediatamente antes de a melancia colidir com o solo, qual é (i) sua energia cinética; e (ii) sua velocidade escalar? (c) Qual das respostas nos itens (a) e (b) seria *diferente* se a resistência do ar fosse significativa?

6.15 Use o teorema do trabalho-energia para resolver os seguintes problemas. Você pode usar as leis de Newton para conferir suas respostas. Despreze a resistência do ar em todos os casos. a) Um galho cai do topo de uma árvore de 95,0 m de altura, partindo do repouso. Qual sua velocidade ao atingir o solo? b) Um vulcão ejeta uma rocha diretamente de baixo para cima a 525 m no ar. Qual a velocidade da rocha no instante em que saiu do vulcão? c) Uma esquiadora que se move a 5,0 m/s encontra um longo trecho horizontal áspero de neve com coeficiente de atrito cinético de 0,220 com seu esqui. Qual distância ela percorre desse trecho antes de parar? d) Suponha que o trecho áspero do item (c) tivesse apenas 2,90 m de comprimento. Qual a velocidade da esquiadora quando ela chegou ao final do trecho? e) Na base de uma colina coberta de neve e sem atrito que se ergue a 25,0° acima da horizontal, um tobogã possui velocidade escalar de 12,0 m/s em direção à colina. Que altura vertical acima da base ela atinge antes de parar?

6.16 Você atira uma rocha de 20 N verticalmente para o ar a partir do nível do solo. Você observa que, quando alcança 15,0 m acima do solo, ela se desloca a 25,0 m/s de baixo para cima. Use o teorema do trabalho-energia para calcular a) a velocidade escalar da rocha assim que deixou o solo e b) sua altura máxima.

6.17 Você é membro de uma equipe de resgate nos Alpes. Você deve arremessar uma caixa de suprimentos de baixo para cima de uma encosta com ângulo de inclinação constante α, de modo que chegue a um esquiador em apuros, que está a uma distância vertical h acima da base da encosta. A encosta é escorregadia, mas há algum atrito presente, com coeficiente de atrito cinético μ_c. Use o teorema do trabalho-energia para calcular a velocidade escalar mínima que você deve imprimir à caixa na base da encosta, de modo que ela atinja o esquiador. Expresse sua resposta em termos de g, h, μ_c e α.

6.18 Uma massa m desliza de cima para baixo por um plano ligeiramente inclinado a partir de uma altura vertical h, formando um ângulo α com a horizontal. a) O trabalho realizado por uma força é a soma do trabalho realizado pelos componentes da força. Considere os componentes da gravidade paralela e perpendicular à superfície do plano. Calcule o trabalho realizado sobre a massa por cada um dos componentes e use esses resultados para mostrar que o trabalho realizado pela gravidade é exatamente o mesmo, caso a massa tivesse caído diretamente de cima para baixo pelo ar, de uma altura h. b) Use o teorema do trabalho-energia para provar que a velocidade escalar da massa na base da inclinação seria a mesma, caso tivesse sido solta da altura h, independentemente do ângulo α da inclinação. Explique como essa velocidade escalar pode ser independente do ângulo da inclinação. c) Use os resultados do item (b) para determinar a velocidade escalar de uma rocha que desliza de cima para baixo por uma colina coberta de gelo e sem atrito, partindo do repouso de um ponto que está 15,0 m acima da base.

6.19 Um carro é parado em uma distância D por uma força de atrito constante que não depende da sua velocidade. Qual é o fator de variação da distância (em termos de D) que ele leva até parar a) quando sua velocidade inicial é triplicada? e b) se a velocidade escalar for a mesma que a original, porém a força de atrito é triplicada? (Resolva usando o método do teorema do trabalho-energia.)

6.20 Um elétron em movimento possui energia cinética K_1. Depois da realização de um trabalho W total sobre ele, o elétron passa a se mover com uma velocidade quatro vezes menor em um sentido contrário ao inicial. a) Calcule W em termos de K_1. b) Sua resposta depende da direção final do movimento do elétron?

6.21 Um trenó com massa igual a 8,0 kg se move em linha reta sobre uma superfície horizontal sem atrito. Em um ponto de sua trajetória, sua velocidade possui módulo igual a 4,0 m/s; depois de percorrer mais 2,50 m além deste ponto, sua velocidade possui módulo igual a 6,0 m/s. Use o teorema do trabalho-energia para achar a força que atua sobre o trenó, supondo que essa força seja constante e que ela atue no sentido do movimento do trenó.

6.22 Uma bola de futebol de massa igual a 0,420 kg possui velocidade inicial de 2,0 m/s. Uma jogadora de futebol dá um chute na bola, exercendo uma força constante de módulo igual a 40,0 N na mesma direção e no mesmo sentido do movimento da bola. Até que distância seu pé deve estar em contato com a bola para que a velocidade da bola aumente para 6,0 m/s?

6.23 Uma caixa contendo 12 latas de refrigerante (massa 4,30 kg) está inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal. A seguir, ela é empurrada 1,20 m em linha reta por um cão treinado que exerce uma força constante de módulo igual a 36,0 N. Use o teorema do trabalho-energia para achar a velocidade final da caixa se a) não existe atrito entre a caixa e a superfície; b) o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a superfície é igual a 0,30.

6.24 Uma bola de beisebol de massa igual a 0,145 kg é lançada verticalmente de baixo para cima com velocidade de 25,0 m/s. a) Qual o trabalho realizado pela gravidade quando a bola atinge uma altura de 20,0 m acima do bastão? b) Use o teorema do trabalho-energia para calcular a velocidade da bola quando ela atinge uma altura de 20,0 m acima do bastão. Despreze a resistência do ar. c) Sua resposta do item (b) depende do sentido da velocidade da bola ser para cima ou para baixo quando ela está na altura de 20,0 m? Explique.

6.25 Uma carroça muito pequena com massa de 7,0 kg move-se em linha reta sobre uma superfície horizontal sem atrito. Ela possui uma velocidade inicial de 4,0 m/s e, a seguir, é empurrada 3,0 m no mesmo sentido da velocidade inicial por uma força com módulo igual a 10,0 N. a) Use o teorema do trabalho-energia para calcular a velocidade final da carroça. b) Calcule a aceleração produzida pela força. Use essa aceleração nas relações cinemáticas do Capítulo 2 para calcular a velocidade final da carroça. Compare esse resultado com o obtido no item (a).

6.26 Um bloco de gelo com massa de 2,0 kg desliza 0,750 m de cima para baixo ao longo de um plano inclinado de 36,9° abaixo da horizontal. Sabendo que o bloco de gelo parte sem velocidade inicial, qual é sua velocidade final? Despreze o atrito.

6.27 Distância de parada. Um carro se desloca sobre uma superfície horizontal com velocidade v_0 no momento em que os freios ficam bloqueados, de modo que os pneus deslizam em vez de rolar. a) Use o teorema do trabalho-energia para calcular a distância mínima para o carro parar em função de v_0, de g e do coeficiente de atrito cinético μ_c entre o pneu e o solo. b) Qual o fator da variação da distância mínima para o carro parar se i) o coeficiente de atrito cinético for dobrado ou ii) a velocidade escalar inicial for dobrada ou iii) tanto o atrito cinético quanto a velocidade escalar inicial forem dobrados?

Seção 6.3 Trabalho e energia com forças variáveis

6.28 É necessário realizar um trabalho de 12,0 J para esticar 3,0 cm uma mola a partir do seu comprimento sem deformação. a) Qual é a constante de força dessa mola? b) Qual o módulo de força necessário para alongar a mola em 3,0 cm a partir do seu comprimento sem deformação? c) Calcule o trabalho necessário para esticar 4,0 cm essa mola a partir do seu comprimento sem deformação e qual força é necessária para alongá-la nessa distância.

6.29 Uma força de 160 N estica 0,050 m uma certa mola a partir do seu comprimento sem deformação. a) Qual é a força necessária para esticar essa mola 0,015 m a partir do seu comprimento sem deformação? E para comprimi-la 0,020 m? b) Qual é o trabalho necessário para esticar essa mola 0,015 m a partir do seu comprimento sem deformação? Qual é o trabalho necessário para comprimir essa mola 0,020 m a partir do seu comprimento sem deformação?

6.30 Uma menina aplica uma força $\vec{F}$ paralela ao eixo Ox sobre um trenó de 10,0 kg que se desloca sobre a superfície congelada de um lago pequeno. À medida que ela controla a velocidade do trenó, o componente x da força que ela aplica varia com a coordenada x do modo indicado na Figura 6.31. Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ quando o trenó se desloca a) de $x = 0$ a $x = 8{,}0$ m; b) de $x = 8{,}0$ m a $x = 12{,}0$ m; c) de $x = 0$ a $x = 12{,}0$ m.

6.31 Suponha que o trenó do Exercício 6.30 esteja inicialmente em repouso em $x = 0$. Use o teorema do trabalho-energia para achar a velocidade do trenó em a) $x = 8{,}0$ m; b) $x = 12{,}0$ m. Despreze o atrito entre o trenó e a superfície do lago.

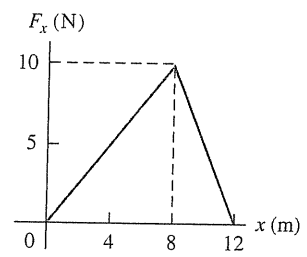


Figura 6.31 Exercícios 6.30 e 6.31.

6.32 Uma vaca está saindo do celeiro, apesar de você tentar puxá-la de volta. Nas coordenadas com origem na porta do celeiro, a vaca caminha de $x = 0$ até $x = 6{,}9$ m enquanto você aplica uma força com o componente $F_x = -[20{,}0\ \text{N} + (3{,}0\ \text{N/m})x]$. Quanto trabalho a força exercida por você realiza sobre a vaca durante o seu deslocamento?

6.33 Uma caixa de 6,0 kg que se move a 3,0 m/s sobre uma superfície horizontal sem atrito colide contra uma mola leve com constante de força de 75 N/cm. Use o teorema do trabalho-energia para calcular a compressão máxima da mola.

6.34 Pernas exercendo pressão. Como parte de seu exercício diário, você deita de costas e empurra com seus pés uma plataforma ligada a duas molas duras dispostas de modo que elas fiquem paralelas. Quando você empurra a plataforma, comprime as molas. Você realiza 80,0 J de trabalho para comprimir as molas 0,200 m a partir do seu comprimento sem deformação. a) Qual é o módulo da força que você deve aplicar para manter a plataforma nessa posição? b) Qual é a quantidade *adicional* de trabalho que você deve realizar para mover a plataforma *mais* 0,200 m e qual é a força máxima que você deve aplicar?

6.35 a) No Exemplo 6.7 (Seção 6.3) verificou-se que quando o ar não circulava no trilho de ar, o cavaleiro se deslocava 8,6 cm antes de parar instantaneamente. Qual deveria ser o coeficiente de atrito estático μ_s para impedir que o cavaleiro retornasse para a esquerda? b) Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o trilho e o cavaleiro é $\mu_s = 0{,}60$, qual é a velocidade inicial

máxima v_1 que o cavaleiro deve ter para que ele permaneça em repouso depois de parar instantaneamente? Quando o ar não circula no trilho de ar, o coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0{,}47$.

6.36 Um bloco de gelo de 4,0 kg é colocado contra uma mola horizontal cuja constante da força é $k = 200$ N/m, sendo comprimida em 0,025 m. A mola é liberada e acelera o bloco em uma superfície horizontal. Despreze o atrito e a massa da mola. a) Calcule o trabalho realizado pela mola sobre o bloco quando ele se desloca de sua posição inicial até o local em que a mola retorna ao seu comprimento sem deformação. b) Qual é a velocidade do bloco no instante em que ele abandona a mola?

6.37 Uma força $\vec{F}$ é aplicada paralelamente ao eixo Ox a um modelo de carro de 2,0 kg com controle remoto. O componente x da força varia com a coordenada x do carro conforme indicado na Figura 6.32. Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ quando o carro se desloca a) de $x = 0$ a $x = 3{,}0$ m; b) de $x = 3{,}0$ m a $x = 4{,}0$ m; c) de $x = 4{,}0$ m a $x = 7{,}0$ m; d) de $x = 0$ a $x = 7{,}0$ m; e) de $x = 7{,}0$ m a $x = 2{,}0$ m.

6.38 Suponha que o modelo de carro do Exercício 6.37 esteja inicialmente em repouso em $x = 0$ e que $\vec{F}$ seja a força resultante atuando sobre o carro. Use o teorema do trabalho-energia para calcular a velocidade do carro em a) $x = 3{,}0$ m; b) $x = 4{,}0$ m; c) $x = 7{,}0$ m.

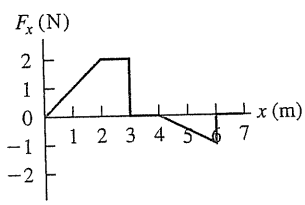


Figura 6.32 Exercícios 6.37 e 6.38.

6.39 Em um parque aquático, um trenó com seu condutor é impulsionado ao longo de uma superfície horizontal escorregadia pela liberação de uma mola forte comprimida. A constante da mola é $k = 4000$ N/m e a mola possui massa desprezível e repousa sobre uma superfície horizontal sem atrito. Uma extremidade está em contato com uma parede fixa. O trenó e seu condutor, com massa total de 70,0 kg, são empurrados contra a outra extremidade, comprimindo 0,375 m a mola. O trenó é a seguir liberado da mola sem velocidade inicial. Qual é a velocidade do trenó quando a mola a) retorna ao seu comprimento sem deformação? b) está ainda comprimida 0,200 m?

6.40 Meia mola. a) Suponha que você corte pela metade uma mola ideal sem massa. Se a mola inteira possuía um força constante k, qual é a constante de força de cada metade, em termos de k? (*Sugestão:* pense na mola original como duas metades iguais, cada uma produzindo a mesma força que a mola inteira. Você sabe por que as forças devem ser iguais?) b) Se você cortar a mola em três partes iguais, qual é a constante de força de cada parte, em termos de k?

6.41 Um pequeno cavaleiro comprime uma mola na parte inferior de um trilho de ar inclinado de um ângulo de 40,0° acima da horizontal. O cavaleiro possui massa 0,0900 kg. A mola possui massa desprezível e $k = 640$ N/m. Quando a mola é liberada, o cavaleiro se desloca até uma distância máxima de 1,80 m ao longo do trilho de ar antes de começar a escorregar de volta. Antes de atingir essa distância máxima o cavaleiro perde o contato com a mola. a) Calcule a distância em que a mola foi originalmente comprimida. b) Quando o cavaleiro se deslocou uma distância de 0,80 m ao longo do trilho de ar a partir de sua posição inicial em que estava contra a mola comprimida, ele ainda mantinha contato com a mola? Qual é a energia cinética do cavaleiro nesse ponto?

6.42 Um pedreiro engenhoso montou um dispositivo que dispara tijolos até a altura da parede onde ele está trabalhando. Ele coloca o tijolo comprimindo uma mola vertical com massa desprezível e constante da mola $k = 450$ N/m. Quando a mola é liberada, o tijolo é disparado de baixo para cima. Sabendo que o tijolo possui massa de 1,80 kg e que ele deve atingir uma altura máxima de 3,6 m acima de sua posição inicial sobre a mola comprimida, qual é a distância que a mola deve ser inicialmente comprimida? (O tijolo perde o contato com a mola no instante em que a mola retorna ao seu comprimento sem deformação. Por quê?)

Seção 6.4 Potência

6.43 Quantos joules de energia uma lâmpada de 100 watts consome por hora? Qual a velocidade com que uma pessoa de 70 kg teria que correr para produzir esse valor de energia cinética?

6.44 O consumo total de energia elétrica nos Estados Unidos é aproximadamente igual a $1{,}0 \times 10^{19}$ J por ano. a) Qual é a taxa de consumo médio de energia elétrica em watts? b) Sabendo que a população dos Estados Unidos é de 300 milhões de habitantes, qual é a taxa de consumo médio de energia elétrica por pessoa? c) A energia da radiação solar que atinge a Terra possui uma taxa aproximadamente igual a 1,0 kW por metro quadrado da superfície terrestre. Se essa energia pudesse ser convertida em energia elétrica com eficiência de 40%, qual seria a área (em quilômetros quadrados) para coletar a energia solar necessária para obter a energia elétrica usada nos Estados Unidos?

6.45 Magnetar. Em 27 de dezembro de 2004, astrônomos observaram o maior clarão de luz jamais registrado fora do sistema solar, proveniente da estrela de nêutron altamente magnética SGR 1806-20 (um *magnetar*). Em 0,20 s, essa estrela liberou a mesma energia que o Sol em 250000 anos. Se P é a potência média do Sol, qual é a potência média (em termos de P) desse magnetar?

6.46 Uma rocha de 20,0 kg está deslizando sobre uma superfície horizontal áspera a 8,0 m/s e eventualmente pára em função do atrito. O coeficiente de atrito cinético entre a rocha e a superfície é 0,200. Que potência média é produzida pelo atrito até que a rocha pare?

6.47 Uma dupla de atletas de bicicleta *tandem* (bicicleta com dois assentos) deve superar uma força de 165 N para manter uma velocidade de 9,0 m/s. Calcule a potência em watts necessária para cada competidor, supondo que cada um deles pedale com a mesma potência. Expresse sua resposta em watts e em *horsepower*.

6.48 Quando seu motor de 75 kW fornece potência máxima, um avião monomotor com massa de 700 kg ganha altura com uma taxa de 2,5 m/s (ou 150 m/min). Qual é a fração da potência do motor que está sendo usada para fazer o avião subir? (A potência restante é usada para superar os efeitos da resistência do ar e compensar as ineficiências da hélice e do motor.)

6.49 Trabalhando como um cavalo. Seu trabalho é colocar em um caminhão engradados de 30,0 kg, elevando-os 0,90 m do chão até o caminhão. a) Quantos engradados você coloca no caminhão em um minuto, supondo que a sua potência média seja igual a 0,50 hp? b) E para uma potência média de 100 W?

6.50 Um elevador possui massa de 600 kg, não incluindo a massa dos passageiros. O elevador foi projetado para subir com velocidade constante uma distância vertical de 20,0 m (cinco andares) em 16,0 s, sendo impulsionado por um motor que o fornece uma

potência máxima de 29,84 kW. Qual é o número máximo de passageiros que o elevador pode transportar? Suponha que cada passageiro possua massa de 65,0 kg.

6.51 Potência automotiva. Não é fora do comum um carro de 1000 kg atingir 30 mi/gal ao se deslocar a 60 mi/h por uma estrada plana. Supondo que esse carro faça uma viagem de 200 km, a) quantos joules de energia ele consome? e b) qual a taxa média de consumo de energia durante a viagem? Note que 1,0 gal de gasolina rende 1,3 X 10^9 J (sujeito a variações). Consulte o Apêndice E.

6.52 O porta-aviões *John F. Kennedy* possui massa igual a $7,4 \times 10^7$ kg. Quando seus motores desenvolvem a potência máxima de 208880 kW, *John F. Kennedy* se move com velocidade máxima de 65 km/h. Sabendo que 70% dessa potência é usada para impulsionar esse navio, qual é a força de resistência da água que se opõe ao movimento dele?

6.53 Um rebocador de esqui opera com uma corda de 300 m inclinada de 15,0°. A corda se move a 12,0 km/h e a potência é fornecida simultaneamente para 50 esquiadores, cada um deles com massa igual a 70,0 kg. Estime a potência necessária para operar o rebocador.

6.54 Um inseto voador comum aplica uma força média que equivale ao dobro do seu peso, a cada movimento de cima para baixo das asas, enquanto paira no ar. Suponha que a massa do inseto seja 10 g e que as asas se deslocam por uma distância média de cima para baixo de 1,0 cm, a cada batida de asas. Para 100 movimentos de cima para baixo da asa por segundo estime a potência média do inseto.

Problemas

6.55 Barra giratória. Uma barra fina e uniforme de 12,0 kg e 2,0 m de comprimento gira de maneira uniforme em torno de um pivô em uma das suas extremidades, fazendo 5,0 revoluções completas a cada 3,0 segundos. Qual é a energia cinética dessa barra? (*Sugestão:* a velocidade varia em diferentes pontos da barra. Segmente a barra em partes infinitesimais de massa *dm* e some a energia cinética de todos esses segmentos.)

6.56 Um asteróide próximo à Terra. Em 13 de abril de 2029 (uma sexta-feira 13!), o asteróide 99942 Apophis passará a 18600 mi da Terra – cerca de 1/3 da distância até a Lua! Ele possui densidade de 2600 kg/m^3, pode ser modelado como uma esfera de 320 m de diâmetro e se deslocará a 12,6 km/s. a) Supondo que, devido a um pequeno distúrbio em sua órbita, o asteróide fosse colidir com a superfície terrestre, quanta energia cinética ele liberaria? b) A maior bomba nuclear já testada pelos Estados Unidos foi a 'Castle Bravo', capaz de produzir 15 megatons de TNT. (Um megaton de TNT libera $4,184 \times 10^{15}$ J de energia.) Quantas bombas Castle Bravo equivaleriam à energia do asteróide Apophis?

6.57 Um carregador empurra uma mala de 20,0 kg para cima de uma rampa com inclinação de 25,0° acima da horizontal com uma força $\vec{F}$ de módulo igual a 140 N que atua paralelamente à rampa. O coeficiente de atrito cinético é dado por $\mu_c = 0,300$. Se a mala se desloca 3,80 m ao longo da rampa, calcule a) o trabalho realizado sobre a mala pela força $\vec{F}$; b) o trabalho realizado sobre a mala pela força gravitacional; c) o trabalho realizado sobre a mala pela força normal; d) o trabalho realizado sobre a mala pela força de atrito; e) o trabalho total realizado sobre a mala; f) se a velocidade da mala é nula na parte inferior da rampa, qual é sua velocidade depois que ela se desloca 3,80 m ao longo da rampa?

6.58 De queixo erguido. Ao se exercitar em uma barra, levando o queixo até a barra, o corpo de um homem se eleva 0,40 m. a) Qual é o trabalho realizado pelo homem por quilograma de massa de seu corpo? b) Os músculos envolvidos nesse movimento podem produzir 70 J de trabalho por quilograma de massa do músculo. Se o homem consegue fazer a elevação de 0,40 m no limite de seu esforço máximo, qual é o percentual da massa de seu corpo constituído por esses músculos? (Para comparação, é próximo a 43% a porcentagem *total* de músculos de um homem de 70 kg com 14% de gordura.) c) Repita os cálculos da parte (b) para o filho do homem, cujos braços possuem a metade do comprimento dos do pai, porém com músculos que podem produzir 70 J de trabalho por quilograma de massa do músculo. d) Adultos e crianças possuem aproximadamente a mesma porcentagem de músculos em seus corpos. Explique por que uma criança pode fazer uma flexão mais facilmente do que seu pai.

6.59 Máquinas simples. As rampas para deficientes são usadas porque um peso grande p pode ser elevado por uma força relativamente pequena igual a p sen α mais uma pequena força de atrito. Esse plano inclinado constitui um exemplo de um dispositivo chamado *máquina simples*. Uma força F_{ENT} é aplicada na entrada do sistema e produz uma $F_{SAÍDA}$ aplicada no objeto que desejamos locomover. Para uma máquina simples, a razão entre essas forças $F_{SAÍDA}/F_{ENT}$ denomina-se vantagem mecânica real (VMR). A razão inversa, *entrada/saída*, entre as distâncias percorridas pelos pontos de aplicação dessas forças durante o movimento do objeto denomina-se vantagem mecânica ideal (VMI). a) Calcule a VMI para um plano inclinado. b) O que você pode afirmar sobre a razão entre o trabalho fornecido para a máquina, W_{ENT}, e o trabalho realizado pela máquina, $W_{SAÍDA}$, quando VMI = VMR? c) Faça o desenho de uma polia simples de tal modo que VMI = 2. d) Definimos a eficiência e de uma máquina simples como a razão entre o trabalho realizado pela máquina e o trabalho fornecido para máquina, $e = W_{SAÍDA}/W_{ENT}$. Mostre que e = VMR/VMI.

6.60 Considere os blocos do Exercício 6.7, que se movem 75,0 cm. Calcule o trabalho total realizado sobre cada bloco a) caso não haja atrito entre a mesa e o bloco de 20,0 N e b) supondo $\mu_s = 0,500$ e $\mu_c = 0,325$ entre a mesa e o bloco de 20,0 N.

6.61 O ônibus espacial *Endeavour*, com massa igual a 86.400 kg, está em uma órbita circular de raio $6,66 \times 10^6$ m em torno da Terra. O ônibus leva 90,1 min para completar cada órbita. Em uma missão de recuperação, cautelosamente ele se aproxima de um satélite desativado em 1,0 m a cada 3,0 s. Calcule a energia cinética do ônibus espacial a) em relação à Terra; b) em relação ao satélite.

6.62 Um pacote de 5,0 kg desliza para baixo de uma rampa inclinada a 12,0° abaixo da horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre o pacote e a rampa é $\mu_c = 0,310$. Calcule a) o trabalho realizado sobre o pacote pelo atrito; b) o trabalho realizado sobre o pacote pela gravidade; c) o trabalho realizado sobre o pacote pela força normal; d) o trabalho total realizado sobre o pacote. e) Se o pacote possui uma velocidade de 2,20 m/s no topo da rampa, qual é sua velocidade depois de descer 1,50 m ao longo da rampa?

6.63 Molas em paralelo. Duas molas são consideradas em *paralelo* quando uma está paralela em relação à outra e elas estão ligadas pelas extremidades (Figura 6.33). Podemos considerar

que essa combinação equivale a uma única mola. A constante de força da mola única equivalente é chamada de constante de força *efetiva*, k_{efe}, da combinação. a) Demonstre que a constante de força efetiva dessa combinação é $k_{efe} = k_1 + k_2$. b) Generalize esse resultado para n molas em paralelo.

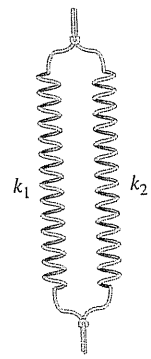


Figura 6.33 Problema 6.63.

6.64 Molas em série. Duas molas sem massa estão ligadas em série quando a ponta de uma está ligada à base da outra. a) Demonstre que a constante de força efetiva (veja Problema 6.63) de uma combinação em série é dada por

$$\frac{1}{k_{efe}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

(*Sugestão:* para uma dada força, a distância total alongada pela mola única equivalente é a soma das distâncias alongadas pela combinação de molas. Além disso, cada mola deve exercer a mesma força. Você consegue entender por quê? b) Generalize esse resultado para n molas em série.

6.65 Um objeto é atraído para a origem com uma força dada por $F_x = -k/x^2$. (As forças elétricas e as gravitacionais possuem esse tipo de dependência com a distância.) a) Calcule o trabalho realizado pela força F_x quando o objeto se desloca ao longo do eixo Ox de x_1 a x_2. Se $x_2 > x_1$, verifique se o trabalho realizado por F_x é positivo ou negativo. b) A única força, além dessa, é a força que a sua mão exerce sobre o objeto para deslocá-lo lentamente de x_1 a x_2. Qual trabalho você realiza? Se $x_2 > x_1$, o trabalho realizado por você é positivo ou negativo? c) Explique as semelhanças e as diferenças entre suas respostas das partes (a) e (b).

6.66 A força gravitacional da Terra sobre um objeto é inversamente proporcional ao quadrado da distância do objeto a partir do centro da Terra. Na superfície terrestre, essa força é igual ao peso normal do objeto mg, onde $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$; em grandes distâncias, a força é igual a zero. Se um asteróide de 20000 kg cai sobre a Terra de uma distância muito grande, qual é sua velocidade escalar mínima quando atinge a superfície terrestre e quanta energia cinética ele transmite ao nosso planeta? Despreze os efeitos da atmosfera terrestre.

6.67 Coeficiente de atrito variável. Uma caixa desliza sobre uma superfície horizontal com velocidade escalar de 4,50 m/s quando, no ponto P, encontra uma área áspera. Na área áspera, o coeficiente de atrito não é constante, mas se inicia a 0,100 em P e aumenta linearmente conforme ultrapassa P, atingindo um valor de 0,600 a 12,5 m após o ponto P. a) Use o teorema de trabalho-energia para achar a distância percorrida por essa caixa antes de parar. b) Qual é o coeficiente de atrito no ponto de parada? c) Qual distância a caixa percorreria, caso o coeficiente de atrito não aumentasse, mas, em vez disso, tivesse o valor constante de 0,100?

6.68 Considere uma certa mola que não obedece rigorosamente à lei de Hooke. Uma das extremidades da mola é mantida fixa. Para manter a mola comprimida ou esticada a uma distância x, é necessário aplicar uma força na extremidade livre da mola ao longo do eixo Ox com módulo dado por $F_x = kx - bx^2 + cx^3$. Aqui, $k = 100\ \text{N/m}$, $b = 700\ \text{N/m}^2$ e $c = 12000\ \text{N/m}^3$. Note que para $x > 0$, a mola está esticada e para $x < 0$ a mola está comprimida. a) Qual o trabalho necessário para *esticar* essa mola 0,050 m a partir do seu comprimento sem deformação? b) Qual o trabalho necessário para *comprimir* essa mola 0,050 m a partir do seu comprimento sem deformação? c) É mais fácil comprimir ou esticar essa mola? Explique por que, em termos da dependência de F_x com x. (Muitas molas reais se comportam qualitativamente do mesmo modo.)

6.69 Um pequeno bloco com massa de 0,120 kg está ligado a um fio que passa através de um buraco em uma superfície horizontal sem atrito (Figura 6.34). Inicialmente, o bloco gira a uma distância de 0,40 m do buraco com uma velocidade de 0,70 m/s. A seguir, o fio é puxado por baixo, fazendo o raio do círculo encurtar para 0,10 m. Nessa nova distância verifica-se que sua velocidade passa para 2,80 m/s. a) Qual era a tensão no fio quando o bloco possuía velocidade $v = 0{,}70$ m/s? b) Qual é a tensão no fio quando o bloco possuía velocidade final $v = 2{,}80$ m/s? c) Qual foi o trabalho realizado pela pessoa que puxou o fio?

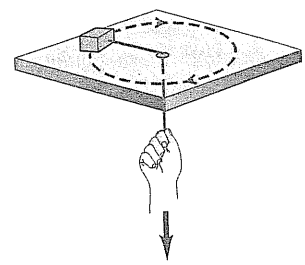


Figura 6.34 Problema 6.69.

6.70 Bombardeio com próton. Um próton com massa igual a $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg é impulsionado com uma velocidade inicial de $3{,}0 \times 10^5$ m/s diretamente contra um núcleo de urânio situado a uma distância de 5,0 m. O próton é repelido pelo núcleo de urânio com uma força com módulo $F_x = \alpha/x^2$, onde x é a distância entre as duas partículas e $\alpha = 2{,}12 \times 10^{-26}\ \text{N} \cdot \text{m}^2$. Suponha que o núcleo de urânio permaneça em repouso. a) Qual é a velocidade do próton quando ele está a uma distância de $8{,}0 \times 10^{-10}$ m do núcleo de urânio? b) À medida que o próton se aproxima do núcleo de urânio, a força de repulsão faz sua velocidade diminuir até ele ficar momentaneamente em repouso, depois passando a se afastar do núcleo de urânio. Qual é a distância mínima entre o próton e o núcleo de urânio? c) Qual é a velocidade do próton quando ele está novamente a uma distância de 5,0 m do núcleo de urânio?

6.71 Um bloco de gelo com massa de 6,0 kg está inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. A seguir, um trabalhador aplica uma força horizontal $\vec{F}$ sobre ele. Como resultado, o bloco se move ao longo do eixo Ox de tal modo que sua posição em função do tempo é dada por $x(t) = \alpha t^2 + \beta t^3$, onde $\alpha = 0{,}200\ \text{m/s}^2$ e $\beta = 0{,}0200\ \text{m/s}^3$. a) Calcule a velocidade do bloco quando $t = 4{,}0$ s. b) Calcule o módulo de $\vec{F}$ quando $t = 4{,}0$ s. c) Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ durante os primeiros 4,0 s do movimento.

6.72 A Colisão da *Genesis*. Quando a cápsula de 210 kg da Missão *Genesis* colidiu com a superfície terrestre (veja o Exercício 5.17 no Capítulo 5) a uma velocidade de 311 km/h, ela penetrou 81,0 cm no solo do deserto. Supondo uma aceleração constante durante a colisão, qual a taxa média com que a cápsula realizou trabalho sobre o deserto?

6.73 Você e sua bicicleta possuem massa total igual a 80,0 kg. Quando você atinge a base de uma ponte, está se deslocando com uma velocidade de 5,0 m/s (Figura 6.35). No topo da ponte você subiu uma distância vertical de 5,20 m e sua velocidade diminuiu para 1,50 m/s. Despreze o trabalho realizado pelo atrito e qualquer ineficiência na bicicleta ou em suas pernas. a) Qual o trabalho total realizado sobre você e sua bicicleta quando você vai da

base ao topo da ponte? b) Qual o trabalho realizado pela força que você aplica sobre os pedais?

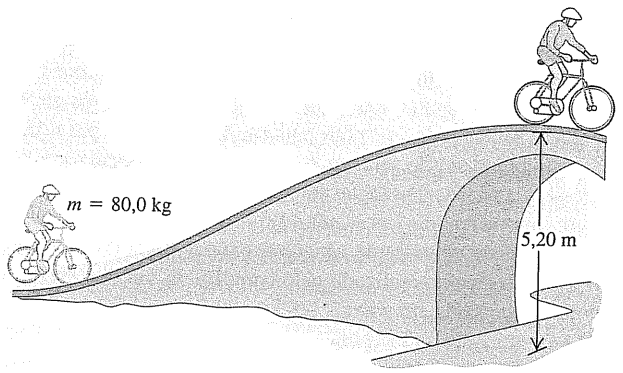


Figura 6.35 Problema 6.73.

6.74 Uma força orientada no sentido positivo do eixo $+Ox$ possui módulo $F = b/x^n$, onde b e n são constantes. a) Para $n > 1$, calcule o trabalho realizado por essa força sobre uma partícula que se move ao longo do eixo Ox desde $x = x_0$ até o infinito. b) Mostre que para $0 < n < 1$, embora F se anule quando x se torna muito grande, uma quantidade infinita de trabalho é realizado por F quando a partícula se move desde $x = x_0$ até o infinito.

6.75 Você foi designado para projetar pára-choques com molas para as paredes de uma garagem de estacionamento. Um carro de 1200 kg se movendo a 0,65 m/s não pode comprimir as molas mais do que 0,070 m antes de parar. Qual deve ser a constante da mola? Despreze a massa da mola.

6.76 Uma espingarda de mola possui massa desprezível e a constante da mola é dada por $k = 400$ N/m. A mola é comprimida 6,0 cm e uma bala de massa 0,0300 kg é colocada no cano horizontal contra a mola comprimida. A seguir a mola é liberada, e a bala recebe um impulso, saindo do cano da arma. O cano possui 6,0 cm de comprimento, de modo que a bala deixa o cano no mesmo ponto onde ela perde o contato com a mola. A arma é mantida de modo que o cano fique na horizontal. a) Desprezando o atrito, calcule a velocidade da bala ao deixar o cano da arma. b) Calcule a velocidade com que a bala deixa o cano da arma quando uma força resistiva constante de 6,0 N atua sobre ela enquanto ela se move ao longo do cano. c) Para a situação descrita no item (b), em que posição ao longo do cano a bala possui sua velocidade máxima e qual é essa velocidade? (Nesse caso, a velocidade máxima não ocorre na extremidade do cano.)

6.77 Um livro de 2,50 kg é forçado contra uma mola de massa desprezível com uma constante da mola igual a 250 N/m, comprimindo a mola até uma distância de 0,250 m. Quando ela é liberada, o livro desliza sobre o topo de uma mesa horizontal com coeficiente de atrito cinético $\mu_c = 0{,}30$. Use o teorema do trabalho-energia para calcular a distância máxima que o livro pode percorrer desde sua posição inicial até atingir o repouso.

6.78 Empurrando uma gata. Sua gata Mimi (massa 7,0 kg) está tentando subir uma rampa sem atrito de 2,0 m de comprimento e inclinada a 30,0° acima da horizontal. Como a pobre gata não encontra tração na rampa, você a empurra durante toda a extensão da rampa, exercendo sobre ela uma força constante de 100 N paralela à rampa. Supondo que Mimi comece a correr, de modo a estar com velocidade de 2,40 m/s na base da rampa, qual será sua velocidade no topo da rampa? Use o teorema do trabalho-energia.

6.79 Barreira de amortecimento. Um estudante propõe um projeto com uma barreira para amortecer batidas de automóveis no qual um veículo esportivo de 1700 kg, movendo-se a 20,0 m/s, choca-se contra uma mola de massa desprezível que o faz diminuir sua velocidade até parar. Para evitar danos aos passageiros, o módulo da aceleração quando o veículo diminui sua velocidade não pode ser maior do que 5,0 g. a) Ache a constante da mola k necessária e calcule até que distância a mola deve ser comprimida para que faça o carro parar. Em seus cálculos, despreze possíveis deformações do veículo e o atrito entre o veículo e o solo. b) Quais são as desvantagens desse projeto?

6.80 Um professor de física está sentado em sua cadeira, que desliza sobre rolamentos sem atrito, sendo empurrado para cima de um plano inclinado a 30,0° acima da horizontal. A massa total do professor com sua cadeira é igual a 85,0 kg. Ele é empurrado 2,50 m ao longo do plano inclinado por um grupo de alunos que juntos exercem uma força horizontal constante de 600 N. O professor possuía uma velocidade de 2,0 m/s na base da rampa. Use o teorema do trabalho-energia para calcular sua velocidade no topo da rampa.

6.81 Um bloco de 5,0 kg se move com $v_0 = 6{,}0$ m/s sobre uma superfície horizontal sem atrito, dirigindo-se contra uma mola cuja constante é dada por $k = 500$ N/m e que possui uma de suas extremidades presa a uma parede (Figura 6.36). A massa da mola é desprezível. a) Calcule a distância máxima que a mola pode ser comprimida. b) Se a distância máxima que a mola pudesse ser comprimida fosse de 0,150 m, qual seria o valor máximo de v_0?

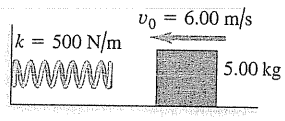


Figura 6.36 Problema 6.81.

6.82 Considere o sistema indicado da Figura 6.37. A corda e a polia possuem massas desprezíveis, e a polia não possui atrito. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco de 8,0 kg e o topo da mesa é dado por $\mu_c = 0{,}250$. Os blocos são liberados a partir do repouso. Use métodos de energia para calcular a velocidade do bloco de 6,0 kg no momento em que ele desceu 1,50 m.

6.83 Considere o sistema indicado na Figura 6.37. A corda e a polia possuem massas desprezíveis, e a polia não tem atrito. Inicialmente, o bloco de 6,0 kg desloca-se verticalmente para baixo e o bloco de 8,0 kg desloca-se para a direita, ambos com velocidade de 0,900 m/s. Os blocos entram em repouso após percorrerem 2,0 m. Use o teorema do trabalho-energia para calcular o coeficiente de atrito cinético entre o bloco de 8,0 kg e o topo da mesa.

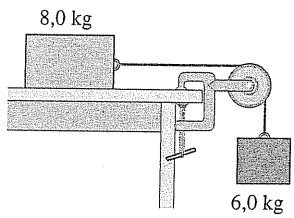


Figura 6.37 Problemas 6.82 e 6.83.

6.84 Arco e flecha. A Figura 6.38 mostra como a força exercida pelo fio de um arco varia em função da distância em que a flecha é puxada para trás (o *comprimento de deformação*). Suponha que a mesma força seja fornecida para a flecha que se move para frente quando o fio é liberado. A deformação máxima para esse arco corresponde a um comprimento de deformação igual a 75,0 cm. Se o arco atira uma flecha de 0,0250 kg quando ele está submeti-

do a uma deformação máxima, qual é a velocidade da flecha quando ela abandona o arco?

6.85 Em uma pista de patinação no gelo horizontal e essencialmente sem atrito, uma patinadora que desliza a 3,0 m/s encontra uma área áspera que reduz sua velocidade em 45%, devido a uma força de atrito que corresponde a 25% do seu peso. Use o teorema do trabalho-energia para calcular o comprimento dessa área áspera.

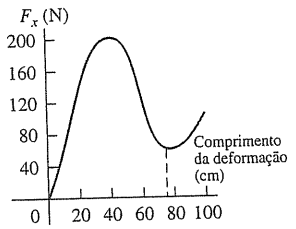


Figura 6.38 Problema 6.84.

6.86 Resgate. Sua amiga (com massa de 65 kg) está parada sobre o gelo no meio de um lago congelado. Como há muito pouco atrito entre os pés dela e o gelo, ela não consegue andar. Felizmente, uma corda leve está amarrada à cintura dela, e você está na margem segurando a outra ponta. Você puxa a corda por 3,0 s e acelera sua amiga a partir do repouso para uma velocidade de 6,0 m/s enquanto você permanece em repouso. Qual é a potência média fornecida pela força que você aplicou?

6.87 Uma bomba deve elevar 800 kg de água por minuto de um poço com profundidade de 14,0 m e despejá-la com velocidade de 18,0 m/s. a) Qual é o trabalho realizado por minuto para elevar a água? b) Qual é o trabalho realizado para fornecer a energia cinética da água quando ela é despejada? c) Qual é a potência de saída da bomba?

6.88 Ache a potência de saída do trabalhador do Problema 6.71 em função do tempo. Qual é o valor numérico da potência (em watts) para $t = 4{,}0$ s?

6.89 Uma aluna de física gasta parte do seu dia caminhando para se deslocar entre salas de aula ou durante os intervalos e, nesse período, ela gasta energia com uma taxa média de 280 W. No restante do dia ela permanece sentada, estudando ou repousando; durante essas atividades ela gasta energia com uma taxa média de 100 W. Se ela gasta um total de $1{,}1 \times 10^7$ J de energia em um dia de 24 horas, qual é a parte do dia que ela gasta caminhando?

6.90 Qualquer pássaro, independentemente do tamanho, deve manter uma potência de saída de 10 a 25 W por quilograma de massa do corpo para poder voar batendo as asas. a) Um colibri dos Andes (*Patagona gigas*) possui massa de 70 g e bate as asas dez vezes por segundo enquanto está pairando. Estime o trabalho realizado por esse colibri em cada batida de asa. b) Um atleta de 70 kg pode manter uma potência de saída de 1,4 kW durante intervalos de tempo não superiores a alguns segundos; a potência de saída *estacionária* para um atleta típico é apenas cerca de 500 W. É possível um avião movido pela potência humana voar por um período longo batendo as asas? Explique.

6.91 A represa Grand Coulee possui 1270 m de comprimento e 170 m de altura. A potência elétrica de saída obtida dos geradores em sua base é aproximadamente igual a 2000 MW. Quantos metros cúbicos de água devem fluir por segundo do topo da represa para produzir essa potência, sabendo-se que 92% do trabalho realizado pela gravidade sobre a água é convertido em energia elétrica? (Cada metro cúbico de água possui massa de 1000 kg.)

6.92 O motor de um carro de massa m fornece uma potência constante P para as rodas, para acelerar o carro. Despreze a resistência do ar e o atrito de rolamento. O carro está inicialmente em repouso. a) Mostre que a velocidade do carro é dada em função do tempo por $v = (2Pt/m)^{1/2}$. b) Mostre que a aceleração do carro não é constante, mas é dada em função do tempo por $a = (P/2mt)^{1/2}$. c) Mostre que o deslocamento é dado em função do tempo por $x - x_0 = (8P/9m)^{1/2} t^{3/2}$.

6.93 Potência do coração humano. O coração humano é uma bomba potente e extremamente confiável. A cada dia ele recebe e descarrega cerca de 7500 l de sangue. Suponha que o trabalho realizado pelo coração seja igual ao trabalho necessário para elevar essa quantidade de sangue até uma altura igual à altura média de uma mulher norte-americana (1,63 m). A densidade (massa por unidade de volume) do sangue é igual a $1{,}05 \times 10^3$ kg/m^3. a) Qual é o trabalho realizado pelo coração em um dia? b) Qual a potência de saída em watts?

6.94 Seis unidades a diesel em série podem fornecer 13,4 MW de potência para o primeiro vagão de um trem de carga. Essas unidades a diesel possuem massa total de $1{,}10 \times 10^6$ kg. Um vagão médio do trem possui massa de $8{,}2 \times 10^4$ kg e necessita de uma força horizontal de 2,8 kN para se mover com velocidade constante de 27 m/s em um trilho horizontal. a) Quantos vagões podem existir no trem nessas condições? b) Entretanto, neste caso não sobraria nenhuma potência para acelerar ou para subir uma montanha. Mostre que a força extra necessária para acelerar o trem é aproximadamente a mesma para uma aceleração de 0,10 m/s^2 ou para fazer o trem subir uma inclinação de 1,0% (ângulo de inclinação $\alpha = \text{arctg } 0{,}010$). c) Para uma inclinação de 1,0%, mostre que uma potência extra de 2,9 MW é necessária para manter a velocidade de 27 m/s das unidades a diesel. d) Se a potência de 2,9 MW não estivesse disponível, quantos vagões as seis unidades a diesel poderiam puxar para cima de uma inclinação de 1,0% mantendo uma velocidade constante de 27 m/s?

6.95 A locomotiva de um trem de passageiros com 16 vagões e massa total de $9{,}1 \times 10^5$ kg produz uma força de 53 kN para puxar o trem com velocidade constante de 45 m/s em um trilho horizontal. a) Qual é a potência fornecida pela locomotiva para o primeiro vagão? b) Qual é a potência adicional fornecida para o primeiro vagão além da calculada no item (a) necessária para fornecer ao trem uma aceleração de 1,5 m/s^2 no momento em que o trem possui velocidade constante de 45 m/s em um trilho horizontal? c) Qual é a potência adicional fornecida para o primeiro vagão além da calculada no item (a) necessária para fazer o trem subir uma inclinação de 1,5% (ângulo de inclinação $\alpha = \text{arctg } 0{,}015$) com velocidade constante de 45 m/s?

6.96 Um objeto é submetido à ação de diversas forças. Uma dessas forças é dada por $\vec{F} = axy\hat{\imath}$, uma força ao longo do eixo Ox cujo módulo depende da posição do objeto, sendo a = 2,50 N/m^2. Calcule o trabalho realizado por essa força para os seguintes deslocamentos do objeto: a) O objeto começa a se deslocar no ponto $x = 0$, $y = 3{,}0$ m e se move paralelamente ao eixo Ox ao ponto $x = 2{,}0$ m, $y = 3{,}0$ m. b) O objeto começa a se deslocar no ponto $x = 2{,}0$ m, $y = 0$ e se move paralelamente ao eixo Oy ao ponto $x = 2{,}0$ m, $y = 3{,}0$ m. c) O objeto está inicialmente na origem e se move sobre a linha $y = 1{,}5x$ até o ponto $x = 2{,}0$ m, $y = 3{,}0$ m.

6.97 Ciclismo. Para uma bicicleta de competição, o coeficiente $C(f_{ar} = \frac{1}{2}CA\rho v^2)$ de arraste é 1,0, a área frontal é igual a 0,463 m^2, e o coeficiente de atrito de rolamento é igual a 0,0045. Uma ciclista possui massa de 50,0 kg, e sua bicicleta possui massa de 12,0 kg. a) Para manter uma velocidade de 12,0 m/s em uma estrada horizontal, qual deve ser a potência fornecida pela ciclista para a roda

traseira? b) Durante uma corrida, a mesma ciclista usa outra bicicleta com coeficiente de atrito de rolamento igual a 0,0030 e massa de 9,0 kg. Ela também se curva para baixo, reduzindo seu coeficiente de arraste para 0,88 e sua área frontal para 0,366 m^2. Qual deve ser a potência fornecida pela ciclista para a roda traseira manter uma velocidade de 12,0 m/s? c) Para a situação descrita na parte (b), qual é a potência necessária para manter uma velocidade de 6,0 m/s? Note a grande queda de potência necessária quando a velocidade se reduz somente à metade. (Para maiores detalhes sobre limitações aerodinâmicas em diversos veículos impulsionados pela potência humana, veja o artigo "The Aerodynamics of Human-Powered Land Vehicles" — "Aerodinâmica de Veículos Impulsionados pela Potência Humana", publicado na revista *Scientific American*, em dezembro de 1983.)

6.98 Potência automotiva I. O motor de um caminhão transmite 28,0 kW para as rodas de direção, quando o caminhão está se deslocando a uma velocidade constante de módulo 60,0 km/h em uma estrada plana. a) Qual é a força retardadora que atua sobre o caminhão? b) Suponha que 65% da força retardadora sejam provenientes do atrito de rolamento e o restante da força retardadora seja proveniente da resistência do ar. Se a força do atrito de rolamento independe da velocidade escalar e a força da resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade escalar, qual potência vai dirigir o caminhão a 30,0 km/h? E a 120,0 km/h? Dê suas respostas em watts e *horsepower*.

6.99 Potência automotiva II. a) Supondo que são necessários 8,0 hp para dirigir um automóvel de 1800 kg, a 60,0 km/h em uma estrada plana, qual é o total da força retardadora em função do atrito, da resistência do ar e assim por diante? b) Qual potência é necessária para dirigir o carro a 60,0 km/h de baixo para cima, a um grau de 10,0% (uma colina que se ergue verticalmente a 10,0 m em 100,0 m horizontais)? c) Qual potência é necessária para dirigir o carro a 60,0 km/h *de cima para baixo* a um grau de 1,00%? d) A qual grau percentual o carro desceria pela encosta a 60,0 km/h?

Problemas desafiadores

6.100 Em um dia de inverno em uma cidade que neva muito, o trabalhador de um armazém está empilhando caixas sobre uma rampa rugosa inclinada de um ângulo α acima da horizontal. A rampa está parcialmente coberta de gelo e na sua base existe mais gelo do que no seu topo, de modo que o coeficiente de atrito aumenta com a distância x ao longo da rampa: $\mu = Ax$, onde A é uma constante positiva e a base da rampa corresponde a $x = 0$. (Para essa rampa, o coeficiente de atrito cinético é igual ao coeficiente de atrito estático: $\mu_c = \mu_s = \mu$.) Uma caixa é empurrada para cima da rampa, de modo que ela sobe a partir da base com uma velocidade inicial v_0. Mostre que quando a caixa atingir momentaneamente o repouso ela continuará em repouso se

$$v_0^2 \geq \frac{3g\,\mathrm{sen}^2\alpha}{A\cos\alpha}$$

6.101 Mola com massa. Geralmente desprezamos a energia cinética das espirais da mola, porém, vamos agora tentar obter uma aproximação razoável sem desprezar esse fator. Seja M a massa da mola, L_0 seu comprimento normal antes da deformação e k a constante da mola. O trabalho realizado para esticar ou comprimir a mola a uma distância L é dado por $\frac{1}{2}kX^2$, onde $X = L - L_0$. a) Considere a mola descrita acima e suponha que uma de suas extremidades esteja fixa e a outra se mova com velocidade v. Suponha que a velocidade ao longo da mola varie linearmente com a distância l da extremidade fixa. Suponha também que a massa M seja uniformemente distribuída ao longo da mola. Calcule a energia cinética da mola em função de M e de v. (*Sugestão:* divida a mola em segmentos de comprimento dl, calcule a velocidade de cada segmento em função de l, de v e de L; ache a massa de cada segmento em função de dl, de M e de L; a seguir integre de 0 a L. O resultado *não* será igual a $1/2Mv^2$, porque as partes da mola não se movem com a mesma velocidade.) Em uma espingarda de mola, a mola possui massa 0,243 kg e a constante da mola é igual a 3200 N/m; ela é comprimida 2,50 cm a partir do seu comprimento sem deformação. Quando o gatilho é puxado, a mola exerce uma força horizontal sobre uma bala de massa 0,053 kg. Despreze o trabalho realizado pelo atrito. Calcule a velocidade da bala quando a mola atinge seu comprimento sem deformação b) desprezando a massa da mola; c) incluindo a massa da mola usando o resultado da parte (a). d) Na parte (c), qual é a energia cinética da bala e a energia cinética da mola?

6.102 Quando um avião voa, está submetido a uma força de resistência do ar proporcional ao quadrado de sua velocidade v. Porém, existe uma força de resistência adicional porque o avião possui asas. O ar que circula sobre as asas é empurrado para baixo e ligeiramente para frente, de modo que pela terceira lei de Newton ele exerce sobre as asas do avião uma força orientada para cima e inclinada ligeiramente para trás (Figura 6.39). O componente da força orientado para cima é a força de sustentação que mantém o avião suspenso no ar, e o componente da força orientado para trás denomina-se *arraste induzido*. Para velocidades de um vôo típico, o arraste induzido é inversamente proporcional a v_2, de modo que força total de resistência do ar é dada por $F_{ar} = \alpha v^2 + \beta/v^2$, onde α e β são constantes positivas que dependem da forma e do tamanho do avião e da densidade do ar. Para um Cessna 150, um pequeno avião monomotor, $\alpha = 0{,}30\ \mathrm{N \cdot s^2/m^2}$ e $\beta = 3{,}5 \times 10^5\ \mathrm{N \cdot m^2/s^2}$. Em um vôo com velocidade constante, o motor deve fornecer uma força orientada para frente para igualar a força total de resistência do ar. a) Calcule a velocidade (em km/h) deste avião para o qual ele atinja um *alcance* máximo (isto é, atinja a distância máxima para uma dada quantidade de combustível). b) Calcule a velocidade (em km/h) para que este avião tenha a *resistência* máxima (isto é, para que ele permaneça no ar o tempo máximo).

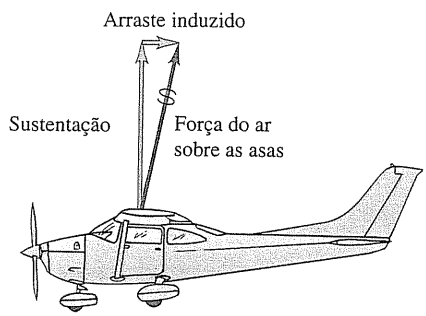


Figura 6.39 Problema Desafiador 6.102.

6.103 A Figura 6.40 mostra a taxa de consumo de oxigênio de um homem caminhando e correndo com diferentes velocidades. O eixo vertical indica o volume de oxigênio (em cm^3) que um homem consome por minuto e por quilograma da massa de seu corpo. Note a transição entre caminhar e correr que ocorre naturalmente em torno de 9 km/h. O metabolismo correspondente a 1 cm^3 liberta cerca de 20 J de energia. Usando os dados do gráfico, calcule a energia necessária para um homem de 70 kg se deslocar 1 km a pé para cada uma das seguintes velocidades: a) 5 km/h (caminhando); b) 10 km/h (correndo); c) 15 km/h (correndo); d) Qual dessas velocidades é mais eficiente, ou seja, qual consome a menor energia para percorrer 1 km?

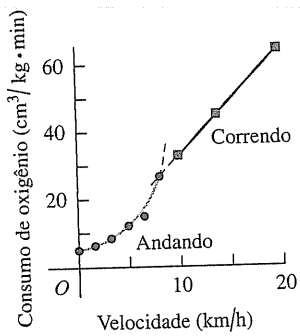


Figura 6.40 Problema Desafiador 6.103.

6.104 Prova geral do teorema do trabalho-energia. Considere uma partícula que se move ao longo de uma trajetória curva no espaço de um ponto (x_1, y_1, z_1) a um ponto (x_2, y_2, z_2). No ponto inicial, a partícula possui velocidade $\vec{v} = v_{1x}\hat{\imath} + v_{1y}\hat{\jmath} + v_{1z}\hat{k}$. A trajetória da partícula pode ser dividida em segmentos infinitesimais $d\vec{l} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$. À medida que a partícula se move, atua sobre ela uma força resultante $\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}$. Os componentes da força F_x, F_y e F_z no caso geral, dependem da posição. Realizando as mesmas etapas usadas na dedução das equações (6.11), (6.12) e (6.13), faça a prova geral do teorema do trabalho-energia. Ou seja, prove que

$$W_{tot} = K_2 - K_1$$

onde

$$W_{tot} = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz)$$

ENERGIA POTENCIAL E CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

7

Quando este nadador mergulha na água, a força da gravidade realiza trabalho positivo ou negativo sobre ele? E a água realiza trabalho positivo ou negativo sobre ele?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Como usar o conceito de energia potencial gravitacional em problemas que envolvem o movimento vertical.
- Como usar o conceito de energia potencial elástica em problemas que envolvem um corpo em movimento ligado a uma mola alongada ou comprimida.
- A distinção entre forças conservativas e não conservativas e como solucionar problemas em que ambos os tipos de força atuam sobre um corpo em movimento.
- Como calcular as propriedades de uma força conservativa quando você conhece a função energia potencial correspondente.
- Como usar diagramas de energia para entender o movimento de um objeto com deslocamento retilíneo sob influência de uma força conservativa.

Quando um mergulhador pula de um trampolim para uma piscina, ele atinge a água com velocidade relativamente elevada, possuindo grande energia cinética. De onde provém essa energia? A resposta que aprendemos no Capítulo 6 é que a força gravitacional (seu peso) exerce um trabalho sobre o mergulhador durante sua queda. A energia cinética do mergulhador — a energia associada com seu *movimento* — aumenta em quantidade igual ao trabalho realizado sobre ele.

Contudo, existe um modo alternativo muito útil para estudar conceitos envolvendo trabalho e energia cinética. Esse novo método se pauta no conceito de *energia potencial*, que é a energia associada com a *posição* da partícula, e não com seu movimento. Segundo essa abordagem, existe *energia potencial gravitacional* mesmo no caso de o mergulhador ficar parado sobre o trampolim. Nenhuma energia é adicionada ao sistema mergulhador—Terra durante sua queda, porém uma energia armazenada é *transformada* de uma forma (energia potencial) para outra forma (energia cinética) durante sua queda. Neste capítulo estudaremos como essa transformação pode ser entendida a partir do teorema do trabalho-energia.

Quando o mergulhador oscila no trampolim antes de pular, a tábua encurvada acumula um segundo tipo de energia potencial denominada *energia potencial elástica*. Discutiremos a energia potencial elástica de sistemas simples, como o de molas comprimidas ou alongadas. (Um terceiro tipo importante de energia potencial está associado com a posição relativa entre cargas elétricas. Esse tipo de energia potencial será estudado no Capítulo 23.)

Demonstraremos que em alguns casos a soma da energia potencial com a energia cinética, que fornece a *energia mecânica total* de um sistema, permanece constante durante o movimento do sistema. Isso nos conduzirá a uma formulação geral da *lei da conservação da energia*, um dos princípios mais fundamentais e abrangentes de todas as ciências.

7.1 Energia potencial gravitacional

Uma partícula ganha ou perde energia cinética porque ela interage com outros objetos que exercem forças sobre ela. Aprendemos no Capítulo 6 que durante qualquer interação a variação da energia cinética da partícula é igual ao trabalho total realizado pelas forças que atuam sobre a partícula.

Em muitas situações, tudo se passa como se a energia fosse armazenada em um sistema para ser recuperada posteriormente. Por exemplo, você precisa realizar um trabalho para erguer uma pesada pedra acima da sua cabeça. Parece

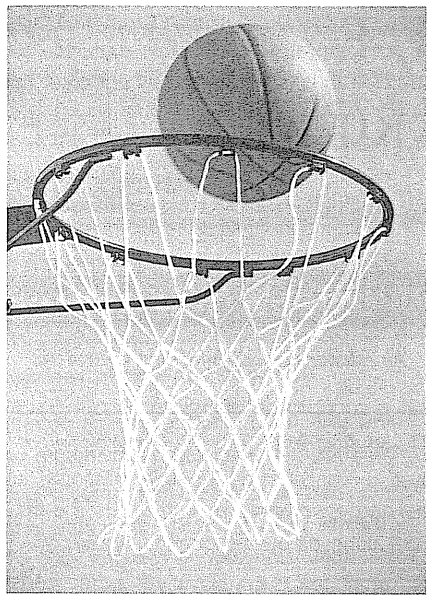


Figura 7.1 Quando uma bola de basquete cai, a energia potencial gravitacional é convertida em energia cinética e a velocidade escalar da bola aumenta.

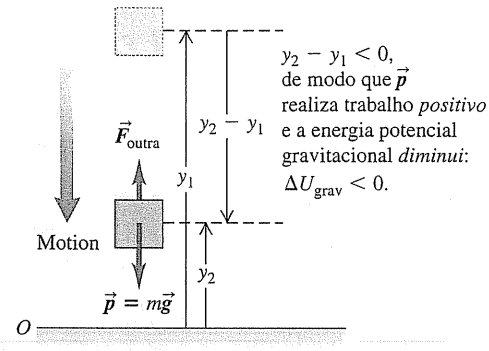
razoável que, elevando a pedra no ar, você esteja armazenando energia no sistema, energia que será mais tarde convertida em energia cinética quando a pedra cair.

Esse exemplo aponta para a idéia de que deve existir uma energia associada com a *posição* dos corpos em um sistema. Esse tipo de energia fornece o *potencial* ou a *possibilidade* da realização de um trabalho; quando uma pedra é elevada no ar, existe um potencial para um trabalho sobre ela ser realizado pela força da gravidade, porém isso só ocorre quando a pedra é libertada. Por esse motivo, a energia associada com a posição denomina-se **energia potencial**. Nossa discussão sugere que existe uma energia potencial associada com o peso do corpo e com sua altura acima do solo. Chamamos essa energia de *energia potencial gravitacional* (Figura 7.1).

Agora temos *duas* maneiras de descrever o que ocorre quando um corpo cai sem resistência do ar. Uma delas é afirmar que a energia potencial gravitacional diminui à medida que a energia cinética aumenta. A outra maneira, que aprendemos no Capítulo 6, é que a energia cinética de um corpo em queda aumenta porque a força gravitacional da Terra sobre o corpo (o seu peso) realiza trabalho sobre ele. Nesta seção, vamos usar o teorema do trabalho-energia para mostrar que essas duas descrições de um corpo em queda são equivalentes.

Para começar, porém, vamos para deduzir uma expressão para a energia potencial gravitacional. Consideremos um corpo de massa m que se move ao longo do eixo Oy (vertical), como mostra a Figura 7.2. As forças que atuam sobre ele são seu peso, com módulo $p = mg$, e possivelmente algumas outras forças; designamos a soma vetorial (a resultante) dessas outras forças por $\vec{F}_{\text{outra}}$.

(a) Um corpo se move de cima para baixo.



(b) Um corpo se move de baixo para cima.

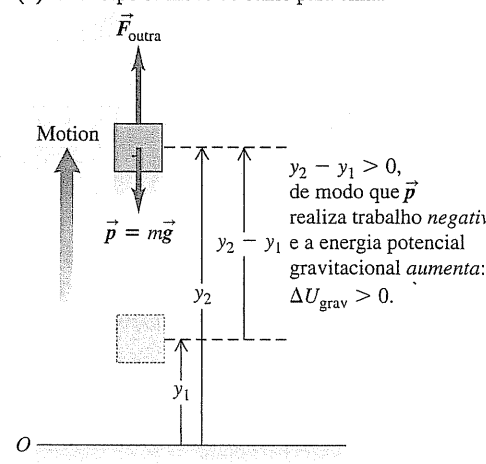


Figura 7.2 Durante o movimento vertical de um corpo desde uma altura inicial y_1 até uma altura final y_2, um trabalho é realizado pela força gravitacional $\vec{p}$ e a energia potencial gravitacional sofre variação.

Vamos supor que o corpo esteja tão suficientemente próximo da superfície da Terra que consideramos seu peso constante. (Verificaremos no Capítulo 12 que o peso diminui com a altura.) Desejamos achar o trabalho realizado pelo peso quando o corpo cai de uma altura y_1 acima da origem até uma altura menor y_2 (Figura 7.2a). O peso e o deslocamento possuem o mesmo sentido, de modo que o trabalho W_{grav} realizado sobre o corpo por seu peso é positivo.

$$W_{\text{grav}} = Fd = w(y_1 - y_2) = mgy_1 - mgy_2 \qquad (7.1)$$

Essa expressão também fornece o trabalho correto quando o corpo se move *de baixo para cima* e y_2 é maior do que y_1 (Figura 7.2b). Nesse caso, a quantidade $(y_1 - y_2)$ é negativa e W_{grav} é negativo porque o deslocamento possui sentido contrário ao do peso.

A Equação (7.1) mostra que podemos expressar W_{grav} em termos dos valores das quantidades mgy no início e no final do deslocamento. Essa grandeza, o produto do peso mg pela altura y acima da origem do sistema de coordenadas, denomina-se **energia potencial gravitacional**, U_{grav}:

$$U_{grav} = mgy \qquad (7.2)$$

(energia potencial gravitacional)

Seu valor inicial é $U_{grav,1} = mgy_1$ e seu valor final é $U_{grav,2} = mgy_2$. A variação de U_{grav} é seu valor final menos o valor inicial, ou $\Delta U_{grav} = U_{grav,2} - U_{grav,1}$. Podemos expressar o trabalho W_{grav} realizado pela força gravitacional durante o deslocamento de y_1 a y_2 do seguinte modo

$$W_{grav} = U_{grav,1} - U_{grav,2} = -(U_{grav,2} - U_{grav,1}) = -\Delta U_{grav} \quad (7.3)$$

O sinal negativo antes de ΔU_{grav} é *fundamental*. Quando um corpo se move de baixo para cima, y aumenta, o trabalho realizado pela força gravitacional é negativo e a energia potencial gravitacional aumenta ($\Delta U_{grav} > 0$). Quando um corpo se move de cima para baixo, y diminui, o trabalho realizado pela força gravitacional é positivo e a energia potencial gravitacional diminui ($\Delta U_{grav} < 0$). É como sacar dinheiro do banco (diminuindo U_{grav}) e gastá-lo (realizando trabalho positivo). Como a Equação (7.3) mostra, a unidade de energia potencial é o joule (J), a mesma unidade usada para trabalho.

ATENÇÃO A qual corpo 'pertence' a energia potencial gravitacional? *Não* é correto chamar $U_{grav} = mgy$ de 'energia potencial gravitacional do corpo'. A energia potencial gravitacional é uma propriedade do *conjunto* corpo e Terra. A energia potencial gravitacional cresce quando a Terra permanece fixa e a altura do corpo aumenta; ela também cresceria se o corpo permanecesse fixo no espaço e a Terra se afastasse do corpo. Note que a fórmula $U_{grav} = mgy$ envolve uma característica do corpo (sua massa m) e outra característica que depende da Terra (o valor de g).

Conservação da energia mecânica (somente forças gravitacionais)

Para verificar a utilidade do conceito de energia potencial gravitacional, suponha que o peso seja a *única* força atuando sobre o corpo, de modo que $\vec{F}_{outra} = \mathbf{0}$. O corpo então cai livremente sem resistência do ar e pode se mover para cima ou para baixo. Seja v_1 sua velocidade a uma altura y_1 e v_2 sua velocidade a uma altura y_2. O teorema do trabalho-energia, Equação (6.6), afirma que o trabalho total realizado sobre o corpo é igual à variação da energia cinética do corpo: $W_{tot} = \Delta K = K_2 - K_1$. Como a gravidade é a única força atuando sobre o corpo, então, pela Equação (7.3), $W_{tot} = W_{grav} = -\Delta U_{grav} = U_{grav,1} - U_{grav,2}$. Ou seja,

$$\Delta K = -\Delta U_{grav} \quad \text{ou} \quad K_2 - K_1 = U_{grav,1} - U_{grav,2}$$

a qual pode ser escrita como

$$K_1 + U_{grav,1} = K_2 + U_{grav,2} \qquad (7.4)$$

(se somente a gravidade realiza trabalho)

ou

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 \qquad (7.5)$$

(se somente a gravidade realiza trabalho)

Agora, definimos a soma $K + U_{grav}$ da energia cinética com a energia potencial como E, a **energia mecânica total do sistema**. O 'sistema' aqui considerado é o corpo de massa m juntamente com a Terra, visto que a energia potencial gravitacional U é uma propriedade compartilhada pela Terra e pelo corpo. Então, $E_1 = K_1 + U_{grav,1}$ é a energia mecânica total a uma altura y_1, e $E_2 = K_2 + U_{grav,2}$ é a energia mecânica total a uma altura y_2. A Equação (7.4) afirma que quando somente o peso do corpo realiza trabalho sobre ele então $E_1 = E_2$. Ou seja, E permanece constante; possui o mesmo valor em y_1 e em y_2. Porém, como y_1 e y_2 são dois pontos arbitrários no movimento do corpo, a energia mecânica total E possui o mesmo valor em *todos* os pontos durante o movimento do corpo:

$$E = K + U_{grav} = \text{constante}$$

(se somente a gravidade realiza trabalho)

Quando uma grandeza possui sempre o mesmo valor, dizemos que ela é uma grandeza *conservada*. *Quando somente a gravidade realiza trabalho, a energia mecânica total é constante, ou seja, ela é conservada* (Figura 7.3). Esse é nosso primeiro exemplo da **conservação da energia mecânica**.

Quando arremessamos uma bola no ar, sua velocidade diminui à medida que a energia cinética é convertida em energia potencial gravitacional: $\Delta K < 0$ e $\Delta U_{grav} > 0$. Quando a bola desce, a energia potencial é convertida em energia cinética e a velocidade da bola aumenta: $\Delta K > 0$ e $\Delta U_{grav} < 0$. Porém, a energia mecânica *total* (a energia cinética mais a energia potencial) possui o mesmo valor em todos os pontos da trajetória, desde que nenhuma outra força além da gravidade realize trabalho sobre o corpo (ou seja, desde que a resistência do ar seja desprezível). Ainda é verdade que a força da gravidade realiza trabalho sobre o corpo quando ele sobe ou quando ele desce, contudo não precisamos mais calcular o trabalho diretamente; para isso, basta computar as variações de U_{grav}.

ATENÇÃO Escolha a 'altura zero' para estar onde quer que queira Uma questão importante sobre a energia potencial gravitacional é que não importa qual é a altura escolhida para $y = 0$, a origem das coordenadas. Quando deslocamos a origem de y, os valores de y_1 e y_2 variam, assim como os valores de $U_{grav,1}$ e $U_{grav,2}$. Porém, esse deslocamento não exerce nenhum efeito sobre a *diferença* na altura $y_2 - y_1$ ou sobre a *diferença* na energia potencial gravitacional $U_{grav,2} - U_{grav,1} = mg(y_2 - y_1)$. Conforme mostraremos no exemplo a seguir, a grandeza que tem significado físico não é o valor de U_{grav} em um dado ponto, porém somente a *diferença* de U_{grav} entre dois pontos. Logo, podemos considerar o valor de U_{grav} igual a zero em qualquer ponto sem alterar o significado físico da situação.

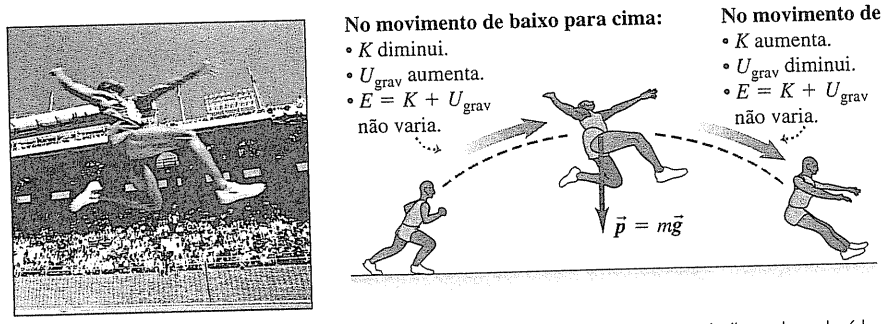


Figura 7.3 No intervalo de tempo em que este atleta está no ar, somente a gravidade realiza trabalho sobre ele (desprezando-se os pequenos efeitos da resistência do ar). A energia mecânica E — a soma da energia cinética com a energia potencial gravitacional — se conserva.

Exemplo 7.1

ALTURA DE UMA BOLA DE BEISEBOL USANDO A CONSERVAÇÃO DA ENERGIA Você arremessa uma bola de beisebol de 0,145 kg verticalmente de baixo para cima, fornecendo-lhe uma velocidade inicial de módulo igual a 20,0 m/s. Usando a conservação da energia, calcule a altura máxima que ela atinge, supondo que a resistência do ar seja desprezível.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: depois que uma bola de beisebol deixa sua mão, a única força que atua sobre ela é o seu peso, de modo que podemos usar a conservação da energia mecânica.

PREPARAR: usaremos as equações (7.4) e (7.5), considerando como ponto 1 onde a bola deixa sua mão e como ponto 2 onde a bola atinge a altura máxima. Como indica a Figura 7.2, assumimos a direção positiva de y como sendo de baixo para cima. A velocidade escalar da bola no ponto 1 é $v_1 = 20{,}0$ m/s; ao atingir a altura máxima, a bola fica instantaneamente em repouso, portanto $v_2 = 0$.

Queremos saber a que distância a bola se move verticalmente entre os dois pontos, portanto a nossa incógnita é o deslocamento $y_2 - y_1$. Se consideramos a origem no ponto onde a bola deixa a sua mão (ponto 1), então $y_1 = 0$ (Figura 7.4) e a incógnita é exatamente y_2.

EXECUTAR: como $y_1 = 0$, a energia potencial no ponto 1 é $U_{grav,1} = mgy_1 = 0$. Além disso, como a bola está em repouso no ponto 2, a energia cinética nesse ponto é $K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = 0$. Logo, a Equação (7.4), que mostra que $K_1 + U_{grav,1} = K_2 + U_{grav,2}$, torna-se

$$K_1 = U_{grav,2}$$

Como os gráficos de barras para a energia na Figura 7.4 mostram, a energia cinética da bola no ponto 1 é completamente convertida em energia potencial gravitacional no ponto 2. No ponto 1, a energia cinética é

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(0{,}145\text{ kg})(20{,}0\text{ m/s})^2 = 29{,}0\text{ J}$$

Esse valor é igual ao da energia potencial gravitacional $U_{grav,2} = mgy_2$ no ponto 2, logo

$$y_2 = \frac{U_{grav,2}}{mg} = \frac{29{,}0\text{ J}}{(0{,}145\text{ kg})(9{,}80\text{ m/s}^2)} = 20{,}4\text{ m}$$

Poderíamos também determinar algebricamente a expressão de y_2 resolvendo a equação $K_1 = U_{grav,2}$, ou seja:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgy_2$$

$$y_2 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{(20{,}0\text{ m/s})^2}{2(9{,}80\text{ m/s}^2)} = 20{,}4\text{ m}$$

AVALIAR: a massa é cancelada, como era de se esperar; aprendemos no Capítulo 2 que o movimento de um corpo em queda livre não depende de sua massa. Certamente, poderíamos ter deduzido o resultado $y_2 = v_1^2/2g$ usando a Equação (2.13).

Ao realizarmos os cálculos anteriores, escolhemos a origem no ponto 1, de modo que $y_1 = 0$ e $U_{grav,1} = 0$. O que ocorreria se você fizesse uma escolha diferente? Como exemplo, suponha que você escolha a origem 5,0 m abaixo do ponto 1, de modo que $y_1 = 5{,}0$ m. Com essa escolha, uma parte da energia mecânica total no ponto 1 é dada pela energia cinética e a outra parte é dada pela energia potencial gravitacional, enquanto no ponto 2 ela é dada somente pela energia potencial gravitacional. Se você completar os cálculos, obterá a resposta $y_2 = 25{,}4$ m, ou seja, o ponto 2 está 20,4 m acima do ponto 1, tal como na primeira escolha da origem. Em qualquer problema você fica livre para escolher a altura do ponto para o qual $U_{grav} = 0$; contudo, não se preocupe com sua escolha, porque o significado físico da resposta não depende dessa escolha.

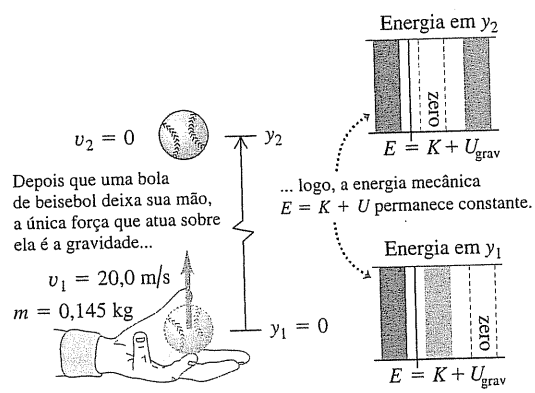


Figura 7.4 Depois que uma bola de beisebol deixa sua mão, a energia mecânica $E = K + U$ é conservada.

Quando outras forças, além da gravidade, realizam trabalho

Se outras forças além do peso atuam sobre o corpo, então $\vec{F}_{outra}$ indicada na Figura 7.2 *não* é igual a zero. Para o bate-estaca do Exemplo 6.4 (Seção 6.2), a força aplicada pelo cabo de sustentação e a força de atrito nos trilhos são exemplos de forças que devem ser incluídas para o cálculo da força resultante $\vec{F}_{outra}$. O trabalho da força da gravidade W_{grav} continua sendo dado pela Equação (7.3), mas o trabalho total W_{tot} é dado agora pela soma de W_{grav} com o trabalho realizado pela força $\vec{F}_{outra}$. Chamaremos esse trabalho adicional de W_{outra}, de modo que o trabalho total realizado por todas as forças é $W_{tot} = W_{grav} + W_{outra}$. Igualando esse trabalho com a variação da energia cinética, temos

$$W_{outra} + W_{grav} = K_2 - K_1 \tag{7.6}$$

Pela Equação (7.3), $W_{grav} = U_{grav,1} - U_{grav,2}$, logo

$$W_{outra} + U_{grav,1} - U_{grav,2} = K_2 - K_1$$

A relação anterior pode ser reescrita na forma

$$K_1 + U_{grav,1} + W_{outra} = K_2 + U_{grav,2} \tag{7.7}$$

(se outras forças além da gravidade realizam trabalho).

Finalmente, usando as expressões apropriadas para os diversos termos da energia, obtemos

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 + W_{outra} = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 \tag{7.8}$$

(se outras forças além da gravidade realizam trabalho)

O significado das equações (7.7) e (7.8) é o seguinte: *o trabalho total realizado por outras forças* além da gravidade *é igual à variação da energia mecânica total* $E = K + U_{grav}$ *do sistema, em que* U_{grav} *é a energia potencial gravitacional.* Quando W_{outra} é positivo, E aumenta e $K_2 + U_{grav,2}$ é maior do que $K_1 + U_{grav,1}$. Quando W_{outra} é negativo, E diminui (Figura 7.5). No caso particular em que nenhuma força além da gravidade atua sobre o corpo, $W_{outra} = 0$. Então, a energia mecânica total é constante, e você obtém novamente as equações (7.4) ou (7.5).

Figura 7.5 Enquanto este pára-quedista se move de cima para baixo, a força de baixo para cima da resistência do ar realiza trabalho negativo W_{outra} sobre ele. Portanto, a energia mecânica total $E = K + U$ diminui: a velocidade escalar do pára-quedista e a energia cinética K permanecem constantes, enquanto a energia potencial gravitacional U diminui.

Estratégia para a solução de problemas 7.1

PROBLEMAS USANDO A CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA I

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* inicialmente, decida se o problema deve ser resolvido pelos métodos de energia, usando diretamente a fórmula $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ ou se você usará uma combinação destes dois métodos. O método da energia é particularmente útil quando você resolve problemas envolvendo forças variáveis, movimentos com trajetórias curvas ou em ambos os casos (estas situações serão analisadas mais adiante nesta seção). Contudo, quando o problema envolve um intervalo de tempo decorrido, o método da energia em geral *não* é a melhor escolha porque não envolve o tempo diretamente.

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. Ao usar o método da energia, inicialmente defina o estado inicial e o estado final (da posição e da velocidade) do sistema. Use um índice inferior 1 para o estado inicial e um índice inferior 2 para o estado final. É útil o uso de um diagrama para definir o estado inicial e o estado final.
2. Defina um sistema de coordenadas, particularmente o nível para o qual $y = 0$. Você usará esse nível para calcular a energia potencial gravitacional. A Equação (7.2) supõe que o sentido positivo de y seja de baixo para cima; sugerimos que você use essa escolha de modo consistente.
3. Identifique todas as forças que realizam trabalho e que não podem ser descritas em termos de energia potencial. (Por enquanto, isso significa qualquer força que não seja a da gravidade. Mas, ainda neste capítulo, veremos que o trabalho realizado por uma mola ideal pode também ser expresso como uma variação na energia potencial.) Um diagrama do corpo livre é sempre útil.
4. Faça uma lista das grandezas conhecidas e desconhecidas, incluindo as coordenadas e as velocidades em cada ponto. Defina quais grandezas desconhecidas são as nossas incógnitas.

EXECUTAR *a solução:* escreva expressões para as energias cinéticas e as energias potenciais iniciais e finais – ou seja, K_1, K_2, $U_{grav,1}$, e $U_{grav,2}$. Usando a Equação (7.7), faça uma relação envolvendo a energia cinética, a energia potencial gravitacional e o trabalho realizado pelas forças além da gravidade W_{outra}. (Você terá que calcular W_{outra} em termos dessas forças.) Caso essas forças não existam, essa relação se reduz à Equação (7.4). É útil desenhar gráficos de barras mostrando os valores iniciais e finais de C, U_{grav} e $E = C + U_{grav}$. A seguir resolva a equação para achar a grandeza desconhecida.

AVALIAR *sua resposta:* verifique se sua resposta tem significado físico. Tome cuidado, nesta e nas próximas seções, para representar só uma vez o trabalho realizado usando a relação $U_{grav,1} - U_{grav,2} = -\Delta U_{grav}$ ou como W_{outra}, mas *nunca* nos dois membros simultaneamente. Se você incluir o trabalho realizado pela gravidade em ΔU_{grav}, não o inclua novamente em W_{outra}.

Exemplo 7.2

TRABALHO E ENERGIA NO ARREMESSO DE UMA BOLA DE BEISEBOL No Exemplo 7.1, suponha que sua mão se desloque 0,50 m para cima quando você está arremessando a bola, o que deixa sua mão com uma velocidade inicial igual a 20,0 m/s. Novamente, suponha que a resistência do ar seja desprezível. a) Supondo que sua mão exerça uma força constante sobre a bola, ache o módulo dessa força. b) Ache a velocidade da bola quando ela está a uma altura de 15,0 m acima da altura do ponto inicial onde ela deixa sua mão.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: no Exemplo 7.1, usamos a conservação da energia mecânica porque somente a gravidade realizou trabalho. Neste exemplo, porém, devemos também incluir o trabalho não gravitacional realizado pela sua mão.

PREPARAR: a Figura 7.6 mostra um desenho da situação, incluindo um diagrama do corpo livre para a bola durante seu arremesso. Consideramos o ponto 1 o local onde sua mão começa a se mover, o ponto 2 o local onde a bola deixa sua mão e o ponto 3 a posição da bola 15,0 m acima do ponto 2. A força não gravitacional $\vec{F}$ atua somente entre os pontos 1 e 2. Usando o mesmo sistema de coordenadas do Exemplo 7.1, temos $y_1 = -0{,}50$ m, $y_2 = 0$ e $y_3 = 15{,}0$ m. A bola parte do repouso no ponto 1, portanto $v = 0$, e é dado que a velocidade escalar da bola quando ela deixa a sua mão é $v_2 = 20{,}0$ m/s. Nossas incógnitas são a) o módulo F da força da sua mão e b) a velocidade escalar v_3 no ponto 3.

EXECUTAR: a) Para determinar o módulo de $\vec{F}$, primeiro usaremos a Equação (7.7) para calcular o trabalho W_{outra} realizado por essa força. Temos

$$K_1 = 0$$
$$U_{grav,1} = mgy_1 = (0{,}145\text{ kg})(9{,}80\text{ m/s}^2)(-0{,}50\text{ m}) = -0{,}71\text{ J}$$
$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(0{,}145\text{ kg})(20{,}0\text{ m/s})^2 = 29{,}0\text{ J}$$
$$U_{grav,2} = mgy_2 = (0{,}145\text{ kg})(9{,}80\text{ m/s}^2)(0) = 0$$

A energia potencial gravitacional inicial $U_{grav,1}$ é negativa porque a bola estava inicialmente abaixo da origem. (Não se preocupe com uma energia potencial menor do que zero. Lembre-se de que o importante é a *diferença* entre energia potencial de um ponto a outro.) De acordo com a Equação (7.7), $K_1 + U_{grav,1} + W_{outra} = K_2 + U_{grav,2}$. Logo,

$$W_{outra} = (K_2 - K_1) + (U_{grav,2} - U_{grav,1})$$
$$= (29{,}0\text{ J} - 0) + (0 - (-0{,}71\text{ J})) = 29{,}7\text{ J}$$

A energia cinética da bola cresce de $K_2 - K_1 = 29{,}0$ J, e a energia potencial gravitacional cresce de $U_{grav,2} - U_{grav,1} = 0{,}71$ J; a soma é $E_2 - E_1$, a variação da energia mecânica total, que é igual a W_{outra}.

Supondo que a força $\vec{F}$ de baixo para cima que sua mão aplica na bola seja constante, o trabalho W_{outra} realizado por essa força é igual ao módulo F da força multiplicado pelo deslocamento vertical $y_2 - y_1$ sobre o qual ela atua:

$$W_{outra} = F(y_2 - y_1)$$

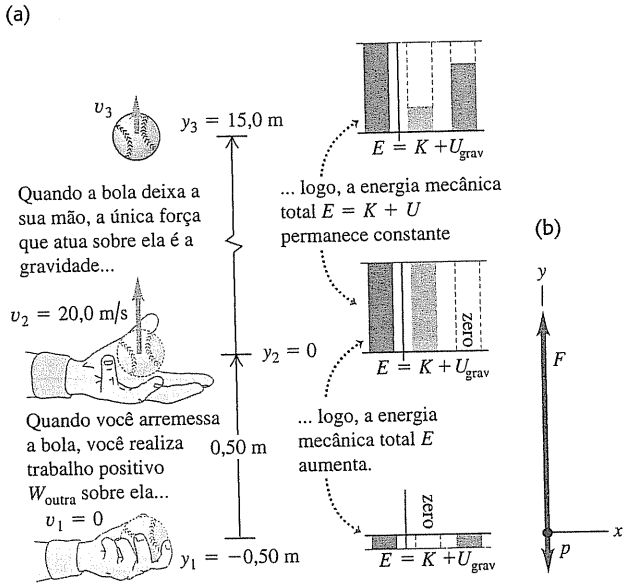


Figura 7.6 (a) Aplicação dos conceitos de energia ao arremesso de uma bola de beisebol verticalmente de baixo para cima. (b) O diagrama do corpo livre para a bola quando ela é arremessada.

$$F = \frac{W_{outra}}{y_2 - y_1} = \frac{29{,}7\text{ J}}{0{,}50\text{ m}} = 59\text{ N}$$

Esse valor é aproximadamente 40 vezes maior do que o peso da bola.

b) Para achar a velocidade escalar no ponto 3, note que entre os pontos 2 e 3 a energia mecânica total é conservada; a força de sua mão não atua mais e $W_{outra} = 0$. Podemos então achar a energia cinética no ponto 3 usando a Equação (7.4):

$$K_2 + U_{grav,2} = K_3 + U_{grav,3}$$
$$U_{grav,3} = mgy_3 = (0{,}145\text{ kg})(9{,}80\text{ m/s}^2)(15{,}0\text{ m}) = 21{,}3\text{ J}$$
$$K_3 = (K_2 + U_{grav,2}) - U_{grav,3}$$
$$= (29{,}0\text{ J} + 0\text{ J}) - 21{,}3\text{ J} = 7{,}7\text{ J}$$

Uma vez que $K_3 = \frac{1}{2}mv_{3y}^2$, onde v_{3y} é o componente y da velocidade da bola no ponto 3, temos

$$v_{3y} = \pm\sqrt{\frac{2K_3}{m}} = \pm\sqrt{\frac{2(7{,}7\text{ J})}{0{,}145\text{ kg}}} = \pm 10\text{ m/s}$$

O significado do sinal duplo mais ou menos é que a bola passa *duas vezes* pelo ponto 3, uma quando sobe e a outra quando desce. A energia mecânica total E é constante e igual a 29,0 J durante a queda livre da bola, e a energia potencial no ponto 3 é $U_{grav,3} = 21{,}3$ J tanto na subida, quanto na descida da bola. Portanto, no ponto 3, a energia cinética da bola K_3 e sua *velocidade* não dependem do sentido do movimento da bola. A velocidade v_{3y} é positiva (+10 m/s) quando a bola está subindo e negativa (−10 m/s) quando ela está descendo; a velocidade escalar v_{3y}, ou seja, o módulo da velocidade, igual a 10 m/s, é o mesmo nos dois casos.

AVALIAR: para conferir seu resultado, lembre-se do Exemplo 7.1 em que a bola atinge a altura máxima $y = 20{,}4$ m. Nesse ponto, toda a energia cinética que a bola possuía ao deixar a sua mão em $y = 0$ foi convertida em energia potencial gravitacional.

Em $y = 15{,}0$ m, a bola está a cerca de três quartos da sua altura máxima, portanto cerca de três quartos da sua energia mecânica deve estar na forma de energia potencial. (Isso está indicado nos gráficos de barras da energia, na Figura 7.6a.) Você pode demonstrar que isso é verdadeiro a partir dos nossos resultados para K_3 e $U_{grav,3}$?

Energia potencial gravitacional para movimentos ao longo de uma trajetória curva

Em nossos dois exemplos iniciais o corpo se deslocava ao longo de uma linha reta vertical. O que ocorre quando a trajetória é inclinada ou curva (Figura 7.7a)? Sobre o corpo atua uma força gravitacional $\vec{p} = m\vec{g}$ e possivelmente outras forças que possuem uma resultante chamada de $\vec{F}_{outra}$. Para calcular o trabalho realizado pela força gravitacional durante esse deslocamento, dividimos a trajetória em pequenos segmentos $\Delta\vec{d}$; um segmento típico é indicado na Figura 7.7b. O trabalho realizado pela força gravitacional nesse segmento é o produto escalar da força pelo deslocamento. Em termos dos vetores unitários, a força é dada por $\vec{p} = m\vec{g} = -mg\hat{j}$ e o vetor deslocamento é dado por $\Delta\vec{d} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}$, de modo que o trabalho realizado pela força gravitacional é dado por

$$\vec{p} \cdot \Delta\vec{d} = -mg\hat{j} \cdot (\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}) = -mg\Delta y$$

O trabalho realizado pela força gravitacional é o mesmo que seria obtido caso o corpo se deslocasse verticalmente de uma distância Δy, sem nenhum deslocamento horizontal. Isso é verdade para qualquer segmento, de modo que o trabalho *total* realizado pela força gravitacional é $-mg$ multiplicado pelo deslocamento vertical *total* $(y_2 - y_1)$:

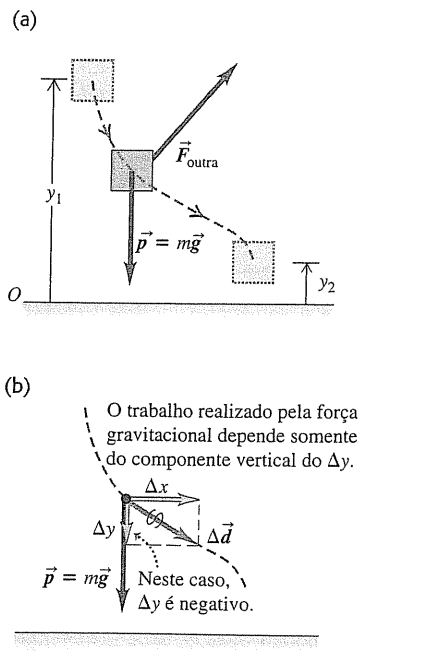


Figura 7.7 Cálculo da variação na energia potencial gravitacional para o deslocamento ao longo de uma trajetória curva.

$$W_{grav} = -mg(y_2 - y_1) = mgy_1 - mgy_2 = U_{grav,1} - U_{grav,2}$$

Esse resultado é igual ao indicado na Equação (7.1) ou na Equação (7.3), em que havíamos imaginado um deslocamento puramente vertical. Logo, mesmo quando a trajetória é curva, o trabalho total realizado pela força gravitacional depende somente da diferença de altura entre os dois pontos da trajetória. Esse trabalho não é afetado por nenhum componente horizontal do movimento que possa ocorrer. Portanto, *podemos usar a mesma expressão para a energia potencial gravitacional tanto para uma trajetória retilínea quanto para uma trajetória curva.*

Exemplo conceitual 7.3

ENERGIA NO MOVIMENTO DE UM PROJÉTIL Um jogador bate duas bolas idênticas com a mesma velocidade escalar, mas formando dois ângulos iniciais diferentes. Prove que para uma dada altura h as duas bolas possuem a mesma velocidade escalar, supondo que a resistência do ar seja desprezível.

SOLUÇÃO

Supondo que a resistência do ar seja desprezível, a única força que atua sobre cada bola depois que ela é lançada é seu peso. Logo, a energia mecânica total de cada bola permanece constante. A Figura 7.8 mostra as trajetórias das duas bolas quando elas são lançadas com a mesma velocidade escalar inicial e com a mesma altura inicial, e, portanto, a mesma energia mecânica total, porém com ângulos iniciais diferentes. Para todos os pontos com a mesma altura, a energia potencial gravitacional é a mesma. Logo, a energia cinética é a mesma para as duas bolas, portanto elas possuem a mesma velocidade escalar.

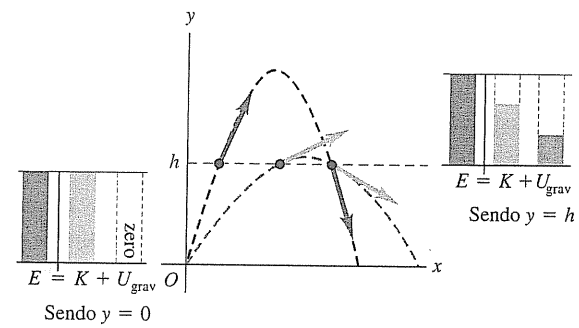


Figura 7.8 Para a mesma velocidade escalar inicial e para a mesma altura inicial, a velocidade escalar de um projétil para uma dada altura h é sempre a mesma, desprezando-se a resistência do ar.

Exemplo 7.4

CÁLCULO DA VELOCIDADE ESCALAR EM UM CÍRCULO VERTICAL Seu primo Tobias pratica *skate* deslocando-se para baixo de uma rampa circular em um *playground*. Se considerarmos Tobias e seu *skate* como uma partícula, seu centro se move ao longo de um quarto de círculo de raio $R = 3{,}00$ m (Figura 7.9). A massa total de Tobias e seu *skate* é igual a 25,0 kg. Ele parte do repouso e não existe nenhum atrito. a) Calcule sua velocidade na parte inferior da rampa. b) Calcule a força normal que atua sobre ele na parte inferior da curva.

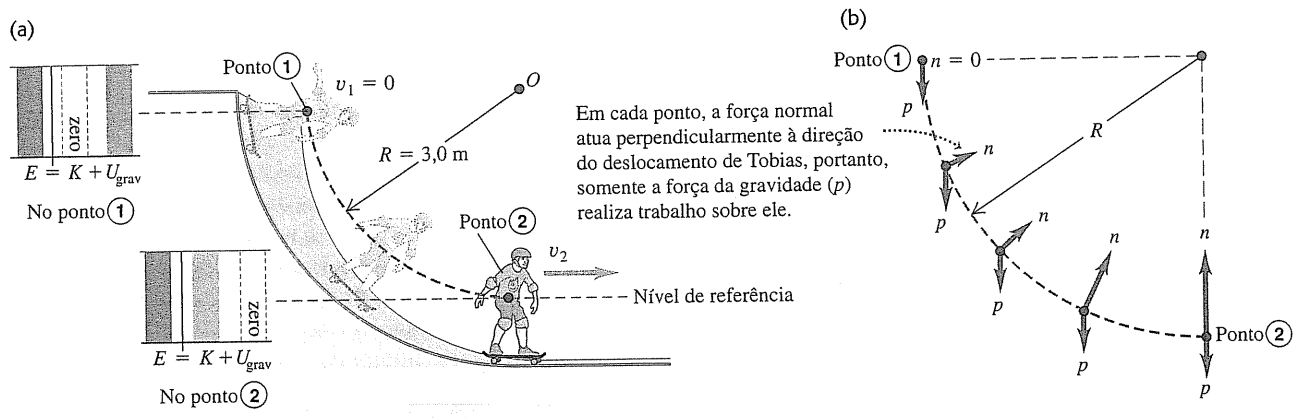


Figura 7.9 (a) Tobias pratica *skate* deslocando-se para baixo de uma rampa circular sem atrito. A energia mecânica total se conserva. (b) Diagrama do corpo livre para Tobias e sua prancha em diversos pontos sobre a rampa.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: não podemos usar as equações do movimento para aceleração constante porque a aceleração de Tobias não é constante; a inclinação diminui à medida que ele desce. Em vez desse método, usaremos o conceito da conservação da energia mecânica. Como Tobias se move ao longo de um arco, também usaremos o que aprendemos sobre movimento circular na Seção 5.4.

PREPARAR: como não existe atrito, a única força atuante sobre Tobias, além do seu peso, é a força normal $\vec{n}$ exercida pela rampa (Figura 7.9b). Embora essa força atue ao longo da trajetória, ela realiza trabalho *igual a zero* porque $\vec{n}$ é perpendicular ao vetor deslocamento de Tobias em todos os pontos ao longo da trajetória. Logo, $W_{outra} = 0$, e existe conservação da energia mecânica. Consideramos o ponto 1 como o ponto inicial e o ponto 2 como o ponto situado na parte inferior da rampa encurvada e admitimos que $y = 0$ na parte inferior da rampa (Figura 7.9a). Então $y_1 = R$ e $y_2 = 0$. (Estamos tratando Tobias como se toda a sua massa estivesse concentrada no seu centro.) Tobias parte do repouso no topo da rampa, logo $v_1 = 0$. Nossa incógnita no item (a) é a velocidade escalar dele na parte inferior, v_2. No item (b), queremos achar o módulo n da força normal no ponto 2. Como essa força não realiza trabalho, ela não aparece na equação da energia, por isso usaremos a segunda lei de Newton.

EXECUTAR: a) as diversas energias são

$$K_1 = 0 \qquad U_{grav,1} = mgR$$
$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \qquad U_{grav,2} = 0$$

Pela conservação da energia mecânica

$$K_1 + U_{grav,1} = K_2 + U_{grav,2}$$
$$0 + mgR = \frac{1}{2}mv_2^2 + 0$$
$$v_2 = \sqrt{2gR}$$
$$= \sqrt{2(9{,}80\ \text{m/s}^2)(3{,}0\ \text{m})} = 7{,}67\ \text{m/s}$$

Note que essa resposta não depende do formato circular da rampa; seja qual for o formato da rampa, Tobias terá a mesma velocidade escalar $v_2 = \sqrt{2gR}$ na parte inferior. Isso se aplicaria mesmo que as rodas da prancha de *skate* perdessem contato com a rampa durante o deslocamento, porque somente a força gravitacional ainda realizaria trabalho. Na verdade, a velocidade escalar seria igual à que Tobias teria caso caísse verticalmente de uma altura R. A resposta também independe da massa dele.

b) Para determinar o módulo n da força normal no ponto 2 usando a segunda lei de Newton, necessitamos do diagrama do corpo livre nesse ponto (Figura 7.9b). No ponto 2, Tobias se move com uma velocidade $v_2 = \sqrt{2gR}$ em uma circunferência de raio R; sua aceleração é radial e possui módulo

$$a_{rad} = \frac{v_2^2}{R} = \frac{2gR}{R} = 2g$$

Considerando como positivo o eixo Oy orientado de baixo para cima, o componente y da segunda lei de Newton fornece

$$\sum F_y = n + (-p) = ma_{rad} = 2mg$$
$$n = p + 2mg = 3mg$$
$$= 3(25{,}0\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2) = 735\ \text{N}$$

No ponto 2, a força normal é três vezes maior do que o peso de Tobias. Esse resultado não depende do raio da rampa circular. Aprendemos no Exemplo 5.9 (Seção 5.2) e no Exemplo 5.24 (Seção 5.4) que o módulo n da força normal é o *peso aparente*, de modo que Tobias terá a ilusão de que seu peso é três vezes maior do que o seu peso real mg. Porém, assim que ele atinge a parte horizontal da rampa no ponto 2, a força normal se reduz para $p = mg$, e o peso de Tobias volta a ser normal. Você é capaz de explicar por quê?

AVALIAR: este exemplo mostra uma regra geral sobre o papel desempenhado pelas forças em problemas resolvidos mediante o método da energia: o que importa não é simplesmente se uma força *atua* ou não, mas sim se ela *realiza trabalho* ou não. Quando uma força não realiza trabalho, como a força normal $\vec{n}$ deste exemplo, ela não aparece de forma alguma na Equação (7.7), $K_1 + U_{grav,1} + W_{outra} = K_2 + U_{grav,2}$.

Note que usamos *simultaneamente* a segunda lei de Newton e o método da energia para resolver este problema; a conservação da energia fornece a velocidade, e $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ fornece a força normal. Em cada parte do problema usamos o método que nos conduziu a uma solução mais fácil.

Exemplo 7.5

UM CÍRCULO VERTICAL COM ATRITO No Exemplo 7.4, suponha que a rampa possua atrito e que a velocidade de Tobias na base da rampa seja igual a 6,0 m/s. Qual é o trabalho realizado pela força de atrito sobre ele?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a Figura 7.10 indica que novamente a força normal não realiza nenhum trabalho, porém agora existe uma força de atrito $\vec{f}$ que *realiza* trabalho. Nesse caso, o trabalho não gravitacional realizado sobre Tobias entre os pontos 1 e 2, W_{outra}, é diferente de zero.

PREPARAR: usamos o mesmo sistema de coordenadas e os mesmos pontos inicial e final do Exemplo 7.4 (Figura 7.10). Nossa incógnita é o trabalho realizado pelo atrito, W_f; como o atrito é a única força além da gravidade que realiza trabalho, ela é exatamente igual a W_{outra}. Encontraremos W_f usando a Equação (7.7).

EXECUTAR: os valores das grandezas energéticas são

$$K_1 = 0$$

$$U_{\text{grav},1} = mgR = (25{,}0\text{ kg})(9{,}80\text{ m/s}^2)(3{,}0\text{ m}) = 735\text{ J}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(25{,}0\text{ kg})(6{,}0\text{ m/s})^2 = 450\text{ J}$$

$$U_{\text{grav},2} = 0$$

Usando a Equação (7.7), obtemos

$$W_f = K_2 + U_{\text{grav},2} - K_1 - U_{\text{grav},1}$$
$$= 450\text{ J} + 0 - 0 - 735\text{ J} = -285\text{ J}$$

O trabalho realizado pela força de atrito é igual a –285 J, e a energia mecânica total *diminui* 285 J. Você já verificou por que W_f possui um valor negativo?

AVALIAR: o movimento de Tobias é determinado pela segunda lei de Newton, $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$. Porém, seria difícil aplicar diretamente a segunda lei de Newton porque a normal e a força de atrito variam continuamente à medida que Tobias desce a rampa. Em contraste, usando o método da energia, relacionamos o movimento no topo e na base da rampa sem entrar nos detalhes que ocorreram entre esses dois pontos. Muitos problemas tornam-se mais fáceis quando usamos o método da energia, porém se tornam complicados quando tentamos usar diretamente a segunda lei de Newton.

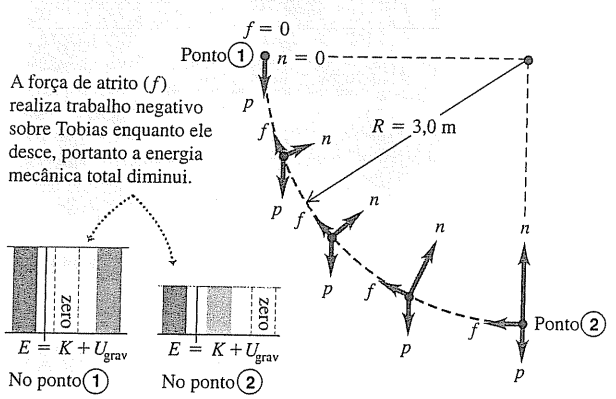


Figura 7.10 Diagrama do corpo livre e gráficos de barras para Tobias descendo a rampa com atrito.

Exemplo 7.6

UM PLANO INCLINADO COM ATRITO Uma caixa de 12 kg está em repouso sobre o solo. Desejamos levá-la até um caminhão fazendo-a deslizar 2,5 m sobre uma rampa inclinada de 30°. Um trabalhador, ignorando o atrito, calculou que ele poderia fazer a caixa chegar ao topo da rampa lançando-a com uma velocidade inicial de 5,0 m/s na base da rampa. Porém, o atrito *não* é desprezível; a caixa desliza 1,6 m subindo a rampa, pára e desliza retornando para baixo (Figura 7.11). a) Supondo que a força de atrito seja constante, calcule o seu módulo. b) Qual a velocidade da caixa quando ela atinge a base da rampa?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a força de atrito realiza trabalho sobre a caixa à medida que ela desliza. Como no Exemplo 7.2, vamos usar o método da energia no item (a) para calcular o módulo da força não gravitacional que realiza trabalho (neste caso, o atrito). No item (b) calcularemos quanto trabalho não gravitacional essa força realiza enquanto a caixa desliza de volta para baixo e a seguir usaremos o método da energia para determinar a velocidade escalar da caixa na extremidade inferior da rampa.

PREPARAR: a primeira parte do movimento ocorre do ponto 1, na extremidade inferior da rampa, até o ponto 2, o local onde a caixa pára (Figura 7.11). Considerando $y = 0$ (e, portanto, $U_{\text{grav}} = 0$) no nível do solo, temos $y_1 = 0$, $y_2 = (1{,}6\text{ m})\text{ sen }30° = 0{,}80\text{ m}$. É dado que $v_1 = 5{,}0$ m/s e $v_2 = 0$ (a caixa fica instantaneamente em repouso no ponto 2). Nossa incógnita no item (a) é f, o módulo da força de atrito. No item (b) nossa variável é v_3, a velocidade escalar na extremidade inferior da rampa.

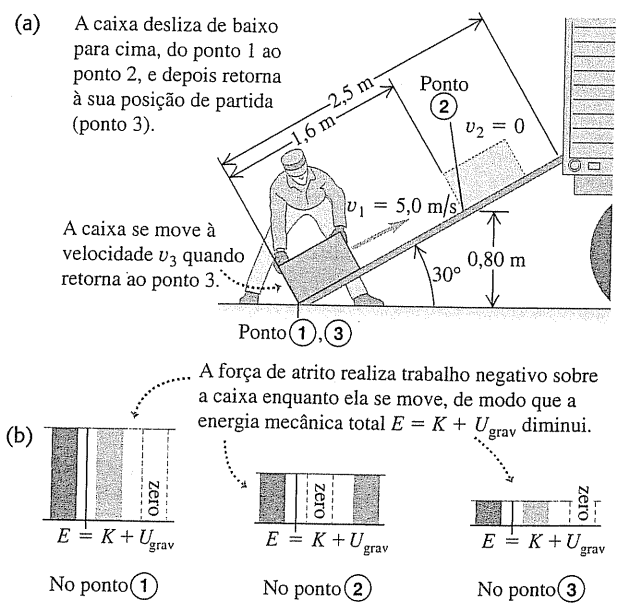


Figura 7.11 (a) Uma caixa desliza de baixo para cima até certo trecho de uma rampa, pára e desliza de volta para baixo. (b) Gráficos de barras para a energia nos pontos 1, 2 e 3.

EXECUTAR: (a) Os valores das grandezas energéticas são

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2}(12\text{ kg})(5{,}0\text{ m/s})^2 = 150\text{ J} \\ U_{\text{grav},1} &= 0 \\ K_2 &= 0 \\ U_{\text{grav},2} &= (12\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)(0{,}80\text{ m}) = 94\text{ J} \\ W_{\text{outra}} &= -fd \end{aligned}$$

onde f é o módulo da força de atrito desconhecido e $d = 1{,}6$ m. Usando a Equação (7.7), encontramos

$$K_1 + U_{\text{grav},1} + W_{\text{outra}} = K_2 + U_{\text{grav},2}$$

$$\begin{aligned} W_{\text{outra}} = -fd &= (K_2 + U_{\text{grav},2}) - (K_1 + U_{\text{grav},1}) \\ f &= -\frac{(K_2 + U_{\text{grav},2}) - (K_1 + U_{\text{grav},1})}{d} \\ &= -\frac{(0 + 94\text{ J}) - (150\text{ J} + 0)}{1{,}6\text{ m}} = 35\text{ N} \end{aligned}$$

A força de atrito de 35 N, que atua durante o deslocamento de 1,6 m, faz a energia mecânica da caixa decair de 150 J para 94 J (Figura 7.11b).

b) Quando a caixa desliza para baixo, do ponto 2 ao ponto 3, o deslocamento e a força de atrito invertem os respectivos sentidos, mas seus módulos permanecem constantes, portanto o trabalho terá o mesmo valor negativo para cada metade do percurso total. O trabalho total realizado pelo atrito entre os pontos 1 e 3 é dado por

$$W_{\text{outra}} = W_{\text{atr}} = -2fd = -2(35\text{ N})(1{,}6\text{ m}) = -112\text{ J}$$

Pelo resultado (a), $K_1 = 150$ J e $U_{\text{grav},1} = 0$. Então, a Equação (7.7) fornece

$$\begin{aligned} K_1 + U_{\text{grav},1} + W_{\text{outra}} &= K_3 + U_{\text{grav},3} \\ K_3 &= K_1 + U_{\text{grav},1} - U_{\text{grav},3} + W_{\text{outra}} \\ &= 150\text{ J} + 0 - 0 + (-112\text{ J}) = 38\text{ J} \end{aligned}$$

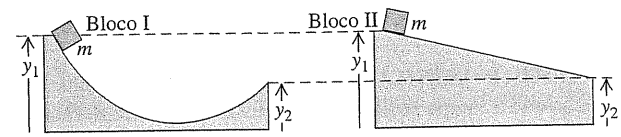
A caixa retorna para a base da rampa com somente 38 J dos 150 J originais da energia mecânica (Figura 7.11b). Usando a relação $K_3 = \frac{1}{2}mv_3^2$, achamos

$$v_3 = \sqrt{\frac{2K_3}{m}} = \sqrt{\frac{2(38\text{ J})}{12\text{ kg}}} = 2{,}5\text{ m/s}$$

AVALIAR: a velocidade escalar da caixa ao retornar para a extremidade inferior da rampa, $v_3 = 2{,}5$ m/s, é menor que a velocidade com que ela deixou esse ponto, $v_1 = 5{,}0$ m/s. Isso é bom – houve perda de energia devido ao atrito.

No item (b) aplicamos a Equação (7.7) aos pontos 1 e 3, considerando o percurso de ida e volta como um todo. Para uma solução alternativa, poderíamos usar a Equação (7.7) nos pontos 2 e 3, considerando o deslocamento da segunda metade do trajeto por si só. Tente resolver por esse método e verifique se obtém a mesma resposta para v_3.

Teste sua compreensão da Seção 7.1 A figura mostra duas rampas sem atrito. As alturas y_1 e y_2 são as mesmas para ambas as rampas. Se um bloco de massa m é libertado do repouso a partir da extremidade esquerda de cada rampa, qual bloco



chega à extremidade direita com maior velocidade escalar? (i) bloco I; (ii) bloco II; (iii) a velocidade escalar é a mesma para os dois blocos. ∎

7.2 Energia potencial elástica

Há muitas situações em que encontramos energia potencial de natureza diferente da gravitacional. Um exemplo é uma atiradeira com tiras de borracha. A força que estica a tira de borracha realiza trabalho sobre ela, armazenando-o na tira esticada até o momento em que você a solta. A seguir, a tira de borracha fornece energia cinética para a pedra.

Esse esquema é o mesmo que ocorre no bate-estaca da Seção 7.1: um trabalho é realizado sobre o sistema, o qual posteriormente é convertido em energia cinética. Descrevemos o processo de armazenamento de energia em um corpo deformável, como uma mola ou uma tira de borracha, em termos da *energia potencial elástica* (Figura 7.12). Dizemos que um corpo é *elástico* quando ele volta a ter a mesma forma e o mesmo tamanho que possuía antes da deformação.

Para sermos específicos, consideraremos o processo de energia em molas ideais, como aquelas que foram discutidas na Seção 6.3. É necessário exercer uma força $F = kx$

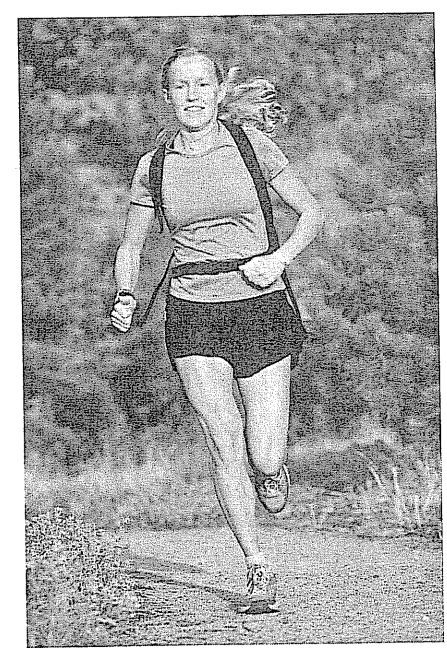


Figura 7.12 O tendão de Aquiles, que une a parte de trás do tornozelo ao osso do calcanhar, funciona como uma mola natural. Quando se estica e relaxa, armazena e liberta energia potencial elástica. A ação dessa mola faz reduzir o trabalho realizado pelos músculos de sua perna quando você corre.

para manter tal mola ideal com uma deformação x, sendo k a constante da força da mola. A mola ideal é uma aproximação útil porque muitos corpos elásticos mostram essa proporcionalidade direta entre a força $\vec{F}$ e a deformação x, contanto que x seja suficientemente pequeno.

Vamos adotar um procedimento análogo ao utilizado para estudar a energia potencial gravitacional. Começaremos com o trabalho realizado pela força elástica (da mola) e depois usaremos o teorema do trabalho-energia. A diferença é que a energia potencial gravitacional é uma energia dividida entre o corpo e a Terra, mas a energia potencial elástica é armazenada somente na mola (ou outro corpo elástico).

A Figura 7.13 mostra a mola ideal da Figura 6.18, que tem a extremidade esquerda fixa e a extremidade direita presa a um bloco de massa m que pode se mover ao longo do eixo Ox. Na Figura 7.13a, o corpo está em equilíbrio no ponto $x = 0$, quando a mola não está nem esticada nem comprimida. Movemos o bloco lateralmente, comprimindo ou esticando a mola, e a seguir deixamos a mola livre. Quando o bloco se move de um valor positivo x_1 a outro valor positivo x_2, qual é o trabalho realizado pela força elástica (da mola) sobre o bloco?

Na Seção 6.3 verificamos que o trabalho realizado *sobre* a mola para mover sua extremidade desde uma posição inicial x_1 até uma posição final x_2 é dado por

$$W = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \quad \text{(trabalho realizado } \textit{sobre} \text{ a mola)}$$

onde k é a constante da mola. Se continuamos a esticar a mola, realizamos sobre ela um trabalho positivo; quando a deixamos relaxar enquanto seguramos sua extremidade, realizamos sobre ela um trabalho negativo. Vemos também que a expressão anterior do trabalho continua válida quando a mola é comprimida em vez de esticada, de modo que x_1 ou x_2 ou ambos são negativos. Agora devemos determinar o trabalho realizado *pela* mola. Pela terceira lei de Newton concluímos que este trabalho será igual e de sinal contrário ao outro. Portanto, trocando o sinal da relação anterior, verificamos que o trabalho W_{el} realizado pela mola em um deslocamento de x_1 a x_2 é dado por

$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \quad \text{(trabalho realizado } \textit{pela} \text{ mola)}$$

O índice inferior 'el' indica *elástico*. Quando x_1 e x_2 são positivos e $x_2 > x_1$ (Figura 7.13b), a mola realiza um trabalho negativo sobre o bloco, que se move no sentido $+x$ enquanto a mola puxa o bloco no sentido $-x$. Ao se esticar mais, o bloco diminui de velocidade. Quando x_1 e x_2 são positivos e $x_2 < x_1$ (Figura 7.13c), a mola realiza um trabalho positivo quando relaxa e o bloco aumenta de velocidade. Quando a mola pode tanto ser comprimida quanto esticada, de modo que x_1 ou x_2 ou ambos são negativos, a expressão de W_{el} continua válida. Na Figura 7.13d, x_1 e x_2

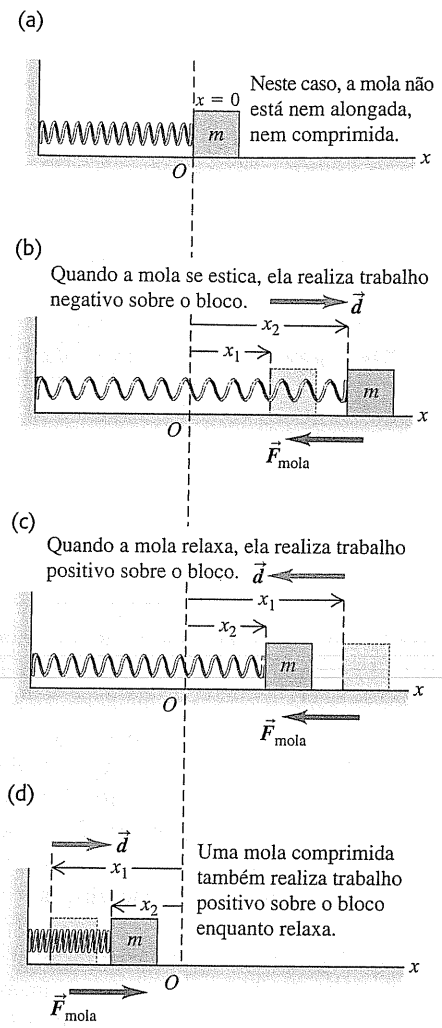


Figura 7.13 Cálculo do trabalho realizado por uma mola amarrada a um bloco sobre uma superfície horizontal. A grandeza x é o alongamento ou a compressão da mola.

são negativos, porém x_2 é menos negativo do que x_1; a mola comprimida realiza trabalho positivo conforme relaxa, acelerando o bloco.

Como no caso do trabalho gravitacional, podemos representar o trabalho realizado pela mola em termos de uma quantidade no início e no fim do deslocamento. Essa quantidade é a **energia potencial elástica,** dada por $\frac{1}{2}kx^2$:

$$U_{el} = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{(energia potencial elástica)} \qquad (7.9)$$

A Figura 7.14 mostra um gráfico da Equação (7.9). A unidade de U_{el} é o joule (J), a unidade usada para *todos* os tipos de energia e de trabalho; para conferir essa unidade usando a Equação (7.9), lembre-se de que as unidades de k são N/m e que 1 N · m = 1 J.

Podemos usar a Equação (7.9) para determinar o trabalho W_{el} realizado sobre o bloco pela força elástica em termos da variação da energia potencial elástica:

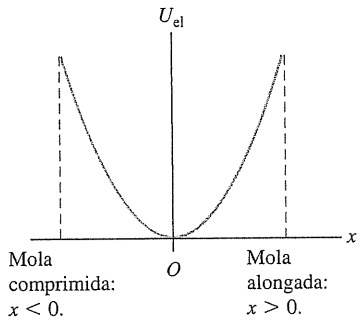


Figura 7.14 O gráfico da energia potencial elástica da mola ideal é uma parábola: $U_{el} = 1/2kx^2$, em que x é o alongamento ou a compressão da mola. A energia potencial elástica U_{el} nunca pode ser negativa.

$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = U_{el,1} - U_{el,2} = -\Delta U_{el} \quad (7.10)$$

Quando alongamos ainda mais a mola que já está alongada, como na Figura 7.13b, W_{el} é negativo e U_{el} *aumenta*; uma quantidade maior de energia potencial elástica é armazenada na mola. Quando a mola comprimida relaxa, como na Figura 7.13c, x diminui, W_{el} é positivo e U_{el} *diminui*; a mola perde energia potencial elástica. Valores negativos de x referem-se à compressão da mola. Porém, como indicado na Figura 7.14, U_{el} é sempre positivo tanto para valores de x positivos quanto negativos, e as equações (7.9) e (7.10) são válidas em ambos os casos. Quanto maior for o valor da compressão *ou* do alongamento da mola, maior é o valor da sua energia potencial elástica.

ATENÇÃO Energia potencial gravitacional *versus* energia potencial elástica Uma diferença importante entre a energia potencial gravitacional $U_{grav} = mgy$ e a energia potencial elástica $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$ é que *não* temos a liberdade de escolher arbitrariamente o valor $x = 0$. Para ser coerente com a Equação (7.9), $x = 0$ *deve* ser necessariamente o ponto para o qual a mola não está comprimida nem alongada. Para essa posição, sua energia potencial elástica é igual a zero e a força que ele exerce também é nula.

O teorema do trabalho-energia afirma que $W_{tot} = K_2 - K_1$, qualquer que seja o tipo de força atuante sobre o corpo. Quando a força elástica é a *única* força que atua sobre o corpo, então

$$W_{tot} = W_{el} = U_{el,1} - U_{el,2}$$

O teorema do trabalho-energia $W_{tot} = K_2 - K_1$ permite escrever

$$K_1 + U_{el,1} = K_2 + U_{el,2} \quad (7.11)$$

(se somente a força elástica realiza trabalho)

Como U_{el} é dado pela Equação (7.9), obtemos

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \quad (7.12)$$

(se somente a força elástica realiza trabalho)

Nesse caso, a energia mecânica total $E = K + U_{el}$ (a soma da energia cinética com a energia potencial *elástica*) se *conserva*. Um exemplo disso é o movimento do bloco da Figura 7.13, desde que não haja atrito na superfície horizontal, de modo que somente a força da mola realiza trabalho.

Para que a Equação (7.12) seja estritamente correta, a mola ideal que estamos considerando precisa também ter *massa nula*. Caso a mola possuísse massa, ela também possuiria energia cinética durante o movimento para a frente e para trás. Podemos desprezar a energia cinética da mola quando sua massa for muito menor do que a massa m do bloco preso em sua extremidade. Por exemplo, um automóvel comum possui massa aproximadamente igual a 1200 kg. As molas da suspensão do carro possuem massa de apenas alguns quilogramas, portanto a massa das molas da suspensão pode ser desprezada quando estudamos as oscilações do carro sobre suas suspensões.

Situações com energia potencial gravitacional e energia potencial elástica

As equações (7.11) e (7.12) são válidas somente quando a única energia potencial no sistema é a energia potencial elástica. O que ocorre quando existem *simultaneamente* forças gravitacionais e forças elásticas, como no caso de um corpo preso na extremidade de uma mola pendurada verticalmente? E se o trabalho também é realizado por outras forças que *não podem* ser descritas em termos da energia potencial, tal como a força da resistência do ar sobre um bloco em movimento? Então o trabalho total é a soma do trabalho realizado pela força gravitacional (W_{grav}), o trabalho realizado pela força elástica (W_{el}) e o trabalho realizado por outras forças (W_{outra}): $W_{tot} = W_{grav} + W_{el} + W_{outra}$. Pelo teorema do trabalho-energia, obtemos

$$W_{grav} + W_{el} + W_{outra} = K_2 - K_1$$

O trabalho realizado pela força gravitacional é $W_{grav} = U_{grav,1} - U_{grav,2}$, e o trabalho realizado pela mola é $W_{el} = U_{el,1} - U_{el,2}$. Logo, podemos reescrever o teorema do trabalho-energia para esse caso mais generalizado como

$$K_1 + U_{grav,1} + U_{el,1} + W_{outra} = K_2 + U_{grav,2} + U_{el,2} \quad (7.13)$$

(válido em geral)

ou analogamente

$$K_1 + U_1 + W_{outra} = K_2 + U_2 \quad (7.14)$$

(válido em geral)

onde $U = U_{grav} + U_{el} = mgy + \frac{1}{2}kx^2$ é a *soma* da energia potencial gravitacional com a energia potencial elástica. Resumindo, chamamos U simplesmente de 'energia potencial'.

A Equação (7.14) é *o enunciado mais geral* da relação entre a energia cinética, a energia potencial e o trabalho realizado pelas outras forças, segundo o qual

O trabalho realizado por todas as forças além das forças gravitacionais e das forças elásticas é igual à variação da energia mecânica total do sistema $E = K + U$, onde $U = U_{grav} + U_{el}$ é a soma da energia potencial gravitacional com a energia potencial elástica.

O 'sistema' é composto pelo corpo de massa m, a Terra com a qual ele interage por meio da força gravitacional e a mola cuja constante de força é k.

Quando W_{outra} é positiva, $E = K + U$ aumenta; quando W_{outra} é negativa, E diminui. Quando as forças gravitacionais e as forças elásticas são as *únicas* forças que atuam sobre o corpo, então $W_{outra} = 0$ e a energia mecânica total (incluindo a energia potencial gravitacional e a energia potencial elástica) se conserva. (Compare a Equação (7.14) às equações (7.7) e (7.8), que descrevem situações em que há energia potencial gravitacional, mas não há energia potencial elástica.)

O esporte radical *bungee jumping* (Figura 7.15) é um exemplo das transformações que ocorrem entre a energia cinética, a energia potencial elástica e a energia potencial gravitacional. Quando o saltador cai, a energia potencial gravitacional diminui e é convertida na energia cinética do saltador e na energia potencial elástica da corda do '*bungee*'. Ao ultrapassar certo ponto na queda, a velocidade escalar do saltador diminui de tal modo que a energia potencial gravitacional e a energia cinética são convertidas em energia potencial elástica.

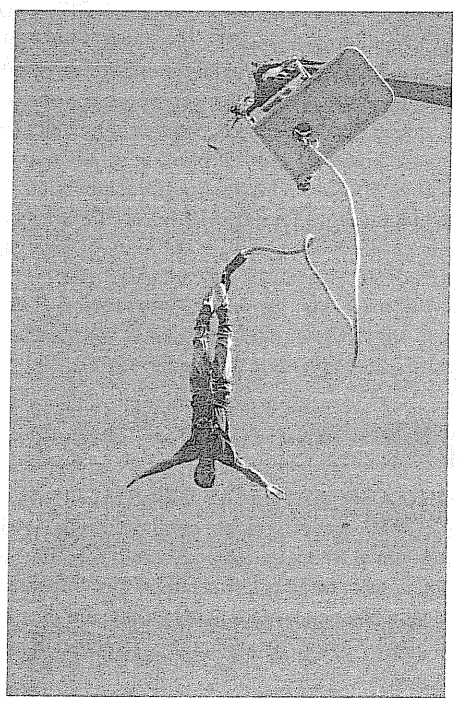


Figura 7.15 A queda de um saltador de *bungee jumping* envolve uma inter-relação entre a energia cinética, a energia potencial gravitacional e a energia potencial elástica. Devido à resistência do ar e às forças de atrito dentro da corda do *bungee*, a energia mecânica não é conservada. (Se a energia mecânica *fosse* conservada, o saltador permaneceria oscilando para cima e para baixo eternamente!)

Estratégia para a solução de problemas 7.2

PROBLEMAS USANDO ENERGIA MECÂNICA II A Estratégia para a Solução de Problemas 7.1 (Seção 7.1) é também útil para a solução de problemas em que existam simultaneamente forças gravitacionais e forças elásticas. A única recomendação nova é que agora você deve incluir na energia potencial U a energia potencial elástica $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$, onde x é o deslocamento da mola medido *a partir do seu comprimento sem deformação*. O trabalho realizado pelas forças gravitacionais e pelas forças elásticas é incluído em suas respectivas energias potenciais; o trabalho W_{outra} realizado pelas outras forças deve ser incluído separadamente.

Exemplo 7.7

MOVIMENTO COM ENERGIA POTENCIAL ELÁSTICA Um cavaleiro com massa $m = 0{,}200$ kg está em repouso sobre um trilho de ar sem atrito, ligado a uma mola cuja constante é dada por $k = 5{,}0$ N/m. Você puxa o cavaleiro fazendo a mola se alongar 0,100 m e a seguir o liberta sem velocidade inicial. O cavaleiro começa a se mover retornando para sua posição inicial ($x = 0$). Qual é o componente x da sua velocidade no ponto $x = 0{,}080$ m?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como a força da mola varia com a posição, este problema não pode ser resolvido pelas equações do movimento com aceleração constante. Em contrapartida, aplicaremos o conceito de que quando o cavaleiro começa a se mover a energia potencial elástica é convertida em energia cinética. (O cavaleiro permanece sempre na mesma altura durante o movimento, de modo que a energia potencial gravitacional não influi no movimento. Logo, $U = U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$.)

PREPARAR: a Figura 7.16 mostra os nossos desenhos. A força da mola é a única força que realiza trabalho, logo $W_{outra} = 0$, e podemos usar a Equação (7.11). Consideramos o ponto 1 o local onde o cavaleiro é libertado e ponto 2 o local onde $x = 0{,}080$ m. Conhecemos a velocidade no ponto 1 ($v_{1x} = 0$); nossa incógnita é a velocidade de x no ponto 2, v_{2x}.

EXECUTAR: as grandezas energéticas são dadas por

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_{1x}^2 = \frac{1}{2}(0{,}200\ \text{kg})(0)^2 = 0$$

$$U_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}(5{,}0\ \text{N/m})(0{,}100\ \text{m})^2 = 0{,}0250\ \text{J}$$

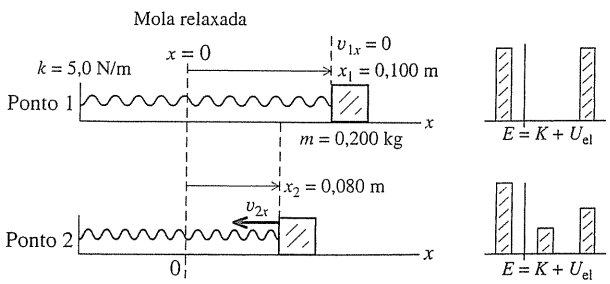


Figura 7.16 Nossos desenhos e os gráficos de barras da energia para esse problema.

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_{2x}^2$$

$$U_2 = \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}(5{,}0\ \text{N/m})(0{,}080\ \text{m})^2 = 0{,}0160\ \text{J}$$

Então, pela Equação (7.11),

$$K_2 = K_1 + U_1 - U_2 = 0 + 0{,}0250\ \text{J} - 0{,}0160\ \text{J} = 0{,}0090\ \text{J}$$

$$v_{2x} = \pm\sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \pm\sqrt{\frac{2(0{,}0090\ \text{J})}{0{,}200\ \text{kg}}} = \pm 0{,}30\ \text{m/s}$$

Escolhemos o valor negativo da raiz porque o cavaleiro se desloca no sentido $-x$; a resposta procurada é $v_{2x} = -0{,}30$ m/s.

AVALIAR: qual é o significado da segunda solução, $v_{2x} = -0{,}30$ m/s? Mais cedo ou mais tarde, a mola se comprimirá e empurrará o cavaleiro de volta para a direita na direção positiva de x (Figura 7.13d). De acordo com a segunda solução, quando o cavaleiro passa por $x = 0{,}080$ m enquanto se desloca para a direita, sua velocidade escalar será 0,30 m/s – a mesma velocidade de quando ele passa por esse ponto ao se deslocar para a esquerda.

Quando o cavaleiro passa pelo ponto $x = 0$, a mola se relaxa e toda a energia mecânica assume a forma de energia cinética. Você é capaz de mostrar que a velocidade escalar do cavaleiro nesse ponto é 0,50 m/s?

Exemplo 7.8

MOVIMENTO COM ENERGIA POTENCIAL ELÁSTICA E TRABALHO REALIZADO POR OUTRAS FORÇAS Para o sistema do Exemplo 7.7, suponha que o cavaleiro esteja em repouso na posição inicial $x = 0$, quando a mola ainda não está deformada. Aplicamos então sobre o cavaleiro uma força $\vec{F}$ constante no sentido $+x$ com módulo igual a 0,610 N. Qual é a velocidade do cavaleiro no ponto $x = 0{,}100$ m?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: embora a força $\vec{F}$ que você aplica seja constante, a força da mola não o é, portanto, a aceleração do cavaleiro não será constante. A energia mecânica total não é conservada por causa do trabalho realizado pela força $\vec{F}$, por isso devemos usar a relação de energia generalizada dada pela Equação (7.13). (Como no Exemplo 7.7, ignoramos a energia potencial gravitacional porque a altura do cavaleiro não varia. Logo, temos somente a energia potencial elástica e, portanto, $U = U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$.)

PREPARAR: consideramos o ponto 1 o local onde $x = 0$ e a velocidade $v_{1x} = 0$, e o ponto 2 o local no qual $x = 0{,}100$ m. (Esses pontos são diferentes dos indicados na Figura 7.16.) Nossa incógnita é v_{2x}, a velocidade no ponto 2.

EXECUTAR: as grandezas energéticas são dadas por

$$K_1 = 0$$

$$U_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 = 0$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_{2x}^2$$

$$U_2 = \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}(5{,}0\ \text{N/m})(0{,}100\ \text{m})^2 = 0{,}0250\ \text{J}$$

$$W_{outra} = (0{,}610\ \text{N})(0{,}100\ \text{m}) = 0{,}0610\ \text{J}$$

(Para calcularmos W_{outra} multiplicamos o módulo da força pelo deslocamento, visto que ambos os vetores apontam no sentido $+x$.) Inicialmente, a energia mecânica total é zero; o trabalho realizado por $\vec{F}$ faz a energia mecânica total crescer para 0,0610 J, dos quais 0,0250 J correspondem à parcela da energia potencial elástica. A parte restante corresponde à parcela da energia cinética. Pela Equação (7.13)

$$K_1 + U_1 + W_{outra} = K_2 + U_2$$

$$K_2 = K_1 + U_1 + W_{outra} - U_2$$

$$= 0 + 0 + 0{,}0610\ \text{J} - 0{,}0250\ \text{J} = 0{,}0360\ \text{J}$$

$$v_{2x} = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \sqrt{\frac{2(0{,}0360\ \text{J})}{0{,}200\ \text{kg}}} = 0{,}60\ \text{m/s}$$

Escolhemos a raiz quadrada positiva porque o cavaleiro está se movendo na direção positiva de x.

AVALIAR: para testar nossa resposta, imagine o que seria diferente se desconectássemos o cavaleiro da mola. Então $\vec{F}$ seria a única força a realizar trabalho, haveria energia potencial igual a zero em todos os instantes e a Equação (7.13) forneceria

$$K_2 = K_1 + W_{outra} = 0 + 0{,}0610\ \text{J}$$

$$v_{2x} = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \sqrt{\frac{2(0{,}0610\ \text{J})}{0{,}200\ \text{kg}}} = 0{,}78\ \text{m/s}$$

Encontramos uma velocidade inferior a esse valor porque a mola realiza trabalho negativo sobre o cavaleiro enquanto ela se alonga (Figura 7.13b).

Ao parar de empurrar o cavaleiro quando ele atinge o ponto $x = 0{,}100$ m, além desse ponto a única força que realiza trabalho sobre o cavaleiro é a força da mola. Portanto, para $x > 0{,}100$ m, a energia mecânica total $E = K + U$ é conservada e mantém o mesmo valor de 0,0610 J. A velocidade do cavaleiro vai diminuir enquanto a mola continua a se alongar, por isso a energia cinética K diminuirá enquanto a energia potencial aumenta. O cavaleiro vai chegar ao repouso em um ponto $x = x_3$; nesse ponto, a energia cinética é nula e a energia potencial $U = U_{el} = \frac{1}{2}kx_3^2$ é igual à energia mecânica total 0,0610 J. Você deve mostrar que o cavaleiro chega ao repouso em $x_3 = 0{,}156$ m, o que significa que ele se move por 0,056 m adicionais após a força $\vec{F}$ ser removida em $x_2 = 0{,}100$ m. (Como não há nenhum atrito, o cavaleiro não permanecerá em repouso, mas voltará a se mover em direção a $x = 0$, devido à força da mola alongada.)

Exemplo 7.9

MOVIMENTO COM AS FORÇAS GRAVITACIONAL, ELÁSTICA E DE ATRITO Em um projeto com um cenário para calcular o 'pior caso', um elevador de 2000 kg com o cabo quebrado cai a 4,0 m/s sobre a mola de amortecimento no fundo do poço. A mola é projetada para fazer o elevador parar quando ela sofre uma compressão de 2,0 m (Figura 7.17). Durante o movimento, uma braçadeira de segurança exerce sobre o elevador uma força de atrito constante igual a 17000 N. Como consultor do projeto, você foi solicitado a calcular a constante da mola que deveria ser usada.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: usaremos o método da conservação da energia para determinar a constante da força, que aparece na expressão

para a energia potencial elástica. Note que nesse problema existem *simultaneamente* energia potencial gravitacional e energia potencial elástica. Além disso, a energia mecânica total do sistema não é conservada porque o trabalho realizado pela força de atrito W_{outra} sobre o elevador é negativo.

PREPARAR: como a energia mecânica não é conservada e há mais de um tipo de energia potencial envolvida, usaremos a força mais generalizada da relação entre energias, a Equação (7.13). Considere o ponto 1 como o ponto onde o elevador toca a parte superior da mola, e o ponto 2 como o ponto no qual o elevador está em repouso. Escolhendo a origem no ponto 1, temos $y_1 = 0$ e $y_2 = -2{,}0$ m. Com essa escolha, a coordenada do ponto superior da mola coincide com a coordenada do elevador, de modo que a energia potencial elástica em qualquer posição situada entre o ponto 1 e o ponto 2 é dada por $U_{el} = \frac{1}{2}ky^2$. (A energia potencial gravitacional é $U_{grav} = mgy$, como sempre.) Conhecemos as velocidades escalares inicial e final do elevador, bem como o módulo da força de atrito, portanto o único elemento desconhecido é a constante da força k (nossa incógnita).

EXECUTAR: a velocidade inicial do elevador é $v_1 = 4{,}0$ m/s, de modo que a energia cinética inicial é

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(2000\text{ kg})(4{,}0\text{ m/s})^2 = 16000\text{ J}$$

O elevador pára no ponto 2, logo, $K_2 = 0$. A energia potencial no ponto 1, U_1, é zero; U_{grav} é zero porque $y_1 = 0$ e $U_{el} = 0$ porque a mola ainda não está comprimida. No ponto 2 existem simultaneamente energia potencial gravitacional e energia potencial elástica, logo,

$$U_2 = mgy_2 + \frac{1}{2}ky_2^2$$

a energia potencial gravitacional no ponto 2 é

$$mgy_2 = (2000\text{ kg})(9{,}80\text{ m/s}^2)(-2{,}0\text{ m}) = -39200\text{ J}$$

A outra força é a força de atrito de 17000 N, que age no sentido oposto ao do movimento ao longo do deslocamento de 2,0 m, logo

$$W_{outra} = -(17000\text{ N})(2{,}0\text{ m}) = -34000\text{ J}$$

Substituindo esses valores na relação $K_1 + U_1 + W_{outra} = k_2 + U_2$, obtemos

$$K_1 + 0 + W_{outra} = 0 + \left(mgy_2 + \frac{1}{2}ky_2^2\right)$$

portanto, a constante da mola será

$$k = \frac{2(K_1 + W_{outra} - mgy_2)}{y_2^2}$$
$$= \frac{2[16000\text{ J} + (-34000\text{ J}) - (-39200\text{ J})]}{(-2{,}0\text{ m})^2}$$
$$= 1{,}06 \times 10^4\text{ N/m}$$

Esse valor é aproximadamente um décimo da grandeza da constante da mola de suspensão de um carro.

AVALIAR: é conveniente notar um paradoxo aparente neste problema. A energia potencial elástica da mola no ponto 2 é

$$\frac{1}{2}ky_2^2 = \frac{1}{2}(1{,}06 \times 10^4\text{ N/m})(-2{,}0\text{ m})^2 = 21200\text{ J}$$

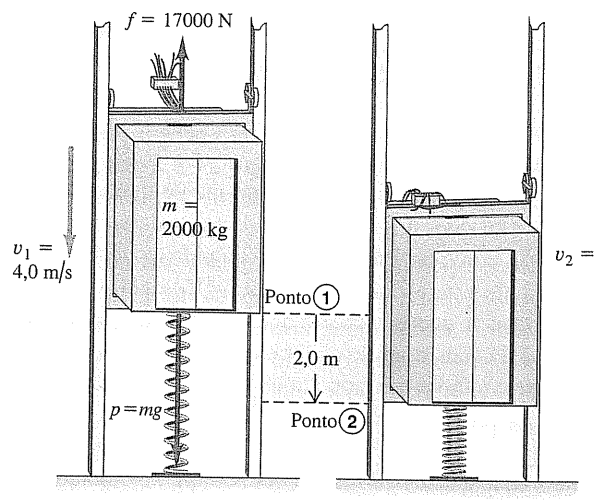


Figura 7.17 A queda de um elevador é amortecida por uma força de atrito constante e pela compressão da mola.

Esse valor é *maior* do que energia mecânica total no ponto 1,

$$E_1 = K_1 + U_1 = 16000\text{ J} + 0 = 16000\text{ J}$$

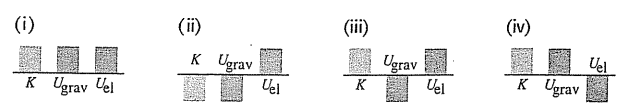
Porém, a força de atrito faz a energia mecânica total *diminuir* em 34000 J entre o ponto 1 e o ponto 2. Isso significa que surgiu energia do nada? Não entre em pânico; não existe nenhum paradoxo. No ponto 2 também existe uma energia potencial gravitacional *negativa* $mgy_2 = -39200$ J porque o ponto 2 está abaixo da origem. A energia mecânica total no ponto 2 é

$$E_2 = K_2 + U_2 = 0 + \frac{1}{2}ky_2^2 + mgy_2$$
$$= 0 + 21200\text{ J} + (-39200\text{ J}) = -18000\text{ J}$$

Isso é exatamente igual à energia mecânica inicial de 16.000 J menos a energia de 34000 J dissipada pelo atrito.

O elevador ficará em repouso no fundo do poço? No ponto 2 a mola comprimida exerce uma força de baixo para cima de módulo $F_{mola} = (1{,}06 \times 10^4\text{ N/m})(2{,}0\text{ m}) = 21200$ N, ao passo que a força da gravidade atuando de cima para baixo sobre o elevador é apenas $p = mg = (2000\text{ kg})(9{,}80\text{ m/s}^2) = 19600$ N. Logo, caso não exista atrito, haverá uma força resultante de baixo para cima de 21200 N − 19600 N = 1600 N, e o elevador voltaria a oscilar de baixo para cima. Entretanto, *há* atrito na braçadeira que pode exercer uma força de até 17000 N; logo, a braçadeira pode impedir o elevador de tornar a oscilar.

Teste sua compreensão da Seção 7.2 Considere a situação do Exemplo 7.9 no instante em que o elevador está se movendo de cima para baixo e a mola está comprimida em 1,0 m. Qual dos gráficos de barras na figura mostra mais precisamente a energia cinética K, a energia potencial gravitacional U_{grav} e a energia potencial elástica U_{el} nesse instante?



7.3 Forças conservativas e forças não conservativas

Em nossa discussão da energia potencial, falamos sobre 'armazenar' a energia cinética para convertê-la em energia potencial. Sempre temos em mente que essa energia potencial pode mais tarde ser recuperada sob a forma de energia cinética. Por exemplo, quando você joga uma bola de baixo para cima no ar, sua velocidade diminui à medida que a energia cinética é convertida em energia potencial. Porém, quando ela volta para baixo, a conversão se inverte e sua velocidade aumenta à medida que a energia potencial é convertida de volta em energia cinética. Desprezando a resistência do ar, a velocidade da bola quando você a agarra é igual à velocidade de quando você a jogou para cima.

Outro exemplo é o de um cavaleiro que se move sobre um trilho de ar horizontal sem atrito quando colide contra uma mola presa na extremidade do trilho. A mola se comprime e o cavaleiro pára momentaneamente, antes de ser rebatido para trás. Caso o atrito seja nulo, o cavaleiro possuirá a mesma velocidade e a mesma energia cinética que ele possuía antes da colisão. Novamente existe conversão nos dois sentidos de energia cinética em energia potencial e vice-versa. Nos dois exemplos podemos definir uma função da energia potencial de tal forma que a energia mecânica total, que é a soma da energia cinética e da energia potencial, permanece constante ou é *conservada* durante o movimento.

Forças conservativas

Uma força capaz de converter energia cinética em energia potencial e de fazer a conversão inversa denomina-se **força conservativa**. Já vimos dois exemplos de forças conservativas: a força da mola e a força gravitacional. (Mais adiante neste livro, estudaremos outra força conservativa, que é a força elétrica entre objetos com carga elétrica.) Uma característica básica de uma força conservativa é que o trabalho realizado por essa força é sempre *reversível*. Tudo o que depositamos no 'banco' de energia pode depois ser retirado sem nenhuma perda. Outra característica importante é que, quando um corpo segue várias trajetórias para ir de um ponto 1 a um ponto 2, a força conservativa realiza sempre o mesmo trabalho sobre o corpo em qualquer uma dessas trajetórias (Figura 7.18). Logo, se um corpo permanece próximo da superfície terrestre, a força gravitacional $m\vec{g}$ é independente da altura, e o trabalho realizado por essa força depende somente da variação na altura. Quando um corpo se move ao longo de uma trajetória fechada, com o ponto final coincidindo com o ponto inicial, o trabalho *total* realizado pela força gravitacional é sempre igual a zero.

O trabalho realizado por uma força conservativa possui *sempre* quatro características:

1. É dado pela diferença entre o valor inicial e o valor final da função *energia potencial*.
2. É reversível.
3. É independente da trajetória do corpo e depende apenas do ponto inicial e do ponto final.
4. Quando o ponto final coincide com o ponto inicial, o trabalho realizado é igual a zero.

Quando as *únicas* forças que realizam trabalho são forças conservativas, a energia mecânica total $E = K + U$ permanece constante.

Forças não conservativas

Nem todas as forças são conservativas. Considere a força de atrito que atua sobre a caixa que desliza na rampa do Exemplo 7.6 (Seção 7.1). Quando o corpo desliza para cima e a seguir retorna ao ponto inicial, o trabalho total realizado sobre ele pela força de atrito *não* é igual a zero. Quando o sentido do movimento se inverte, a força de atrito também se inverte, e a força de atrito realiza trabalho *negativo* em *ambos* os sentidos. Quando um carro

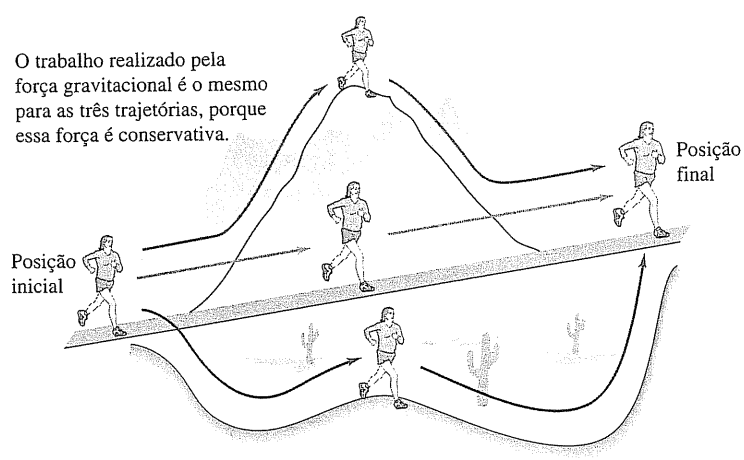


Figura 7.18 O trabalho realizado por uma força conservativa depende apenas do ponto inicial e do ponto final de uma trajetória, não da trajetória específica percorrida entre esses pontos.

com os freios bloqueados derrapa em um pavimento com velocidade decrescente (e energia cinética decrescente), a energia cinética perdida não pode ser recuperada invertendo-se o sentido do movimento nem por qualquer outro processo, e a energia mecânica *não* é conservada. *Não* existe nenhuma função que forneça a energia potencial de uma força de atrito.

Pelo mesmo motivo, a força de resistência de um fluido (Seção 5.3) não é conservativa. Quando você joga uma bola de baixo para cima no ar, a resistência do ar realiza um trabalho negativo na subida *e* na descida da bola. A bola volta para a sua mão com velocidade e energia cinética menores do que a velocidade e a energia cinética no momento em que você lançou a bola, e não existe nenhum processo capaz de recuperar a energia mecânica perdida.

A força que não é conservativa denomina-se **força não conservativa**. O trabalho realizado por uma força não conservativa *não pode* ser representado por nenhuma função que forneça uma energia potencial. Algumas forças não conservativas, como a força de atrito cinético ou a força de resistência de um fluido, produzem uma perda ou dissipação da energia mecânica; esse tipo de força denomina-se **força dissipativa**. Existem também forças não conservativas que produzem um *aumento* da energia mecânica. Os fragmentos das explosões de fogos de artifício se espalham com energias cinéticas elevadas por causa das reações químicas da pólvora com o oxigênio do ar. As forças oriundas dessas reações não são conservativas, visto que o processo não é reversível. (Imagine a volta espontânea dos fragmentos das explosões para reconstruir os fogos de artifício queimados!)

Exemplo 7.10

O TRABALHO REALIZADO PELA FORÇA DE ATRITO DEPENDE DA TRAJETÓRIA Você deseja mudar a disposição de seus móveis e desloca um sofá de 40,0 kg por uma distância de 2,50 m pela sala. Contudo, a trajetória retilínea é bloqueada por uma pesada mesa que você não deseja deslocar. Em vez disso, você desloca o sofá ao longo de uma trajetória com dois trechos ortogonais, um trecho com comprimento de 2,0 m e o outro com 1,50 m de comprimento. Em comparação com o trabalho que seria realizado na trajetória retilínea, qual é o trabalho excedente que você deve realizar para deslocar o sofá ao longo da trajetória com os dois trechos ortogonais? O coeficiente de atrito cinético é 0,200.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: neste caso, o trabalho é realizado tanto por você quanto pela força de atrito, portanto você deve usar a inter-relação entre energias incluindo outras forças além da elástica e da gravitacional. Usaremos essa relação para encontrar uma conexão entre o trabalho que *você* realiza e o trabalho realizado pelo *atrito*.

PREPARAR: o ponto inicial e o ponto final são indicados na Figura 7.19. O sofá está em repouso nos pontos 1 e 2, logo $K_1 = K_2 = 0$. Não há energia potencial elástica (não há molas) e a energia potencial gravitacional não varia porque o sofá se move

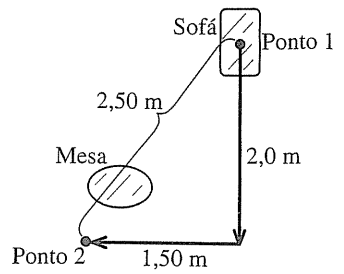


Figura 7.19 Nosso desenho para esse problema.

horizontalmente; ou seja, $U_1 = U_2$. Pela Equação (7.14) vemos que $W_{outra} = 0$. O trabalho realizado pela resultante das outras forças é a soma do trabalho positivo que você realiza, $W_{você}$, com o trabalho negativo, W_{atri}, realizado pela força de atrito. Como essa soma é igual a zero, temos

$$W_{você} = W_{atri}$$

Assim, para determinar $W_{você}$, calcularemos o trabalho realizado pelo atrito.

EXECUTAR: como o piso é horizontal, a força normal sobre o sofá é igual ao seu peso mg, e o módulo da força de atrito é $f_c = \mu_c n = \mu_c mg$. O trabalho realizado por você em cada trajetória é dado por

$$\begin{aligned} W_{você} &= -W_{atri} = -(-f_c d) = +\mu_c mgd \\ &= (0{,}200)(40{,}0\text{ kg})(9{,}80\text{ m/s}^2)(2{,}50\text{ m}) \\ &= 196\text{ J} \qquad \text{(trajetória retilínea)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{você} &= -W_{atri} \\ &= (0{,}200)(40{,}0\text{ kg})(9{,}80\text{ m/s}^2)(2{,}0\text{ m} + 1{,}50\text{ m}) \\ &= 274\text{ J} \qquad \text{(nas duas trajetórias ortogonais)} \end{aligned}$$

Logo, o trabalho excedente que você deve realizar é dado pela diferença 274 J − 196 J = 78 J.

AVALIAR: o trabalho realizado pela força de atrito é $W_{atri} = -W_{você} = -196$ J, na trajetória retilínea, e igual a − 274 J, nas duas trajetórias ortogonais. O trabalho realizado pela força de atrito depende da trajetória porque o atrito é uma força *não conservativa*.

Exemplo 7.11

CONSERVATIVA OU NÃO CONSERVATIVA? Em uma certa região do espaço, a força que atua sobre um elétron é dada por $\vec{F} = Cx\hat{j}$, onde C é uma constante positiva. O elétron percorre uma trajetória quadrada no plano xy em um sentido contrário ao dos ponteiros do relógio (Figura 7.20). Os vértices do quadrado possuem coordenadas $(x, y) = (0, 0)$, $(L, 0)$, (L, L) e $(0, L)$. Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ sobre o elétron no percurso fechado ao longo do quadrado. Essa força é conservativa ou não conservativa?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: no Exemplo 7.10, a força de atrito era constante em módulo e sempre contrária ao deslocamento, por isso era fácil calcular o trabalho realizado. Neste caso, porém, a força $\vec{F}$ é variável e sua direção em geral não é paralela ao deslocamento.

PREPARAR: para calcular o trabalho realizado pela força $\vec{F}$, usaremos a expressão geral do trabalho, Equação (6.14):

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

onde $d\vec{l}$ é um deslocamento infinitesimal. Vamos calcular o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ em cada trecho da trajetória quadrada e a seguir somar os resultados para achar o trabalho total na trajetória fechada.

EXECUTAR: no primeiro trecho da trajetória, de (0, 0) a (L, 0), a força é variável mas sua direção é sempre perpendicular ao deslocamento. Logo $\vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$, e o trabalho realizado no primeiro trecho é $W_1 = 0$. A força possui sempre o mesmo valor $\vec{F} = CL\hat{j}$ no segundo trecho da trajetória, de (L, 0) a (L, L). O deslocamento nesse trecho é orientado no sentido $+y$, logo $d\vec{l} = dy\hat{j}$ e

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = CL\hat{j} \cdot dy\hat{j} = CL\, dy$$

O trabalho realizado no segundo trecho da trajetória é então

$$W_2 = \int_{(L,0)}^{(L,L)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{y=0}^{y=L} CL\, dy = CL\int_0^L dy = CL^2$$

No terceiro trecho da trajetória, de (L, L) a (0, L), a força $\vec{F}$ é novamente perpendicular ao deslocamento, portanto, $W_3 = 0$. No último trecho da trajetória, de (0, L) a (0, 0), a força é igual a zero, de modo que $W_4 = 0$. O trabalho realizado pela força $\vec{F}$ ao longo da trajetória fechada é dado por

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = 0 + CL^2 + 0 + 0 = CL^2$$

O ponto inicial coincide com o ponto final da trajetória, porém o trabalho total realizado pela força $\vec{F}$ não é zero. Trata-se de uma força não conservativa; ela *não pode* ser representada por uma energia potencial.

AVALIAR: como W é positivo, a energia mecânica do elétron *cresce* à medida que ele se desloca ao longo da espira quadrada. Isso não é uma curiosidade matemática; trata-se de um modelo do que ocorre em um gerador de energia elétrica. Um fio formando uma espiral desloca-se através de um campo magnético, que produz uma força não conservativa análoga à discutida neste exemplo. O elétron ganha energia na medida em que se desloca ao longo da espiral, e essa energia é transportada por uma linha de transmissão até o consumidor. (No Capítulo 29, discutiremos com mais detalhes como isso funciona.)

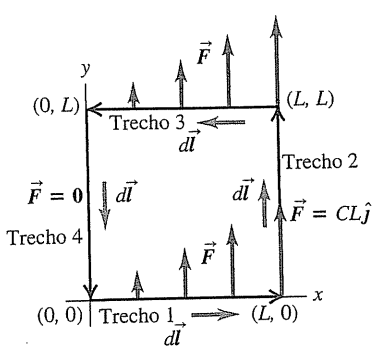


Figura 7.20 Uma força $\vec{F} = Cx\hat{j}$ atua sobre um elétron que percorre uma trajetória quadrada.

Caso o elétron se deslocasse no sentido horário em vez de se deslocar no sentido anti-horário, a força $\vec{F}$ não sofreria nenhuma alteração, porém o sentido do deslocamento infinitesimal $d\vec{l}$ se inverteria. Logo, o trabalho teria sinal contrário, e o trabalho realizado para percorrer a espiral no sentido horário seria $W = -CL^2$. Esse comportamento é diferente do comportamento da força de atrito não conservativa. Quando um corpo desliza ao longo de uma superfície com atrito, o trabalho realizado pela força de atrito é sempre negativo, independentemente do sentido do movimento (veja o Exemplo 7.6, na Seção 7.1).

Lei da conservação da energia

Forças não conservativas não podem ser representadas em termos de energia potencial. Porém, podemos descrever os efeitos dessas forças usando outros tipos de energias diferentes da energia potencial e da energia cinética. Quando o freio é acionado e o carro desliza até parar, tanto a superfície da estrada quanto os pneus se aquecem. A energia associada com a mudança de estado de um sistema denomina-se **energia interna**. A energia interna de um corpo aumenta quando sua temperatura aumenta; sua energia interna diminui quando sua temperatura diminui.

Para entender o significado da energia interna, imagine um bloco deslizando sobre uma superfície rugosa. O trabalho realizado sobre o bloco pela força de atrito é *negativo*, e a variação da energia interna do bloco e da superfície é *positiva* (o bloco e a superfície se aquecem). Experiências meticulosas mostram que a variação da energia interna é *exatamente* igual ao módulo do trabalho realizado pela força de atrito. Em outras palavras

$$\Delta U_{\text{int}} = -W_{\text{outra}}$$

onde ΔU_{int} é a variação da energia interna. Substituindo isso na Equação (7.7) ou (7.14), encontramos

$$K_1 + U_1 - \Delta U_{\text{int}} = K_2 + U_2$$

Escrevendo $\Delta K = K_2 - K_1$ e $\Delta U_{int} = U_2 - U_1$, podemos finalmente escrever

$$\Delta K + \Delta U + \Delta U_{\text{int}} = 0 \qquad (7.15)$$

(lei da conservação da energia)

Esse resultado notável é uma forma geral da **lei da conservação da energia**. Em um dado processo, podem ocorrer variações da energia cinética, da energia potencial e da energia interna do sistema. Contudo, a *soma* dessas variações é sempre igual a zero. Havendo diminuição de uma dessas formas de energia, ocorrerá aumento de outra (Figura 7.21). Quando estendemos nossa definição de energia para incluir a energia interna, a Equação (7.15) mostra que *a energia nunca pode ser criada ou destruída; ela pode apenas mudar de uma forma para outra.* Nenhuma exceção dessa regra foi jamais observada.

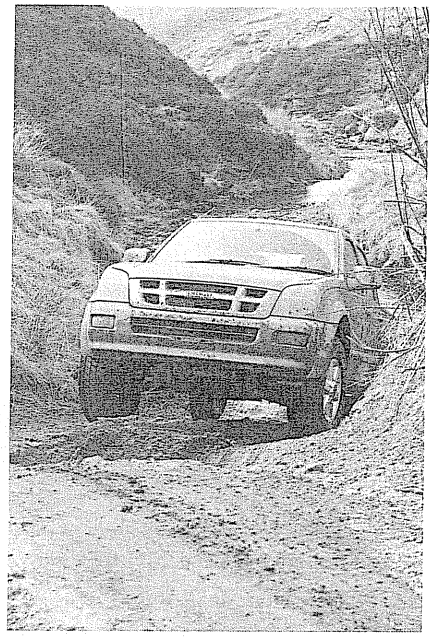


Figura 7.21 Quando um litro de gasolina queima no motor de um automóvel, ela liberta uma energia interna igual a $3{,}3 \times 10^7$ J. Logo, $\Delta U_{int} = -3{,}3 \times 10^7$ em que o sinal negativo indica que a quantidade de energia armazenada na gasolina diminuiu. Essa energia pode ser convertida em energia cinética (acelerando um carro) ou em energia potencial (fazendo o carro subir um morro).

Note que o conceito de trabalho não foi usado na Equação (7.15). Em vez disso, essa relação convida a pensar puramente em termos de conversões de uma forma de energia para outra. Por exemplo, quando você lança uma bola verticalmente de baixo para cima, converte uma parte da energia interna de suas moléculas em energia cinética da bola. A seguir, essa energia é convertida em energia potencial à medida que a bola sobe e convertida novamente em energia cinética quando a bola desce. Caso haja resistência do ar, uma parte dessa energia é usada para aquecer a bola e o ar, fazendo aumentar a energia interna da bola e do ar. Quando a bola cai, a energia potencial é convertida em energia cinética. Se você agarra a bola, toda energia que não foi perdida para o ar volta a se tornar energia interna; a bola e sua mão ficam mais quentes do que estavam quando a bola foi lançada.

Nos Capítulos 19 e 20, estudaremos a relação da energia interna com as variações de temperatura, trocas de calor e trabalho realizado. Essas grandezas constituem o núcleo de uma parte da física denominada *termodinâmica*.

Exemplo 7.12

TRABALHO REALIZADO PELO ATRITO Vamos examinar novamente o Exemplo 7.5 da Seção 7.1, no qual o seu primo Tobias praticava *skate* descendo uma rampa curva. Ele começa com energia cinética zero e energia potencial igual a 735 J, e na base ele possui 450 J de energia cinética e energia potencial igual a zero. Logo, $\Delta K = +450$ J e $\Delta U = -735$ J. O trabalho $W_{outra} = W_{atri}$ realizado pelas forças não conservativas é igual a −285 J, de modo que a variação de energia interna é dada por $\Delta U_{int} = -W_{outra} = +285$ J.

As rodas, os mancais e a rampa tornam-se ligeiramente mais quentes quando Tobias desce a rampa. De acordo com a Equação (7.15), a soma dessas variações de energia deve ser igual a zero: $\Delta K + \Delta U + \Delta U_{int} = +450\text{ J} + (-735\text{ J}) + 285\text{ J} = 0$. A energia total do sistema (incluindo formas não mecânicas de energia) sempre se conserva.

Teste sua compreensão da Seção 7.3 Em uma usina hidroelétrica, a queda da água é usada para fazer uma turbina girar ('roda-d'água'), e esta por sua vez aciona o gerador elétrico. Em relação à quantidade de energia potencial gravitacional liberada pela queda d água, quanta energia elétrica é produzida? (i) a mesma, (ii) mais, (iii) menos. ∎

7.4 Força e energia potencial

Para os dois tipos de força conservativa estudados (a elástica e a gravitacional), começamos com uma descrição do comportamento da força e a partir disso deduzimos uma expressão para a *energia potencial*. Por exemplo, para um corpo de massa m em um campo gravitacional uniforme, a força gravitacional é dada por $F_y = -mg$. Vimos que a energia potencial correspondente é dada por $U(y) = mgy$. Para esticar uma mola ideal a uma distância x, devemos exercer uma força igual a $+kx$. Pela terceira lei de Newton, a força que a mola ideal exercerá sobre o corpo é igual e contrária ou $F_x = -kx$. A função da energia potencial correspondente é dada por $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$.

Ao estudar física, porém, você encontrará situações em que lhe é dada uma expressão para a *energia potencial* em função da posição para que seja calculada a *força* correspondente. Veremos vários exemplos desse tipo, quando estudarmos as forças elétricas mais adiante neste livro: é em geral mais fácil calcular a energia potencial elétrica primeiro e depois determinar a força elétrica correspondente.

A seguir, mostraremos como proceder para calcular a força que corresponde a um dada expressão de energia potencial. Inicialmente considere um movimento retilíneo, sendo x a coordenada. Designamos o componente x da força, uma função de x, por $F_x(x)$, e a energia potencial por $U(x)$. Essa notação serve para lembrarmos de que tanto F_x quanto U são *funções* de x. Lembramo-nos agora de que o trabalho realizado por uma força conservativa em qualquer deslocamento é igual, mas de sinal contrário, à variação ΔU da energia potencial:

$$W = -\Delta U$$

Vamos aplicar esse resultado a um deslocamento pequeno Δx. O trabalho realizado pela força $F_x(x)$ durante esse deslocamento é aproximadamente igual a $F_x(x)\,\Delta x$. Devemos dizer 'aproximadamente' porque $F_x(x)$ varia ligeiramente ao longo do deslocamento Δx. Logo, é aproximadamente verdade que

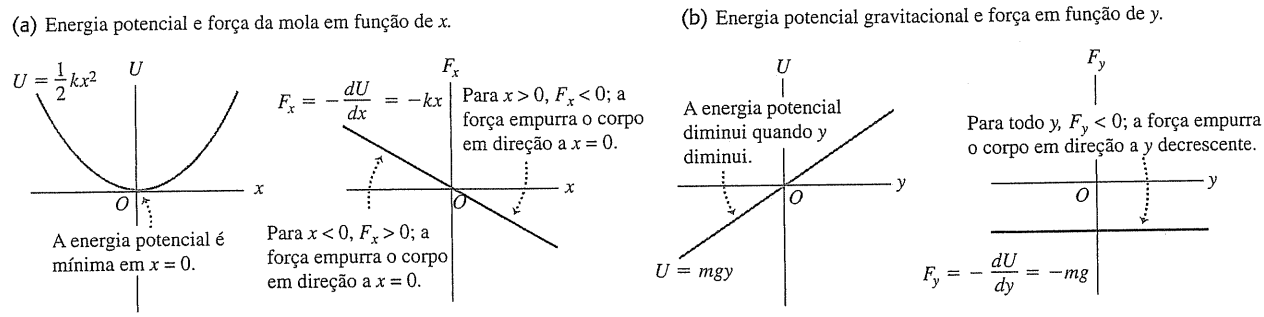


Figura 7.22 Uma força conservativa é a derivada negativa da energia potencial correspondente.

$$F_x(x)\,\Delta x = -\Delta U \qquad \text{e} \qquad F_x(x) = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

Você já deve ter percebido o que virá. Tomamos o limite quando $\Delta x \to 0$; nesse limite, a variação de F_x torna-se desprezível, e achamos a expressão exata

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \tag{7.16}$$

(força obtida da energia potencial, uma dimensão)

Esse resultado faz sentido; em regiões onde $U(x)$ varia rapidamente com x (ou seja, onde $dU(x)/dx$ é grande), ocorre a realização de um trabalho grande em um dado deslocamento, e a força correspondente possui módulo elevado. Por outro lado, quando $F_x(x)$ está orientada no sentido positivo do eixo Ox, $U(x)$ *diminui* quando x cresce. Logo, $F_x(x)$ e $dU(x)/dx$ devem realmente possuir sinais contrários. O significado físico da Equação (7.16) é que *uma força conservativa sempre atua no sentido de conduzir o sistema a uma energia potencial mais baixa.*

Para conferir, considere a função da energia potencial elástica, $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Usando a Equação (7.16), obtemos

$$F_x(x) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

que é a expressão correta da força exercida por uma mola ideal (Figura 7.22a). Analogamente, para a energia potencial gravitacional temos $U(y) = mgy$; tomando o cuidado de substituir x por y na escolha do eixo, obtemos $F_y = -dU/dy = -d(mgy)/dy = -mg$, que é a expressão correta para a força gravitacional (Figura 7.22b).

Exemplo 7.13

FORÇA ELÉTRICA E SUA ENERGIA POTENCIAL Uma partícula com carga elétrica é mantida em repouso no ponto $x = 0$, enquanto uma segunda partícula com a mesma carga pode mover-se livremente ao longo do sentido positivo do eixo Ox. A energia potencial do sistema é

$$U(x) = \frac{C}{x}$$

onde C é uma constante positiva que depende do módulo das cargas. Deduza em função da posição uma expressão para o componente x da força que atua sobre a carga que se move.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a energia potencial $U(x)$ foi fornecida, e devemos encontrar a função da força $F_x(x)$.

PREPARAR: usaremos a Equação (7.16), $F_x(x) = -dU(x)/dx$.

EXECUTAR: a derivada em relação a x da função $1/x$ é $-1/x^2$. Logo, a força que atua sobre a carga que se move para $x > 0$ é dada por

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -C\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{C}{x^2}$$

AVALIAR: o componente x da força é positivo, correspondendo a uma interação repulsiva entre cargas elétricas de mesmo sinal. A energia potencial é muito elevada quando as partículas estão próximas (x é pequeno) e tende a zero quando as partículas se afastam (x é grande); a força empurra a carga móvel para os valores x mais positivos, para os quais a energia potencial é menor. A força $F_x(x) = C/x^2$ torna-se mais fraca quando as partículas se afastam (x aumenta). Estudaremos as forças elétricas em detalhes no Capítulo 21.

Força e energia potencial em três dimensões

Podemos estender a análise anterior para três dimensões, onde a partícula pode se mover ao longo do eixo Ox, Oy ou Oz, ou então, mover-se no espaço com componentes simultaneamente em todas essas direções, quando está sob a ação de uma força que possui componentes F_X, F_Y e F_Z. Cada componente da força pode ser uma função das coordenadas x, y e z. A função da energia potencial U é sempre uma função dessas três coordenadas espaciais. Podemos agora usar a Equação (7.16) para achar cada componente da força. A variação da energia potencial ΔU quando a partícula se move de uma pequena distância Δx ao longo do eixo Ox é novamente dada por $-F_x\Delta x$; ela não depende de F_Y ou de F_Z, que são componentes da força ortogonal ao deslocamento e não realizam trabalho. Sendo assim, temos novamente a expressão aproximada

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

Os componentes y e z da força são obtidos de modo análogo:

$$F_y = -\frac{\Delta U}{\Delta y} \qquad F_z = -\frac{\Delta U}{\Delta z}$$

Para fazer essas relações tornarem-se exatas, precisamos tomar os limites quando $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, e $\Delta z \to 0$, de modo que essas relações se transformem nas respectivas derivadas. Como U é uma função dessas três coordenadas, devemos lembrar que ao calcular cada uma dessas, somente uma coordenada varia de cada vez. Calculamos a derivada de U em relação a x supondo y e z constantes e somente x variando, e assim por diante. Esse tipo de derivada denomina-se *derivada parcial*. A notação usual para a derivada parcial é $\partial U/\partial x$ e assim por diante; o símbolo ∂ é um d modificado para lembrar-nos da diferença entre os dois tipos de derivada. Logo escrevemos

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{7.17}$$

(força obtida da energia potencial)

Podemos usar vetores unitários para escrever uma expressão vetorial compacta para a força $\vec{F}$:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right) \tag{7.18}$$

(força obtida da energia potencial)

A expressão no interior dos parênteses representa uma operação particular, na qual tomamos as derivadas parciais de U em relação a cada uma das coordenadas, multiplicamos pelo respectivo vetor unitário e fazemos a soma vetorial. Essa operação, geralmente abreviada como $\vec{\nabla}U$, é chamada de **gradiente** de U. Portanto, a força é o gradiente da energia potencial com o sinal contrário:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \tag{7.19}$$

Para conferirmos, substituindo a expressão da energia potencial gravitacional $U = mgy$ na Equação (7.19), encontramos:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(mgy) = -\left(\frac{\partial(mgy)}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial(mgy)}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial(mgy)}{\partial z}\hat{k}\right) = (-mg)\hat{\jmath}$$

Este resultado é a expressão familiar da força gravitacional.

Exemplo 7.14

FORÇA E ENERGIA POTENCIAL EM DUAS DIMENSÕES

Um disco de hóquei desliza sobre uma mesa de ar sem atrito. As coordenadas do disco são x e y. Sobre ele atua uma força conservativa oriunda de uma energia potencial dada pela função

$$U(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$$

Deduza uma expressão para a força que atua sobre o disco de hóquei e ache uma expressão para o módulo da força em função da posição.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a partir da função $U(x,y)$, precisamos encontrar os componentes dos vetores e o módulo da força conservativa $\vec{F}$ correspondente.

PREPARAR: os componentes da força de $U(x,y)$ podem ser determinados usando-se a Equação (7.18). Essa função não depende de z, portanto a derivada parcial de U em relação a z é $\partial U/\partial z = 0$, e a força não possui nenhum componente de z. A seguir, determinamos o módulo da força usando a fórmula para o módulo de um vetor: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$.

EXECUTAR: os componentes de x e y da força são

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -ky$$

Pela Equação (7.18), o resultado anterior corresponde ao vetor

$$\vec{F} = -k(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath})$$

Porém, $x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ é somente o vetor posição $\vec{r}$ da partícula, de modo que podemos reescrever essa relação do seguinte modo: $\vec{F} = -k\vec{r}$. Essa força é contrária ao vetor posição em cada ponto, ou seja, uma força que em cada ponto é dirigida para o sentido da origem. A energia potencial é mínima na origem, de modo que novamente vemos que a força aponta no sentido da diminuição da energia potencial.

O *módulo* da força em cada ponto é dado por

$$F = \sqrt{(-kx)^2 + (-ky)^2} = k\sqrt{x^2 + y^2} = kr$$

onde r é a distância da partícula à origem. Esse resultado é igual ao da força que atua sobre uma mola que obedece à lei de Hooke e que possui comprimento muito pequeno (em comparação com outras dimensões do problema) quando ela não está esticada. (A outra extremidade da mola está presa à origem da mesa de ar.)

AVALIAR: para conferir nosso resultado, note que a função energia potencial também pode ser escrita como $U = \frac{1}{2}kr^2$. Escrito dessa forma, U é uma função de uma única coordenada r, de modo que podemos encontrar a força substituindo x por r na Equação (7.16):

$$F_r = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}kr^2\right) = -kr$$

exatamente como calculamos acima, a força possui módulo kr; o sinal negativo indica que a força possui direção radial para dentro (no sentido da origem).

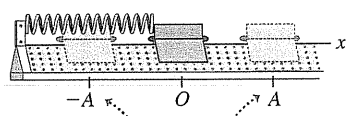
Teste sua compreensão da Seção 7.4 Uma partícula que se desloca ao longo do eixo x sofre ação de uma força conservativa F_x. Em um dado ponto, a força é igual a zero. (a) Qual das seguintes afirmações sobre o valor da função de energia potencial $U(x)$ nesse ponto é correta? (i) $U(x) = 0$; (ii) $U(x) > 0$; (iii) $U(x) < 0$; (iv) não há informação suficiente para responder. (b) Qual das seguintes afirmações sobre o valor da derivada de $U(x)$ nesse ponto é correta? (i) $dU(x)/dx = 0$; (ii) $dU(x)/dx > 0$; (iii) $dU(x)/dx < 0$; (iv) não há informação suficiente para responder. ∎

7.5 Diagramas de energia

Quando uma partícula se desloca em linha reta sob a ação de uma força conservativa, podemos inferir diversas possibilidades de movimentos examinando o gráfico da função $U(x)$ da energia potencial. A Figura 7.23a mostra um cavaleiro de massa m que se move ao longo do eixo Ox em um trilho de ar. A mola exerce sobre o cavaleiro uma força na direção do eixo Ox dada por $Fx = -kx$. A Figura 7.23b mostra um gráfico da energia potencial correspondente $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Se a força elástica da mola for a *única* força horizontal atuando sobre o cavaleiro, a energia mecânica total $E = K + U$ permanecerá constante, não dependendo de x. Assim, o gráfico de E em função de x é uma linha reta horizontal. Usamos o termo **diagrama de energia** para um gráfico como esse, que mostra tanto a função da energia potencial $U(x)$ quanto a energia da partícula sujeita à força que corresponde a $U(x)$.

A distância vertical entre a curva de U e a curva de E para cada ponto do diagrama dada pela diferença $E - U$ fornece a energia cinética K nesse ponto. Note que K possui seu valor máximo para $x = 0$. Ele se anula para os valores de x referentes à intersecção das duas curvas, indicadas por A e $-A$ no diagrama. Portanto, a velocidade v possui seu valor máximo para $x = 0$ e se anula para $x = \pm A$, os pontos que, para um dado valor da energia total E, correspondem ao deslocamento *máximo* possível a partir de $x = 0$. A energia potencial U nunca pode ser maior do que a energia total E; se isso ocorresse, K teria valor negativo, o que é impossível. Trata-se de um movimento oscilatório entre os extremos $x = A$ e $x = -A$.

(a)



Os limites do movimento do cavaleiro estão em $x = A$ e $x = -A$

(b)

No gráfico, os limites do movimento correspondem aos pontos de interseção da curva da energia potencial U com a linha reta horizontal que representa a energia mecânica total E.

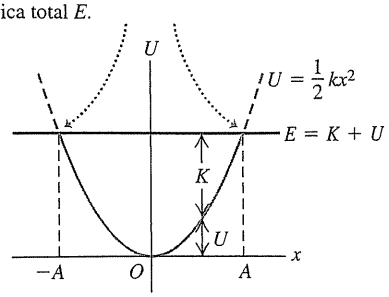


Figura 7.23 (a) Um cavaleiro sobre um trilho de ar. A mola exerce uma força $F_x = -kx$. (b) A função da energia potencial.

Para cada ponto, a força Fx sobre o cavaleiro é dada pela inclinação da curva $U(x)$ com sinal contrário: $F_x = -dU/dx$ (Figura 7.22a). Quando a partícula está em $x = 0$, a inclinação e a força são iguais a zero, portanto essa é uma posição de *equilíbrio*. Quando x é positivo, a inclinação da curva $U(x)$ é positiva e a força F_x é negativa, orientada para a origem. Quando x é negativo, a inclinação da curva $U(x)$ é negativa e a força F_x é positiva, orientada novamente para a origem. Essa força algumas vezes é chamada de *força restauradora*; quando o cavaleiro se desloca para qualquer um dos lados de $x = 0$, a força resultante tende a 'restaurar' sua posição para $x = 0$. Situação análoga ocorre quando uma bola de gude rola dentro de um recipiente com o fundo redondo. Dizemos que $x = 0$ é um ponto de **equilíbrio estável**. De modo geral, *qualquer mínimo na curva da energia potencial corresponde a um ponto de equilíbrio estável.*

A Figura 7.24a mostra uma função da energia potencial $U(x)$ hipotética e geral. A Figura 7.24b mostra a força correspondente $F_x = -dU/dx$. Os pontos x_1 e x_3 são pontos de equilíbrio estável. Em cada um desses pontos, F_x é igual a zero porque a inclinação da curva $U(x)$ é nula. Quando a partícula se desloca para qualquer um dos lados, a força a empurra de volta para o ponto de equilíbrio. A inclinação da curva $U(x)$ também é nula nos pontos x_2 e x_4, que também são pontos de equilíbrio. Contudo, quando a partícula se desloca um pouco para a direita de qualquer um desses pontos, a inclinação da curva $U(x)$ torna-se negativa e a força correspondente F_x torna-se positiva, empurrando a partícula para longe do ponto de equilíbrio. Quando a partícula se desloca um pouco para a esquerda, a força F_x torna-se negativa, empurrando novamente a partícula para longe do ponto de equilíbrio. Situação análoga ocorre quando uma bola de gude rola a partir do equilíbrio no topo de uma bola de boliche. Os pontos x_2 e x_4 correspondem a pontos de **equilíbrio instável**; *qualquer máximo na curva da energia potencial corresponde a um ponto de equilíbrio instável.*

ATENÇÃO Energia potencial e o sentido de uma força conservativa O sentido de uma força sobre um corpo *não* é determinado pelo sinal da energia potencial U. Em vez disso, o sinal de $F_x = -dU/dx$ é que é relevante. Como discutimos na Seção 7.1, o que possui sentido físico é a *diferença* de U entre dois pontos, e é exatamente o que $F_x = -dU/dx$ indica. Isso significa que você pode sempre adicionar uma constante ao valor da energia potencial sem alterar a física da situação envolvida.

Quando a partícula possui energia total E_1 e está inicialmente em repouso próximo do ponto x_1, ela pode se mover somente na região entre x_a e x_b delimitada pela intersecção entre a reta E_1 e o gráfico de U (Figura 7.24a). Novamente, U não pode ser maior do que E_1 porque K não pode ter valores negativos. Dizemos que a partícula se

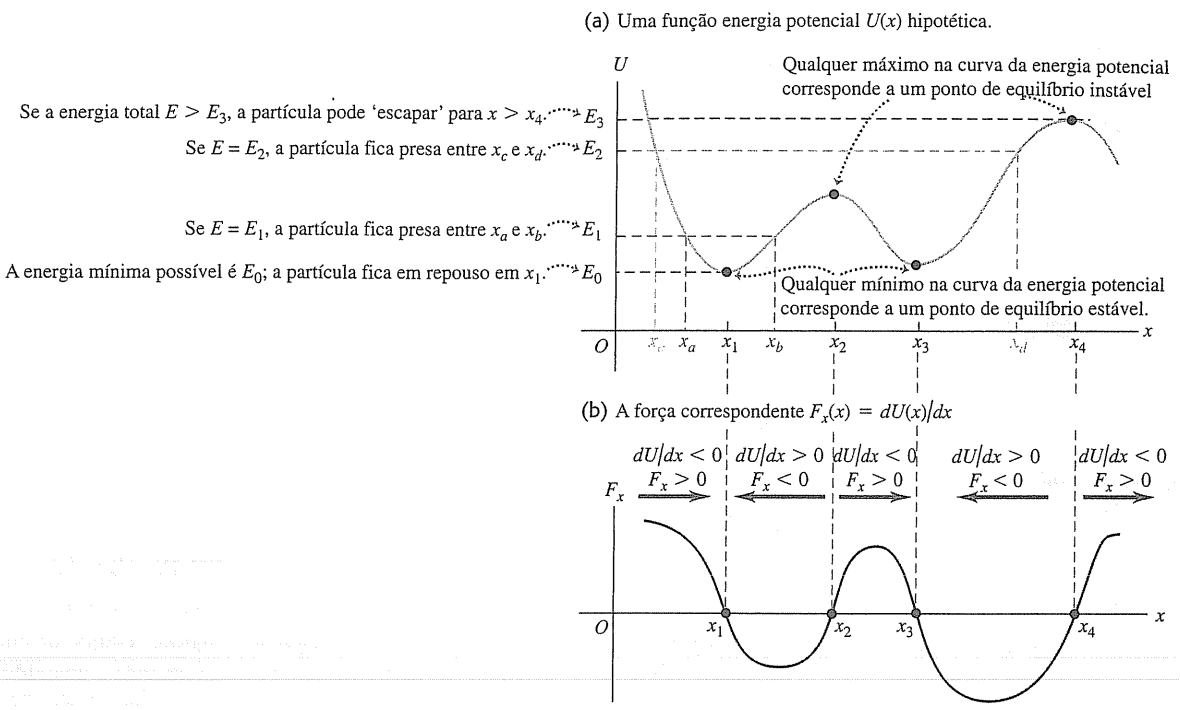


Figura 7.24 Os máximos e mínimos de uma função da energia potencial $U(x)$ correspondem aos pontos onde $F_x = 0$.

move em um *poço de potencial*, e x_a e x_b são os *pontos de inversão* do movimento da partícula (porque nestes pontos a partícula pára momentaneamente e inverte o sentido do movimento). Quando a energia total aumenta para um valor E_2, a partícula pode se mover em uma região maior, entre x_c e x_d. Quando a energia total é maior do que E_3, a partícula pode 'escapar' e se deslocar para valores infinitamente grandes de x. No outro extremo, E_0 representa o menor valor possível da energia total do sistema.

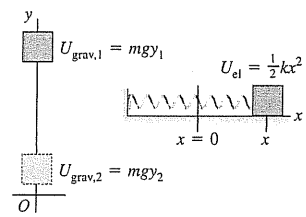
Teste sua compreensão da Seção 7.5 A curva na Figura 7.24b possui um máximo em um ponto entre x_2 e x_3. Qual das seguintes afirmações descreve corretamente o que ocorre com a partícula quando ela está nesse ponto? (i) A aceleração da partícula é igual a zero; (ii) A partícula acelera no sentido positivo do eixo x; o módulo da aceleração é menor do que em qualquer outro ponto entre x_2 e x_3; (iii) A partícula acelera no sentido positivo do eixo x; o módulo da aceleração é maior do que em qualquer outro ponto entre x_2 e x_3; (iv) A partícula acelera no sentido negativo do eixo x; o módulo da aceleração é menor do que em qualquer outro ponto entre x_2 e x_3; (v) A partícula acelera no sentido negativo do eixo x; o módulo da aceleração é maior do que em qualquer outro ponto entre x_2 e x_3. ∎

Resumo

Energia potencial gravitacional e energia potencial elástica: o trabalho realizado por uma força gravitacional constante sobre uma partícula é representado como uma variação da energia potencial gravitacional $U_{grav} = mgy$. Essa energia é uma propriedade compartilhada entre a partícula e a Terra. Uma energia potencial também é associada com a força elástica $F_x = -kx$ exercida por uma mola ideal, sendo x a deformação da mola comprimida ou dilatada. O trabalho realizado por essa força pode ser representado como uma variação na energia potencial elástica da mola, $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$.

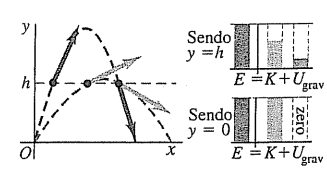
$$W_{grav} = mgy_1 - mgy_2 = U_{grav,1} - U_{grav,2} = -\Delta U_{grav} \quad (7.1), (7.3)$$

$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = U_{el,1} - U_{el,2} = -\Delta U_{el} \quad (7.10)$$



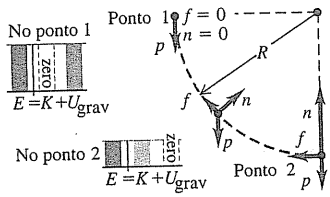
Quando a energia mecânica total é conservada: a energia potencial total U é a soma da energia potencial gravitacional com a energia potencial elástica: $U = U_{grav} + U_{el}$. Se apenas a força gravitacional e a força elástica realizam trabalho sobre uma partícula, existe conservação da soma da energia cinética com a energia potencial. A soma $E = K + U$ é chamada de energia mecânica total (exemplos 7.1, 7.3, 7.4 e 7.7).

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \quad (7.4), (7.11)$$



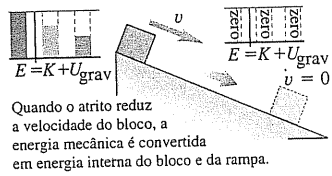
Quando a energia mecânica não é conservada: quando além da força gravitacional e da força elástica outras forças realizam trabalho sobre uma partícula, o trabalho realizado W_{outra} pela resultante das outras forças é igual à variação da energia mecânica total do sistema (soma da energia cinética com a energia potencial) (exemplos 7.2, 7.5, 7.6, 7.8 e 7.9).

$$K_1 + U_1 + W_{outra} = K_2 + U_2 \tag{7.14}$$



Forças conservativas, forças não conservativas e a lei da conservação de energia: uma força pode ser conservativa ou não conservativa. Uma força é conservativa quando a relação trabalho-energia cinética é completamente reversível. O trabalho realizado por uma força conservativa pode ser sempre representado pela variação de uma energia potencial, porém o trabalho realizado por uma força não conservativa não pode. O trabalho realizado por uma força conservativa se manifesta por meio da variação da energia interna de corpos. Permanece sempre conservada a soma total da variação da energia cinética com a variação da energia potencial mais a variação da energia interna (exemplos 7.10 a 7.12).

$$\Delta K + \Delta U + \Delta U_{int} = 0 \tag{7.15}$$

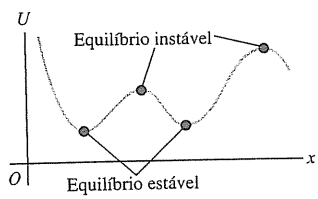


Cálculo da força a partir da energia potencial: para um movimento retilíneo, uma força conservativa $F_x(x)$ é a derivada negativa da sua função da energia potencial U correspondente. Em três dimensões, os componentes de uma força conservativa são derivadas parciais negativas de U (exemplos 7.13 e 7.14).

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \tag{7.16}$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{7.17}$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right) \tag{7.18}$$



Principais termos

conservação da energia mecânica, 215
diagrama de energia, 234
energia interna, 230
energia mecânica total do sistema, 215
energia potencial, 214
energia potencial elástica, 223
energia potencial gravitacional, 214
equilíbrio estável, 234
equilíbrio instável, 235
força conservativa, 228
força dissipativa, 229
força não conservativa, 229
gradiente, 233
lei da conservação da energia, 230

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

O trabalho que a gravidade realiza sobre o nadador é positivo, uma vez que essa força aponta no mesmo sentido de cima para baixo do seu deslocamento. Isso corresponde a uma diminuição da energia potencial gravitacional. A água está realizando trabalho negativo sobre o nadador; ela exerce uma força de baixo para cima de resistência de um fluido enquanto ele se move de cima para baixo. Isso corresponde a um aumento na energia interna do nadador e da água (Seção 7.3).

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

7.1 Resposta: (iii) A energia cinética inicial $K_1 = 0$, a energia potencial inicial $U_1 = mgy_1$ e a energia potencial final $U_2 = mgy_2$ são as mesmas para os dois blocos. A energia mecânica é conservada em ambos os casos, de modo que a energia cinética final $K = \frac{1}{2}mv_2^2$ é também igual para os dois blocos. Logo, a velocidade escalar na extremidade da direita é a *mesma* para ambos os casos!

7.2 Resposta: (iii) O elevador ainda está se deslocando de cima para baixo, portanto a energia cinética K é positiva (lembre-se de que K nunca pode ser negativo); o elevador está abaixo do ponto 1, portanto $y < 0$ e $U_{grav} < 0$; e a mola está comprimida, portanto $U_{el} > 0$.

7.3 Resposta: (iii) Devido ao atrito nas turbinas e entre a água e as turbinas, parte da energia potencial serve para aumentar as temperaturas da água e do mecanismo.

7.4 Respostas: (a) (iv), (b) (i) Quando $Fx = 0$ em um ponto, então a derivada de $U(x)$ deve ser igual a zero nesse ponto porque $F_x = -dU(x)/dx$. Entretanto, isso não revela nada sobre o *valor* de $U(x)$ nesse ponto.

7.5 Resposta: (iii) A Figura 7.24b mostra o componente x da força, F_x. Onde ele é máximo (mais positivo), o componente x da força e a aceleração possuem valores mais positivos do que nos valores adjacentes de x.

Questões para discussão

Q7.1 Uma bola de beisebol é lançada verticalmente de baixo para cima com velocidade inicial v_0. Caso a resistência do ar *não* seja desprezada, quando a bola retorna para sua altura inicial, sua velocidade é menor do que v_0. Usando o conceito de energia, explique por quê.

Q7.2 Um projétil possui a mesma energia cinética seja qual for o ângulo da projeção. Por que ele não atinge a mesma altura máxima em qualquer caso?

Q7.3 A velocidade de um objeto na base de uma rampa sem atrito depende da forma da rampa ou apenas da sua altura? Explique. E se houver atrito na rampa?

Q7.4 Um ovo é solto do telhado de um edifício sem velocidade inicial e cai até o solo. A queda é observada por um estudante situado no telhado do edifício, que usa coordenadas com a origem no telhado, e por outro estudante no solo, que usa coordenadas com a origem no solo. Verifique se os dois estudantes atribuem valores iguais ou valores diferentes para cada uma das seguintes grandezas: energia potencial gravitacional inicial, energia potencial gravitacional final, variação da energia potencial gravitacional e energia cinética do ovo imediatamente antes de ele colidir com o solo. Explique.

Q7.5 Um professor de física suspende uma bola de boliche ligada por uma corda longa ao teto de um grande anfiteatro usado para conferências. Para ilustrar sua crença na lei da conservação da energia, ele vai para um dos lados do tablado, puxa a bola para este lado até que ela fique em contato com seu nariz e a seguir a liberta. A bola oscila ao longo de um grande arco por sobre o tablado, depois retorna e pára momentaneamente bem diante do nariz do destemido professor. Contudo, uma ocasião depois da primeira demonstração, ele se distrai ao olhar para um aluno que estava do outro lado do tablado e *empurra* a bola para um ponto mais além da posição do seu nariz e repete a experiência. Conte o resto dessa história e explique a razão de seu final potencialmente trágico.

Q7.6 Energia perdida? O princípio da conservação de energia afirma que nunca se perde energia; ela somente se altera de uma forma para outra. Entretanto, em muitas situações cotidianas, pode parecer que se perdeu energia. Em cada um dos seguintes casos, explique o que aconteceu com a energia 'perdida'. (a) Uma caixa que desliza sobre o piso pára devido ao atrito. Como o atrito eliminou a energia cinética e o que aconteceu com essa energia? (b) Um carro pára quando você freia. O que aconteceu com a energia cinética do carro? (c) A resistência do ar consome parte da energia potencial gravitacional original de um objeto em queda. Em que tipo de energia foi convertida a energia potencial 'perdida'? (d) Quando um ônibus espacial que retorna à Terra toca a pista de pouso, ele perdeu quase toda sua energia cinética e energia potencial gravitacional. Para onde foi toda essa energia?

Q7.7 É possível uma força de atrito fazer *aumentar* a energia mecânica de um sistema? Em caso afirmativo, forneça exemplos.

Q7.8 Uma mulher oscila sobre um trampolim, atingindo pontos ligeiramente mais elevados para cada oscilação. Explique como ela faz aumentar a energia mecânica total do sistema.

Q7.9 Física fraturada. É comum as pessoas chamarem a conta de energia elétrica de conta da *força*, mas a grandeza na qual a conta se baseia é expressa em *quilowatt-hora*. Pelo que as pessoas estão realmente sendo cobradas?

Q7.10 Uma rocha de massa m e outra rocha de massa $2m$ são libertadas do repouso a partir da mesma altura e não sofrem resistência do ar durante a queda. Qual dessas afirmações sobre essas rochas é verdadeira? (Pode haver mais de uma alternativa correta.) (a) Ambas possuem a mesma energia potencial gravitacional. (b) Ambas possuem a mesma energia cinética ao atingirem o solo. (c) Ambas atingem o solo com a mesma velocidade escalar. (d) Ao atingir o solo, a rocha mais pesada possui o dobro da energia cinética da mais leve. (e) Ao atingir o solo, a rocha mais pesada possui quatro vezes a energia cinética da mais leve.

Q7.11 Sobre um lago congelado e livre de atrito, um disco de hóquei é pressionado contra uma mola ideal fixa, sem estar preso a ela, e comprime a mola por uma distância x_0. A energia máxima armazenada na mola é U_0, a velocidade escalar máxima que o disco ganha após ser libertado é v_0 e sua energia cinética máxima é K_0. Agora o disco é pressionado de modo a comprimir a mola pelo dobro da distância anterior. Nesse caso, (a) qual é a energia potencial máxima armazenada na mola (termos de U_0) e (b) quais são a energia cinética máxima e a velocidade escalar do disco (em termos de K_0 e x_0)?

Q7.12 Quando as pessoas estão com frio, elas em geral esfregam as mãos para se aquecer. Como esse gesto produz calor? De onde vem o calor?

Q7.13 É comum ouvir dizer que a maior parte da nossa energia vem do Sol. Relacione cada uma das seguintes energias ao Sol. (a) a energia cinética de um avião a jato; (b) a energia potencial obtida por um escalador de montanhas; (c) a energia elétrica usada para colocar um computador em funcionamento; (d) a energia elétrica de uma usina hidrelétrica.

Q7.14 Uma caixa desliza de cima para baixo ao longo de uma rampa e o trabalho é realizado sobre a caixa pelas forças da gravidade e do atrito. O trabalho de cada uma dessas forças pode ser expresso em termos da variação em uma função energia potencial? Para cada força, explique por que sim e por que não.

Q7.15 Em termos físicos, explique por que o atrito é uma força não conservativa. Ele armazena energia para uso futuro?

Q7.16 Um grampo prende uma mola comprimida que a seguir é dissolvida em um ácido. O que ocorre com sua energia potencial?

Q7.17 Visto que somente variações de energia potencial são relevantes, um estudante decide fazer a energia potencial elástica de uma mola igual a zero, quando a mola está esticada a uma distância x_1. O estudante decide, portanto, fazer $U = \frac{1}{2}k(x - x_1)^2$. Isso está correto? Explique.

Q7.18 A Figura 7.22a mostra a função energia potencial para a força $F_x = -kx$. Faça um gráfico para a função energia potencial da força $F_x = +kx$. Para essa força, $x = 0$ seria um ponto de equilíbrio? O equilíbrio seria estável ou instável? Explique.

Q7.19 A Figura 7.22b mostra a função energia potencial associada com a força gravitacional entre um objeto e a Terra. Use esse gráfico para explicar por que um objeto cai para o solo, quando ele é libertado.

Q7.20 Para um sistema com duas partículas, geralmente fazemos a energia potencial tender a zero quando a distância entre as partículas tende ao infinito. Ao se fazer essa escolha, explique por que quando a distância entre as partículas é finita a energia potencial é positiva para partículas que se repelem e negativa para partículas que se atraem.

Q7.21 Por que os pontos $x = A$ e $x = -A$ na Figura 7.23b denominam-se *pontos de inversão*? Qual é a relação entre E e U em um ponto de inversão?

Q7.22 Uma partícula está em *equilíbrio indiferente* quando a força resultante sobre ela é zero e permanece zero quando ela é deslocada ligeiramente em qualquer sentido. Faça um gráfico para a função energia potencial nas vizinhanças de um equilíbrio indiferente, para o caso do movimento em uma dimensão. Forneça um exemplo de um objeto em equilíbrio indiferente.

Q7.23 A força resultante sobre uma partícula de massa m possui uma energia potencial indicada no gráfico da Figura 7.24a. Se a energia total for E_1, faça um gráfico para a velocidade v da partícula em função da sua posição x. Para qual valor de x sua velocidade é máxima? Faça um gráfico de v *versus* x, quando a energia total for E_2.

Q7.24 A função da energia potencial de uma força $\vec{F}$ é $U = \alpha x^3$, onde α é uma constante positiva. Qual é a direção de $\vec{F}$?

Exercícios

Seção 7.1 Energia potencial gravitacional

7.1 Certo dia, uma escaladora de montanhas de 75 kg sobe do nível de 1500 m de um rochedo vertical até o topo a 2400 m. No dia seguinte, ela desce do topo até a base do rochedo, que está a uma elevação de 1350 m. Qual é a variação da energia potencial gravitacional dela (a) no primeiro dia e (b) no segundo dia?

7.2 Um saco de farinha de 5,0 kg é elevado verticalmente até uma altura de 15,0 m com uma velocidade constante de 3,5 m/s. a) Qual é o módulo da força necessária? b) Qual é o trabalho realizado por essa força sobre o saco? Em que se transforma esse trabalho?

7.3 Uma mala postal de 120 kg é suspensa por uma corda vertical de 3,5 m de comprimento. Um funcionário desloca a mala lateralmente para uma posição 2,0 m da sua posição original, sempre mantendo a corda esticada. a) Qual é o módulo da força horizontal necessária para manter a mala na nova posição? b) Para deslocar a mala até essa posição, qual é o trabalho realizado (i) pela corda e (ii) pelo funcionário?

7.4 Um nadador de 72,0 kg salta para dentro da piscina a partir de uma prancha que está 3,25 m acima do nível da água. Use a conservação da energia para encontrar a velocidade escalar dele assim que ele atinge a água (a) se ele simplesmente prende a respiração e mergulha, (b) se ele corajosamente salta em linha reta de baixo para cima (mas apenas além da prancha) a 2,50 m/s e (c) se ele consegue pular de cima para baixo a 2,50 m/s.

7.5 Uma bola de beisebol é lançada do telhado de um edifício de 22,0 m de altura com uma velocidade inicial de 12,0 m/s e dirigida formando um ângulo de 53,1° acima da horizontal. a) Qual é a velocidade da bola imediatamente antes de colidir com o solo? Use o método da energia e despreze a resistência do ar. b) Qual seria a resposta da parte (a) se a velocidade inicial formasse um ângulo de 53,1° *abaixo* da horizontal? c) Se você não desprezar a resistência do ar, a maior velocidade será obtida na parte (a) ou na parte (b)?

7.6 Uma caixa de massa M começa a se deslocar a partir do repouso, no topo de uma rampa sem atrito e inclinada a um ângulo α acima da horizontal. Calcule sua velocidade escalar na extremidade inferior da rampa a uma distância d do ponto de partida. Faça isso de duas formas: (a) Considere que o nível no qual a energia potencial é igual a zero situa-se na extremidade inferior da rampa, com y positivo orientado de baixo para cima. (b) Considere o nível zero para a energia potencial no topo da rampa, com y positivo orientado de baixo para cima. (c) Por que a força normal não foi considerada na solução?

7.7 Responda a parte (b) do Exemplo 7.6 (Seção 7.1) usando a Equação (7.7) do ponto 2 ao ponto 3, em vez de usar os pontos 1 e 3 como foi feito no exemplo.

7.8 Uma caixa vazia desliza para baixo de uma rampa, começando com uma velocidade inicial v_0 e atingindo a base com uma velocidade v e uma energia cinética K. Alguns livros são colocados no interior da caixa de modo que sua massa fica multiplicada por quatro. A resistência do ar é desprezível e o coeficiente de atrito cinético é constante. Novamente começando com uma velocidade inicial v_0 no topo da rampa, qual seria sua velocidade e sua energia cinética na base da rampa? Explique o raciocínio usado na solução.

7.9 Uma pedra de massa igual a 0,20 kg é libertada a partir do repouso no ponto A situado no topo de um recipiente hemisférico grande com raio $R = 0{,}50$ m (Figura 7.25). Suponha que o tamanho da pedra seja pequeno em comparação com R, de modo que a pedra possa ser tratada como uma partícula, e suponha que a pedra deslize sem rolar. O trabalho realizado pela força de atrito quando ela se move de A ao ponto B situado na base do recipiente é igual a 0,22 J. (a) Entre os pontos A e B, qual é o trabalho realizado sobre a pedra pela (i) força normal e (ii) gravidade? (b) Qual é a velocidade da pedra quando ela atinge o ponto B? (c) Das três forças que atuam sobre a pedra enquanto ela desliza de cima para baixo no recipiente, qual é constante (se é que existe alguma) e qual não é constante? Explique. (d) Assim que a pedra atinge o ponto B, qual é a força normal que atua sobre ela no fundo do recipiente?

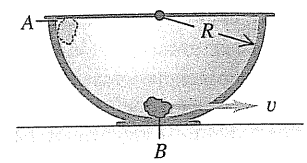


Figura 7.25 Exercício 7.9.

7.10 Uma pedra de massa m é arremessada de baixo para cima formando um ângulo θ acima da horizontal e não sofre nenhuma resistência significativa do ar. Use a conservação de energia para mostrar que, no seu ponto mais alto, ela está a uma distância $v_0^2(\text{sen}^2\theta)/2g$ acima do ponto de onde foi arremessada. (*Sugestão*: $v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2$.)

7.11 Você está testando uma nova montanha-russa em um parque de diversões com um carro vazio de massa de 120 kg. Uma parte da trajetória é uma espira vertical com raio de 12,0 m. No ponto inferior da espira (ponto A) o carro tem velocidade escalar de 25,0 m/s, e no topo da espira (ponto B) ele tem velocidade de 8,0 m/s. Enquanto o carro desliza do ponto A para o ponto B, quanto trabalho é realizado pelo atrito?

7.12 Tarzan e Jane. No alto de uma árvore, Tarzan observa Jane em outra árvore. Ele agarra a extremidade de um cipó de 20,0 m de comprimento que faz um ângulo de 45° com a vertical, abandona a borda da árvore, oscila para baixo e depois sobe no sentido dos braços de Jane. Quando ele chega, seu cipó faz um ângulo de 30° com a vertical. Verifique se ele dará um suave abraço em Jane ou se a empurrará para fora da árvore, calculando a velocidade de Tarzan no instante imediatamente antes de atingir Jane. Despreze a resistência do ar e a massa do cipó.

7.13 Um forno de microondas de 10,0 kg é empurrado 8,0 m para cima de uma rampa inclinada de um ângulo de 36,9° acima da horizontal, por uma força constante $\vec{F}$ de módulo igual a 110 N atuando paralelamente ao deslocamento ao longo da rampa. O coeficiente de atrito cinético entre o forno e a rampa é igual a 0,250. a) Qual é o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ sobre o forno? b) Qual é o trabalho realizado sobre o forno pela força de atrito? c) Calcule o aumento da energia potencial para o forno. d) Use suas respostas das partes (a), (b) e (c) para calcular o aumento da energia cinética do forno. e) Use $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ para calcular a aceleração do forno. Supondo que o forno esteja inicialmente em repouso, use a aceleração do forno para calcular sua velocidade depois de se deslocar 8,0 m. A partir daí calcule o aumento de energia cinética e compare o resultado com o obtido no item (d).

7.14 **Pêndulo.** Uma pedra com massa de 0,12 kg está presa a um fio de 0,80 m comprimento, de massa desprezível, formando um pêndulo. O pêndulo oscila até um ângulo de 45° com a vertical. Despreze a resistência do ar. a) Qual é a velocidade da pedra quando ela passa pela posição vertical? b) Qual é a tensão no fio quando ele faz um ângulo de 45° com a vertical? c) Qual é a tensão no fio quando ele passa pela posição vertical?

Seção 7.2 Energia potencial elástica

7.15 Uma força de 800 N estica uma mola até uma distância de 0,200 m. a) Qual é a energia potencial da mola quando ela está esticada 0,200 m? b) Qual é a energia potencial da mola quando ela está comprimida 5,0 cm?

7.16 Uma mola ideal de massa desprezível tem 12,0 cm de comprimento quando nada está preso a ela. Ao pendurarmos um peso de 3,15 kg nessa mola, seu comprimento passa a ser 13,40 cm. Para que armazene 10,0 J de energia potencial, qual deve ser o seu comprimento *total*? Suponha que a mola continue a obedecer à lei de Hooke.

7.17 Uma mola armazena energia potencial U_0 quando está comprimida em uma distância x_0 em relação ao seu comprimento sem deformação. (a) Em termos de U_0, quanta energia ela armazena quando está comprimida (i) no dobro e (ii) pela metade? (b) Em termos de x_0, em quanto ela deve estar comprimida a partir do seu comprimento sem deformação, para armazenar (i) o dobro da energia e (ii) metade da energia?

7.18 Uma atiradeira lança verticalmente um seixo de 10 g até um altura de 22,0 m. a) Qual é a energia potencial elástica armazenada nas tiras de borracha da atiradeira? b) Qual seria a altura atingida por um seixo de 25 g lançado pela atiradeira, supondo essa mesma energia potencial elástica armazenada? c) Quais são os efeitos físicos que você está desprezando ao resolver este problema?

7.19 A constante de uma certa mola de massa desprezível é dada por $k = 1600$ N/m. a) Qual deve ser a distância da compressão dessa mola para que ela armazene uma energia potencial igual a 3,20 J? b) Você coloca verticalmente uma das extremidades da mola sobre o solo. Deixa cair sobre a mola um livro de 1,20 kg a partir de uma altura de 0,80 m acima da extremidade superior da mola. Calcule a distância da compressão máxima dessa mola.

7.20 Um queijo de 1,20 kg é colocado sobre uma mola de massa desprezível e constante $k = 1800$ N/m que está comprimida 15,0 cm. Até que altura acima da posição inicial o queijo se eleva, quando a mola é libertada? (O queijo *não* está preso à mola.)

7.21 Considere o cavaleiro do Exemplo 7.7 (Seção 7.2) e a Figura 7.16. Como no exemplo, o cavaleiro é libertado a partir do repouso quando a mola está esticada 0,100 m. Qual é o deslocamento x do cavaleiro a partir da posição de equilíbrio quando sua velocidade é igual a 0,20 m/s? (Você deve obter mais de uma resposta. Explique por quê.)

7.22 Considere o cavaleiro do Exemplo 7.7 (Seção 7.2) e a Figura 7.16. a) Como no exemplo, o cavaleiro é libertado a partir do repouso quando a mola está esticada 0,100 m. Qual é a velocidade do cavaleiro quando ele retorna para a posição $x = 0$? b) Qual deve ser o deslocamento inicial do cavaleiro se sua velocidade máxima no movimento subseqüente for igual a 2,50 m/s?

7.23 Uma massa de 2,50 kg é empurrada contra uma mola horizontal de força constante 25,0 N/cm sobre uma mesa de ar sem atrito. A mola é presa ao tampo da mesa, e a massa não está presa à mola. Quando a mola foi suficientemente comprimida para armazenar 11,5 J de energia potencial, a massa é subitamente libertada do repouso. (a) Ache a maior velocidade escalar que a massa atinge. Quando isso ocorre? (b) Qual é a maior aceleração da massa e quando ela ocorre?

7.24 a) Para o elevador do Exemplo 7.9 (Seção 7.2), qual era a velocidade do elevador quando ele desceu 1,0 m a partir do ponto 1 da Figura 7.17? b) Quando o elevador desceu 1,0 m a partir do ponto 1 da Figura 7.17, qual era sua aceleração?

7.25 Você foi solicitado para projetar uma mola que deve fornecer a um satélite de 1160 kg uma velocidade de 2,50 m/s em relação a uma estação espacial em órbita. Sua mola deve fornecer ao satélite uma aceleração máxima de 5,0 g. Você pode desprezar a massa da mola, a energia cinética do recuo da estação e variações da energia potencial gravitacional. a) Qual deve ser a constante da mola? b) Qual a distância que a mola deve ser comprimida?

Seção 7.3 Forças conservativas e forças não conservativas

7.26 Um trabalhador de 75 kg sobe por uma escada de 7,0 m até o telhado plano de uma casa. Ele caminha 12 m sobre o telhado, desce por outra escada vertical de 7,0 m e finalmente caminha pelo solo de volta ao seu ponto de partida. Quanto trabalho a gravidade realiza sobre ele (a) enquanto ele sobe; (b) enquanto ele desce; (c) enquanto ele caminha sobre o telhado e sobre o solo? (d) Qual é o trabalho total realizado sobre ele pela gravidade no percurso completo? (e) Com base na resposta do item (d), você afirmaria que a gravidade é uma força conservativa ou não conservativa? Explique.

7.27 Uma caixa de 10,0 kg é puxada por um cabo horizontal formando um círculo sobre uma superfície horizontal áspera, para a qual o coeficiente de atrito cinético é 0,250. Calcule o trabalho realizado pelo atrito durante uma volta circular completa, considerando o raio de (a) 2,0 m e (b) 4,0 m. (c) Com base nos resultados obtidos, você afirmaria que o atrito é uma força conservativa ou não conservativa? Explique.

7.28 Em uma experiência, uma das forças que atuam sobre um próton é dada por $\vec{F} = -\alpha x^2\hat{\imath}$, onde $\alpha = 12$ N/m^2. a) Qual é o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ quando o próton se desloca ao longo de uma linha reta do ponto (0,10 m, 0) ao ponto (0,10 m, 0,40 m)? b) E ao longo de uma linha reta do ponto (0,10 m, 0) ao ponto (0,30 m, 0)? c) E ao longo de uma linha reta do ponto (0,30 m, 0) ao ponto (0,10 m, 0)? d) A força $\vec{F}$ é conservativa? Explique. Se a força $\vec{F}$ for conservativa, qual é a função energia potencial associada a ela? Seja $U = 0$ para $x = 0$.

7.29 Um livro de 0,60 kg desliza sobre uma mesa horizontal. A força de atrito cinético sobre o livro possui módulo igual a 1,2 N. a) Qual é o trabalho realizado pela força de atrito durante um deslocamento de 3,0 m da direita para a esquerda. b) O livro se desloca agora 3,0 m da esquerda para a direita voltando ao ponto inicial. Durante o segundo deslocamento de 3,0 m, qual o trabalho realizado pela força de atrito? c) Qual o trabalho total realizado pela força de atrito durante o deslocamento total de ida e volta ao ponto inicial? d) Com base em sua resposta do item (c), você afirmaria que a força de atrito é conservativa, ou não conservativa? Explique.

7.30 Você e mais três colegas estão em pé no pátio de um ginásio nos vértices de um quadrado de lado igual a 8,0 m, como mostra a Figura 7.26. Você pega seu livro de física e o empurra de uma pessoa para a outra. O livro possui massa igual a 1,5 kg, e o coeficiente de atrito cinético entre o livro e o solo é $\mu_c = 0{,}25$. a) O livro desliza de você até Bete e a seguir de Bete até Carlos, ao longo das retas que unem estas pessoas. Qual é o trabalho total realizado pela força de atrito durante esse deslocamento? b) Você faz o livro deslizar diretamente em linha reta ao longo da diagonal do quadrado até Carlos. Qual é o trabalho total realizado pela força de atrito durante esse deslocamento? c) Você faz o livro deslizar até Kim, que a seguir o devolve para você. Qual é o trabalho total realizado pela força de atrito durante esse deslocamento? d) A força de atrito sobre o livro é conservativa ou não conservativa? Explique.

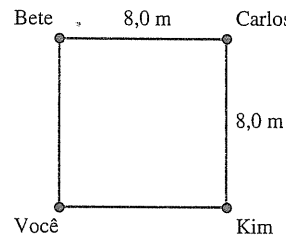


Figura 7.26 Exercício 7.30.

7.31 Seja k a constante de uma mola ideal que possui um bloco de massa m preso a uma de suas extremidades. a) O bloco se move de x_1 a x_2, onde $x_2 > x_1$. Qual o trabalho realizado pela força da mola durante esse deslocamento? b) O bloco se move de x_1 a x_2 e a seguir retorna de x_2 para x_1. Qual o trabalho realizado pela força da mola durante o deslocamento de x_2 para x_1? Qual o trabalho total realizado pela força da mola durante o deslocamento total $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$? Explique por que você encontrou a resposta esperada. c) O bloco se move de x_1 a x_3, onde $x_3 > x_2$. Qual o trabalho realizado pela força da mola durante esse deslocamento? A seguir o bloco se move de x_3 a x_2. Qual o trabalho realizado pela força da mola durante esse deslocamento? Qual é o trabalho total realizado pela força da mola durante o deslocamento total $x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2$? Compare essa resposta com sua resposta do item (a), notando que o ponto inicial e o ponto final nos dois casos são os mesmos, porém as trajetórias são diferentes.

Seção 7.4 Força e energia potencial

7.32 A energia potencial entre dois átomos de hidrogênio separados por uma distância x muito grande é dada por $U(x) = -C_6/x^6$, onde C_6 é uma constante positiva. Qual é a força que um átomo exerce sobre o outro? Essa força é de atração ou de repulsão?

7.33 Uma força paralela ao eixo Ox atua sobre uma partícula que se desloca ao longo deste eixo. Essa força produz uma energia potencial dada por $U(x) = \alpha x^4$, onde $\alpha = 1{,}20\ \text{J/m}^4$. Qual é a força (módulo, direção e sentido) quando a partícula se encontra em $x = -0{,}800$ m?

7.34 Gravidade em uma dimensão. Duas massas, m_1 e m_2, estão sobre o eixo x, sendo m_1 mantido no lugar de origem e m_2 na posição x, livre para se mover. A energia potencial gravitacional dessas massas é dada por $U(x) = -Gm_1m_2/x$, onde G é uma constante (chamada *constante gravitacional*). Estudaremos mais sobre a gravitação no Capítulo 12. Ache os componentes x da força que atua sobre m_2 em função de m_1. Essa força é de atração ou repulsão? Como você sabe?

7.35 Gravidade em duas dimensões. Duas massas, m_1 e m_2, estão sobre o eixo xy, estando m_1 posicionado no lugar de origem e m_2 na posição x e livre para mover-se por uma distância r de um ponto P com coordenadas x e y (Figura 7.27). A energia potencial gravitacional dessas massas é dada por $U(r) = -Gm_1m_2/r$, onde G é uma constante. Mostre os componentes da força que atua sobre m_2 em função de m_1 são

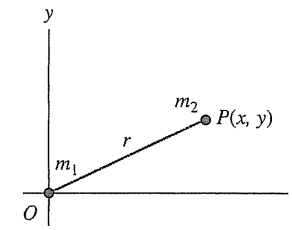


Figura 7.27 Exercício 7.35.

$$F_x = -\frac{Gm_1m_2x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad \text{e} \quad F_y = -\frac{Gm_1m_2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

(*Sugestão*: primeiro escreva r em termos de x e y.) (b) Mostre que o módulo da força que atua sobre m_2 é $F = Gm_1m_2/r^2$. (c) m_1 atrai ou repele m_2? Como você sabe?

7.36 Um objeto se desloca no plano xy submetido à ação de uma força conservativa descrita pela função energia potencial dada por $U(x, y) = \alpha\,(1/x^2 + 1/y^2)$, onde α é uma constante positiva. Deduza uma expressão para a força em termos dos vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$.

Seção 7.5 Diagramas da energia

7.37 A energia potencial entre dois átomos em uma molécula diatômica é dada por $U(r) = a/r^{12} - b/r^6$, onde r é a distância entre os átomos e a e b são constantes positivas. a) Determine a força $F(r)$ que um átomo exerce sobre o outro em função de r. Faça dois gráficos, um para $U(r)$ em função de r e outro para $F(r)$ em função de r. b) Determine a distância entre os átomos para que haja equilíbrio. Esse equilíbrio é estável? c) Suponha que a distância entre os átomos seja igual à distância de equilíbrio encontrada no item (b). Qual é a energia mínima que deve ser fornecida para produzir *dissociação* da molécula, isto é, para separar os átomos até uma distância infinita? Esse valor denomina-se *energia de dissociação* da molécula. d) Para a molécula de CO, a distância de equilíbrio entre o átomo de carbono e o átomo de oxigênio é igual a $1{,}13 \times 10^{-10}$ m e a energia de dissociação é igual a $1{,}54 \times 10^{-18}$ J por molécula. Calcule os valores das constantes a e b.

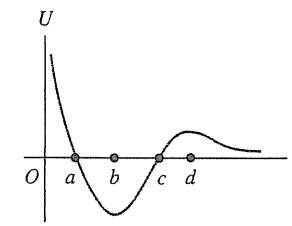


Figura 7.28 Exercício 7.38.

7.38 Uma bola de gude move-se ao longo do eixo Ox. A energia potencial é indicada na Figura 7.28. a) Para quais valores de x indicados no gráfico a força é igual a zero? b) Para quais valores de x indicados no gráfico o equilíbrio é estável? c) Para quais valores de x indicados no gráfico o equilíbrio é instável

Problemas

7.39 Em um canteiro de obras, um balde de concreto de 65 kg está suspenso por um cabo leve (porém forte), que passa sobre um polia leve sem atrito e está conectado a uma caixa de 80,0 kg sobre um teto horizontal (Figura 7.29). O cabo puxa horizontalmente a caixa, e um saco de cascalho de 50,0 kg repousa sobre o topo da caixa. Os coeficientes de atrito entre a caixa e o teto são indicados. (a) Ache a força de atrito sobre o saco de cascalho e sobre a caixa. (b) Subitamente, um operário apanha o saco de cascalho. Use a conservação de energia para determinar a velocidade do balde após ele ter descido 2,0 m partindo do repouso. (Você pode conferir sua resposta solucionando este problema usando as leis de Newton.)

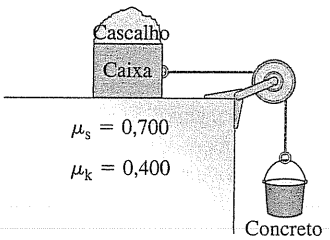


Figura 7.29 Problema 7.39

7.40 Dois blocos com massas diferentes estão amarrados a cada extremidade de uma corda leve que passa sobre uma polia leve e sem atrito, que está suspensa a partir do teto. As massas são libertadas do repouso, e a mais pesada começa a descer. Após essa massa descer 1,20 m, sua velocidade é 3,0 m/s. Se a massa total dos dois blocos é 15,0 kg, qual é a massa de cada bloco?

7.41 Física legal. Em um acidente, um carro atropelou um pedestre, e em seguida o motorista pisou nos freios para parar o carro. Durante o julgamento, o advogado do motorista alegou que ele obedecia ao limite de velocidade de 35 milhas/h, mas que a velocidade legal era alta demais para permitir que ele enxergasse o pedestre e reagisse em tempo para evitar o atropelamento. Você foi convocado como testemunha. Sua investigação do acidente constatou que as marcas de frenagem deixadas no local do acidente tinham 2,80 pés de comprimento e que a freada produziu um coeficiente de atrito cinético de 0,30 com a rua. (a) Em seu testemunho no tribunal, você afirmaria que o motorista obedecia ao limite de velocidade? Você deve ter fortes argumentos para comprovar sua conclusão e passar pelo crivo dos advogados. (b) Se a multa por excesso de velocidade fosse de R$ 10 a cada milha por hora que o motorista dirigisse acima do limite de velocidade, ele teria que pagar alguma multa? Em caso afirmativo, de quanto seria?

7.42 Um bloco de 2,0 kg é empurrado contra uma mola de massa desprezível e constante $k = 400$ N/m, comprimindo a mola até uma distância igual a 0,220 m. Quando o bloco é libertado, ele se move ao longo de uma superfície horizontal sem atrito e sobe um plano inclinado de 37,0° (Figura 7.30). a) Qual a velocidade do bloco enquanto ele desliza ao longo da superfície horizontal depois de abandonar a mola? b) Qual a distância máxima que ele atinge ao subir o plano inclinado até parar antes de voltar para a base do plano?

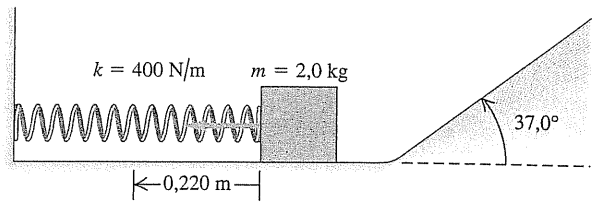


Figura 7.30 Problema 7.42.

7.43 Um bloco de 0,50 kg é empurrado contra uma mola horizontal de massa desprezível, comprimindo a mola até uma distância igual a 0,20 m (Figura 7.31). Quando o bloco é libertado, ele se move sobre o topo de uma mesa horizontal até uma distância de 1,0 m antes de parar. A constante da mola é igual a 100 N/m. Calcule o coeficiente de atrito cinético μ_c entre o bloco e a mesa.

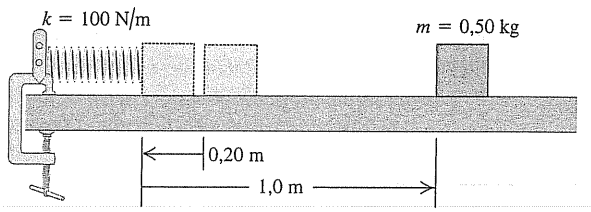


Figura 7.31 Problema 7.43.

7.44 Sobre uma superfície horizontal, uma caixa com massa de 50,0 kg é colocada contra uma mola que armazena 360 J de energia. A mola é libertada, e a caixa desliza por 5,60 m antes de parar. Qual é a velocidade escalar da caixa, quando ela está a 2,0 m da sua posição inicial?

7.45 Bola quicando. Uma bola de borracha de 650 gramas é largada de uma altura inicial de 2,50 m, e a cada quique ela retorna a 75% da sua altura anterior. (a) Qual é a energia mecânica inicial da bola assim que é libertada da sua altura inicial? (b) Quanta energia mecânica a bola perde durante o seu primeiro quique? O que acontece com essa energia? (c) Quanta energia mecânica é perdida durante o segundo quique?

7.46 Fazendo uma volta completa (um *loop-the-loop*). Um carro em um parque de diversões se desloca sem atrito ao longo do trilho indicado na Figura 7.32. Ele parte do repouso no ponto A situado a uma altura h acima da base do círculo. Considere o carro como uma partícula. a) Qual é o menor valor de h (em função de R) para que o carro atinja o topo do círculo (ponto B) sem cair? b) Se $h = 3{,}50R$ e $R = 20{,}0$ m, calcule a velocidade, o componente radial da aceleração e o componente tangencial da aceleração dos passageiros quando o carro está no ponto C, que está na extremidade de um diâmetro horizontal. Use um diagrama aproximadamente em escala para mostrar esses componentes da aceleração.

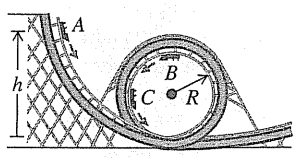


Figura 7.32 Problema 7.46

7.47 Um pedaço de madeira de 2,0 kg desliza sobre a superfície mostrada na Figura 7.33. As laterais curvadas da superfície são perfeitamente lisas, mas o fundo horizontal áspero tem 30 m de comprimento e possui um coeficiente de atrito cinético de 0,20 com a madeira. O pedaço de madeira parte do repouso 4,0 m acima do fundo áspero. (a) Onde esse objeto vai parar? (b) Qual

é o trabalho total realizado pelo atrito para o movimento, desde a liberação inicial até a parada do pedaço de madeira?

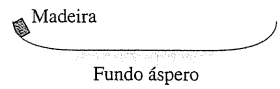


Figura 7.33 Problema 7.47.

7.48 Subindo e descendo a colina. Uma rocha de 28,0 kg se aproxima da base de uma colina com velocidade escalar de 15 m/s. Essa colina tem inclinação de baixo para cima a um ângulo constante de 40,0° acima da horizontal. O coeficiente de atrito estático e o coeficiente de atrito cinético entre a colina e a rocha são 0,75 e 0,20, respectivamente. (a) Use a conservação de energia para determinar a altura máxima acima da base da colina atingida pela rocha. (b) A rocha permanecerá em repouso no seu ponto mais alto ou ela vai deslizar de volta para base? (c) Se a rocha deslizar de volta, ache sua velocidade quanto ela atingir a base da colina.

7.49 Uma pedra de 15,0 kg desliza de cima para baixo ao longo de uma colina coberta pela neve (Figura 7.34), deixando o ponto A com velocidade de 10,0 m/s. Não há atrito na colina entre os pontos A e B, mas há atrito no nível do solo à base da colina, entre B e a parede. Após penetrar na região horizontal áspera, a pedra se desloca 100 m e então colide com uma mola leve, porém comprida, com força constante de 2,0 N/m. Os coeficientes de atrito cinético e estático entre a pedra e o plano horizontal são 0,20 e 0,80, respectivamente. (a) Qual é a velocidade da pedra quando ela atinge o ponto B? (b) A que distância a pedra comprimirá a mola? (c) A pedra se moverá novamente após ter sido parada pela mola?

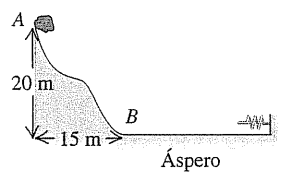


Figura 7.34 Problema 7.49.

7.50 Um bloco de 2,8 kg desliza sobre a colina coberta de gelo e livre de atrito mostrada na Figura 7.35. O topo da colina é horizontal e ergue-se a 70 m da sua base. Qual é a velocidade escalar mínima que o bloco deve ter na base da colina para não cair no vale do outro lado da colina?

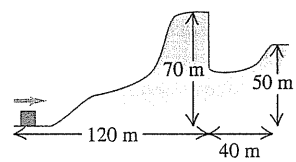


Figura 7.35 Problema 7.50.

7.51 *Bungee Jump.* Uma corda de *bungee jump* tem 30,0 m de comprimento e, quando esticada a uma distância x, exerce uma força restauradora de módulo kx. Seu sogro (massa de 95 kg) está parado sobre uma plataforma a 45,0 cm do solo, e uma ponta da corda é amarrada firmemente ao seu tornozelo enquanto a outra ponta é presa à plataforma. Você prometeu a ele que, ao saltar da plataforma, ele cairá uma distância máxima de 41,0 m antes que a corda o pare. Você tinha várias cordas para escolher e fez um teste com cada uma, esticando-as, prendendo uma ponta a uma árvore e puxando a outra ponta com uma força de 380,0 N. Ao fazer isso, a que distância terá esticado a corda do *bungee jump* que você deve escolher?

7.52 Rampa de salto com esqui. Você está projetando uma rampa de salto em esqui para as próximas Olimpíadas de Inverno. Você necessita calcular a altura vertical h, do portão de partida até o final da rampa. Os esquiadores empurram com força os seus esquis no início, bem acima do portão de partida, de modo a desenvolver uma velocidade típica de 2,0 m/s ao chegar ao portão. Por segurança, os esquiadores devem ter uma velocidade que não ultrapasse 30,0 m/s quando chegam ao final da rampa. Você determina que, para um esquiador de 85,0 kg em boa forma, o atrito e a resistência do ar realizarão um trabalho total com módulo de 4000 J sobre ele durante a descida da encosta. Qual é a altura máxima h para a qual a velocidade máxima segura não será ultrapassada?

7.53 O Grande Sandine é um acrobata de circo com massa de 60,0 kg, que é lançado por um canhão (na realidade um canhão com molas). Você não encontra muitos homens com essa bravura, e por isso você o auxilia a projetar um novo canhão. Esse novo canhão deve possuir mola muito grande com massa pequena e uma constante da mola igual a 1100 N/m que ele deve comprimir com uma força de 4400 N. A parte interna do cano do canhão é revestida com Teflon, de modo que a força de atrito média é apenas igual a 40 N durante o trajeto de 4,0 m em que ele se move no interior do cano. Com que velocidade ele emerge da extremidade do cano, situada a 2,5 m acima de sua posição de equilíbrio inicial?

7.54 Você está projetando uma rampa de descarga para engradados contendo equipamentos de ginástica. Os engradados de 1470 N movem-se a 1,8 m/s no topo de uma rampa com inclinação de 22,0° para baixo. A rampa exerce sobre cada engradado uma força de atrito cinético igual a 550 N, e a força máxima de atrito estático também possui este valor. Cada engradado comprimirá uma mola na extremidade inferior da rampa e atingirá o repouso depois de percorrer uma distância de 8,0 m ao longo da rampa. Depois de parar, o engradado não deve voltar a deslizar para trás. Calcule qual deve ser a constante da mola que preencha esses requisitos para sua compressão.

7.55 O sistema de duas latas de tinta ligadas por uma corda leve é libertado do equilíbrio quando a lata de 12,0 kg está a 2,0 m acima do solo (Figura 7.36). Use o princípio da conservação da energia para achar a velocidade dessa lata quando ela atinge o solo. Despreze o atrito e a inércia da polia.

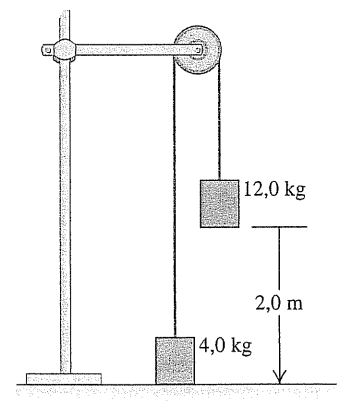


Figura 7.36 Problema 7.55.

7.56 Um foguete de 1500 kg deve ser lançado com velocidade inicial de baixo para cima de 50,0 m/s. Para não sobrecarregar os motores, os engenheiros vão lançá-lo do repouso sobre uma rampa que se ergue a 53° acima do plano horizontal (Figura 7.37). Da base, a rampa aponta de baixo para cima e lança o foguete verticalmente. Os motores fornecem uma propulsão para frente constante de 2000 N, e o atrito com a superfície da rampa é uma constante de 500 N. A que distância da base da rampa o

foguete deve ser acionado, conforme medido ao longo da superfície da rampa?

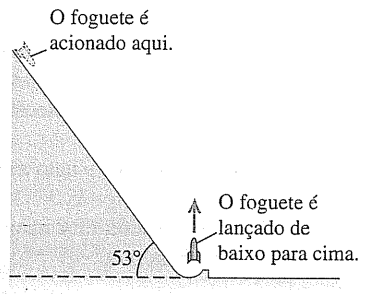


Figura 7.37 Problema 7.56.

7.57 A peça de uma máquina de massa m é presa a uma mola ideal horizontal de constante de força k e que está presa à borda de uma superfície horizontal sem atrito. A peça é empurrada contra a mola, comprimindo-a por uma distância x_0, e em seguida é libertada do repouso. Ache (a) a velocidade escalar máxima e (b) a aceleração máxima da peça. (c) Em que ponto do movimento ocorrem as máximas obtidas nos itens (a) e (b)? (d) Qual será a extensão máxima da mola? (e) Descreva o movimento subseqüente dessa peça. Ela vai parar permanentemente?

7.58 Uma haste de madeira de massa desprezível e comprimento igual a 80,0 cm é pivotada em torno de um eixo horizontal que passa através de seu centro. Um rato branco com massa de 0,500 kg fica agarrado a uma das extremidades da haste, e um camundongo com massa de 0,200 kg fica agarrado à outra extremidade. Com a haste na horizontal, o sistema é libertado a partir do repouso. Se os ratos conseguem ficar agarrados, qual é a velocidade de cada rato quando a haste oscila através da vertical?

7.59 Uma batata de 0,100 kg está presa à extremidade de um fio de 2,50 m de comprimento, e a outra extremidade do fio está presa a um suporte rígido. Esticando-se o fio, a batata é mantida horizontalmente para fora do ponto de suporte e a seguir libertada. a) Qual a velocidade da batata no ponto inferior de sua trajetória? b) Qual a tensão do fio nesse ponto?

7.60 A tabela seguinte mostra os dados de uma simulação feita em computador para o arremesso de uma bola de beisebol de massa igual a 0,145 kg, considerando a resistência do ar:

t	x	y	v_x	v_y
0	0	0	30,0 m/s	40,0 m/s
3,05 s	70,2 m	53,6 m	18,6 m/s	0
6,59 s	124,4 m	0	11,9 m/s	−28,7 m/s

a)Qual foi o trabalho realizado pelo ar sobre a bola de beisebol quando ela se deslocou da posição inicial até sua altura máxima? b) Qual foi o trabalho realizado pelo ar sobre a bola de beisebol quando ela se deslocou da sua altura máxima de volta para a posição inicial? c) Explique por que o valor encontrado em (b) é menor do que a resposta do item (a).

7.61 Descendo pelo poste. Um bombeiro desliza uma distância d até a base de um poste. Ele parte do repouso. Na base do poste, sua velocidade é a mesma que ele teria se pulasse de uma altura $h \leq d$ desprezando-se a resistência do ar. a) Qual é a força de atrito média exercida pelo bombeiro sobre o poste? Sua resposta faz sentido para os casos especiais $h = d$ e $h = 0$? b) Calcule o valor numérico da força de atrito média exercida por um bombeiro de 75 kg para $d = 2{,}5$ m e $h = 1{,}0$ m. c) Em termos de g, de h e de d, qual é a velocidade do bombeiro quando ele está a uma altura y acima da base do poste?

7.62 Uma esquiadora de 60,0 kg parte do repouso no topo de uma pista de esqui inclinada com uma altura de 65,0 m. a) Supondo que as forças de atrito realizem um trabalho total de −10,5 kJ enquanto ela desce, qual é sua velocidade na base da pista inclinada? b) Movendo-se agora horizontalmente, a esquiadora atravessa um trecho com neve macia, onde $\mu_c = 0{,}20$. Sabendo que esse trecho possui extensão de 82,0 m e que a resistência média do ar sobre a esquiadora é igual a 160 N, qual é sua velocidade no final desse trecho? c) A esquiadora colide com um pequeno monte de neve, nele penetrando 2,5 m até parar. Qual é a força média exercida pelo obstáculo até ela parar?

7.63 Uma esquiadora parte com velocidade inicial desprezível do topo de uma esfera de neve com raio muito grande e sem atrito, desloca-se diretamente para baixo (Figura 7.38). Em que ponto ela perde o contato com a esfera e voa seguindo a direção da tangente? Ou seja, no momento em que ela perde o contato com a esfera, qual é o ângulo a entre a vertical e a linha que liga a esquiadora ao centro da esfera de neve?

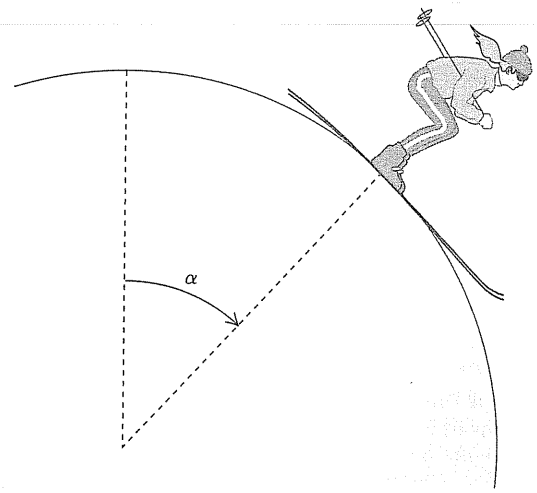


Figura 7.38 Problema 7.63.

7.64 Uma pedra está amarrada a uma corda e a outra extremidade da corda é mantida fixa. A pedra é largada com uma velocidade inicial tal que ela passa a descrever um movimento circular em um plano vertical. Prove que a tensão na corda no ponto inferior da trajetória é igual a seis vezes o peso da pedra mais a tensão na corda no ponto superior da trajetória.

7.65 Em um posto para carga de caminhões do correio, um pacote de 0,200 kg é largado do repouso no ponto A sobre um trilho com forma de um quarto de circunferência de raio igual a 1,60 m (Figura 7.39). O tamanho do pacote é muito menor do que 1,60 m, de modo que ele pode ser considerado como uma partícula. Ele desliza para baixo ao longo do trilho e atinge o ponto B com uma velocidade de 4,80 m/s. Depois de passar pelo ponto B, ele desliza uma distância de 3,0 m sobre uma superfície horizontal até parar no ponto C. a) Qual é o coeficiente de atrito cinético entre o pacote e a superfície horizontal? b) Qual é o trabalho realizado pela força de atrito ao longo do arco circular do ponto A ao ponto B?

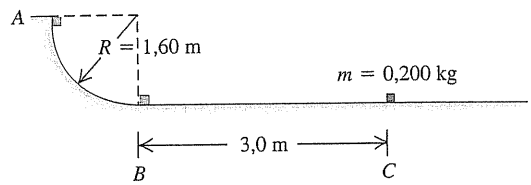


Figura 7.39 Problema 7.65.

7.66 O freio de um caminhão de massa m deixa de funcionar quando ele está descendo uma estrada de montanha com gelo inclinada de um ângulo α (Figura 7.40). Inicialmente o caminhão desce a montanha com velocidade v_0. Depois de percorrer com atrito desprezível uma distância L até a base da montanha, o motorista vira o volante e faz o caminhão subir uma rampa de emergência para caminhões inclinada para cima com um ângulo β constante. A rampa para caminhões é pavimentada com areia fofa que possui um atrito de rolamento igual a μ_r. Qual é a distância percorrida pelo caminhão ao subir a rampa até parar? Use o método da energia.

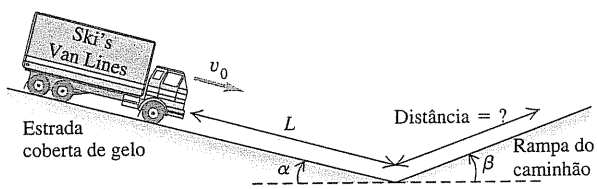


Figura 7.40 Problema 7.66.

7.67 Uma certa mola *não* obedece à lei de Hooke; ao ser comprimida ou esticada, ela exerce uma força restauradora com módulo $F_x(x) = -\alpha x - \beta x^2$, onde α = 60,0 N/m e β = 18,0 N/m^2. A massa da mola é desprezível. a) Calcule a função energia potencial $U(x)$ dessa mola. Considere $U = 0$ para $x = 0$. b) Um objeto de massa igual a 0,900 kg apoiado em uma superfície horizontal sem atrito está preso a essa mola, sendo puxado para a direita (no sentido + x), esticando a mola até uma distância de 1,0 m, e a seguir é libertado. Qual é a velocidade do objeto no ponto situado a 0,50 m à direita do ponto de equilíbrio $x = 0$?

7.68 Uma força variável $\vec{F}$ é mantida tangencialmente a uma superfície semicircular (Figura 7.41). Variando lentamente a força, um bloco de peso w estica a mola ao qual ele está preso da posição 1 à posição 2. A massa da mola é desprezível e a constante da mola é k. A extremidade da mola percorre um arco de raio a. Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}$.

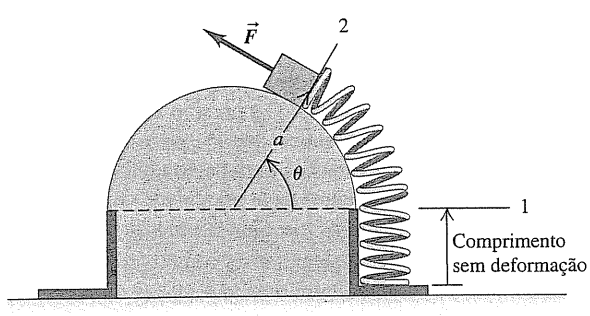


Figura 7.41 Problema 7.68.

7.69 Um bloco de gelo de 0,150 kg é colocado contra uma mola horizontal comprimida no alto de uma mesa de altura 1,20 m acima do solo. A mola está inicialmente comprimida 0,045 m e a constante da mola é igual a 1900 N/m. A massa da mola é desprezível. A mola é libertada, e o bloco desliza sobre a mesa, se projeta para o ar e cai no solo. Considerando desprezível o atrito entre a mesa e o bloco, qual é a velocidade do bloco de gelo quando ele atinge o solo?

7.70 Um bloco de 3,0 kg está conectado a duas molas ideais horizontais com constantes de força k_1 = 25,0 N/cm e k_2 = 20,0 N/cm (Figura 7.42). O sistema está inicialmente em equilíbrio sobre uma superfície horizontal, sem atrito. O bloco é empurrado 15,0 cm para a direita e libertado do repouso. (a) Qual é a velocidade escalar máxima do bloco? Em que ponto do movimento essa velocidade máxima ocorre? (b) Qual é a compressão máxima da mola 1?

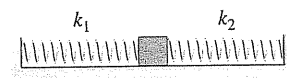


Figura 7.42 Problema 7.70.

7.71 Um dispositivo experimental de massa m está apoiado sobre uma mola vertical com massa desprezível e empurrado para baixo até que a mola seja comprimida de uma distância x. O dispositivo é então libertado e atinge uma altura máxima h acima do ponto onde ele foi libertado. O dispositivo não está ligado à mola, e para essa altura máxima ele não está mais em contato com a mola. A aceleração máxima que o dispositivo pode suportar sem se danificar é a, onde $a > g$. a) Qual deve ser a constante da mola necessária? b) Até que distância a mola é comprimida inicialmente?

7.72 Um peixe está preso em uma mola vertical, e quando ele é lentamente abaixado até atingir sua posição de equilíbrio a mola fica comprimida uma distância d. Quando o mesmo peixe está preso a essa mola e cai a partir da posição da mola sem deformação, qual é a distância máxima que a mola fica comprimida? (*Sugestão:* Calcule a constante da mola em termos da distância d e da massa m do peixe.)

7.73 Um bloco de madeira com massa igual a 1,50 kg é colocado contra uma mola comprimida na base de um plano inclinado de 30,0° (ponto A). Quando a mola é libertada, projeta o bloco para cima do plano inclinado. No ponto B situado a uma distância de 6,0 m acima do ponto A, o bloco está subindo o plano inclinado com velocidade de 7,0 m/s e não está mais em contato com a mola. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano inclinado é μ_c = 0,50. A massa da mola é desprezível. Calcule a energia potencial que foi inicialmente armazenada na mola.

7.74 Um pacote de 2,0 kg inicialmente em repouso é abandonado sobre um plano inclinado de 53,1°, a uma distância de 4,0 m de uma mola com constante de 120 N/m presa à base do um plano (Figura 7.43). Os coeficientes de atrito entre o pacote e o plano inclinado são dados por μ = 0,40 e μ_c = 0,20. A massa da mola é desprezível. a) Qual é a velocidade do pacote imediatamente antes de colidir com a mola? b) Qual é a compressão máxima da mola? c) O pacote é rebatido para cima do plano inclinado. Qual é a dis-

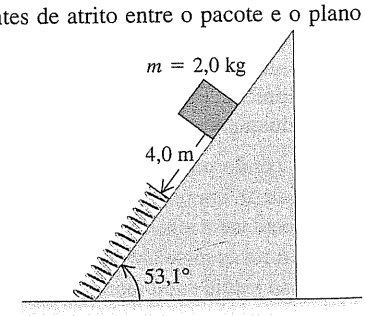


Figura 7.43 Problema 7.74.

tância entre o ponto inicial e o ponto onde ele pára momentaneamente?

7.75 Uma mola cuja constante é igual a 40,0 N/m e comprimento de 0,60 m, está presa a um bloco de 0,500 kg apoiado em repouso sobre uma mesa de ar horizontal sem atrito, sendo A a posição inicial do ponto de contato entre o bloco e a mola (Figura 7.44). A massa da mola é desprezível. Você move o bloco para a direita ao longo da superfície puxando-o com uma força horizontal constante de 20,0 N. a) Qual é a velocidade do bloco quando sua parte traseira atinge o ponto B, situado a 0,25 m à direita do ponto A? b) Quando a parte traseira do bloco atinge o ponto B, você liberta o bloco. No movimento posterior, qual é a distância mínima entre o bloco e a parede onde a mola está presa?

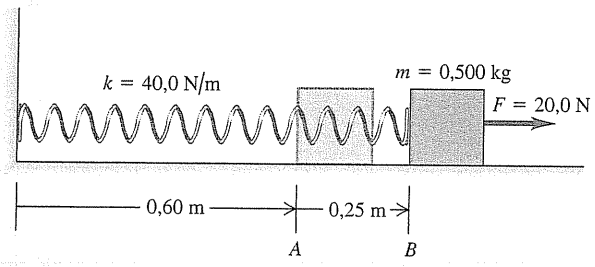


Figura 7.44 Problema 7.75.

7.76 Física e fraternidade. Os companheiros do grêmio estudantil Iota Eta Pi construíram uma plataforma apoiada nos quatro cantos sobre molas verticais no porão da casa da agremiação. Um bravo companheiro do grêmio usando um capacete de futebol americano fica em pé no meio da plataforma; seu peso comprime as molas em 0,18 m. A seguir, quatro companheiros da agremiação, empurrando para baixo os cantos da plataforma, comprimem as molas mais 0,53 m, até que o topo da cabeça do bravo companheiro fica a uma distância de 0,90 m do teto da casa. A seguir, simultaneamente, eles libertam a plataforma. Despreze as massas das molas e da plataforma. a) Quando a poeira se dissipa, o grêmio pede para você calcular a velocidade do bravo companheiro no momento em que o capacete colide com o frágil teto. b) Caso não existisse o teto, até que altura ele atingiria? c) Ao discutir a proeza realizada, o líder do grêmio estudantil sugere que a próxima experiência seja feita do lado de fora da casa em outro planeta. A resposta do item (b) seria diferente se a proeza fosse realizada em outro planeta com valor diferente de g? Suponha que os companheiros comprimam as molas mais 0,53 m como no caso anterior. Explique o seu raciocínio.

7.77 Uma partícula com massa m sofre ação de uma força conservativa e se desloca ao longo de uma trajetória dada por $x = x_0 cos\omega_0 t$ e $y = y_0 sen\omega_0 t$, onde x_0, y_0 e ω_0 são constantes. (a) Ache os componentes da força que atua sobre a partícula. (b) Ache a energia potencial da partícula em função de x e y. Considere $U = 0$ quando $x = 0$ e $y = 0$. (c) Ache a energia total da partícula quando (i) $x = x_0$, $= 0$ e (ii) $x = 0$, $y = y_0$.

7.78 Quando entra em combustão, 1 galão de gasolina produz 1,3 $\times 10^8$ J de energia. A partir do repouso, um carro de 1500 kg acelera 37 m/s em 10 s. O motor desse carro é somente 15% eficiente (taxa normal), significando que somente 15% da energia do combustível da gasolina são usados para acelerar o carro. O restante é consumido pela energia cinética interna das peças do motor e também pelo calor da exaustão do ar e do motor. (a) Quantos galões de gasolina esse carro consome durante a aceleração? (b) Quantas dessas acelerações serão necessárias para queimar um galão de gasolina?

7.79 Uma usina hidrelétrica represa as águas de um lago com área de superfície de 3,0 $\times 10^6$ m^2, que possui laterais verticais abaixo do nível da água. Esse nível fica 150 m acima da base da represa. Quando a água passa pelas turbinas na base da represa, sua energia mecânica é convertida em energia elétrica com 90% de eficiência. (a) Se considerarmos a energia potencial gravitacional como sendo igual a zero na base da represa, quanta energia é armazenada no metro acima da água no lago? A densidade da água é 1000 kg/m^3. (b) Qual volume de água deve passar pela represa para produzir 1000 kilowatts-hora de energia elétrica? A que distância o nível da água no lago cai quando esse volume de água passa pela represa?

7.80 Quanta energia total é armazenada no lago do Problema 7.79? Como naquele problema, considere a energia potencial gravitacional como igual a zero na base da represa. Expresse sua resposta em joules e em kilowatt-horas. (*Sugestão*: segmente o lago em camadas de espessura dy e integre para encontrar a energia potencial total.)

7.81 Gravidade em três dimensões. Uma massa m_1 é mantida no ponto de origem e outra massa m_2 está livre para percorrer uma distância r a partir de um ponto P com coordenadas x, y e z. A energia potencial gravitacional dessas massas é dada como $U(r) = -Gm_1m_2/r$, onde G é a constante gravitacional (veja os exercícios 7.34 e 7.35). (a) Mostre que os componentes da força que atua sobre m_2 em função de m_1 são

$$F_x = -\frac{Gm_1m_2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \qquad F_y = -\frac{Gm_1m_2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$F_z = -\frac{Gm_1m_2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

(*Sugestão*: escreva r em termos de x, y e z. (b) Mostre que o módulo da força que atua sobre m_2 é $F = Gm_1m_2/r^2$. (c) m_1 atrai ou repele m_2? Como você sabe?

7.82 a) A força $\vec{F} = Cy^2\hat{j}$, onde C é uma constante negativa com unidades N/m^2, é conservativa ou não conservativa? Justifique sua resposta. b) A força $\vec{F} = Cy^2\hat{i}$, onde C é uma constante negativa com unidades N/m^2, é conservativa ou não conservativa? Justifique sua resposta.

7.83 Um instrumento cortante controlado por um microprocessador possui diversas forças atuando sobre ele. Uma das forças é dada por $\vec{F} = -\alpha xy^2\hat{j}$, uma força orientada no sentido negativo do eixo Oy cujo módulo depende da posição do instrumento. O valor da constante é dado por $\alpha = 2{,}50$ N/m^3. Considere o deslocamento do instru mento desde a origem até o ponto $x = 3{,}0$ m, $y = 3{,}0$ m. a) Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ sobre o instrumento para um deslocamento ao longo da reta $y = x$ que conecta esses dois pontos. b) Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ sobre o instrumento quando ele é inicialmente deslocado ao longo do eixo Ox até o ponto $x = 3{,}0$ m, $y = 0$ e a seguir deslocado paralelamente ao eixo Oy até o ponto $x = 3{,}0$ m, $y = 3{,}0$ m. c) Compare os resultados dos trabalhos realizados por $\vec{F}$ nessas duas trajetórias. A força $\vec{F}$ é conservativa ou não conservativa? Justifique sua resposta.

7.84 Um objeto possui diversas forças atuando sobre ele. Uma das forças é dada por $\vec{F} = \alpha xy\hat{i}$, uma força orientada no sentido positivo do eixo Ox cujo módulo depende da posição do objeto.

(Veja o Problema 6.96.) O valor da constante é dado por $\alpha = 2{,}0\ \text{N/m}^2$. O objeto se move ao longo da seguinte trajetória: (1) ele parte da origem e se move ao longo do eixo Oy ao ponto $x = 0$, $y = 1{,}50$ m; (2) move-se paralelamente ao eixo Ox ao ponto $x = 1{,}50$ m, $y = 1{,}50$ m; (3) move-se paralelamente ao eixo Oy ao ponto $x = 1{,}50$ m, $y = 0$; (4) move-se paralelamente ao eixo Ox retornando para a origem. a) Faça um esboço dessa trajetória no plano xy. b) Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ em cada etapa da trajetória e o trabalho total realizado no percurso fechado. c) A força $\vec{F}$ é conservativa ou não conservativa? Explique.

7.85 Uma força conservativa F atuando ao longo do eixo Ox e uma força dada pela lei de Hooke $F = -kx$ atuam sobre um íon. a) Mostre que uma possível função energia potencial para a combinação dessas forças é dada por $U(x) = 1/2\ kx^2 - Fx - F^2/2k$. Essa é a *única* função possível? Explique. b) Ache a posição do equilíbrio estável. c) Faça um gráfico de $U(x)$ (em unidades de F^2/k) *versus* x (em unidades de F/k) para valores de x entre $-5F/k$ e $5F/k$. d) Existe alguma posição de equilíbrio instável? e) Quando a energia total for $E = F^2/k$, qual será o valor máximo e o valor mínimo de x para o movimento do íon? f) Sendo m a massa do íon, determine sua velocidade máxima quando a energia total for $E = F^2/k$. Para qual valor de x sua velocidade é máxima?

7.86 Uma única força conservativa paralela ao eixo Ox atua sobre uma partícula que se desloca ao longo do eixo Ox. A força corresponde ao gráfico de energia potencial indicado na Figura 7.45. A partícula é libertada a partir do repouso no ponto A. a) Qual a direção e o sentido da força que atua sobre a partícula no ponto A? b) E no ponto B? c) Para qual valor de x sua energia cinética é máxima? d) Qual é a força que atua sobre a partícula no ponto C? e) Qual o valor máximo de x atingido pela partícula durante seu movimento? f) Para quais valores de x a partícula está em equilíbrio estável? g) Onde ela está em equilíbrio instável?

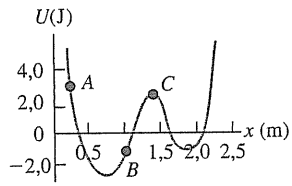


Figura 7.45 Problema 7.86.

Problema desafiador

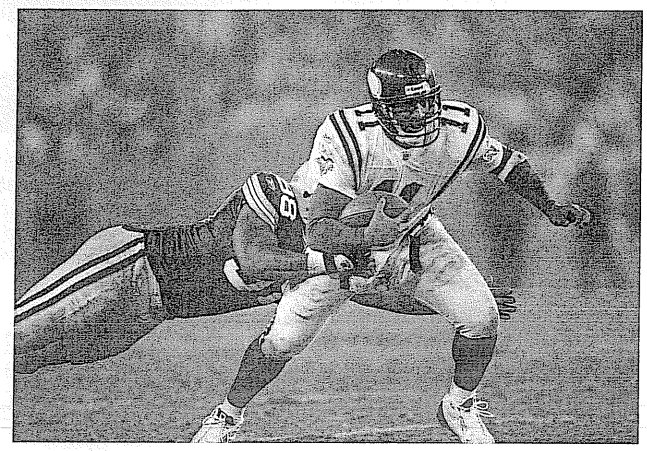
7.87 Um próton de massa m move-se em uma dimensão. A função energia potencial é dada por $U(x) = \alpha/x^2 - \beta/x$, onde α e β são constantes positivas. O próton é libertado a partir do repouso no ponto $x_0 = \alpha/\beta$. a) Mostre que $U(x)$ pode ser escrita do seguinte modo

$$U(x) = \frac{\alpha}{x_0^2}\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^2 - \frac{x_0}{x}\right]$$

Faça um gráfico de $U(x)$. Calcule $U(x_0)$ e localize x_0 no gráfico. b) Calcule $v(x)$, a velocidade do próton em função da posição. Faça um gráfico de $v(x)$ e forneça uma descrição qualitativa do movimento. c) Para qual valor de x a velocidade do próton é máxima? Qual é o valor dessa velocidade máxima? d) Qual é a força que atua sobre o próton no ponto calculado no item (c)? e) Em vez de considerar o ponto inicial anterior, suponha que o próton seja libertado no ponto $x_1 = 3\alpha/\beta$. Localize o ponto x_1 sobre o gráfico de $U(x)$. Calcule $v(x)$ e forneça uma descrição qualitativa do movimento. f) Para cada ponto em que o próton é libertado ($x = x_0$ e $x = x_1$), determine os valores máximos e mínimos de x atingidos durante o movimento.

MOMENTO LINEAR, IMPULSO E COLISÕES

8



Em um jogo de futebol americano, o que pode causar um dano maior: a falta cometida por um jogador leve e rápido sobre outro ou a falta de um jogador com o dobro da massa, mas que se move à metade da velocidade?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- O significado do momento linear de uma partícula e como o impulso da força resultante que atua sobre uma partícula causa variação no momento linear.
- As condições que determinam que o momento total de um sistema de partículas seja constante (conservado).
- Como solucionar problemas em que dois corpos se chocam
- A importante distinção entre colisão elástica, inelástica e completamente inelástica.
- A definição do centro de massa de um sistema e o que determina como o centro de massa se move.
- Como analisar situações como a da propulsão de um foguete, na qual a massa de um corpo varia enquanto se desloca.

Há muitas questões envolvendo forças que não podem ser solucionadas com a aplicação direta da segunda lei de Newton, $\sum\vec{F} = m\vec{a}$. Por exemplo, quando um caminhão de dezoito rodas colide frontalmente com um carro, o que determina o sentido do movimento dos destroços resultantes da colisão? Num jogo de sinuca, o que determina o manejo do taco para que você possa acertar a bola da vez de modo que ela empurre a bola sete para dentro da caçapa? E quando um meteorito colide com a superfície terrestre, quanta energia cinética do meteorito é liberada no impacto?

Uma observação comum nas respostas a essas perguntas é que elas envolvem forças sobre as quais pouco se sabe: as forças que atuam entre o carro e o caminhão, entre as duas bolas de sinuca ou entre o meteorito e a Terra. Como mostraremos neste capítulo, é um fato notável que você não precise conhecer *nada* sobre essas forças para responder a essas perguntas!

Em nossa abordagem usaremos dois conceitos novos, o *momento linear* e o *impulso*, e uma nova lei da conservação, a *lei da conservação do momento linear*. Essa lei da conservação é tão importante quanto a lei da conservação da energia. A lei da conservação do momento linear é útil em situações nas quais as leis de Newton são inadequadas, como no caso de corpos que se deslocam com velocidades muito elevadas (próximas da velocidade da luz) ou então para corpos microscópicos (como as partículas que constituem o átomo). No domínio da mecânica newtoniana, a lei da conservação do momento linear nos permite analisar muitas situações que se tornariam extremamente difíceis se tentássemos usar as leis de Newton diretamente. Entre essas situações estão os problemas que envolvem *colisões*, nos quais durante uma dada colisão os corpos podem produzir uma força de interação mútua durante um intervalo curto de tempo.

8.1 Momento linear e impulso

No Capítulo 6, reformulamos a segunda lei de Newton, $\sum\vec{F} = m\vec{a}$, em termos do teorema do trabalho-energia. Esse teorema nos auxiliou no tratamento de um grande número de problemas de física e nos conduziu ao princípio da conservação da energia. Vamos retornar à expressão $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ e mostrar ainda outro modo útil de reformular essa lei fundamental.

A segunda lei de Newton em relação ao momento linear

Considere uma partícula com massa constante m. (Mais adiante neste capítulo mostraremos como analisar situações em que a massa da partícula varia.) Como $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, podemos escrever a segunda lei de Newton na forma

$$\sum \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \qquad (8.1)$$

Como a massa da partícula é constante m, podemos colocá-la dentro dos parênteses da derivada. Logo, a segunda lei de Newton afirma que a força resultante $\sum \vec{F}$ que atua sobre a partícula é igual à derivada em relação ao tempo da grandeza $m\vec{v}$, o produto da massa da partícula pela sua velocidade. Essa grandeza é chamada de **quantidade de movimento** ou **momento linear** da partícula. Usando para esse vetor o símbolo $\vec{p}$, temos

$$\vec{p} = m\vec{v} \text{ (definição de momento linear)} \qquad (8.2)$$

Quanto maior a massa m e a velocidade escalar v de uma partícula, maior o seu módulo de momento linear mv. É importante lembrar que o momento linear é uma grandeza *vetorial* que possui direção e sentido que coincidem com a direção e o sentido do vetor velocidade (Figura 8.1). Logo, um carro que se desloca do sul para o norte a 20 m/s e outro carro idêntico que se desloca do oeste para o leste com a mesma velocidade escalar possuem o mesmo *módulo* de momento linear (mv), mas diferentes *vetores* de momento linear ($m\vec{v}$) porque suas direções e sentidos são diferentes.

Em geral, expressamos o momento linear de uma partícula em termos dos seus componentes. Se a partícula possui componentes de velocidade v_x, v_y e v_z, então os seus componentes de momento linear p_x, p_y e p_z (que também podemos chamar de *momento linear x*, *momento linear y* e *momento linear* z) são dados por

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad p_z = mv_z \qquad (8.3)$$

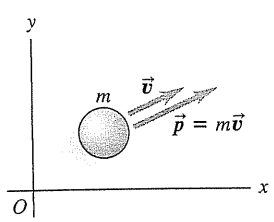
Esses três componentes são equivalentes à Equação (8.2).

As unidades do módulo do momento linear são unidades de massa vezes a velocidade; no SI, as unidades de momento linear são dadas por kg · m/s.

Substituindo a Equação (8.2) na Equação (8.1), obtemos

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (8.4)$$

(segunda lei de Newton em termos do momento linear)



O momento linear $\vec{p}$ é uma grandeza vetorial; o momento linear de uma partícula possui a mesma direção e sentido da sua velocidade $\vec{v}$.

Figura 8.1 Os vetores de velocidade e de momento linear de uma partícula.

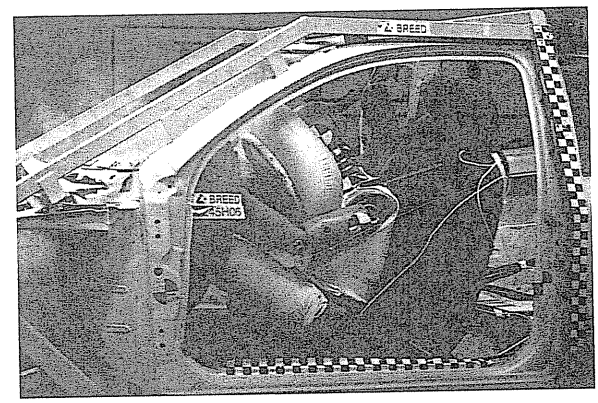


Figura 8.2 Quando um carro em alta velocidade pára repentinamente, o momento linear do motorista (massa vezes velocidade) sofre variação de um valor alto para zero em um curto intervalo de tempo. Um *air bag* faz com que o motorista perca momento linear de forma mais gradual do que uma colisão abrupta com o volante, reduzindo a força exercida sobre o motorista bem como a probabilidade de lesão.

A força resultante (soma vetorial de todas as forças) que atua sobre uma partícula é dada pela derivada do momento linear da partícula em relação ao tempo. Foi esta forma, e não $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, que Newton usou no enunciado de sua segunda lei (embora ele chamasse o momento linear de 'quantidade de movimento'). Essa lei vale somente para sistemas de referência inerciais.

De acordo com a Equação (8.4), uma variação rápida do momento linear necessita de uma força grande, enquanto que uma variação lenta do momento linear necessita de uma força menor. Esse princípio é usado no projeto de dispositivos de segurança de automóveis, como o colchão de ar (*air bag*) (Figura 8.2). O motorista de um automóvel se deslocando com grande velocidade possui um momento linear elevado (dado pelo produto de sua massa pela velocidade do automóvel). Quando o automóvel colide e pára repentinamente, o momento linear do motorista torna-se nulo. Um colchão de ar entre o volante e o motorista faz com que o momento linear do motorista diminua lentamente, reduzindo a força que atua sobre o motorista (e diminuindo a probabilidade de lesões). O mesmo princípio é usado no transporte de objetos frágeis que são envolvidos por embalagens de proteção.

O teorema do impulso-momento linear

O momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$ e a energia cinética de uma partícula $K = \frac{1}{2}mv^2$ dependem da massa e da velocidade da partícula. Qual é a principal diferença entre essas duas grandezas? Uma resposta puramente matemática indica que o momento linear é um vetor cujo módulo depende da velocidade escalar, enquanto a energia cinética é uma grandeza escalar proporcional ao quadrado da velocidade escalar. Porém, para constatar a diferença *física* entre o momento linear e a energia cinética, é necessário definir uma grandeza intimamente relacionada com o momento linear denominada *impulso*.

Vamos inicialmente considerar uma força resultante *constante* $\sum\vec{F}$ atuando sobre a partícula durante um intervalo de tempo Δt de t_1 a t_2. (Mais adiante analisaremos o caso de uma força variável.) O **impulso** da força resultante, designado pelo vetor $\vec{J}$, é definido como a força resultante multiplicada pelo intervalo de tempo:

$$\vec{J} = \sum\vec{F}(t_2 - t_1) = \sum\vec{F}\,\Delta t \qquad (8.5)$$

(supondo somente força resultante constante)

O impulso é uma grandeza vetorial; ele possui a mesma direção e o mesmo sentido do vetor força resultante $\sum\vec{F}$. Seu módulo é igual ao módulo da força resultante multiplicado pelo intervalo de tempo durante o qual a força resultante atua. No SI, as unidades de impulso são dadas por Newton · segundo (N · s). Como $1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$, um conjunto alternativo para as unidades de impulso é dado por kg · m/s, ou seja, o impulso possui as mesmas unidades de momento linear.

Para verificarmos qual é a utilidade do conceito de impulso, vamos examinar novamente a segunda lei de Newton formulada em termos do momento linear, Equação (8.4). Quando a força resultante $\sum\vec{F}$ é constante, então $d\vec{p}/dt$ também é constante. Nesse caso, $d\vec{p}/dt$ é igual à variação *total* do momento linear $\vec{p}_2 - \vec{p}_1$ ocorrida durante o intervalo de tempo $t_2 - t_1$ dividida por este intervalo:

$$\sum\vec{F} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1}$$

Multiplicando a equação anterior por $(t_2 - t_1)$, achamos

$$\sum\vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

Comparando esse resultado com a Equação (8.5), obtemos um resultado denominado **teorema do impulso-momento linear**:

$$\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \qquad (8.6)$$

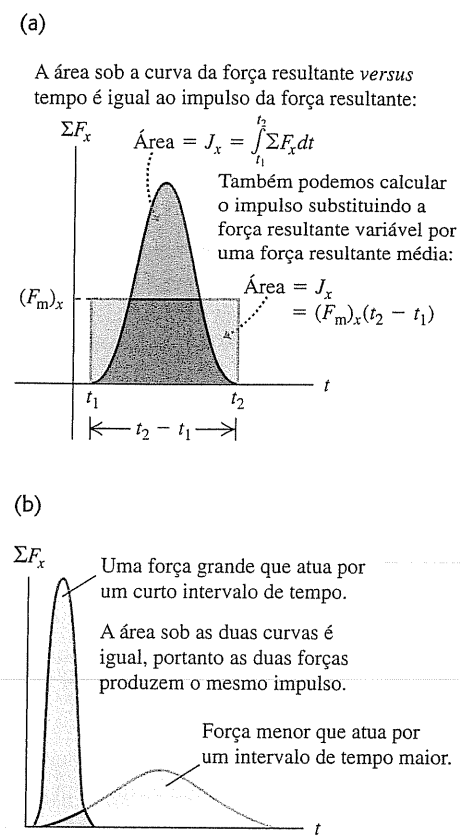
(teorema do impulso-momento linear)

A variação do momento linear durante um intervalo de tempo é igual ao impulso da força resultante que atua sobre a partícula durante esse intervalo.

O teorema do impulso-momento linear também é válido quando as forças não são constantes. Para verificar isso, integramos em relação ao tempo ambos os membros da segunda lei de Newton $\sum\vec{F} = d\vec{p}/dt$ entre os limites t_1 e t_2:

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum\vec{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{d\vec{p}}{dt}\,dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

A integral do membro esquerdo define o impulso $\vec{J}$ da força resultante $\sum\vec{F}$ durante esse intervalo:



8.3 O significado da área sob um gráfico ΣF_x *versus* t.

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2}\sum\vec{F}\,dt \qquad (8.7)$$

(definição geral de impulso)

Com essa definição, o teorema do impulso-momento linear $\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$, Equação (8.6), é válido mesmo que a força $\sum\vec{F}$ varie com o tempo.

Podemos definir uma força *média* $\vec{F}_m$ de forma que, mesmo quando a força resultante $\sum\vec{F}$ varie com o tempo, o impulso $\vec{J}$ é dado por

$$\vec{J} = \vec{F}_m(t_2 - t_1) \qquad (8.8)$$

Quando $\sum\vec{F}$ é constante, $\sum\vec{F} = \vec{F}_m$ e a Equação (8.8) reduz-se à Equação (8.5).

A Figura 8.3a mostra um gráfico do componente x da força resultante $\sum F_x$ em função do tempo durante uma colisão. Isso poderia representar a força exercida pelo pé de um jogador sobre uma bola de futebol que permanece em contato com o pé entre o instante t_1 e o instante t_2.

O componente x do impulso durante esse intervalo é representado pela área sombreada sob a curva entre o instante t_1 e o instante t_2. Essa área é igual à área do retângulo cuja base é $t_2 - t_1$ e cuja altura é $(F_m)_x$, logo $(F_m)_x(t_2 - t_1)$ é igual ao impulso efetivo da força que varia com o tempo neste mesmo intervalo. Note que uma grande força exercida

por um curto período de tempo pode ter o mesmo impulso que uma força menor por um período de tempo mais longo, se as áreas embaixo das curvas de força *versus* tempo forem iguais (Figura 8.3 b). Sob esse aspecto, o *airbag* de um automóvel (Figura 8.2) exerce o mesmo impulso sobre o motorista que o volante ou o painel, mas aplica uma força menor e menos lesiva por um tempo maior.

O impulso e o momento linear são grandezas vetoriais, e as relações da Equação (8.5) à Equação (8.8) são equações vetoriais. Em problemas específicos é mais fácil usar os componentes dos vetores nessas equações do seguinte modo:

$$J_x = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x \, dt = (F_m)_x (t_2 - t_1) = p_{2x} - p_{1x} = mv_{2x} - mv_{1x} \tag{8.9}$$

$$J_y = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_y \, dt = (F_m)_y (t_2 - t_1) = p_{2y} - p_{1y} = mv_{2y} - mv_{1y}$$

e relações análogas para o componente z.

Comparação entre momento linear e energia cinética

Agora, veremos a diferença fundamental entre o momento linear e a energia cinética de uma partícula. O teorema do impulso-momento linear $\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ afirma que as variações do momento linear de uma partícula são produzidas pelo impulso, que depende do *tempo* durante o qual a força resultante atua. Em contraste, o teorema do trabalho-energia $W_{tot} = K_2 - K_1$ afirma que quando um trabalho é realizado sobre uma partícula ocorre uma variação da sua energia cinética; o trabalho total depende da *distância* ao longo da qual a força resultante atuou. Considere uma partícula que parte do repouso no instante t_1 de modo que $\vec{v}_1 = \mathbf{0}$. Seu momento linear inicial é $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1 = \mathbf{0}$, e sua energia cinética inicial é $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = 0$. Suponha agora que uma força resultante constante $\vec{F}$ atue sobre a partícula entre o instante t_1 e o instante t_2. Durante esse intervalo a partícula se desloca por uma distância d na direção da força. De acordo com a Equação (8.6), o momento linear da partícula no instante t_2 é

$$\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + \vec{J} = \vec{J}$$

onde $\vec{J} = \vec{F}(t_2 - t_1)$ é o impulso que atua sobre a partícula. Logo, *o momento linear de uma partícula é igual ao impulso que a acelera do repouso à sua velocidade atual*; o impulso é igual ao módulo da força resultante que acelerou a partícula multiplicado pelo *tempo* necessário para essa aceleração. Compare com a energia cinética da partícula que no instante t_2 é dada por $K_2 = W_{tot} = Fd$, u seja, é igual ao *trabalho* total realizado sobre a partícula para acelerá-la a partir do repouso. O trabalho total realizado é igual ao módulo da força resultante que acelerou a partícula multiplicado pela *distância* necessária para essa aceleração (Figura 8.4).

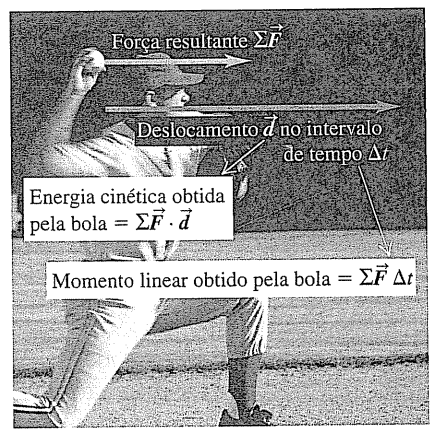


Figura 8.4 A *energia cinética* de uma bola de beisebol arremessada é igual ao trabalho que o jogador realiza sobre a bola (força multiplicada pela distância que a bola percorre durante o arremesso). O *momento linear* da bola é igual ao impulso que o jogador imprime à bola (força multiplicada pelo tempo necessário para fazer a bola ganhar velocidade).

Vejamos agora um exemplo para ilustrar a distinção entre momento linear e energia cinética. Suponha que você tenha de escolher entre agarrar uma bola de 0,50 kg que se desloca a 4,0 m/s, ou uma bola de 0,10 kg que se desloca a 20 m/s. Qual das duas bolas seria mais fácil de agarrar? Ambas possuem o mesmo módulo do momento linear, $p = mv$ = (0,50 kg) (4,0 m/s) = (0,10 kg) (20 m/s) = 2,0 kg · m/s. Porém, elas possuem diferentes valores da energia cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$; a bola maior e mais lenta possui K = 4,0 J, ao passo que a bola menor e mais veloz possui K = 20 J. Uma vez que as duas bolas possuem o mesmo módulo do momento linear, ambas necessitam do mesmo *impulso* para fazê-las entrar em repouso. Contudo, o *trabalho* realizado por sua mão ao fazer a bola de 0,10 kg parar é cinco vezes maior do que o realizado para fazer a bola de 0,50 kg parar, porque a bola menor possui energia cinética cinco vezes maior do que a da bola maior. Portanto, para uma dada força média exercida por sua mão, ela leva o mesmo tempo (o intervalo de tempo para você agarrar a bola) para fazer as bolas entrarem em repouso, porém o deslocamento da sua mão e do seu braço é cinco vezes maior para agarrar a bola mais leve do que o deslocamento ocorrido para agarrar a bola mais pesada. Para minimizar o esforço do seu braço, você deveria escolher agarrar a bola de 0,50 kg que possui menor energia cinética.

O teorema do impulso-momento linear e o teorema do trabalho-energia relacionam a força com o movimento, e ambos se baseiam nas leis de Newton. Eles fornecem *integrais* do movimento, relacionando o movimento entre dois instantes de tempo separados por um intervalo finito. A segunda lei de Newton propriamente dita (na forma $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ ou $\Sigma\vec{F} = d\vec{p}/dt$) fornece uma equação *diferencial* do movimento, relacionando a força com a taxa de variação da velocidade ou com a taxa de variação do momento linear em cada instante.

Exemplo conceitual 8.1

MOMENTO LINEAR *VERSUS* ENERGIA CINÉTICA Considere novamente a competição entre dois barcos que deslizam na superfície de um lago congelado descrita no Exemplo 6.5 (Seção 6.2). Os barcos possuem massas m e $2m$, respectivamente, e o vento exerce a mesma força horizontal e constante $\vec{F}$ sobre eles (Figura 6.14). Ambos os barcos partem do repouso e cruzam a linha de chegada situada a uma distância d do ponto inicial. Qual deles atravessa a linha de chegada com o maior momento linear?

SOLUÇÃO

No Exemplo Conceitual 6.5 perguntamos qual dos dois barcos atravessa a linha de chegada com a maior energia cinética. Vimos que a melhor maneira de responder a essa pergunta não era usando a fórmula $K = \frac{1}{2}mv^2$, mas sim lembrando que a energia cinética do corpo é igual ao trabalho total realizado para acelerá-lo a partir do repouso. Os barcos partiram do repouso, e o trabalho total realizado entre o ponto inicial e a linha de chegada é o mesmo para os dois (porque a força resultante e o deslocamento possuem os mesmos valores para ambos). Portanto, ambos cruzam a linha de chegada com a mesma energia cinética.

Analogamente, a melhor maneira de comparar os dois momentos lineares *não* é usando a fórmula do momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$. Essa fórmula sozinha não serve para decidir qual dos barcos possui maior momento linear ao cruzar a linha de chegada. O barco com massa $2m$ possui massa maior que a do outro, o que sugere um maior momento linear; porém esse barco cruza a linha de chegada com velocidade menor que a do outro, o que sugere um menor momento linear.

Em vez disso, usaremos outro método, lembrando-nos de que o impulso que acelera cada barco que parte do repouso é igual ao momento linear do respectivo barco. A força da gravidade e a reação normal produzem uma resultante nula, de modo que a força resultante é igual à força horizontal e constante $\vec{F}$ do vento. Seja Δt o intervalo de tempo entre o instante inicial e o instante em que o barco cruza a linha de chegada, de modo que o impulso sobre cada barco nesse intervalo de tempo é dado por $\vec{J} = \vec{F}\,\Delta t$. Como o barco começa a se deslocar a partir do repouso, esse valor é precisamente igual ao momento linear do barco na linha de chegada:

$$\vec{p} = \vec{F}\,\Delta t$$

Os dois barcos estão submetidos à ação da mesma força $\vec{F}$, porém eles não gastam o mesmo intervalo de tempo Δt entre o instante inicial e o instante em que cruzam a linha de chegada. O barco com massa $2m$ possui massa maior e, portanto, desloca-se com menor aceleração, levando mais tempo para percorrer a distância d; então existe um impulso grande fornecido a esse barco entre o instante inicial e o instante em que ele cruza a linha de chegada. Logo, o barco com massa $2m$ cruza a linha de chegada com um momento linear maior do que o do barco com massa m (porém a energia cinética é a mesma para os dois barcos). Você é capaz de mostrar que o barco com massa $2m$ cruza a linha de chegada com momento linear $\sqrt{2}$ vezes maior do que o momento linear do barco com massa m?

Exemplo 8.2

UMA BOLA COLIDINDO COM UMA PAREDE Suponha que você jogue uma bola de massa igual a 0,40 kg contra uma parede. Ela colide com a parede quando está se movendo horizontalmente da direita para a esquerda a 30 m/s, retornando horizontalmente da esquerda para a direita a 20 m/s. a) Calcule o impulso da força resultante sobre a bola durante sua colisão com a parede. b) Sabendo que a bola permanece em contato com a parede durante 0,010 s, ache a força horizontal média que a parede exerce sobre a bola durante a colisão.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: há informação suficiente para determinar os valores inicial e final do momento linear da bola, portanto podemos usar o teorema do impulso-momento linear para determinar o impulso. A seguir, aplicaremos a definição de impulso para calcular a força média.

PREPARAR: a Figura 8.5 mostra o nosso desenho. O movimento é puramente horizontal, portanto necessitamos de um único eixo. Considere o eixo x horizontal, com sentido positivo da esquerda para a direita. Nossa variável no item (a) é o componente x do impulso, J_x, que obteremos a partir dos componentes x do momento linear antes e depois do impacto, usando a Equação (8.9). No item (b), nossa variável é o componente x médio da força $(F_m)_x$; conhecendo J_x, também podemos determinar essa força por meio da Equação (8.9).

EXECUTAR: a) em função da escolha do eixo x, os componentes x inicial e final do momento linear da bola são dados por

$$p_{1x} = mv_{1x} = (0{,}40\ \text{kg})(-30\ \text{m/s}) = -12\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

$$p_{2x} = mv_{2x} = (0{,}40\ \text{kg})(+20\ \text{m/s}) = +8{,}0\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

De acordo com a Equação (8.9), o componente x do impulso é igual à *variação* do momento linear x:

$$J_x = p_{2x} - p_{1x}$$
$$= 8{,}0\ \text{kg}\cdot\text{m/s} - (-12\ \text{kg}\cdot\text{m/s}) = 20\ \text{kg}\cdot\text{m/s} = 20\ \text{N}\cdot\text{s}$$

b) O intervalo de tempo da colisão é $t_2 - t_1 = \Delta t = 0{,}010$ s. Pela Equação (8.9), $J_x = (F_m)_x(t_2 - t_1) = (F_m)_x\,\Delta t$, logo

$$(F_m)_x = \frac{J_x}{\Delta t} = \frac{20\ \text{N}\cdot\text{s}}{0{,}010\ \text{s}} = 2000\ \text{N}$$

AVALIAR: o componente x do impulso é positivo – ou seja, para a direita na Figura 8.5. É assim que deve ser: o impulso representa o 'chute' que a parede dá na bola, e esse 'chute' certamente aponta para a direita.

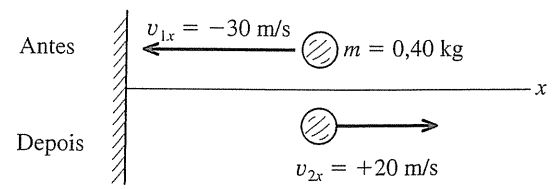


Figura 8.5 Nosso desenho para este problema.

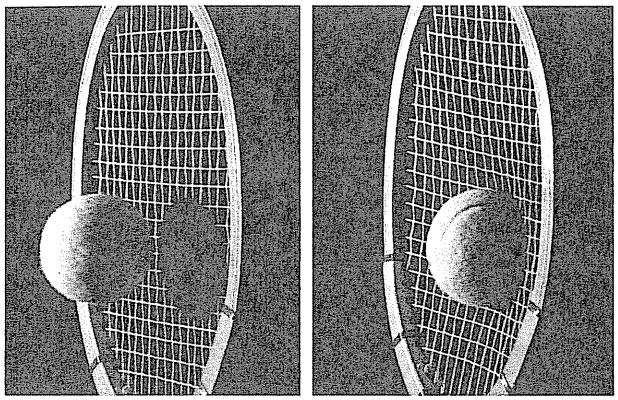


Figura 8.6 Comumente, o intervalo de tempo durante o qual uma bola de tênis permanece em contato com uma raquete é aproximadamente igual a 0,01 s. A bola visivelmente se achata por causa da enorme força exercida pela raquete.

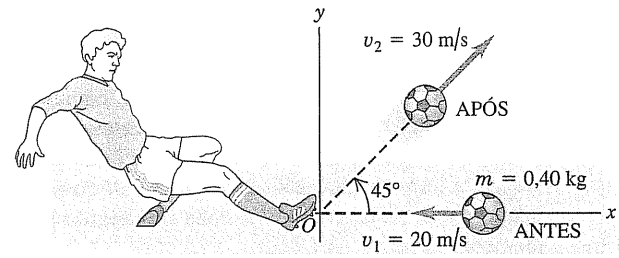
ATENÇÃO O momento linear é um vetor Como o momento linear é um vetor, tivemos que incluir um sinal negativo em p_{1x}. Se o tivéssemos omitido por negligência, teríamos calculado o impulso como 8,0 kg · m/s − (12 kg · m/s) = −4 kg · m/s. Essa resposta incorreta afirmaria que a parede havia de alguma forma dado um chute na bola para a *esquerda*! Certifique-se de levar em consideração *a direção e o sentido* do momento linear nos seus cálculos.

A força que a parede exerce sobre a bola possui um módulo grande de 2000 N (equivalente ao peso de um objeto de 200 kg) para produzir uma variação no momento linear da bola nesse curto intervalo de tempo. As outras forças que atuam sobre a bola durante a colisão são muito pequenas em comparação com essa força; por exemplo, a força gravitacional é somente 3,9 N. Logo, no breve intervalo de tempo durante a colisão, com boa aproximação, podemos ignorar todas as outras forças que atuam sobre a partícula. A Figura 8.6 mostra a colisão entre uma bola de tênis e uma raquete. Note que o valor de 2000 N que calculamos é exatamente a força horizontal *média* que a parede exerce sobre a bola durante o impacto. Ela corresponde à linha horizontal $(F_m)_x$ na Figura 8.3a. A força resultante horizontal é igual a zero antes do impacto, cresce até um valor máximo e a seguir diminui até zero, quando a bola perde contato com a parede. Quando a bola é relativamente rígida, como uma bola de beisebol ou uma bola de golfe, a colisão dura um intervalo de tempo pequeno e a força máxima é grande, como indicado na curva da Figura 8.3b. Quando a bola é macia, como uma bola de tênis, a colisão dura um intervalo de tempo grande e a força máxima é pequena, como indicado na curva da Figura 8.3b.

Exemplo 8.3

CHUTANDO UMA BOLA DE FUTEBOL A massa de uma bola de futebol é igual a 0,40 kg. Inicialmente ela se desloca da direita para a esquerda a 20 m/s, a seguir é chutada, deslocando-se com velocidade, a 45° para cima e para a direita, com módulo igual a 30 m/s (Figura 8.7a). Calcule o impulso da força resultante e a força resultante média, supondo um intervalo de tempo de colisão $\Delta t = 0{,}010$ s.

(a) Diagrama antes e após.



(b) Força média sobre a bola.

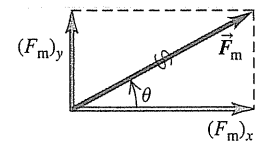


Figura 8.7 (a) Chutando uma bola de futebol. (b) Determinação da força média por meio dos seus componentes.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este exemplo aplica os mesmos princípios do Exemplo 8.2. A principal diferença é que a velocidade inicial e a velocidade final não estão contidas na mesma linha, e devemos cuidadosamente considerar o impulso e o momento linear como grandezas vetoriais, usando seus componentes x e y.

PREPARAR: orientando o eixo Ox horizontalmente da esquerda para a direita e o eixo Oy verticalmente de baixo para cima, nossas incógnitas são os componentes do impulso resultante sobre a bola, J_x e J_y, e os componentes da força resultante média sobre a bola, $(F_m)_x$ e $(F_m)_y$. Determinaremos essas incógnitas usando os componentes x e y da Equação (8.9).

EXECUTAR: em função da escolha dos eixos, achamos os componentes do vetor velocidade da bola nos instantes anterior (índice inferior 1) e posterior (índice inferior 2) ao chute:

$$v_{1x} = -20 \text{ m/s} \qquad v_{1y} = 0$$

$$v_{2x} = v_{2y} = (30 \text{ m/s})(0{,}707) = 21{,}2 \text{ m/s}$$

(considerando cos 45° = sen 45° = 0,707)

O componente x do impulso é igual ao componente x da variação do momento linear, e isto também vale para o componente y do impulso:

$$J_x = p_{2x} - p_{1x} = m(v_{2x} - v_{1x})$$

$$= (0{,}40 \text{ kg})[21{,}2 \text{ m/s} - (-20 \text{ m/s})] = 16{,}5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$J_y = p_{2y} - p_{1y} = m(v_{2y} - v_{1y})$$

$$= (0{,}40 \text{ kg})(21{,}2 \text{ m/s} - 0) = 8{,}5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Os componentes da força resultante média que atua sobre a bola são

$$(F_m)_x = \frac{J_x}{\Delta t} = 1650 \text{ N} \qquad (F_m)_y = \frac{J_y}{\Delta t} = 850 \text{ N}$$

O módulo e a direção da força média são dados por

$$F_{\text{m}} = \sqrt{(1650\ \text{N})^2 + (850\ \text{N})^2} = 1{,}9 \times 10^3\ \text{N}$$

$$\theta = \text{arctg}\frac{850\ \text{N}}{1650\ \text{N}} = 27°$$

onde θ é um ângulo medido para cima do eixo $+Ox$ (Figura 8.7b). Note que como a bola não estava inicialmente em repouso, sua velocidade final *não* possui direção igual a da força média que atua sobre ela.

AVALIAR: a força resultante média $\vec{F}_{\text{m}}$ inclui o efeito da força gravitacional, apesar de pequeno; a força gravitacional é somente 3,9 N. Como no Exemplo 8.2, a força média que atua durante a colisão é exercida quase inteiramente pelo corpo que colide com a bola (neste caso o pé do jogador de futebol).

Teste sua compreensão da Seção 8.1 Ordene as seguintes situações de acordo com o módulo do impulso da força resultante, do menor para o maior valor. Em cada situação, um automóvel de 1000 kg move-se ao longo de uma rodovia leste-oeste. (i) O automóvel move-se inicialmente para o leste a 25m/s, e pára após 10 s. (ii) O automóvel move-se inicialmente para o leste a 25m/s, e pára após 5 s. (iii) O automóvel está inicialmente em repouso, e uma força resultante de 2000 N, orientada para leste, é aplicada sobre ele por 10 s. (iv) O automóvel move-se inicialmente para o leste a 25m/s e uma força resultante de 2000 N, orientada para oeste, é aplicada sobre ele por 10 s. (v) O automóvel move-se inicialmente para o leste a 25m/s. Após um período de 30 s, o automóvel inverte sua direção e termina se movendo para oeste a 25 m/s. ∎

8.2 Conservação do momento linear

O conceito de momento linear é particularmente importante quando ocorre *interação* entre dois ou mais corpos. Vamos considerar inicialmente um sistema ideal de dois corpos que interagem entre si, mas não interagem com nenhum outro corpo — por exemplo, dois astronautas que se tocam enquanto flutuam em uma região sem campo gravitacional no espaço sideral (Figura 8.8). Considere os astronautas como partículas. Cada partícula exerce uma força sobre a outra; de acordo com a terceira lei de Newton, as duas forças possuem o mesmo módulo e a mesma direção, porém seus sentidos são contrários. Portanto, os *impulsos* que atuam sobre essas partículas possuem o mesmo módulo e a mesma direção, porém seus sentidos são contrários e as variações do momento linear também são iguais e contrárias.

Vamos prosseguir introduzindo nova terminologia. Denomina-se **força interna** a força que uma partícula de um sistema exerce sobre outra. Denomina-se **força externa** a força exercida sobre qualquer parte de um sistema por um corpo no exterior do sistema. Para o sistema indicado na Figura 8.8, as forças internas são a força $\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$, exercida pela partícula B sobre a partícula A, e a força $\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$, exercida pela partícula A sobre a partícula B. Não existe nesse caso *nenhuma* força externa, e dizemos que se trata de um **sistema isolado**.

A força resultante sobre a partícula A é $\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$, e a força resultante sobre a partícula B é $\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$, de modo que, pela Equação (8.4), as taxas de variação dos momentos lineares dessas partículas são dadas por

$$\vec{F}_{B \text{ sobre } A} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} \qquad \vec{F}_{A \text{ sobre } B} = \frac{d\vec{p}_B}{dt} \tag{8.10}$$

O momento linear de cada partícula varia, porém essas variações não são independentes. De acordo com a terceira lei de Newton, as duas forças $\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$ e $\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$ possuem o mesmo módulo e a mesma direção, porém seus sentidos são contrários. Ou seja, $\vec{F}_{B \text{ sobre } A} = -\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$, de modo que $\vec{F}_{B \text{ sobre } A} + \vec{F}_{A \text{ sobre } B} = \mathbf{0}$. Somando as duas relações da Equação (8.10), obtemos

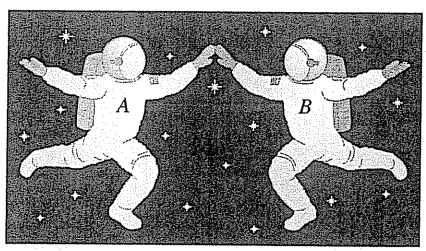
$$\vec{F}_{B \text{ sobre } A} + \vec{F}_{A \text{ sobre } B} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} = \frac{d(\vec{p}_A + \vec{p}_B)}{dt} = \mathbf{0} \tag{8.11}$$

As taxas das variações dos momentos lineares também são iguais e contrárias, de modo que a taxa de variação da soma vetorial $\vec{p}_A + \vec{p}_B$ é igual a zero. Definimos agora o **momento linear total** $\vec{P}$ do sistema de duas partículas como a soma vetorial dos momentos lineares de cada partícula. Logo,

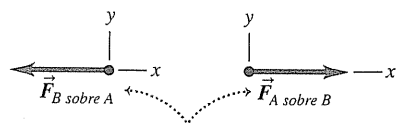
$$\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B \tag{8.12}$$

Da Equação (8.11) obtemos, finalmente,

$$\vec{F}_{B \text{ sobre } A} + \vec{F}_{A \text{ sobre } B} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \mathbf{0} \tag{8.13}$$



Nenhuma força externa atua sobre o sistema composto pelos dois astronautas, por isso seu momento linear total é conservado.



As forças que os astronautas exercem mutuamente formam um par de ação e reação.

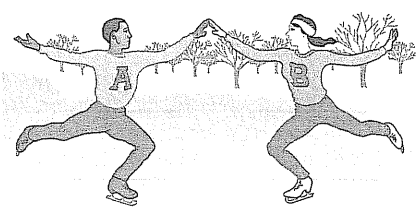
Figura 8.8 Dois astronautas empurram-se mutuamente enquanto estão em uma região do espaço sem campo gravitacional.

A taxa de variação do momento linear *total* $\vec{P}$ é igual a zero. Portanto, o momento linear total do sistema é constante, embora os momentos lineares de cada partícula do sistema possam variar.

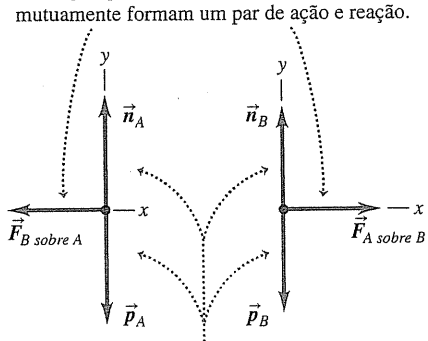
Quando forças externas também estão presentes, devem ser incluídas no membro esquerdo da Equação (8.13) juntamente com as forças internas. Nesse caso, o momento linear total em geral não permanece constante. Porém, quando a soma vetorial das forças externas é igual a zero, como na Figura 8.9, essas forças não contribuem para a soma, e $d\vec{P}/dt$ é novamente igual a zero. Assim, podemos formular o seguinte enunciado geral:

Quando a soma vetorial das forças externas que atuam sobre um sistema é igual a zero, o momento linear total do sistema permanece constante.

Esse é o enunciado mais simples da **lei da conservação do momento linear**. Esse princípio é uma conseqüência direta da terceira lei de Newton. O ponto importante dessa lei é que sua aplicação não depende da natureza detalhada das forças internas entre as partículas constituintes do sistema. Isso significa que podemos aplicar a lei da conservação do momento linear mesmo quando (como geralmente ocorre) sabemos muito pouco a respeito das forças internas entre as partículas. Usamos a segunda lei de Newton para deduzir esse princípio, logo devemos tomar cuidado e aplicá-lo somente em sistemas de referência inerciais.



As forças que os patinadores exercem mutuamente formam um par de ação e reação.



Embora a força normal e a força gravitacional sejam externas, sua soma vetorial é igual a zero e o momento linear total se conserva.

Figura 8.9 Dois patinadores empurram-se mutuamente enquanto deslizam ao longo de uma superfície horizontal sem atrito. (Compare com a Figura 8.8.)

Podemos generalizar esse princípio para um sistema contendo um número qualquer de partículas A, B, C, ... que interagem apenas mediante forças internas. O momento linear total desse sistema é dado por

$$\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B + \cdots = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B + \cdots \qquad (8.14)$$

(momento linear total de um sistema de partículas)

Elaboramos um raciocínio semelhante ao anterior: a taxa de variação do momento linear total produzida pela soma de cada par de ação e reação das forças internas entre as partículas é igual a zero. Logo, a taxa de variação do momento linear total do sistema inteiro é igual a zero quando a soma vetorial das forças externas que atuam sobre ele é igual a zero. As forças internas podem alterar o momento linear interno de partículas individuais do sistema, porém elas não alteram o momento linear *total* do sistema.

ATENÇÃO A conservação do momento linear significa a conservação dos seus componentes Quando você aplicar a lei da conservação do momento linear, é essencial lembrar-se de que o momento linear é uma grandeza *vetorial*. Assim, você deve usar as regras da soma vetorial para calcular o momento linear total de um sistema (Figura 8.10). O uso de componentes geralmente é mais simples. Se p_{Ax}, p_{Ay} e p_{Az} são os componentes do momento linear de uma partícula A e, analogamente, para os componentes das outras partículas, então a Equação (8.14) pode ser escrita de modo equivalente por meio das relações

$$\begin{aligned} P_x &= p_{Ax} + p_{Bx} + \cdots \\ P_y &= p_{Ay} + p_{By} + \cdots \\ P_z &= p_{Az} + p_{Bz} + \cdots \end{aligned} \qquad (8.15)$$

Quando a soma vetorial das forças externas que atuam sobre um sistema é igual a zero, então os componentes P_x, P_y e P_z são todos constantes.

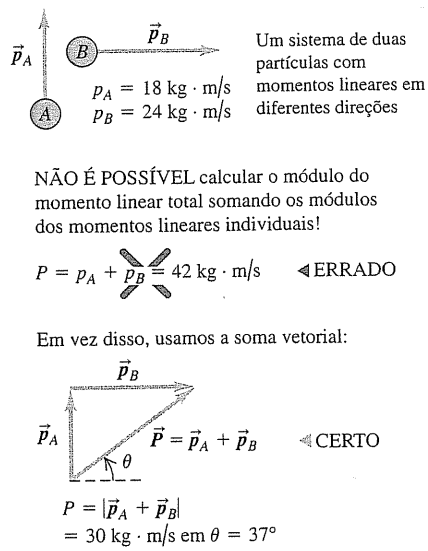


Figura 8.10 Ao aplicar a conservação do momento linear, lembre-se de que o momento linear é uma grandeza vetorial!

De certo modo, a lei da conservação do momento linear é mais geral do que a lei da conservação da energia mecânica. Por exemplo, a energia mecânica se conserva somente quando as forças internas são *conservativas* — isto é, quando elas permitem uma conversão recíproca nos dois sentidos entre energia cinética e energia potencial —, porém a lei da conservação do momento linear vale mesmo quando no sistema existem forças que *não* são conservativas. Neste capítulo vamos analisar casos em que existem conservação do momento linear e conservação da energia mecânica, e outros casos em que somente existe conservação do momento linear. Esses dois princípios desempenham um papel fundamental em diversas áreas da física e iremos encontrá-los no decorrer de nossos estudos dessa matéria.

Estratégia para a solução de problemas 8.1

CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: antes de aplicar a lei da conservação do momento linear a um problema, você deve verificar se o momento linear é conservado ou não! Ocorre conservação do momento linear somente quando a soma das forças externas que atuam sobre o sistema é nula. Caso contrário, você não pode usar a lei da conservação do momento linear.

PREPARAR *o problema usando os seguintes passos:*

1. Defina o sistema de coordenadas. Faça um desenho mostrando os eixos das coordenadas indicando o sentido positivo de cada eixo. Geralmente é mais conveniente desenhar o eixo Ox com a mesma direção e mesmo sentido da velocidade inicial. Verifique se você está usando somente sistemas de referência inerciais. A maioria dos problemas neste capítulo refere-se a situações com duas dimensões, nas quais os vetores possuem somente componentes x e y; quando necessário, todas as afirmações que se seguem podem ser generalizadas incluindo-se o componente z.
2. Considere cada corpo como uma partícula. Faça um esquema para 'antes'e 'depois' do evento, incluindo vetores para representar todas as velocidades conhecidas. Assinale cada vetor indicando o módulo, o ângulo, os componentes ou qualquer outro dado e use um símbolo algébrico para designar qualquer grandeza desconhecida tal como o módulo, o ângulo ou os componentes de um vetor. Talvez seja útil utilizar índices inferiores 1 e 2 para designar as velocidades antes e depois da interação, respectivamente; nesse caso, use letras (e não números) para identificar cada partícula.
3. Como sempre, identifique as incógnitas dentre os dados desconhecidos.

EXECUTAR *a solução como segue:*

1. Escreva uma equação algébrica igualando o componente x do momento linear total *inicial* (ou seja, o componente antes da interação) com o componente x do momento linear total *final* (ou seja, o componente depois da interação) usando $p_x = mv_x$ para cada partícula. Escreva outra equação algébrica para o componente y, usando $p_y = mv_y$ para cada partícula. (Lembre-se de que os componentes x e y da velocidade ou do momento linear *nunca* podem ser adicionados à mesma equação!) Mesmo quando todas as velocidades estão ao longo da mesma linha reta (como o eixo Ox), os componentes da velocidade ao longo dessa linha podem ser positivos ou negativos; tome cuidado com os sinais!
2. Resolva as equações para obter as grandezas desejadas. Em alguns problemas você terá de obter o módulo, a direção e o sentido de um vetor a partir dos componentes do vetor, ou vice-versa.
3. Em alguns problemas, considerações de energia podem fornecer informações adicionais entre as diversas velocidades, como veremos mais adiante neste capítulo.

AVALIAR *sua resposta:* a sua resposta faz sentido em termos físicos? Se a incógnita for o momento linear de um dado corpo, verifique se a direção do momento linear é razoável.

Exemplo 8.4

RECUO DE UM RIFLE Um atirador segura um rifle de massa $m_R = 3{,}0$ kg frouxamente de modo que a arma possa recuar livremente ao disparar. Ele atira uma bala de massa $m_B = 5{,}0$ g horizontalmente com velocidade relativa ao solo dada por $v_{Bx} = 300$ m/s. Qual é a velocidade de recuo v_{Rx} do rifle? Quais são os valores da energia cinética final e do momento linear total final da bala? E do rifle?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: consideramos um modelo ideal no qual desprezamos a força que a mão do atirador exerce sobre o rifle. Como não existe nenhuma força resultante externa atuando sobre o sistema (rifle e bala) no momento do disparo, o momento linear horizontal total do sistema é o mesmo antes e depois do disparo (ou seja, ele se conserva).

PREPARAR: a Figura 8.11 mostra o nosso desenho. Considere o sentido positivo do eixo Ox como o sentido apontado pelo rifle. Inicialmente, o rifle e a bala estão em repouso, de modo que o componente x do momento linear total é igual a zero. Depois que a bala é disparada, o componente x do seu momento linear é igual a $p_{Bx} = m_B v_{Bx}$ e o do rifle é $p_{Rx} = m_R v_{Rx}$. As incógnitas são v_{Rx}, p_{Bx}, p_{Rx} e $K_B = \frac{1}{2} m_B v_{Bx}^2$ e $K_R = \frac{1}{2} m_R v_{Rx}^2$ (as energias cinéticas finais da bala e do rifle, respectivamente).

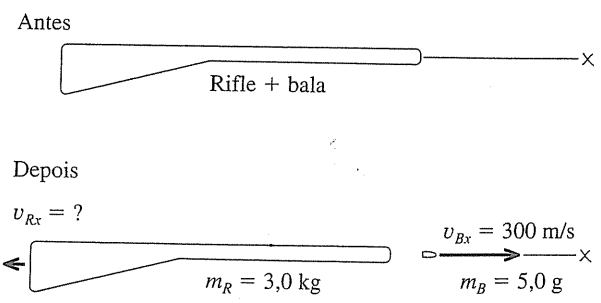


Figura 8.11 Nosso desenho para esse problema.

EXECUTAR: a lei da conservação do momento linear aplicada ao componente x fornece

$$P_x = 0 = m_B v_{Bx} + m_R v_{Rx}$$

$$v_{Rx} = -\frac{m_B}{m_R} v_{Bx} = -\left(\frac{0{,}00500\text{ kg}}{3{,}0\text{ kg}}\right)(300\text{ m/s}) = -0{,}500\text{ m/s}$$

O sinal negativo significa que o recuo ocorre em sentido contrário ao da velocidade da bala. Caso a coronha do rifle colidisse com seu ombro a essa velocidade, você certamente sentiria o efeito. É mais confortável comprimir firmemente o rifle contra o ombro no momento do disparo; nesse caso, a massa do rifle m_R é substituída pela soma da massa do atirador com a massa do rifle, e a velocidade de recuo torna-se muito menor.

A energia cinética e o momento linear final da bala são

$$p_{Bx} = m_B v_{Bx} = (0{,}00500\text{ kg})(300\text{ m/s}) = 1{,}50\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

$$K_B = \tfrac{1}{2} m_B v_{Bx}^2 = \tfrac{1}{2}(0{,}00500\text{ kg})(300\text{ m/s})^2 = 225\text{ J}$$

Para o rifle, a energia cinética e o momento linear final são

$$p_{Rx} = m_R v_{Rx} = (3{,}0\text{ kg})(-0{,}500\text{ m/s}) = -1{,}50\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

$$K_R = \tfrac{1}{2} m_R v_{Rx}^2 = \tfrac{1}{2}(3{,}0\text{ kg})(-0{,}500\text{ m/s})^2 = 0{,}375\text{ J}$$

AVALIAR: o momento linear da bala é igual e contrário ao momento linear do rifle depois da interação, porque foram submetidos a forças de interação iguais e contrárias que atuaram no mesmo intervalo de *tempo* (ou seja, impulsos iguais e contrários). Porém, a bala adquiriu uma energia cinética maior do que a do rifle porque se deslocou a uma *distância* maior do que a dele durante a interação. Logo, o trabalho realizado pela força sobre a bala é maior do que o trabalho realizado pela força sobre o rifle. A razão entre a energia cinética da bala e a energia cinética do rifle, 600:1, é inversamente proporcional à razão entre a massa da bala e a massa do rifle; na verdade, podemos provar que esse resultado é sempre válido em qualquer evento de recuo. Deixamos a comprovação ao seu encargo, sob a forma de um problema (veja o Exercício 8.22).

Note que nossa solução não depende absolutamente dos detalhes de como o rifle funciona. Em um rifle real, a propulsão da bala é produzida por uma explosão; contudo, caso o mecanismo de propulsão fosse baseado em uma mola muito dura, as respostas seriam exatamente as mesmas.

Exemplo 8.5

COLISÃO AO LONGO DE UMA LINHA RETA Dois cavaleiros se deslocam em sentidos contrários em um trilho de ar linear sem atrito (Figura 8.12a). Depois da colisão (Figura 8.12b), o cavaleiro B se afasta com velocidade final de +2,0 m/s (Figura 8.12c). Qual a velocidade final do cavaleiro A? Como se comparam as variações de velocidade e de momento linear desses cavaleiros?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a força resultante na vertical que atua sobre cada cavaleiro é igual a zero; a força resultante que atua sobre cada cavaleiro é a força horizontal que um cavaleiro exerce sobre o outro. Como a força resultante *externa* que atua sobre o sistema constituído pelos dois cavaleiros é igual a zero, o momento linear total permanece constante (Compare com a Figura 8.9.)

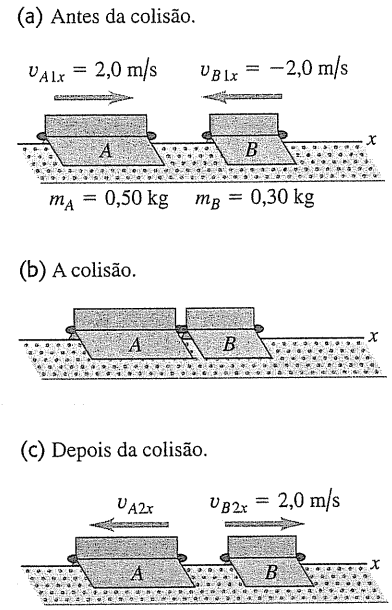


Figura 8.12 Colisão entre dois cavaleiros sobre um trilho de ar.

PREPARAR: considere um eixo Ox ao longo do trilho de ar, com o sentido positivo da esquerda para a direita. Temos as massas dos cavaleiros e os componentes x de suas respectivas velocidades, além da velocidade final do cavaleiro B. As incógnitas são v_{A2x}, o componente x final da velocidade do cavaleiro A e as variações no momento linear e na velocidade dos dois cavaleiros (o valor após a colisão menos o valor antes da colisão).

EXECUTAR: o componente x do momento linear total antes da colisão é dado por

$$\begin{aligned} P_x &= m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} \\ &= (0{,}50\text{ kg})(2{,}0\text{ m/s}) + (0{,}30\text{ kg})(-2{,}0\text{ m/s}) \\ &= 0{,}40\text{ kg}\cdot\text{m/s} \end{aligned}$$

Esse valor é positivo (da esquerda para a direita na Figura 8.12), porque antes da colisão o módulo do momento linear do cavaleiro A é maior do que o módulo do momento linear do cavaleiro B. Como o componente x do momento linear total depois da colisão permanece o mesmo, temos

$$P_x = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

Explicitando o valor de v_{A2x}, a velocidade final de A, obtemos

$$\begin{aligned} v_{A2x} &= \frac{P_x - m_B v_{B2x}}{m_A} = \frac{0{,}40\text{ kg}\cdot\text{m/s} - (0{,}30\text{ kg})(2{,}0\text{ m/s})}{0{,}50\text{ kg}} \\ &= -0{,}40\text{ m/s} \end{aligned}$$

A variação do momento linear do cavaleiro A é

$$\begin{aligned} m_A v_{A2x} - m_A v_{A1x} &= (0{,}50\text{ kg})(-0{,}40\text{ m/s}) \\ &\quad - (0{,}50\text{ kg})(2{,}0\text{ m/s}) = -1{,}2\text{ kg}\cdot\text{m/s} \end{aligned}$$

e a variação do momento linear do cavaleiro B é

$$\begin{aligned} m_B v_{B2x} - m_B v_{B1x} &= (0{,}30\text{ kg})(2{,}0\text{ m/s}) \\ &\quad - (0{,}30\text{ kg})(-2{,}0\text{ m/s}) = +1{,}2\text{ kg}\cdot\text{m/s} \end{aligned}$$

Os dois cavaleiros em interação possuem variações do momento linear iguais e contrárias. Contudo, isso *não* é verdade para suas variações de velocidade. Para A, $v_{A2x} - v_{A1x} = (-0{,}40\ \text{m/s}) - 2{,}0\ \text{m/s} = -2{,}4\ \text{m/s}$; para B, $v_{B2x} - v_{B1x} = 2{,}0\ \text{m/s} - (-2{,}0\ \text{m/s}) = +4{,}0\ \text{m/s}$.

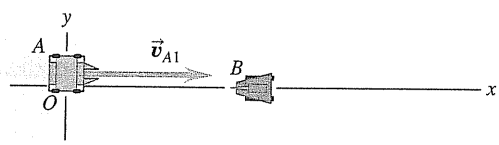
AVALIAR: por que as variações no momento linear possuem o mesmo módulo para ambos os cavaleiros, mas isso não acontece com as variações na velocidade? Pela terceira lei de Newton, ambos os cavaleiros sofreram ação por igual intervalo de tempo por uma força de interação de mesmo módulo. Portanto, ambos os cavaleiros experimentaram impulsos de mesmo módulo e, conseqüentemente, variações de igual módulo no momento linear. Mas, pela segunda lei de Newton, o módulo da aceleração (e, portanto, da variação da velocidade) é maior para o corpo que possui a menor massa (o cavaleiro B).

Apresentamos uma aplicação desses conceitos. Em uma colisão entre um caminhão de grande porte e um carro de tamanho médio, ambos os veículos sofrem a mesma variação no momento linear. Entretanto, os ocupantes do carro são submetidos a uma aceleração maior (e maior chance de ferimentos) do que os ocupantes do caminhão. Um exemplo ainda mais extremo é o que acontece quando um caminhão colide contra um inseto. O motorista do caminhão não sentirá nenhuma aceleração resultante, mas o inseto certamente sentirá!

Exemplo 8.6

COLISÃO EM UM PLANO HORIZONTAL Dois robôs em combate deslizam sobre uma superfície sem atrito conforme mostra a Figura 8.13a. O robô A, com massa de 20 kg, move-se com velocidade de 2,0 m/s paralelamente ao eixo Ox. Ele colide com o robô B, com massa de 12 kg, que está inicialmente em repouso. Depois da colisão, verifica-se que a velocidade do robô A é de 1,0 m/s com uma direção que faz um ângulo $\alpha = 30°$ com a direção inicial (Figura 8.13b). Qual é a velocidade final do robô B?

(a) Antes da colisão.



(b) Depois da colisão.

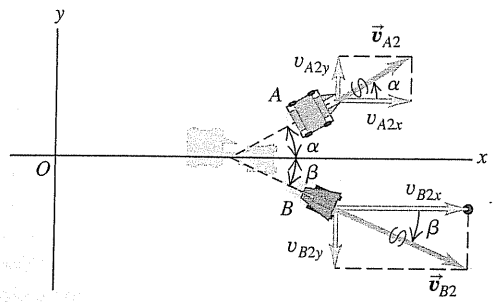


Figura 8.13 Vistas de topo das velocidades (a) antes e (b) depois da colisão.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: não existe nenhuma força externa horizontal (nem x nem y), de modo que o momento linear total horizontal é o mesmo antes e depois da colisão.

PREPARAR: a Figura 8.13 indica os eixos das coordendas. As velocidades não estão sobre a mesma direção, logo, devemos considerar o momento linear uma grandeza vetorial. A lei da conservação do momento linear exige que a soma dos componentes na direção x *antes* da colisão (índice inferior 1) deva ser igual à soma *depois* da colisão (índice inferior 2) e, analogamente, para a soma dos componentes na direção y. Devemos escrever uma equação para cada componente. A nossa incógnita é $\vec{v}_{B2}$, a velocidade final do robô B.

EXECUTAR: a conservação do componente x do momento linear total fornece

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

$$v_{B2x} = \frac{m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} - m_A v_{A2x}}{m_B}$$

$$= \frac{\left[\begin{array}{l}(20\ \text{kg})(2{,}0\ \text{m/s}) + (12\ \text{kg})(0) \\ -(20\ \text{kg})(1{,}0\ \text{m/s})(\cos 30°)\end{array}\right]}{12\ \text{kg}}$$

$$= 1{,}89\ \text{m/s}$$

De modo análogo, a conservação do componente y do momento linear total fornece

$$m_A v_{A1y} + m_B v_{B1y} = m_A v_{A2y} + m_B v_{B2y}$$

$$v_{B2y} = \frac{m_A v_{A1y} + m_B v_{B1y} - m_A v_{A2y}}{m_B}$$

$$= \frac{\left[\begin{array}{l}(20\ \text{kg})(0) + (12\ \text{kg})(0) \\ -(20\ \text{kg})(1{,}0\ \text{m/s})(\text{sen}\ 30°)\end{array}\right]}{12\ \text{kg}}$$

$$= -0{,}83\ \text{m/s}$$

Depois da colisão, o robô B se move no sentido positivo do eixo Ox e no sentido negativo do eixo Oy (Figura 8.13b). O módulo de $\vec{v}_{B2}$ é

$$v_{B2} = \sqrt{(1{,}89\ \text{m/s})^2 + (-0{,}83\ \text{m/s})^2} = 2{,}1\ \text{m/s}$$

e o ângulo que sua velocidade forma com o sentido positivo do eixo Ox é dado por

$$\beta = \text{arctg}\frac{-0{,}83\ \text{m/s}}{1{,}89\ \text{m/s}} = -24°$$

AVALIAR: podemos conferir nossa resposta analisando os valores do momento linear antes e depois da colisão. Inicialmente, todo o momento linear está no robô A, que possui momento linear x $m_A v_{A1x} = (20\ \text{kg})(2{,}0\ \text{m/s}) = 40\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$ e momento linear y igual a zero. Após a colisão, o robô A possui momento linear x $m_A v_{A2x} = (20\ \text{kg})(1{,}0\ \text{m/s})(\cos 30°) = 17\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$, enquanto o robô B possui momento linear x dado por $m_B v_{B2x} = (12\ \text{kg})(1{,}89\ \text{m/s}) = 23\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$; o momento linear x total é 40 kg · m/s, a mesma de antes da colisão (como era previsível). Na direção y, o robô A adquire momento linear y $m_A v_{A2y} = (20\ \text{kg})(1{,}0\ \text{m/s})(\text{sen}\ 30°) = 10\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$, enquanto

o robô B adquire momento linear y de mesmo módulo, porém sentido contrário: $m_B v_{B2y} = (12\text{ kg})(-0{,}83\text{ m/s}) = -10\text{ kg} \cdot \text{m/s}$. Logo, o componente y do momento linear *total* após a colisão possui o mesmo valor (zero) de antes da colisão.

Teste sua compreensão da Seção 8.2 Um brinquedo contendo uma mola comprimida no seu interior repousa sobre uma superfície horizontal sem atrito. Quando a mola se estende, o brinquedo se quebra em três partes de igual massa, A, B e C, que deslizam ao longo da superfície. A parte A se move no sentido negativo de x, enquanto a parte B se move no sentido negativo de y. (a) Quais são os sinais dos componentes da velocidade da parte C? (b) Qual das três partes se move com maior velocidade? ■

8.3 Conservação do momento linear e colisões

Para a maioria das pessoas, o termo *colisão* está provavelmente associado a algum desastre envolvendo automóveis. Usaremos o termo também com esse sentido, porém estenderemos seu significado de modo que inclua qualquer vigorosa interação entre dois corpos com uma duração relativamente curta. Portanto, não incluímos apenas acidentes envolvendo automóveis, mas também as bolas que colidem em uma mesa de bilhar, os nêutrons que se chocam com núcleos atômicos em um reator nuclear, o impacto de um meteoro na superfície terrestre e a chegada de uma nave espacial nas proximidades da superfície de Saturno.

Quando as forças entre os corpos forem muito maiores do que as forças externas, como em geral ocorre na maior parte das colisões, podemos desprezar completamente as forças externas e considerar os corpos como um sistema *isolado*. Então existe conservação do momento linear na colisão, e o momento linear total do sistema é o mesmo antes e depois da colisão. Um bom exemplo é dado por dois carros colidindo em um cruzamento com gelo na pista. Mesmo o caso de dois carros colidindo em uma pista seca pode ser tratado como um sistema isolado quando, durante a colisão, as forças entre os corpos forem muito maiores do que as forças de atrito entre os pneus e o pavimento.

Colisões elásticas e inelásticas

Quando as forças entre os corpos também forem *conservativas*, de modo que nenhuma energia mecânica é adquirida ou perdida durante a colisão, a energia *cinética* total do sistema é a mesma antes e depois da colisão. Esse tipo de colisão denomina-se **colisão elástica**. Uma colisão entre duas bolas de gude ou entre duas bolas de bilhar é quase completamente elástica. A Figura 8.14 indica um modelo para uma colisão elástica. Quando os cavaleiros colidem, as molas ficam momentaneamente comprimidas, e parte da energia cinética inicial é momentaneamente convertida em energia potencial elástica. A seguir a mola se expande, os corpos se separam e esta energia potencial é reconvertida em energia cinética.

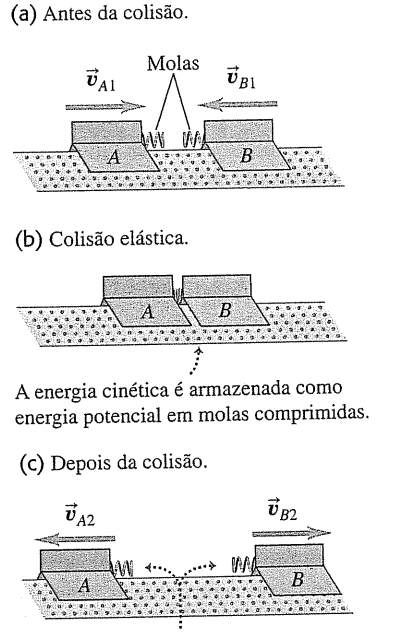


Figura 8.14 Dois cavaleiros sofrem uma colisão elástica sobre uma superfície sem atrito. Nas extremidades de cada cavaleiro existem molas de aço que servem como pára-choques para garantir que a colisão seja elástica.

Uma colisão na qual a energia cinética total do sistema depois da colisão é *menor* do que antes da colisão denomina-se **colisão inelástica**. Uma bala se encravando em um bloco de madeira e uma almôndega caindo em um prato de espaguete são exemplos de colisão inelástica. Geralmente chamamos de **colisão completamente inelástica** a que ocorre quando os corpos permanecem unidos e se movem como um único corpo depois da colisão. Um exemplo desse tipo de colisão é indicado na Figura 8.15, na qual as molas das extremidades de cada cavaleiro que servem como pára-choques na Figura 8.14 são substituídas por Velcro® para garantir que os cavaleiros fiquem unidos depois da colisão.

ATENÇÃO Uma colisão inelástica não tem que ser completamente inelástica É um erro comum pensar que uma colisão inelástica ocorre *somente* quando os corpos permanecem colados. Na realidade, existem muitos casos de colisão inelástica nas quais os corpos *não* ficam unidos. Quando dois carros se chocam em um 'engavetamento', o trabalho realizado para deformar o pára-choque não pode ser recuperado como energia cinética do carro, portanto a colisão é inelástica (Figura 8.16).

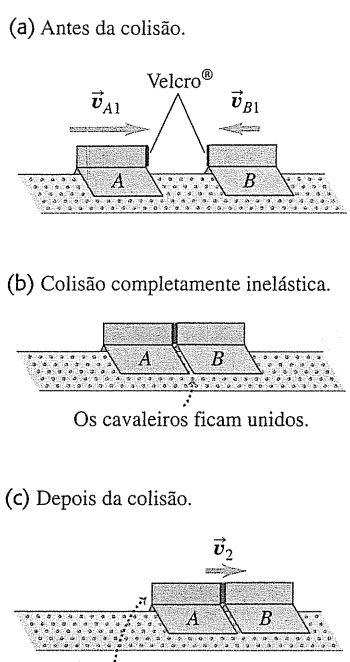


Figura 8.15 Dois cavaleiros sofrem uma colisão completamente inelástica. As molas das extremidades de cada cavaleiro são substituídas por Velcro® para garantir que os cavaleiros fiquem unidos depois da colisão.

Lembre-se da seguinte regra: **em toda colisão na qual as forças externas sejam desprezíveis, o momento linear se conserva e o momento linear total é sempre o mesmo antes e depois da colisão; *somente* no caso da colisão elástica a energia cinética antes da colisão é igual à energia cinética depois da colisão.**

Colisões completamente inelásticas

Vamos examinar o que ocorre com a energia cinética e com o momento linear em uma colisão *completamente* inelástica entre dois corpos (A e B), como indicado na Figura 8.15. Como os dois corpos ficam colados depois da colisão, eles devem possuir a mesma velocidade final $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_{A2} = \vec{v}_{B2} = \vec{v}_2$$

A lei da conservação do momento linear fornece a relação

$$m_A\vec{v}_{A1} + m_B\vec{v}_{B1} = (m_A + m_B)\vec{v}_2 \qquad (8.16)$$

(colisão completamente inelástica)

Conhecendo-se as massas e as velocidades iniciais, podemos calcular a velocidade final comum $\vec{v}_2$.

Suponha, por exemplo, que um corpo com massa m_A e componente x da velocidade v_{A1x} colida inelasticamente com outro corpo com massa m_B que está inicialmente em repouso ($v_{B1x} = 0$). Pela Equação (8.16), o componente x da velocidade v_{2x} dos dois corpos depois da colisão é dado por

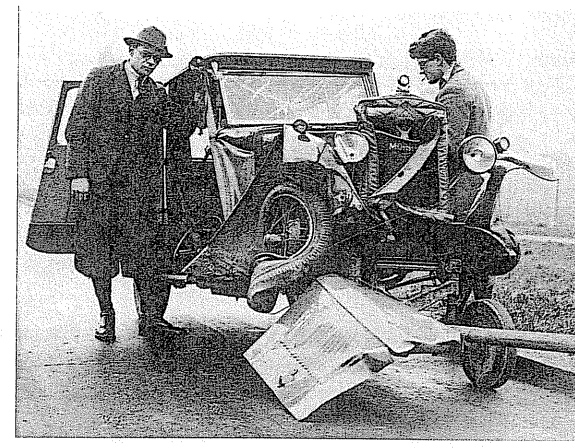


Figura 8.16 Um automóvel é projetado para colisões inelásticas, de tal modo que sua estrutura absorve a maior parte possível da energia da colisão. A energia absorvida não pode ser recuperada, uma vez que ela é usada para produzir uma deformação permanente no carro.

$$v_{2x} = \frac{m_A}{m_A + m_B}v_{A1x} \qquad (8.17)$$

(colisão completamente inelástica, B inicialmente em repouso)

Vamos verificar que a energia cinética total depois dessa colisão completamente inelástica é menor do que antes da colisão. O movimento ocorre somente ao longo do eixo x, portanto as energias cinéticas K_1 e K_2 antes e depois da colisão, respectivamente, são dadas por

$$K_1 = \tfrac{1}{2}m_A{v_{A1x}}^2$$

$$K_2 = \tfrac{1}{2}(m_A + m_B){v_{2x}}^2 = \tfrac{1}{2}(m_A + m_B)\left(\frac{m_A}{m_A + m_B}\right)^2{v_{A1x}}^2$$

A razão entre a energia cinética final e a energia cinética inicial é dada por

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_A}{m_A + m_B} \qquad (8.18)$$

(colisão completamente inelástica, B inicialmente em repouso)

O membro direito dessa equação é sempre menor do que um porque o denominador é sempre maior do que o numerador. Mesmo quando m_B não está inicialmente em repouso, não é difícil mostrar que a energia cinética total depois de uma colisão completamente inelástica é sempre menor do que a energia cinética total antes da colisão.

Importante: não recomendamos que você memorize a Equação (8.17) ou a Equação (8.18). Elas foram deduzidas apenas para mostrar que a energia cinética total é sempre perdida em uma colisão completamente inelástica.

Exemplo 8.7

UMA COLISÃO COMPLETAMENTE INELÁSTICA Suponha que na colisão descrita no Exemplo 8.5 (Seção 8.2) os dois cavaleiros não sejam rebatidos, mas permaneçam colados após a colisão.

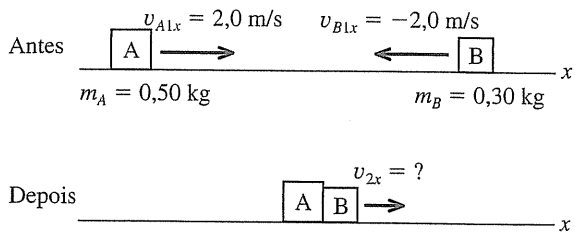


Figura 8.17 Nosso desenho para este problema.

As massas e as velocidades iniciais são as mesmas do Exemplo 8.5. Calcule a velocidade final v_{2x}, comum dos dois corpos depois da colisão, e compare a energia cinética inicial com a energia cinética final.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: não há forças externas na direção x, portanto o componente x do momento linear é conservado.

PREPARAR: a Figura 8.17 mostra o nosso desenho. Como no Exemplo 8.5, consideramos o eixo x positivo apontado da esquerda para a direita. As incógnitas são a velocidade final v_{2x} e as energias cinéticas inicial e final do sistema.

EXECUTAR: usando a lei da conservação do momento linear para o componente x,

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = (m_A + m_B) v_{2x}$$

$$v_{2x} = \frac{m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x}}{m_A + m_B}$$

$$= \frac{(0{,}50\text{ kg})(2{,}0\text{ m/s}) + (0{,}30\text{ kg})(-2{,}0\text{ m/s})}{0{,}50\text{ kg} + 0{,}30\text{ kg}}$$

$$= 0{,}50\text{ m/s}$$

Como v_{2x} é positivo, os cavaleiros se deslocam juntos da esquerda para a direita (sentido positivo do eixo $+Ox$) depois da colisão. Antes da colisão, as energias cinéticas dos cavaleiros A e B são

$$K_A = \tfrac{1}{2} m_A v_{A1x}^2 = \tfrac{1}{2}(0{,}50\text{ kg})(2{,}0\text{ m/s})^2 = 1{,}0\text{ J}$$

$$K_B = \tfrac{1}{2} m_B v_{B1x}^2 = \tfrac{1}{2}(0{,}30\text{ kg})(-2{,}0\text{ m/s})^2 = 0{,}60\text{ J}$$

(Note que a energia cinética do cavaleiro B é positiva, embora os componentes x da velocidade v_{B1x} e do momento linear $m_B v_{B1x}$ sejam negativos.) A energia cinética *total* antes da colisão é igual a 1,6 J. A energia cinética depois da colisão é

$$\tfrac{1}{2}(m_A + m_B) v_{2x}^2 = \tfrac{1}{2}(0{,}50\text{ kg} + 0{,}30\text{ kg})(0{,}50\text{ m/s})^2 = 0{,}10\text{ J}$$

AVALIAR: a energia cinética final é apenas $\frac{1}{16}$ do valor inicial; $\frac{15}{16}$ é a fração convertida de energia mecânica em outras formas de energia. Se existisse uma bola de goma de mascar entre os cavaleiros, ela se amassaria e se aqueceria. Caso existisse uma mola, ela se comprimiria até os cavaleiros se encaixarem, então a energia seria convertida em energia potencial elástica. Em ambos os casos, embora a energia *cinética* não seja conservada, existe conservação da energia *total* do sistema. Contudo, em um sistema isolado, o momento linear é *sempre* conservado, tanto na colisão elástica quanto na colisão inelástica.

Exemplo 8.8

O PÊNDULO BALÍSTICO A Figura 8.18 mostra um pêndulo balístico, um sistema para medir a velocidade de uma bala. A bala, com massa m_B, é disparada contra um bloco de madeira com massa m_M, suspenso como um pêndulo, e produz uma colisão completamente inelástica com o pêndulo. Depois do impacto com a bala, o bloco oscila atingindo uma altura máxima y. Conhecendo-se os valores de m_B, m_M e y, qual é a velocidade inicial v_1 da bala?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: vamos analisar o evento em duas etapas. (1) a penetração da bala que fica retida na madeira e (2) a subseqüente oscilação do bloco suspenso pelos fios.

Durante a primeira etapa, a bala penetra tão rapidamente na madeira que o bloco não possui tempo suficiente para se afastar apreciavelmente da posição vertical. Logo, durante o impacto, os fios de suporte permanecem aproximadamente na posição vertical, a força externa horizontal atuando sobre o sistema é desprezível e o *componente horizontal do momento linear* se conserva. A energia mecânica *não* é conservada nessa etapa porque uma força não conservativa realiza trabalho (a força de atrito entre a bala e a madeira).

Durante a segunda etapa, após a colisão, o bloco e a bala se movem formando um só corpo. As únicas forças são a gravidade (uma força conservativa) e a tensão nos fios (que não realizam nenhum trabalho). Logo, quando o corpo começa a subir para a direita, existe conservação da energia mecânica. O momento linear nessa etapa *não* é conservado porque existe uma força externa resultante atuando sobre o sistema (as forças da gravidade e a tensão nos fios não se anulam quando os fios se inclinam).

PREPARAR: na Figura 8.18, considere o eixo positivo de x apontando da esquerda para a direita e o eixo positivo de y apontando de baixo para cima. A incógnita é v_1. Outra grandeza desconhecida é a velocidade escalar v_2 do bloco e da bala formando

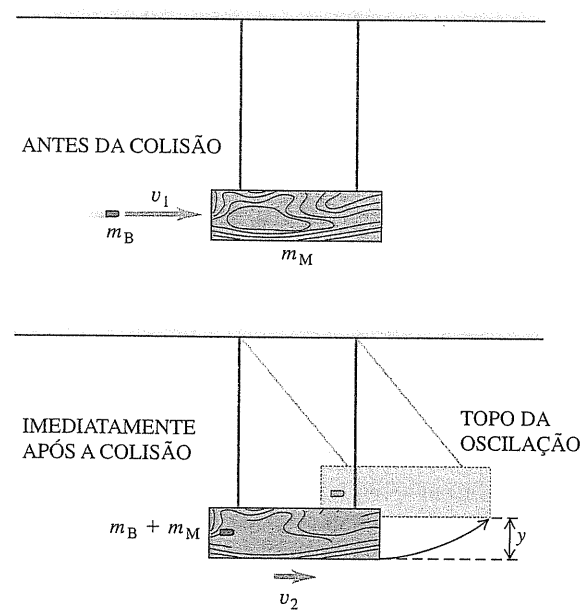


Figura 8.18 Um pêndulo balístico.

uma unidade imediatamente após a colisão (ou seja, exatamente no final da primeira etapa). Usaremos a conservação do momento linear na primeira etapa para relacionar v_1 a v_2 e usaremos a conservação da energia na segunda etapa para relacionar v_2 à altura máxima (dada) y.

EXECUTAR: na primeira etapa, as velocidades estão todas no sentido positivo de x. A lei da conservação do momento linear fornece

$$m_B v_1 = (m_B + m_M)v_2 \qquad v_1 = \frac{m_B + m_M}{m_B} v_2$$

No início da segunda etapa, a unidade formada pelo bloco com a bala possui energia cinética $K = \frac{1}{2}(m_B + m_M)v_2^2$. [Como na Equação (8.18), esse resultado é menor do que a energia cinética antes da colisão; logo, a colisão é inelástica!] A unidade bloco-bala oscila para cima e atinge o repouso momentaneamente a uma altura y, onde a energia cinética é igual a zero e a energia potencial é $(m_B + m_M)gy$; a seguir ela oscila descendo. A lei da conservação da energia fornece

$$\tfrac{1}{2}(m_B + m_M)v_2^2 = (m_B + m_M)gy \qquad v_2 = \sqrt{2gy}$$

Substituindo esse resultado na equação do momento linear, obtemos o valor da incógnita v_1:

$$v_1 = \frac{m_B + m_M}{m_B}\sqrt{2gy}$$

Portanto, medindo-se os valores de m_B, m_M e y, podemos calcular a velocidade inicial da bala.

AVALIAR: vamos conferir nossas respostas inserindo números reais. Se $m_B = 5{,}0\text{ g} = 0{,}00500\text{ kg}$, $m_M = 2{,}0\text{ kg}$, e $y = 3{,}0\text{ cm} = 0{,}0300\text{ m}$, a velocidade escalar inicial da bala é

$$v_1 = \frac{0{,}00500\text{ kg} + 2{,}0\text{ kg}}{0{,}00500\text{ kg}}\sqrt{2(9{,}80\text{ m/s}^2)(0{,}0300\text{ m})}$$

$$= 307\text{ m/s}$$

A velocidade v_2 do bloco logo após a colisão é

$$v_2 = \sqrt{2gy} = \sqrt{2(9{,}80\text{ m/s}^2)(0{,}0300\text{ m})}$$
$$= 0{,}767\text{ m/s}$$

A energia cinética da bala imediatamente antes da colisão é igual a $\frac{1}{2}(0{,}00500\text{ kg})(307\text{ m/s})^2 = 236\text{ J}$. A energia cinética da bala imediatamente depois da colisão é igual a $\frac{1}{2}(2{,}005\text{ kg})(0{,}767\text{ m/s}^2) = 0{,}589\text{ J}$. Quase toda a energia cinética é dissipada pelo trabalho de penetração da bala na madeira e pelo aquecimento da unidade bloco-bala.

Exemplo 8.9

ANÁLISE DA COLISÃO DE UM AUTOMÓVEL Um carro compacto com massa de 1000 kg está se deslocando do sul para o norte em linha reta a uma velocidade de 15 m/s quando colide contra um caminhão de massa 2000 kg que se desloca de oeste para leste a 10 m/s. Felizmente, todos os ocupantes usavam cintos de segurança e ninguém se feriu, porém os veículos se engavetaram e passaram a se deslocar, após a colisão, como um único corpo. A seguradora pediu para você calcular a velocidade dos carros unidos após a colisão. Qual é a sua resposta?

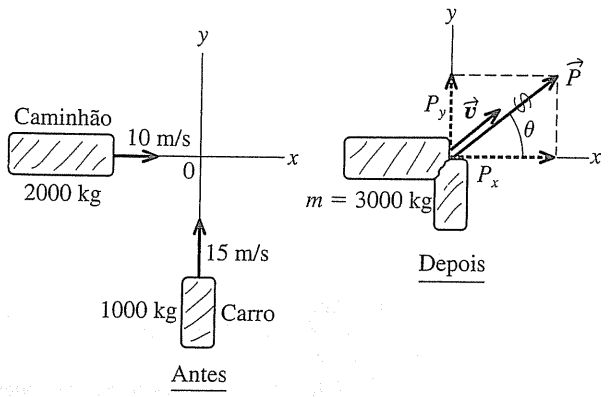


Figura 8.19 Esquematização do problema.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: vamos considerar os veículos como um sistema isolado durante a colisão. Isso é possível porque as forças horizontais que os veículos exercem mutuamente durante a colisão possuem grandezas elevadas o suficiente para retorcer o metal das carroçarias. Em comparação com essas forças, podemos desprezar quaisquer forças externas, tal como o atrito. (Vamos justificar essa afirmação posteriormente.) Logo, o momento linear do sistema dos dois veículos possui o mesmo valor imediatamente antes e imediatamente após a colisão.

PREPARAR: na Figura 8.19 desenhamos um sistema de coordenadas e podemos calcular o momento linear total antes da colisão, $\vec{P}$, usando a Equação (8.15). O momento linear possui o mesmo valor imediatamente antes da colisão; logo, ao acharmos $\vec{P}$, poderemos obter a velocidade $\vec{V}$ imediatamente após a colisão (nossa segunda variável) usando a relação $\vec{P} = M\vec{V}$, onde M é a massa combinada dos destroços. Usaremos os índices inferiores C e Cam para o carro e o caminhão, respectivamente.

EXECUTAR: pela Equação (8.15), achamos para os componentes do momento linear total $\vec{P}$ os seguintes valores

$$P_x = p_{Cx} + p_{Camx} = m_C v_{Cx} + m_{Cam} v_{Camx}$$
$$= (1000\text{ kg})(0) + (2000\text{ kg})(10\text{ m/s})$$
$$= 2{,}0 \times 10^4\text{ kg} \cdot \text{m/s}$$
$$P_y = p_{Cy} + p_{Camy} = m_C v_{Cy} + m_{Cam} v_{Camy}$$
$$= (1000\text{ kg})(15\text{ m/s}) + (2000\text{ kg})(0)$$
$$= 1{,}5 \times 10^4\text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

O módulo de $\vec{P}$ é

$$P = \sqrt{(2{,}0 \times 10^4\text{ kg} \cdot \text{m/s})^2 + (1{,}5 \times 10^4\text{ kg} \cdot \text{m/s})^2}$$
$$= 2{,}5 \times 10^4\text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

e sua direção e sentido são indicados na Figura 8.19, onde o ângulo θ é dado por

$$\text{tg}\,\theta = \frac{P_y}{P_x} = \frac{1{,}5 \times 10^4\text{ kg} \cdot \text{m/s}}{2{,}0 \times 10^4\text{ kg} \cdot \text{m/s}} = 0{,}75 \qquad \theta = 37°$$

O momento linear total imediatamente após a colisão é o mesmo que o momento linear total imediatamente antes da colisão. Supondo que nenhuma peça se desprenda, a massa total dos destroços é $M = m_C + m_{Cam} = 3000\text{ kg}$. De $\vec{P} = M\vec{V}$, deduzimos

que a direção e o sentido da velocidade $\vec{V}$ imediatamente após a colisão são os mesmos do momento linear, e seu módulo é dado por

$$V = \frac{P}{M} = \frac{2{,}5 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{3000 \text{ kg}} = 8{,}3 \text{ m/s}$$

AVALIAR: essa colisão é inelástica, logo é provável que a energia cinética total depois da colisão seja menor do que a energia cinética antes da colisão. Convidamos você a fazer os cálculos; você verificará que a energia cinética antes da colisão é igual a $2{,}1 \times 10^5$ J e que a energia cinética final é igual a $1{,}0 \times 10^5$ J. Cerca de metade da energia cinética inicial é convertida em outras formas de energia.

Ainda precisamos justificar a afirmação de que podemos desprezar as forças externas sobre os veículos durante a colisão. Para isso, note que a massa do caminhão é igual a 2000 kg, seu peso é aproximadamente igual a 20000 N e, supondo um coeficiente de atrito igual a 0,5, a força de atrito quando ele desliza no pavimento é cerca de 10000 N. Sua energia cinética imediatamente antes da colisão é $\frac{1}{2}(2000 \text{ kg})(10 \text{ m/s})^2 = 1{,}0 \times 10^5$ J. O carro engavetado percorre cerca de 0,2 m. Para realizar um trabalho de $-1{,}0 \times 10^5$ J e fazer o carro parar nessa distância seria necessário uma força de $5{,}0 \times 10^5$ N, que é 50 vezes maior do que a força de atrito. Portanto, em comparação com as forças internas que os veículos exercem mutuamente, é razoável desprezar as forças de atrito externas.

Classificação de colisões

É importante lembrar que podemos classificar as colisões em função da energia (Figura 8.20). Uma colisão na qual a energia cinética é conservada denomina-se *elástica*. (Exploraremos esse conceito em profundidade na próxima seção.) Uma colisão na qual a energia cinética total diminui denomina-se *inelástica*. Quando os dois corpos possuem uma velocidade final comum, diz-se que a colisão é *totalmente inelástica*. Também há casos em que a energia cinética final é *maior* do que o valor inicial. Por exemplo, o recuo de um rifle, discutido no Exemplo 8.4 (Seção 8.2).

Por fim, enfatizamos novamente que em alguns casos podemos usar a conservação do momento linear quando há forças externas atuando sobre o sistema, se a força resultante externa que atua sobre os corpos em colisão for pequena em comparação com as forças internas durante a colisão (como no Exemplo 8.9).

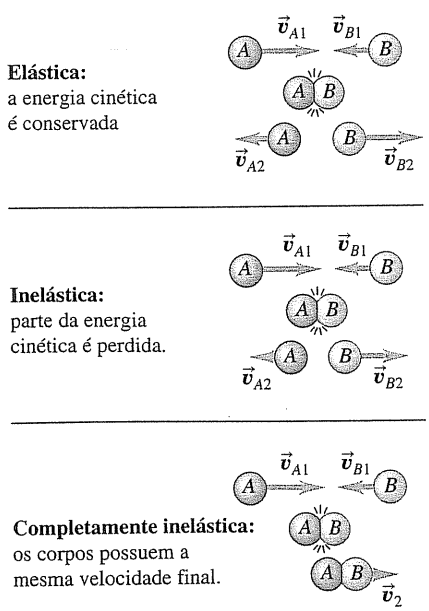


Figura 8.20 As colisões são classificadas em função da energia.

Teste sua compreensão da Seção 8.3 Para cada uma das seguintes situações, determine se a colisão é elástica ou inelástica. Caso seja inelástica, determine se é completamente inelástica. (a) Você larga uma bola. Ela colide com o piso e quica de volta ao alcance de sua mão. (b) Você larga outra bola, que colide com o solo e quica de volta até a metade da altura de onde foi largada. (c) Você larga uma bola de argila, que pára ao colidir com o solo. ∎

8.4 Colisões elásticas

Conforme foi discutido na Seção 8.3, uma *colisão elástica* em um sistema isolado é aquela na qual existe conservação da energia cinética (e do momento linear). Uma colisão elástica ocorre quando as forças que atuam entre os corpos que colidem são *conservativas*. Quando duas bolas de bilhar colidem, elas se deformam um pouco nas adjacências da superfície de contato, mas recuperam a forma inicial. Uma parte da energia cinética é momentaneamente armazenada sob forma de energia potencial elástica, mas logo a seguir a energia elástica é reconvertida em energia cinética (Figura 8.21).

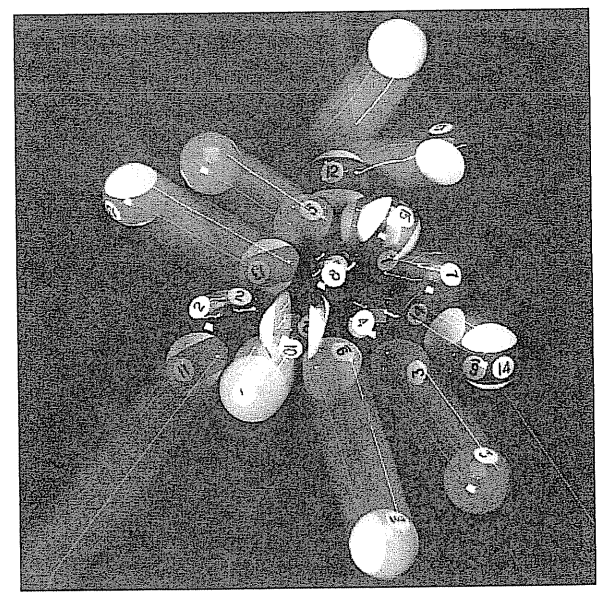


Figura 8.21 As bolas de bilhar se deformam muito pouco ao colidirem umas com as outras e rapidamente retornam à forma original. Portanto, a força de interação entre duas bolas de bilhar é quase perfeitamente conservativa, e a colisão é elástica.

Vamos examinar a colisão elástica entre dois corpos A e B. Começamos com uma colisão em uma dimensão, na qual todas as velocidades estão sobre a mesma linha reta; escolhemos o eixo Ox como essa linha reta. Cada momento linear e cada velocidade terá apenas um componente x. Os componentes das velocidades antes da colisão são designados por v_{A1x} e por v_{B1x} e depois da colisão os componentes são designados por v_{A2x} e por v_{B2x}. Como existe conservação da energia cinética, temos

$$\tfrac{1}{2}m_A v_{A1x}^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_{B1x}^2 = \tfrac{1}{2}m_A v_{A2x}^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_{B2x}^2$$

e a lei da conservação do momento linear fornece

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

Quando forem conhecidas as massas m_A e m_B e as velocidades iniciais v_{A1x} e v_{B1x}, o sistema constituído pelas duas equações anteriores poderá ser resolvido para se determinar as duas velocidades finais v_{A2x} e v_{B2x}.

Colisões elásticas com um corpo inicialmente em repouso

A solução geral para as equações acima demonstradas é um pouco complicada, de modo que vamos nos concentrar no caso particular no qual o corpo B está em repouso antes da colisão (logo, $v_{B1x} = 0$). Imagine-o como um alvo que deve ser atingido pelo corpo A. Então, pela conservação da energia cinética e aplicando-se a lei da conservação do momento linear, temos, respectivamente,

$$\tfrac{1}{2}m_A v_{A1x}^2 = \tfrac{1}{2}m_A v_{A2x}^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_{B2x}^2 \qquad (8.19)$$

$$m_A v_{A1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x} \qquad (8.20)$$

Podemos resolver o sistema anterior obtendo v_{A2x} e v_{B2x} em termos das massas e da velocidade inicial v_{A1x}. Isso envolve uma manipulação algébrica trabalhosa, porém necessária. Sem esforço, não existe recompensa! O método mais simples é indireto, mas ele revelará uma característica interessante das colisões elásticas.

Inicialmente, reescreva as equações (8.19) e (8.20) do seguinte modo:

$$m_B v_{B2x}^2 = m_A(v_{A1x}^2 - v_{A2x}^2) = m_A(v_{A1x} - v_{A2x})(v_{A1x} + v_{A2x}) \qquad (8.21)$$

$$m_B v_{B2x} = m_A(v_{A1x} - v_{A2x}) \qquad (8.22)$$

Agora, divida a Equação (8.21) pela Equação (8.22), para obter

$$v_{B2x} = v_{A1x} + v_{A2x} \qquad (8.23)$$

Substitua esse resultado na Equação (8.22) para eliminar v_{B2x} e, a seguir, explicitar v_{A2x}:

$$m_B(v_{A1x} + v_{A2x}) = m_A(v_{A1x} - v_{A2x})$$

$$v_{A2x} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_{A1x} \qquad (8.24)$$

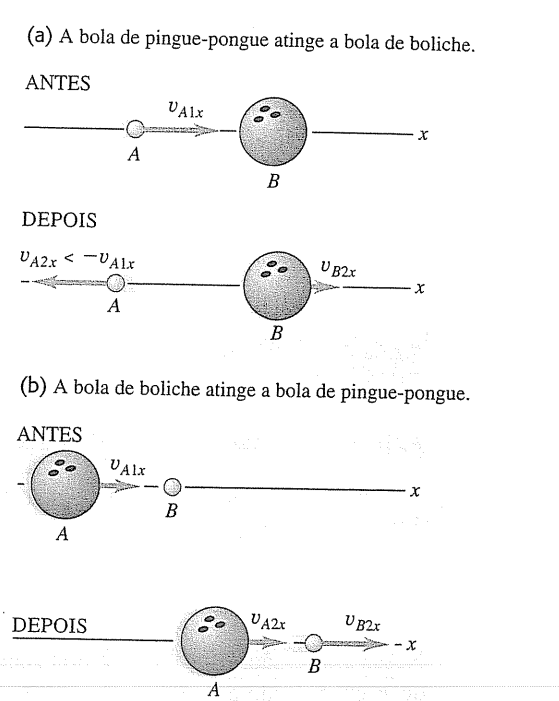


Figura 8.22 Colisões entre (a) uma bola de pingue-pongue em movimento e uma bola de boliche inicialmente em repouso e (b) uma bola de boliche em movimento e uma bola de pingue-pongue inicialmente em repouso.

Finalmente, substitua esse resultado na Equação (8.23) para obter

$$v_{B2x} = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_{A1x} \qquad (8.25)$$

Podemos agora interpretar os resultados. Suponha que o corpo A seja uma bola de pingue-pongue e que o corpo B seja uma bola de boliche. É previsível que a bola A seja rebatida para trás com uma velocidade cujo módulo é quase igual ao módulo da velocidade inicial, porém com sentido oposto (Figura 8.22a), e esperamos que a velocidade da bola B seja muito menor. As equações fazem uma previsão precisa desses resultados. Quando a massa m_A é muito menor do que a massa m_B, a fração indicada na Equação (8.24) é aproximadamente igual a (-1), de modo que v_{A2x} é aproximadamente igual a $-v_{A1x}$. A fração indicada na Equação (8.25) é muito menor do que a unidade, de modo que v_{B2x} é muito menor do que v_{A1x}. A Figura 8.22b mostra o caso oposto, no qual A é a bola de boliche e B é a bola de pingue-pongue e m_A é muito maior do que m_B. O que você espera que ocorra? Confira suas previsões comparando-as com as previsões baseadas nas equações (8.24) e (8.25).

Outro caso interessante ocorre quando as massas são iguais (Figura 8.23). Quando $m_A = m_B$, as equações (8.24) e (8.25) fornecem $v_{A2x} = 0$ e $v_{B2x} = v_{A1x}$. Ou seja, o corpo que se movia fica em repouso; ele fornece toda a sua energia cinética e todo o seu momento linear ao corpo que antes estava em repouso. Esse resultado é familiar a todos os jogadores de bilhar.

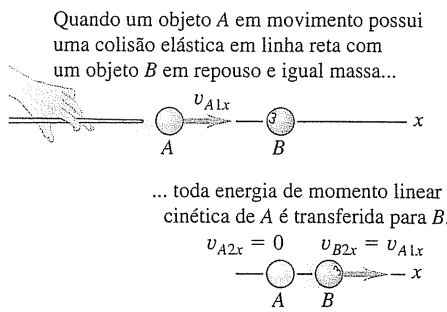


Figura 8.23 uma colisão elástica em linha reta entre dois corpos de mesma massa.

Colisões elásticas e velocidade relativa

Vamos retomar o caso mais generalizado em que A e B possuem massas diferentes. A Equação (8.23) pode ser reescrita do seguinte modo

$$v_{A1x} = v_{B2x} - v_{A2x} \tag{8.26}$$

Nessa expressão, $v_{B2x} - v_{A2x}$ é precisamente a velocidade de B em relação a A *depois* da colisão; de acordo com a Equação (8.26), esse resultado é igual a v_{A1x}, que é igual e *contrária* à velocidade de B em relação a A *antes* da colisão. (Discutimos o conceito de velocidade relativa na Seção 3.5.) A velocidade relativa antes da colisão é igual e contrária à velocidade relativa depois da colisão. O sinal muda porque antes da colisão os corpos se aproximam e depois da colisão os corpos se afastam. Se você descrever essa colisão em relação a outro sistema de coordenadas que se move com velocidade constante em relação ao primeiro, as velocidades dos corpos serão diferentes, mas as velocidades *relativas* não se alterarão. Portanto, nossa afirmação sobre as velocidades relativas é verdadeira para *qualquer* colisão elástica em linha reta entre dois corpos, mesmo quando nenhum corpo está em repouso inicialmente. *Em uma colisão elástica retilínea entre dois corpos, a velocidade relativa antes da colisão é igual e contrária à velocidade relativa depois da colisão.* Isso significa que, se B está em movimento antes da colisão, a Equação (8.26) torna-se

$$v_{B2x} - v_{A2x} = -(v_{B1x} - v_{A1x}) \tag{8.27}$$

Verifica-se que uma relação *vetorial* semelhante à Equação (8.27) é uma propriedade geral de *todas* as colisões elásticas, mesmo quando nenhum corpo está em repouso inicialmente e quando as velocidades não estão contidas na mesma linha reta. Esse resultado permite fazer uma definição equivalente alternativa para uma colisão elástica: *em uma colisão elástica o módulo da velocidade relativa entre os dois corpos antes da colisão é igual ao módulo da velocidade relativa depois da colisão.* Quando essa condição é satisfeita, a energia cinética total também é conservada.

Quando a colisão elástica entre dois corpos não é frontal, as velocidades não estão contidas na mesma linha reta. Quando todas as velocidades estão contidas em um plano, existem dois componentes para cada velocidade e um total de quatro incógnitas. A lei da conservação do momento linear para componentes x e y e a conservação da energia fornecem apenas três equações. Para determinar as velocidades finais univocamente, precisamos de uma informação adicional, como a direção ou o módulo de uma das velocidades finais.

Exemplo 8.10

UMA COLISÃO ELÁSTICA EM LINHA RETA Repetimos a experiência do trilho de ar do Exemplo 8.5 (Seção 8.2), porém agora adicionamos pára-choques de molas ideais nas extremidades dos cavaleiros para que as colisões sejam elásticas. Quais são as velocidades de A e de B depois da colisão?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como no Exemplo 8.5, a força resultante externa atuando sobre o sistema composto pelos dois cavaleiros é igual a zero, e o momento linear do sistema é conservado.

PREPARAR: como indica o esquema mostrado na Figura 8.24, escolhemos novamente o eixo positivo de x apontando da esquerda para a direita. Resolveremos as incógnitas, v_{A2x} e v_{B2x}, usando a Equação (8.27) e a equação da conservação do momento linear.

EXECUTAR: de acordo com a lei da conservação do momento linear, temos

$$\begin{aligned} m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} &= m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x} \\ (0{,}50\ \text{kg})(2{,}0\ \text{m/s}) + (0{,}30\ \text{kg})(-2{,}0\ \text{m/s}) &= (0{,}50\ \text{kg})v_{A2x} + (0{,}30\ \text{kg})v_{B2x} \\ 0{,}50 v_{A2x} + 0{,}30 v_{B2x} &= 0{,}40\ \text{m/s} \end{aligned}$$

(Na última equação dividimos por 'kg' para eliminar essa unidade.) Usando a Equação (8.27), que relaciona as velocidades relativas em uma colisão elástica, obtemos

$$\begin{aligned} v_{B2x} - v_{A2x} &= -(v_{B1x} - v_{A1x}) \\ &= -(-2{,}0\ \text{m/s} - 2{,}0\ \text{m/s}) = 4{,}0\ \text{m/s} \end{aligned}$$

Antes da colisão elástica, a velocidade de B em relação a A é igual a 4,0 m/s orientada para a esquerda; depois da colisão, a velocidade de B em relação a A é igual a 4,0 m/s orientada para a direita. Resolvendo essas duas equações simultâneas, obtemos

$$v_{A2x} = -1{,}0\ \text{m/s} \qquad v_{B2x} = 3{,}0\ \text{m/s}$$

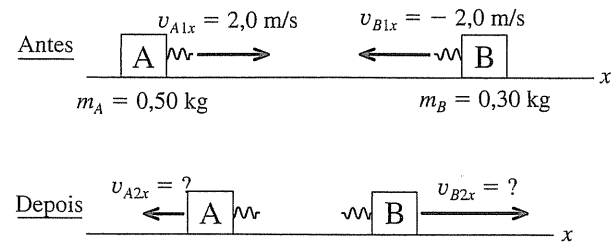


Figura 8.24 Esquematização do problema.

AVALIAR: os dois corpos invertem o sentido das suas velocidades; A move-se para a esquerda a 1,0 m/s e B move-se para a direita a 3,0 m/s. Esse resultado é diferente do obtido no Exemplo 8.5 porque aquela colisão *não* era elástica.

Note que, diferentemente das situações mostradas na Figura 8.22, *ambos* os cavaleiros estão se deslocando um de encontro ao outro antes da colisão. Os resultados indicam que A (o cavaleiro com massa maior) se move mais lentamente após a colisão do que antes e, portanto, perde energia cinética. Por outro lado, B (o cavaleiro com massa menor) ganha energia cinética: ele se move mais rapidamente após a colisão do que antes. A energia cinética *total* depois da colisão elástica é

$$\tfrac{1}{2}(0{,}50\text{ kg})(-1{,}0\text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(0{,}30\text{ kg})(3{,}0\text{ m/s})^2 = 1{,}6\text{ J}$$

Conforme esperado, esse resultado é igual ao valor da energia cinética total *antes* da colisão (que foi calculado no Exemplo 8.7, Seção 8.3). Logo, a energia cinética é transferida de A para B na colisão, sem que nada dela seja perdida no processo. Algo muito parecido ocorre quando um jogador de beisebol balança o bastão e atinge a bola que lhe é lançada. A colisão é quase elástica, e o bastão que possui massa maior transfere energia cinética para a bola de massa menor. A bola deixa o bastão com uma velocidade escalar muito maior — talvez o suficiente para marcar um ponto no jogo.

ATENÇÃO Tome cuidado com as equações de colisão elástica Você pode ficar tentado a solucionar esse problema usando a Equação (8.24) e a Equação (8.25). Essas equações se aplicam *somente* a situações em que o corpo B está inicialmente em repouso, o que não é o caso aqui. Quando em dúvida, sempre solucione o problema usando equações que são aplicáveis a uma ampla variedade de casos.

Exemplo 8.11

MODERADOR EM UM REATOR NUCLEAR Nêutrons com velocidades elevadas são produzidos em um reator nuclear durante os processos de fissão nuclear. Para impedir que os nêutrons desencadeiem novos processos de fissão, eles devem ser freados por colisões com núcleos em um *moderador* do reator. Tanto o primeiro reator nuclear (construído em 1942 na Universidade de Chicago) quanto o reator que em 1986 produziu o acidente de Chernobyl usavam o carbono (grafite) como moderador da reação. Suponha que um nêutron (massa igual a 1,0 u) deslocando-se a $2{,}6 \times 10^7$ m/s colide frontalmente com um núcleo de carbono (massa igual a 12 u) que estava inicialmente em repouso. As forças externas que atuam durante a colisão são desprezíveis. Quais são as velocidades após a colisão? (1 u é uma *unidade de massa atômica* equivalente a $1{,}66 \times 10^{-27}$ kg.)

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: sabemos que as forças externas podem ser desprezadas (portanto o momento linear é conservado na colisão) e que a colisão é elástica (portanto a energia cinética também é conservada).

PREPARAR: como indica o esquema na Figura 8.25, consideramos que o eixo x está apontado no sentido em que o nêutron se move inicialmente. Como a colisão é frontal, tanto o nêutron quanto o núcleo de carbono se movem ao longo desse mesmo eixo após a colisão. Além disso, como o corpo estava inicialmente em repouso, podemos usar as equações (8.24) e (8.25) com A substituído por n (para o nêutron) e B substituído por C (para o núcleo de carbono). Temos $m_n = 1{,}0$ u, $m_C = 12$ u e $v_{n1x} = 2{,}6 \times 10^7$ m/s, e precisamos resolver as incógnitas v_{n2x} e v_{C2x} (as velocidades finais do nêutron e do núcleo de carbono, respectivamente).

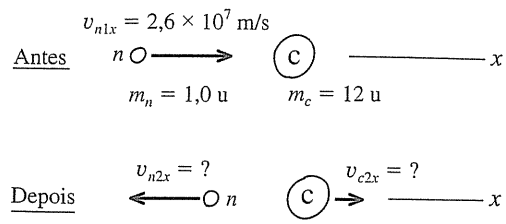


Figura 8.25 Esquematização do problema.

EXECUTAR: deixamos para você a tarefa de fazer os cálculos; os resultados são dados por

$$v_{n2x} = -2{,}2 \times 10^7\text{ m/s} \qquad v_{C2x} = 0{,}4 \times 10^7\text{ m/s}$$

AVALIAR: o nêutron termina com $\frac{11}{13}$ da sua velocidade escalar inicial, e o núcleo de carbono recua com uma velocidade de $\frac{2}{13}$ da velocidade inicial do nêutron. [Essas razões são os fatores $(m_n - m_C)/(m_n + m_C)$ e $2m_n/(m_n + m_C)$ que aparecem nas equações (8.24) e (8.25), com os índices inferiores revisados para esse problema.] Como a energia cinética é proporcional ao quadrado da velocidade, a energia cinética final do nêutron é $(\frac{11}{13})^2$ ou cerca de 0,72 do seu valor inicial. Supondo que ele realize uma segunda colisão igual a essa, sua energia cinética torna-se $(0{,}72)^2$ ou cerca de metade do seu valor inicial e assim por diante. Depois de várias colisões, o nêutron se deslocará lentamente e será capaz de ativar a reação de fissão em um núcleo de urânio.

Exemplo 8.12

UMA COLISÃO ELÁSTICA EM DUAS DIMENSÕES A situação descrita na Figura 8.26 é uma colisão elástica entre dois discos de hóquei sobre uma mesa de ar sem atrito. O disco A possui massa $m_A = 0{,}500$ kg e o disco B possui massa $m_B = 0{,}300$ kg. O disco A possui velocidade inicial de 4,0 m/s no sentido positivo do eixo Ox e uma velocidade final de 2,0 m/s cuja direção é desconhecida. O disco B está inicialmente em repouso. Calcule a velocidade final v_{B2} e os ângulos α e β indicados na figura.

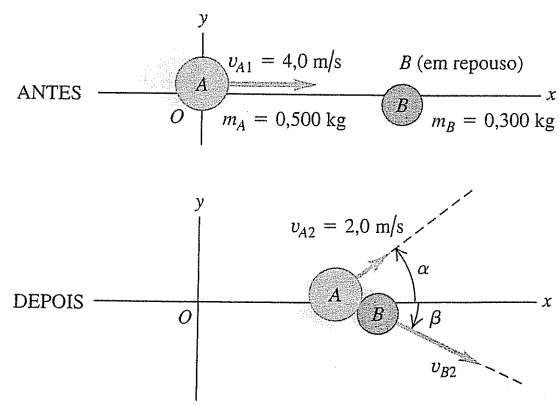


Figura 8.26 Uma colisão elástica que não é frontal.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: embora a colisão seja elástica, ela *não* é unidimensional, por isso não podemos usar nenhuma das fórmulas para uma dimensão deduzidas nesta seção. Em vez disso, usaremos as equações para a conservação da energia, a conservação do momento linear x e a conservação do momento linear y.

PREPARAR: as incógnitas são dadas no enunciado do problema. Temos três equações, que devem ser suficientes para solucionar as três incógnitas.

EXECUTAR: como a colisão é elástica, a energia cinética inicial é igual à energia cinética final:

$$\tfrac{1}{2}m_A v_{A1}^2 = \tfrac{1}{2}m_A v_{A2}^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_{B2}^2$$

$$v_{B2}^2 = \frac{m_A v_{A1}^2 - m_A v_{A2}^2}{m_B}$$

$$= \frac{(0{,}500\ \text{kg})(4{,}0\ \text{m/s})^2 - (0{,}500\ \text{kg})(2{,}0\ \text{m/s})^2}{0{,}300\ \text{kg}}$$

$$v_{B2} = 4{,}47\ \text{m/s}$$

A lei da conservação do momento linear total fornece para o componente x

$$m_A v_{A1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

$$(0{,}500\ \text{kg})(4{,}0\ \text{m/s}) = (0{,}500\ \text{kg})(2{,}0\ \text{m/s})(\cos\alpha) + (0{,}300\ \text{kg})(4{,}47\ \text{m/s})(\cos\beta)$$

e a lei da conservação do momento linear fornece para o componente y

$$0 = m_A v_{A2y} + m_B v_{B2y}$$

$$0 = (0{,}500\ \text{kg})(2{,}0\ \text{m/s})(\operatorname{sen}\alpha) - (0{,}300\ \text{kg})(4{,}47\ \text{m/s})(\operatorname{sen}\beta)$$

Trata-se de um sistema com duas equações para as incógnitas α e β. A solução mais simples consiste em eliminar β do seguinte modo: explicitamos cos β na primeira equação e explicitamos sen β na segunda equação; a seguir, elevamos ao quadrado cada uma dessas equações e somamos membro a membro os resultados. Como $\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$, eliminamos β, restando uma equação para a qual podemos obter o valor de cos α e por conseguinte obtemos α. A seguir, substituímos esse valor em qualquer uma das duas equações e determinamos o valor de β. Deixamos os detalhes dos cálculos para você fazer no Exercício 8.44; os resultados são

$$\alpha = 36{,}9° \qquad \beta = 26{,}6°$$

AVALIAR: uma forma rápida de conferir as respostas é se certificar de que o momento linear y, que era igual a zero antes da colisão, permanece nulo após a colisão. Os momentos lineares y dos discos são

$$p_{A2y} = (0{,}500\ \text{kg})(2{,}0\ \text{m/s})(\operatorname{sen}\,36{,}9°) = +0{,}600\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

$$p_{B2y} = -(0{,}300\ \text{kg})(4{,}47\ \text{m/s})(\operatorname{sen}\,26{,}6°) = -0{,}600\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

A soma desses valores é igual a zero, como era previsível.

Teste sua compreensão da Seção 8.4 A maioria dos reatores nucleares atuais usa água como moderador (veja Exemplo 8.11). As moléculas de água (massa $m_A = 18{,}0$ u) constituem um moderador melhor ou pior do que os átomos de carbono? (Uma vantagem da água é que ela também age como um líquido de resfriamento para o núcleo radioativo do reator.) ■

8.5 Centro de massa

Podemos reformular a lei da conservação do momento linear de um modo útil em termos do conceito de **centro de massa**. Considere diversas partículas cujas massas são m_1, m_2 e assim por diante. Suponha que as coordenadas de m_1 sejam (x_1, y_1), as de m_2 sejam (x_2, y_2) e assim por diante. Definimos o centro de massa do sistema como o ponto cujas coordenadas (x_{cm}, y_{cm}) são dadas por

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \qquad (8.28)$$

(centro de massa)

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$$

O vetor posição do centro de massa $\vec{r}_{cm}$ pode ser escrito em termos do vetor posição de cada partícula $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ... mediante a expressão

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \qquad (8.29)$$

(centro de massa)

Em linguagem estatística, dizemos que o centro de massa é a posição correspondente a uma *média ponderada das massas* das partículas.

Exemplo 8.13

CENTRO DE MASSA DA MOLÉCULA DE ÁGUA A Figura 8.27 mostra a estrutura simplificada de uma molécula de água. A distância entre os átomos é dada por $d = 9{,}57 \times 10^{-11}$ m. Cada átomo de hidrogênio possui massa igual a 1,0 u, e o átomo de oxigênio possui massa igual a 16,0 u. Calcule a posição do centro de massa

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: quase toda a massa do átomo está concentrada em seu núcleo, cujo raio é cerca de 10^{-5} menor do que o raio do átomo. Portanto, podemos seguramente representar cada átomo como um ponto de partícula.

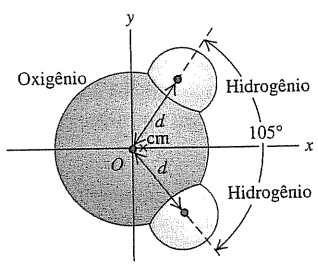


Figura 8.27 Onde está o centro de massa de uma molécula de água?

PREPARAR: a Figura 8.27 indica o sistema de coordenadas. Usaremos a Equação (8.28) para determinar as coordenadas x_{cm} e y_{cm}.

EXECUTAR: a coordenada x de cada átomo de hidrogênio é dada por d cos (105°/2); a coordenada y do átomo de hidrogênio superior é $+d$ sen (105°/2) e a do átomo de hidrogênio inferior é $-d$ sen (105°/2). As coordenadas do átomo de oxigênio são $x = 0$ e $y = 0$. Usando as Equações (8.28), obtemos para a coordenada x do centro de massa

$$x_{cm} = \frac{\left[\begin{array}{l}(1{,}0\text{ u})(d\cos 52{,}5°) + (1{,}0\text{ u}) \\ \times (d\cos 52{,}5°) + (16{,}0\text{ u})(0)\end{array}\right]}{1{,}0\text{ u} + 1{,}0\text{ u} + 16{,}0\text{ u}} = 0{,}068d$$

e para a coordenada y do centro de massa achamos

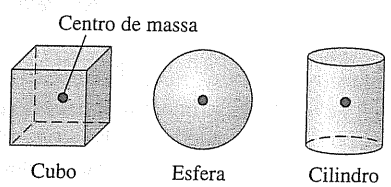
$$y_{cm} = \frac{\left[\begin{array}{l}(1{,}0\text{ u})(d\text{ sen }52{,}5°) + (1{,}0\text{ u}) \\ \times (-d\text{ sen }52{,}5°) + (16{,}0\text{ u})(0)\end{array}\right]}{1{,}0\text{ u} + 1{,}0\text{ u} + 16{,}0\text{ u}} = 0$$

Substituindo o valor $d = 9{,}57 \times 10^{-11}$ m, encontramos

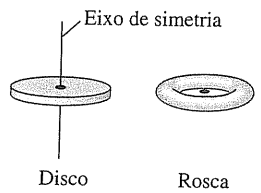
$$x_{cm} = (0{,}068)(9{,}57 \times 10^{-11}\text{ m}) = 6{,}5 \times 10^{-12}\text{ m}$$

AVALIAR: o centro de massa está mais próximo do átomo de oxigênio porque a massa desse átomo é muito maior do que a massa do átomo de hidrogênio. Note que o centro de massa está situado sobre o eixo Ox, que é o *eixo de simetria* dessa molécula. Ao girar a molécula 180° em torno desse eixo, ela ficaria exatamente com a mesma forma. A posição do centro de massa não é alterada por essa operação de simetria, de modo que ele deve estar situado sobre um eixo de simetria.

Para um corpo sólido, para o qual existe (pelo menos em nível macroscópico) uma distribuição contínua de massas, as somas indicadas nas Equações (8.28) devem ser substituídas por integrais. Os cálculos podem se tornar bastante complicados, porém podemos fazer algumas afirmações gerais sobre esses problemas (Figura 8.28). Em primeiro lugar, quando um corpo homogêneo possui um centro geométrico, como uma bola de bilhar, um cubo de açúcar ou uma lata de suco de laranja, o centro de massa coincide com o centro geométrico. Em segundo lugar, quando um corpo possui um eixo de simetria, como uma roda ou uma polia, o centro de massa está sempre situado sobre esse eixo. Em terceiro lugar, não existe nada que diga que o centro de massa de um corpo deva estar na parte maciça do corpo. Por exemplo, o centro de massa de uma rosca está situado exatamente no centro do buraco.



Se um objeto homogêneo possui um centro geométrico, é aí que o centro de massa está localizado.



Se um objeto possui um eixo de simetria, o centro de massa se situa ao longo dele. Como no caso da rosca, o centro de massa pode não estar no interior do objeto.

Figura 8.28 Localização do centro de massa de um objeto simétrico.

Discutiremos um pouco mais sobre o conceito de centro de massa no Capítulo 11, quando analisarmos o conceito análogo de *centro de gravidade*.

Movimento do centro de massa

Para visualizarmos o significado do centro de massa de uma coleção de partículas, devemos perguntar o que ocorre com o centro de massa quando as partículas se movem. Os componentes x e y das coordenadas da velocidade do centro de massa, v_{cmx} e v_{cmy} são dados pela derivada em relação ao tempo de x_{cm} e y_{cm}. Também, dx_1/dt é o componente x da velocidade da partícula 1 e assim por diante, logo $dx_1/dt = v_{1x}$ e assim por diante. Tomando as derivadas em relação ao tempo das Equações (8.28), obtemos

$$v_{cmx} = \frac{m_1v_{1x} + m_2v_{2x} + m_3v_{3x} + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$$

$$v_{cmy} = \frac{m_1v_{1y} + m_2v_{2y} + m_3v_{3y} + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} \quad (8.30)$$

Essas equações são equivalentes a uma única equação vetorial que pode ser obtida tomando-se a derivada em relação ao tempo da Equação (8.29):

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} \quad (8.31)$$

Vamos representar a massa *total* $m_1 + m_2 + \cdots$ por M. Então, a Equação (8.31) pode ser reescrita como

$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots = \vec{P} \quad (8.32)$$

O membro direito dessa equação é o momento linear total $\vec{P}$ do sistema. Portanto, demonstramos que *o momento linear total é igual à massa total multiplicada pela velocidade do centro de massa*. Quando você agarra uma bola de beisebol, você está realmente agarrando uma quantidade muito grande de massas moleculares m_1, m_2, m_3, ... O impulso que você sente é devido ao momento linear total da coleção de partículas. Porém, esse impulso é igual ao fornecido por uma única partícula de massa $M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$ que se move com velocidade $\vec{v}_{cm}$, a velocidade

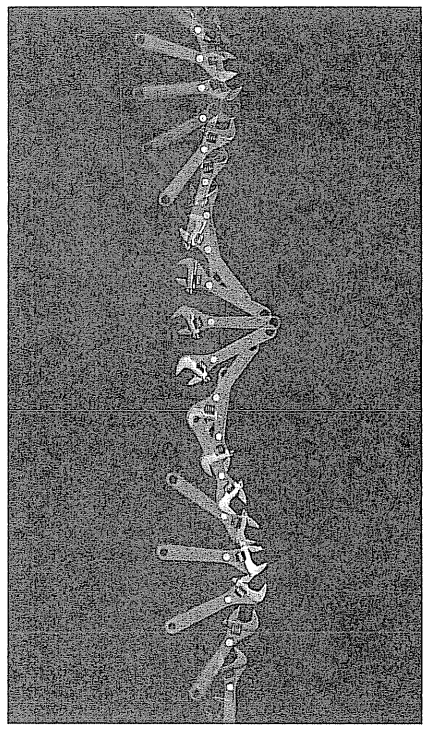


Figura 8.29 O centro de massa desta chave de rosca foi marcado com um ponto branco. A força externa total que atua sobre a chave de rosca é aproximadamente igual a zero. À medida que ela gira sobre uma superfície horizontal sem atrito, o centro de massa se desloca ao longo de uma linha reta com uma velocidade aproximadamente constante.

do centro de massa do sistema de partículas. Logo, a Equação (8.32) ajuda a justificar a representação de um corpo com massa distribuída como se fosse uma partícula.

Para um sistema de partículas no qual a força resultante externa é igual a zero, o momento linear total $\vec{P}$ é constante e a velocidade do centro de massa $\vec{v}_{cm} = \vec{P}/M$ também é constante. Suponha que você marque a posição do centro de massa de uma chave inglesa e a seguir faz a chave deslizar girando sobre o topo de uma mesa sem atrito (Figura 8.29). O movimento global parece ser complicado, mas o movimento do centro de massa segue uma linha reta, como se toda a massa do corpo estivesse concentrada nesse ponto.

Se um objeto possui um eixo de simetria, o centro de massa se situa ao longo dele. Como no caso da rosca, o centro de massa pode não estar no interior do objeto.

Exemplo 8.14

UM CABO-DE-GUERRA SOBRE O GELO Jaime está a uma distância de 20,0 m de Rui, e ambos estão em pé sobre a superfície lisa de um lago congelado. Rui possui massa de 60,0 kg e Jaime possui massa de 90,0 kg. Na metade da distância entre os dois homens, uma caneca contendo a bebida favorita deles está apoiada sobre o gelo. Eles puxam as extremidades de uma corda leve esticada entre eles. Quando Jaime se desloca 6,0 m no sentido da caneca, em que sentido se desloca Rui e qual é a distância percorrida por ele?

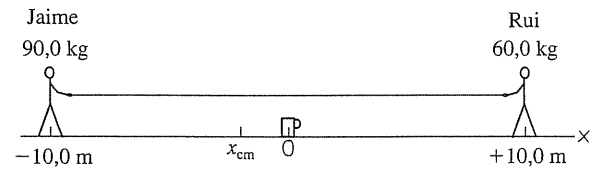


Figura 8.30 Esquematização do problema.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a superfície gelada é horizontal e não possui atrito, logo é nula a força externa resultante que atua sobre Rui, Jaime e a corda que os une. O momento linear total do sistema permanece constante. Inicialmente não existe nenhum movimento, e, assim, o momento linear total é igual a zero; portanto, a velocidade do centro de massa é igual a zero, e o centro de massa deverá permanecer em repouso. Podemos usar isso para relacionar as posições de Jaime e Rui.

PREPARAR: coloque a origem do eixo Ox no local onde se encontra a caneca e considere o sentido positivo voltado para Rui, conforme ilustrado na Figura 8.30. Como a corda é leve, podemos desprezar sua massa no cálculo do centro de massa com a Equação (8.28).

EXECUTAR: as coordenadas x iniciais de Jaime e de Rui são $-10,0$ m e $+10,0$ m, respectivamente; então a coordenada x do centro de massa é

$$x_{cm} = \frac{(90,0\text{ kg})(-10,0\text{ m}) + (60,0\text{ kg})(10,0\text{ m})}{90,0\text{ kg} + 60,0\text{ kg}} = -2,0\text{ m}$$

Quando Jaime se desloca 6,0 m no sentido da caneca, sua nova coordenada x passa para $-4,0$ m; vamos chamar de x_2 a nova coordenada x de Rui. O centro de massa não se move, logo

$$x_{cm} = \frac{(90,0\text{ kg})(-4,0\text{ m}) + (60,0\text{ kg})x_2}{90,0\text{ kg} + 60,0\text{ kg}} = -2,0\text{ m}$$

$$x_2 = 1,0\text{ m}$$

Jaime se deslocou 6,0 m no sentido da caneca e ainda está a uma distância de 4,0 m da caneca, enquanto Rui se deslocou 9,0 m e está a uma distância de 1,0 m da caneca.

AVALIAR: a razão entre as duas distâncias percorridas (6,0 m)/(9,0 m) = $\frac{2}{3}$ é igual à razão inversa entre suas massas. Você é capaz de dizer por quê? Se os dois homens continuarem a se mover (como a superfície não possui atrito, eles devem continuar!), Rui atingirá a caneca antes. Esse resultado é completamente independente da intensidade da força realizada por Rui ou por Jaime; aumentar a intensidade da força apenas ajuda Rui a matar sua sede antes.

Forças externas e movimento do centro de massa

Quando a força externa resultante sobre um sistema de partículas não é igual a zero, então o momento linear total não é conservado e a velocidade do centro de massa do sistema deve variar. Vamos analisar a relação entre o movimento do centro de massa do sistema e as forças que atuam sobre o sistema.

As equações (8.31) e (8.32) fornecem a *velocidade* do centro de massa em termos das velocidades das partículas individuais. Prosseguindo mais um pouco, tomamos a derivada em relação ao tempo dessas equações para mostrar que as *acelerações* são relacionadas do mesmo modo. Seja $\vec{a}_{cm} = d\vec{v}_{cm}/dt$ a aceleração do centro de massa; então podemos escrever

$$M\vec{a}_{cm} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \cdots \qquad (8.33)$$

Mas $m_1\vec{a}_1$ é igual à soma vetorial das forças que atuam sobre a primeira partícula e assim por diante, portanto o membro direito da Equação (8.33) é igual à soma vetorial $\Sigma\vec{F}$ de *todas* as forças que atuam sobre *todas* as partículas. De modo semelhante ao método usado na Seção 8.2, podemos classificar cada força como *externa* ou *interna*. Então, a soma vetorial de todas as forças que atuam sobre todas as partículas é dada por

$$\Sigma\vec{F} = \Sigma\vec{F}_{ext} + \Sigma\vec{F}_{int} = M\vec{a}_{cm}$$

Em virtude da terceira lei de Newton, todas as forças internas se cancelam aos pares, $\Sigma\vec{F}_{int} = \mathbf{0}$. As forças que não se cancelam são apenas as forças *externas*, portanto obtemos

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \qquad (8.34)$$

(corpo ou conjunto de partículas)

Quando forças externas atuam sobre um corpo ou sobre um conjunto de partículas, o centro de massa se move exatamente como se toda a massa estivesse concentrada nesse ponto e estivesse submetida a uma força igual à resultante de todas as forças que atuam sobre o sistema.

Esse resultado pode parecer secundário, porém de fato desempenha um papel central na mecânica como um todo. Na verdade, você já usou esse resultado em diversas ocasiões; sem ele, ao aplicar as leis de Newton, você não poderia representar como se fosse puntiforme um corpo com distribuição contínua de massas. Ele explica por que somente forças *externas* podem alterar o movimento de um corpo. Se você puxar o seu cinto para cima, ele reage com uma força igual e contrária para baixo sobre suas mãos; essas são forças *internas* que se cancelam e não produzem nenhum efeito sobre o movimento do seu corpo.

Suponha que um projétil disparado por um canhão esteja descrevendo uma trajetória parabólica (desprezando a resistência do ar) quando explode no ar, separando-se em dois fragmentos de massas iguais (Figura 8.31a). Os fragmentos seguem novas trajetórias parabólicas, porém o centro de massa continua a descrever sua trajetória parabólica original, exatamente como se toda a massa ainda estivesse concentrada no centro de massa. As explosões de fogos de artifício constituem um exemplo espetacular desse efeito (Figura 8.31b).

Essa propriedade do centro de massa é importante quando analisamos o movimento de um corpo rígido. Descrevemos o movimento de um corpo rígido como uma combinação do movimento de translação do centro de massa e um movimento de rotação em torno de um eixo passando pelo centro de massa. Voltaremos a discutir esse tópico no Capítulo 10. Essa propriedade também desempenha um papel importante no movimento dos corpos celestes. Não é correto dizer que a Lua possui uma órbita em torno da Terra; em vez disso, a Lua e a Terra descrevem uma órbita em torno dos seus centros de massa.

Existe ainda mais um modo útil para descrevermos o movimento de um sistema de partículas. Usando a relação $\vec{a}_{cm} = d\vec{v}_{cm}/dt$, podemos reescrever a Equação (8.33) do seguinte modo

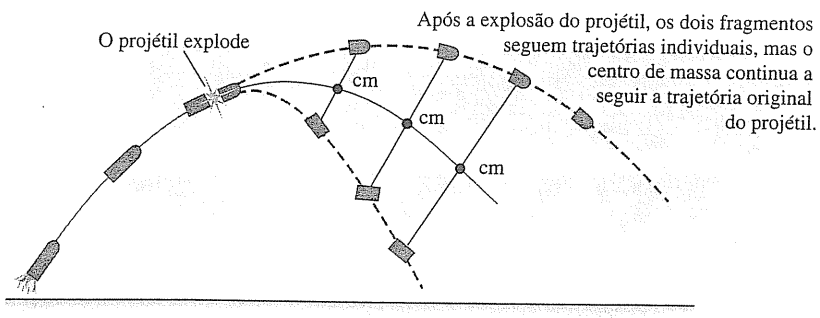
$$M\vec{a}_{cm} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d(M\vec{v}_{cm})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad (8.35)$$

Passamos a massa para dentro do sinal de derivada porque a massa total do sistema permanece constante. Substituindo a Equação (8.35) na Equação (8.34), achamos

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad (8.36)$$

(corpo estendido ou sistema de partículas)

(a)



(b)

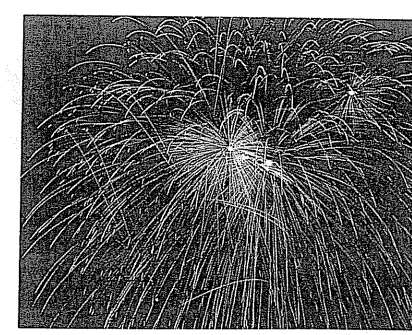


Figura 8.31 (a) Um projétil explode no ar se separando em duas partes iguais. Desprezando-se a resistência do ar, os fragmentos seguem novas trajetórias parabólicas, porém o centro de massa descreve a mesma trajetória parabólica que descrevia antes da explosão. (b) O mesmo efeito ocorre nas explosões de fogos de artifício.

Essa equação parece com a Equação (8.4). A diferença é que a Equação (8.36) descreve um *sistema de partículas* tal como um corpo rígido, enquanto a Equação (8.4) descreve uma única partícula. A interação entre as partículas de um sistema pode alterar os momentos lineares das partículas, porém o momento linear *total* do sistema $\vec{P}$ só pode ser alterado pela ação das forças externas ao sistema.

Finalmente, notamos que quando a força resultante externa ao sistema é nula a Equação (8.34) mostra que a aceleração $\vec{a}_{cm}$ do centro de massa é igual a zero. Logo, a velocidade do centro de massa $\vec{v}_{cm}$ é constante, como no caso da chave de rosca na Figura 8.29. Isso é uma reafirmação da lei da conservação do momento linear discutida na Seção 8.3.

Teste sua compreensão da Seção 8.5 O centro de massa na Figura 8.31a continuará na mesma trajetória parabólica, mesmo após um dos fragmentos atingir o solo? Por que sim ou por que não? ▮

*8.6 Propulsão de um foguete

As considerações sobre o momento linear são particularmente úteis para analisarmos um sistema cuja massa ou cujas partes podem variar com o tempo. Em tais casos não podemos usar diretamente a segunda lei de Newton na forma $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ porque m varia. A propulsão de um foguete fornece um exemplo típico e interessante para esse tipo de análise. Um foguete é impulsionado para a frente pela ejeção traseira dos gases resultantes da queima do combustível que inicialmente está dentro dele (por isso o combustível do foguete é também chamado de *propelente*). A força sobre o foguete orientada para a frente é a reação da força para trás exercida sobre o material ejetado. A massa total do sistema é constante, porém a massa do foguete diminui à medida que o material é ejetado.

Como um exemplo simples, consideramos um foguete disparado no espaço sideral, onde não existe nem resistência do ar nem força gravitacional. Seja m a massa do foguete, que sofre variação em função da queima do combustível. Escolhemos o eixo Ox com o sentido positivo no mesmo sentido do movimento do foguete. A Figura 8.32a mostra o foguete em um instante t, quando sua massa é m e o componente x da sua velocidade é v. (Para simplificar, vamos abandonar o índice inferior x nesta análise.) O componente x do momento linear nesse instante é $P_1 = mv$. Em um curto intervalo de tempo dt, a massa do foguete varia em uma quantidade dm. Essa quantidade é inerentemente negativa porque a massa do foguete *diminui* com o tempo. Durante o intervalo de tempo dt, uma quantidade de massa *positiva* $-dm$ resultante da combustão é ejetada do foguete. Seja v_{ex} a *velocidade escalar* de exaustão desse material *em relação ao foguete*, o combustível queimado é ejetado em um sentido oposto ao do movimento, portanto o componente x do *vetor velocidade* em relação ao foguete é $-v_{ex}$. O componente x da velocidade do combustível queimado v_{comb} em relação ao nosso sistema de coordenadas é

$$v_{comb} = v + (-v_{ex}) = v - v_{ex}$$

e o componente x do momento linear da massa ejetada $(-dm)$ é dado por

$$(-dm)v_{comb} = (-dm)(v - v_{ex})$$

Conforme indicado na Figura 8.32b, no final do intervalo dt, o componente x da velocidade do foguete com o combustível ainda não queimado é $v + dv$, e sua massa diminuiu para $m + dm$ (lembre-se de que dm é negativa). O momento linear do foguete nesse instante é

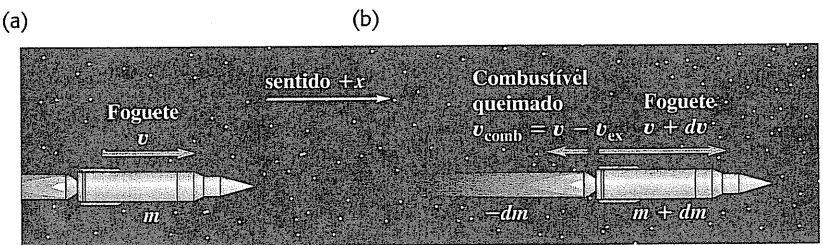
$$(m + dm)(v + dv)$$

Logo, o componente x do momento linear *total* P_2 do foguete mais o momento linear do combustível queimado no instante $t + dt$ é

$$P_2 = (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v - v_{ex})$$

De acordo com nossa hipótese inicial, o foguete e o combustível constituem um sistema isolado. Portanto, existe conservação do momento linear, e o componente x do momento linear do sistema deve ser o mesmo tanto no instante t quanto no instante $t + dt$: $P_1 = P_2$. Portanto

$$mv = (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v - v_{ex})$$



No tempo t, o foguete possui massa m e o componente x de velocidade v.

No tempo $t + dt$, o foguete possui massa $m + dm$ (sendo dm inerentemente negativo) e o componente x de velocidade $v + dv$. O combustível queimado possui componente x de velocidade $v_{comb} = v - v_{ex}$ e massa $-dm$. (O sinal negativo é necessário para tornar $-dm$ positivo já que dm é negativo.)

Figura 8.32 Um foguete se movendo no espaço sideral, (a) no instante de tempo t e (b) no instante $t + dt$.

Essa relação pode ser simplificada do seguinte modo

$$m\,dv = -dm\,v_{ex} - dm\,dv$$

Podemos desprezar o termo $(-dm\,dv)$ porque é o produto de duas grandezas infinitesimais e, portanto, é muito menor do que os demais termos. Abandonando esse termo, dividindo por dt e reagrupando, achamos

$$m\frac{dv}{dt} = -v_{ex}\frac{dm}{dt} \tag{8.37}$$

O termo dv/dt é a aceleração do foguete, de modo que o membro esquerdo dessa equação (massa vezes aceleração) fornece a força resultante F, ou força de *propulsão* do foguete

$$F = -v_{ex}\frac{dm}{dt} \tag{8.38}$$

A força de propulsão é proporcional à velocidade relativa v_{ex} do combustível queimado e à taxa de variação da massa com o tempo do material ejetado, $-dm/dt$. (Lembre-se de que dm/dt é uma quantidade negativa porque representa a taxa de variação da massa do foguete; logo, F é positiva.) O componente x da aceleração do foguete é

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{v_{ex}}{m}\frac{dm}{dt} \tag{8.39}$$

Essa aceleração é positiva porque v_{ex} é positiva (lembre-se de que ela é o *módulo da velocidade* da exaustão) e dm/dt é negativa. A massa m do foguete diminui continuamente à medida que o combustível é consumido. Quando v_{ex} e dm/dt permanecem constantes, a aceleração cresce até que toda a massa do combustível seja consumida.

Na realidade, um foguete queima combustível a uma taxa muito rápida (ou $-dm/dt$ elevada) e ejeta o combustível queimado com uma velocidade relativa alta (v_{ex} elevada), como na Figura 8.33. No início do uso da propulsão de foguetes, as pessoas que não entendiam a lei da conservação do momento linear pensavam que um foguete não poderia funcionar no espaço sideral porque 'não haveria matéria no espaço para servir como base de impulsão'. Pelo contrário, a propulsão do foguete funciona *melhor* no espaço vazio, onde não existe resistência do ar! O veículo de lançamento indicado na Figura 8.33 *não* está 'empurrando' o solo para se deslocar através do ar.

Quando a velocidade do combustível queimado v_{ex} permanece constante, podemos integrar a Equação (8.39) para achar a relação entre a velocidade v em qualquer instante e a massa restante m neste instante. Seja m_0 a massa e v_0 a velocidade no instante $t = 0$, então a Equação (8.39) pode ser reescrita na forma

$$dv = -v_{ex}\frac{dm}{m}$$

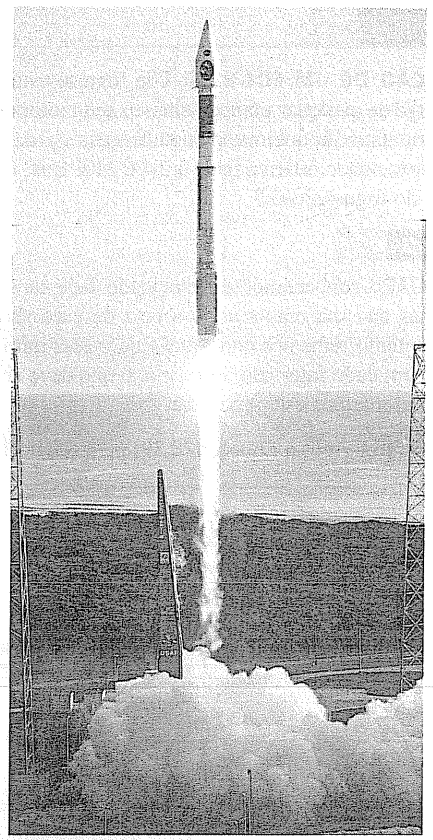


Figura 8.33 Para que haja uma propulsão para cima suficiente para superar a gravidade, este veículo de lançamento consume mais de 1000 kg de combustível por segundo e ejeta o combustível queimado com velocidade da ordem de 4000 m/s.

Vamos mudar as variáveis de integração para v' e m', e assim podemos usar v e m como os limites superiores das integrais (a velocidade final e a massa final). A seguir integramos ambos os membros, usando os limites de v_0 a v, de m_0 a m, e passamos a constante v_{ex} para fora da integral:

$$\int_{v_0}^{v} dv' = -\int_{m_0}^{m} v_{ex}\frac{dm'}{m'} = -v_{ex}\int_{m_0}^{m}\frac{dm'}{m'}$$

$$v - v_0 = -v_{ex}\ln\frac{m}{m_0} = v_{ex}\ln\frac{m_0}{m} \tag{8.40}$$

A razão m_0/m é a massa original dividida pela massa depois que todo o combustível queimado é expelido. Em lançadeiras espaciais funcionais essa razão é projetada com o valor mais elevado possível para maximizar o ganho de velocidade, o que significa que quase toda a massa inicial do foguete se refere ao combustível. A velocidade final do foguete deve possuir módulo maior (em geral *muito* maior) do que a velocidade relativa v_{ex} se $\ln(m_0/m) > 1$, ou seja, se $m_0/m > e = 2{,}71828\ldots$

Na análise feita, imaginamos sempre que o foguete se deslocava no espaço vazio sem campo gravitacional. Contudo, quando um foguete é lançado da superfície de um planeta, devemos levar em conta a ação do campo gravitacional, como na Figura 8.33 (veja o Problema 8.110).

Exemplo 8.15

ACELERAÇÃO DE UM FOGUETE Um foguete está no espaço sideral, longe de qualquer planeta, quando seu motor é acionado. Na primeira etapa da queima, o foguete ejeta $\frac{1}{120}$ da sua massa com uma velocidade relativa igual a 2400 m/s. Qual é a aceleração inicial do foguete?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: conhecemos a velocidade de exaustão v_{ex} do foguete, mas não sua massa m ou a taxa de variação da massa dm/dt. Entretanto, sabemos qual fração da massa inicial é perdida durante um dado intervalo de tempo, o que deve ser suficiente para solucionarmos este problema.

PREPARAR: usaremos a Equação (8.39) para achar a aceleração do foguete.

EXECUTAR: a taxa inicial da variação da massa é dada por

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{m_0/120}{1\text{ s}} = -\frac{m_0}{120\text{ s}}$$

onde m_0 é a massa inicial ($t = 0$) do foguete. De acordo com a Equação (8.39) a aceleração inicial é

$$a = -\frac{v_{ex}}{m_0}\frac{dm}{dt} = -\frac{2400\text{ m/s}}{m_0}\left(-\frac{m_0}{120\text{ s}}\right) = 20\text{ m/s}^2$$

AVALIAR: observe que a resposta obtida não depende do valor de m_0. Para um mesmo valor de v_{ex}, a aceleração inicial de uma nave espacial de 120000 kg ejetando 1000 kg/s de combustível queimado seria igual à aceleração inicial de um astronauta de 60 kg equipado com um pequeno foguete que ejetasse 0,5 kg/s.

Exemplo 8.16

VELOCIDADE DE UM FOGUETE Suponha que $\frac{3}{4}$ da massa inicial m_0 do foguete do Exemplo 8.15 seja de combustível, de modo que sua massa final é $m = m_0/4$, e imagine que o combustível seja consumido com uma taxa constante em um intervalo de tempo total $t = 90$ s. Se o foguete parte do repouso em nosso sistema de coordenadas, calcule sua velocidade nesse instante final.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: conhecemos a velocidade inicial v_0 (igual a zero), a velocidade de exaustão v_{ex} e a massa final m em termos da massa inicial m_0.

PREPARAR: aplicaremos diretamente a Equação (8.40) para achar a velocidade final v.

EXECUTAR: sabemos que $m_0/m = 4$, logo, pela Equação (8.40),

$$v = v_0 + v_{ex}\ln\frac{m_0}{m} = 0 + (2400\text{ m/s})(\ln 4) = 3327\text{ m/s}$$

AVALIAR: vamos examinar o que ocorre à medida que o foguete ganha velocidade. No início do vôo, quando a velocidade do foguete é zero, o combustível ejetado se move para a esquerda e com velocidade de 2400 m/s em relação ao nosso sistema de coordenadas. No final do primeiro segundo ($t = 1$ s), o foguete se move a 20 m/s, com velocidade de 2380 m/s em relação ao nosso sistema de coordenadas. Durante o próximo segundo, a aceleração, dada pela Equação (8.39), é ligeiramente maior. Para $t = 2$ s, o foguete se move com velocidade ligeiramente menor do que 40 m/s e a velocidade do combustível é ligeiramente menor do que 2360 m/s. Cálculos detalhados mostram que no instante aproximadamente dado por $t = 75{,}6$ s a velocidade do foguete v em nosso sistema de coordenadas é igual a 2400 m/s. O combustível queimado ejetado nesse instante se move *para a frente*, e não para trás, em nosso sistema de coordenadas. Uma vez que a velocidade final do foguete é de 3327 m/s e a velocidade relativa é igual a 2400 m/s, a última porção do combustível ejetado possui uma velocidade para a frente (em relação ao nosso sistema de referência) de (3327 − 2400) m/s = 927 m/s. (Estamos usando mais algarismos significativos do que os necessários para ilustrar nosso exemplo.)

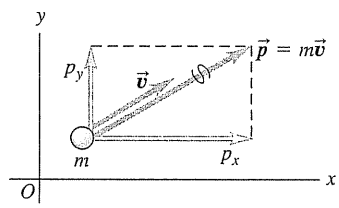
Teste sua compreensão da Seção 8.6 (a) Se um foguete no espaço sideral livre de gravidade possui a mesma força de propulsão em qualquer instante de tempo, a sua aceleração é constante, crescente ou decrescente? (b) Se o foguete possui a mesma aceleração em qualquer instante de tempo, a força de propulsão é constante, crescente ou decrescente? ∎

Resumo

Momento linear de uma partícula: o momento linear $\vec{p}$ de uma partícula é uma grandeza vetorial definida pelo produto da massa m e da velocidade $\vec{v}$ da partícula. De acordo com a segunda lei de Newton, a força resultante que atua sobre uma partícula é igual à taxa de variação no momento linear da partícula.

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{8.2}$$

$$\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{8.4}$$

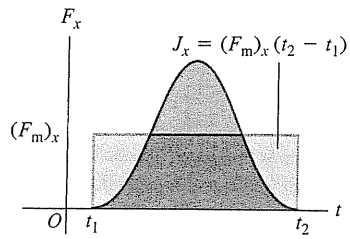


Impulso e momento linear: o impulso $\vec{J}$ é o produto de uma força resultante constante $\Sigma\vec{F}$ que atua sobre uma partícula durante um intervalo de tempo Δt, entre t_1 e t_2. Quando a força resultante varia com o tempo, o impulso é a integral da força resultante no decorrer do intervalo de tempo. Em todo caso, a variação do momento linear de uma partícula em um dado intervalo de tempo é igual ao impulso da força resultante que atua sobre a partícula nesse intervalo de tempo. O momento linear de uma partícula é igual ao impulso necessário para acelerar essa partícula desde o repouso até sua velocidade final (exemplos 8.1 a 8.3).

$$\vec{J} = \Sigma\vec{F}(t_2 - t_1) = \Sigma\vec{F}\,\Delta t \tag{8.5}$$

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\vec{F}\,dt \tag{8.7}$$

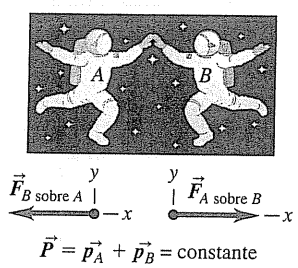
$$\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \tag{8.6}$$



Lei da conservação do momento linear: força interna é aquela exercida por uma parte de um sistema sobre outra parte do mesmo sistema. Força externa é aquela exercida por algo fora de um sistema sobre uma parte do sistema. Caso a força resultante externa que atua sobre um sistema seja igual a zero, o momento linear total do sistema $\vec{P}$ (a soma vetorial dos momentos lineares de cada partícula que compõe o sistema) é constante ou conservado. Cada componente do momento linear total do sistema é conservado separadamente (exemplos 8.4 a 8.6).

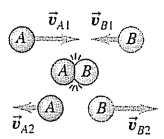
$$\begin{aligned}\vec{P} &= \vec{p}_A + \vec{p}_B + \cdots \\ &= m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B + \cdots\end{aligned} \tag{8.14}$$

Se $\sum\vec{F} = \mathbf{0}$, então $\vec{P}$ = constante.



$$\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B = \text{constante}$$

Colisões: em colisões de qualquer tipo, os momentos lineares inicial e final são iguais. Em uma colisão elástica entre dois corpos, a energia cinética total final também é igual à energia cinética total inicial, e a velocidade relativa inicial possui módulo igual ao da velocidade relativa final. Em uma colisão inelástica entre dois corpos, a energia cinética total final é menor do que a energia cinética total inicial. Quando os dois corpos possuem a mesma velocidade final, a colisão é completamente inelástica (exemplos 8.7 a 8.12).

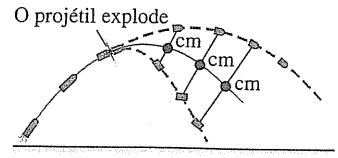


Centro de massa: o vetor posição do centro de massa de um sistema de partículas, $\vec{r}_{cm}$, é uma média ponderada das posições $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ... de cada partícula. O momento linear total $\vec{P}$ de um sistema é igual à massa total do sistema M multiplicada pela velocidade $\vec{v}_{cm}$ do centro de massa do sistema. O centro de massa de um sistema se move como se a massa total do sistema M estivesse concentrada nesse ponto. Quando a força externa resultante sobre um sistema é igual a zero a velocidade do centro de massa $\vec{v}_{cm}$ é constante. Quando a força externa resultante é diferente de zero, o centro de massa acelera, como se fosse uma partícula de massa M sob ação da mesma força resultante externa (exemplos 8.13 e 8.14).

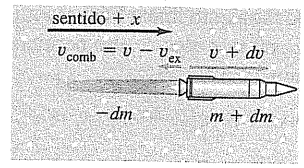
$$\begin{aligned}\vec{r}_{cm} &= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} \\ &= \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}\end{aligned} \tag{8.29}$$

$$\begin{aligned}\vec{P} &= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots \\ &= M\vec{v}_{cm}\end{aligned} \tag{8.32}$$

$$\sum\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \tag{8.34}$$



Propulsão de foguete: na propulsão de um foguete, a massa do foguete varia à medida que a massa do combustível é queimada e expelida. A análise do movimento do foguete deve levar em conta o momento linear do próprio foguete, bem como o momento linear do combustível queimado e expelido (exemplos 8.15 e 8.16).



Principais termos

centro de massa, 266
colisão completamente inelástica, 258
colisão elástica, 258
colisão inelástica, 258
força externa, 253
força interna, 253
impulso, 249
lei da conservação do momento linear, 254
momento linear total, 253
momento linear, 248
sistema isolado, 253
teorema do impulso-momento linear, 249

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Os dois jogadores possuem o mesmo módulo de momento linear $p = mv$ (o produto da massa e da velocidade escalar), mas o jogador mais rápido e leve possui o dobro da energia cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$. Portanto, o jogador mais leve pode realizar o dobro de trabalho sobre o outro (e causar o dobro de dano) no processo de parar uma bola (veja Seção 8.1).

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

8.1 Resposta: (v); (i) e (ii) (empatados em segundo lugar); (iii) e (iv) (empatados em terceiro lugar) Usamos duas interpretações do impulso da força resultante: (1) a força resultante

multiplicada pelo tempo em que a força resultante atua e (2) a variação no momento linear da partícula sobre a qual a força resultante atua. A escolha da interpretação depende da informação fornecida. Consideramos o sentido positivo de x apontado de oeste para leste. (i) A força não é fornecida, por isso usamos a interpretação 2: $J_x = mv_{2x} - mv_{1x}$ = (1000 kg) (0) − (1000 kg) (25 m/s) = −25000 kg · m/s, logo o módulo do impulso é 25000 kg · m/s = 25000 N · s; (ii) Pelo mesmo motivo do item (i), usamos a interpretação 2: $J_x = mv_{2x} - mv_{1x}$ = (1000 kg) (0) − (1000 kg) (25 m/s) = −25000 kg · m/s, e o módulo do impulso é novamente 25000 kg · m/s = 25000 N · s; (iii) A velocidade final não é fornecida, por isso usamos a interpretação 1: $J_x = (\Sigma F_x)_m\,(t_2 - t_1)$ = (2000 N) (10 s) = 20000 N · s, logo o módulo do impulso é 20000 N · s; (iv) pelo mesmo motivo do item (iii), usamos a interpretação 1: $J_x = (\Sigma F_x)_m\,(t_2 - t_1)$ = (−2000 N) (10 s) = −20000 N · s, logo o módulo do impulso é 20000 N · s, (v) A força não é fornecida, por isso usamos a interpretação 2: $J_x = mv_{2x} - mv_{1x}$ = (1000 kg) (−25 m/s) − (1000 kg) (25 m/s) = −50000 kg · m/s, logo o módulo do impulso é 50000 kg · m/s = 50000 N · s.

8.2 Respostas: (a) $v_{C2x} > 0$, $v_{C2y} > 0$; **(b) parte C** Não há nenhuma força horizontal externa, portanto os componentes x e y do momento linear total do sistema são ambos conservados. Ambos os componentes do momento linear total são nulos antes do alongamento da mola, portanto eles devem permanecer nulos após o alongamento da mola. Então,

$$P_x = 0 = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x} + m_C v_{C2x}$$

$$P_y = 0 = m_A v_{A2y} + m_B v_{B2y} + m_C v_{C2y}$$

Sabemos que $m_A = m_B = m_C$, $v_{A2x} < 0$, $v_{A2y} = 0$, $v_{B2x} = 0$ e $v_{B2y} < 0$. Você pode solucionar as equações acima para demonstrar que $v_{C2x} = -v_{A2x} > 0$ e $v_{C2y} = -v_{B2y} > 0$, de modo que os componentes de velocidade da parte C são ambos positivos. A parte C possui velocidade escalar $\sqrt{v_{C2x}^2 + v_{C2y}^2} = \sqrt{v_{A2x}^2 + v_{B2y}^2}$, que é maior do que a velocidade escalar da parte A ou da parte B.

8.3 Respostas: (a) inelástica; (b) elástica; (c) completamente inelástica Em cada caso, a energia potencial gravitacional é convertida em energia cinética enquanto a bola cai, e a colisão se dá entre a bola e o solo. No item (a) toda a energia inicial é reconvertida em energia potencial gravitacional, portanto nenhuma energia cinética é perdida no quicar da bola, e a colisão é elástica. No item (b) a energia potencial gravitacional final é menor do que a inicial, portanto parte da energia cinética se perdeu no quicar da bola. Portanto a colisão é inelástica. No item (c) a bola perde toda a energia cinética que possui, a bola e o solo se unem, e a colisão é completamente inelástica.

8.4 Resposta: pior Após uma colisão com uma molécula de água inicialmente em repouso, a velocidade escalar do nêutron é $|(m_n - m_A)/(m_n + m_A)| = |(1{,}0\text{ u} - 18\text{ u})/(1{,}0\text{ u} + 18\text{ u})| = \frac{17}{19}$ da sua velocidade escalar inicial, e sua energia cinética é $(\frac{17}{19})^2 = 0{,}80$ do valor inicial. Portanto, uma molécula de água é um pior moderador se comparado com um átomo de carbono, cujos números correspondem a $\frac{11}{13}$ e $(\frac{11}{13})^2 = 0{,}72$.

8.5 Resposta: não Se a gravidade é a única força atuando sobre o sistema composto pelos dois fragmentos, o centro de massa seguirá a trajetória parabólica de um objeto em queda livre. Entretanto, quando um fragmento cai, o solo exerce uma força normal sobre ele. Daí a força resultante sobre o sistema sofreu variação, e a trajetória do centro de massa varia em resposta.

8.6 Respostas: (a) crescente; (b) decrescente Pelas equações (8.37) e (8.38), a força de propulsão F é igual a $m(dv/dt)$, em que m é a massa do foguete e dv/dt é a sua aceleração. Considerando que m diminui no decorrer do tempo, se a força de propulsão F for constante a aceleração deverá aumentar no decorrer do tempo (a mesma força atua sobre uma massa menor); se a aceleração dv/dt for constante, a força de propulsão deverá diminuir no decorrer do tempo (uma força menor é tudo que se necessita para acelerar uma massa menor).

Questões para discussão

Q8.1 Para rachar um tronco de lenha usando um martelo e uma cunha, um martelo pesado é mais eficiente do que um martelo leve? Por quê?

Q8.2 Suponha que você agarre uma bola de beisebol e a seguir seja convidado a agarrar uma bola de boliche que possua o mesmo momento linear ou a mesma energia cinética da bola de beisebol. O que você escolheria? Explique.

Q8.3 Quando gotas de chuva caem do céu, em que se transforma a energia cinética das gotas no momento em que elas colidem com o solo? Sua resposta também seria válida para o caso da famosa maçã de Newton?

Q8.4 Um carro possui a mesma energia cinética quando se desloca a 30 m/s do norte para o sul e quando se desloca a 30 m/s do norte para o leste. O momento linear é o mesmo nos dois casos? Explique.

Q8.5 Um caminhão acelera ao descer um elevado. Um sistema de referência inercial está fixo no solo com origem em um poste. Um segundo sistema de referência inercial está fixo no interior de um carro da polícia que está descendo o elevado com velocidade constante. O momento linear do caminhão é o mesmo nos dois sistemas? Explique. A taxa de variação do momento linear do caminhão é a mesma nos dois sistemas? Explique.

Q8.6 Quando um caminhão grande e pesado colide com um automóvel, é mais provável que os ocupantes do automóvel se machuquem mais do que os ocupantes do caminhão. Por quê?

Q8.7 Uma senhora segurando uma pedra grande está em pé sobre uma camada de gelo horizontal sem atrito. Ela lança a pedra com uma velocidade v_0 formando um ângulo acima da horizontal. Considere o sistema constituído pela mulher juntamente com a pedra. Existe conservação do momento linear do sistema? Por que sim ou por que não? Nenhum componente do momento linear do sistema é conservado? Novamente, por que sim ou por que não?

Q8.8 No Exemplo 8.7 (Seção 8.3), no qual os dois cavaleiros da Figura 8.15a ficam colados após a colisão, a colisão é inelástica porque $K_2 < K_1$. No Exemplo 8.5 (Seção 8.2), a colisão é inelástica? Explique.

Q8.9 Em uma colisão completamente inelástica entre dois corpos, quando eles permanecem unidos após a colisão, podemos achar um valor igual a zero para a energia cinética final do sistema? Caso sua resposta seja afirmativa, forneça um exemplo em que isso ocorre. Quando a energia cinética final do sistema for igual a zero, qual deverá ser o momento linear inicial do sistema? A energia cinética inicial do sistema é igual a zero? Explique.

Q8.10 Como a energia cinética é dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$ e o momento linear é dado por $\vec{p} = m\vec{v}$, é fácil mostrar que $K = p^2/2m$. Então, como é possível existir um evento para o qual o momento

linear do sistema seja constante, porém a energia cinética total do sistema seja variável?

Q8.11 Em cada um dos exemplos 8.10, 8.11 e 8.12 (Seção 8.4), verifique se os vetores velocidade relativa antes e depois da colisão possuem o mesmo módulo. Em cada um desses casos o que ocorre com a *direção* e o *sentido* do vetor velocidade relativa?

Q8.12 A probabilidade de um copo quebrar quando ele cai sobre um piso de concreto é maior do que quando ele cai sobre um piso de madeira. Por quê? (Tome como referência a Figura 8.3b.)

Q8.13 Na Figura 8.22b, a energia cinética da bola de pingue-pongue depois de sua interação com a bola de boliche é maior do que antes da interação. De onde provém esse aumento de energia? Descreva o evento em termos da conservação da energia.

Q8.14 Uma metralhadora dispara sobre uma placa de aço. A força média oriunda do impacto da bala quando a bala é refletida é maior ou menor do que a força quando a bala se amassa e fica colada na placa? Explique.

Q8.15 Uma força resultante de 4 N atua durante 0,25 s sobre um corpo que estava inicialmente em repouso, fazendo-o atingir uma velocidade final igual a 5 m/s. Como uma força resultante de 2 N poderia produzir a mesma velocidade final?

Q8.16 Uma força resultante com um componente x dado por $\sum F_x$ atua sobre um corpo durante o intervalo de tempo de t_1 a t_2. O componente x do momento linear possui o mesmo valor para t_1 e para t_2, porém $\sum F_x$ não é igual a zero em nenhum instante entre t_1 e t_2. O que você pode afirmar a respeito do gráfico de $\sum F_x$ *versus* t?

Q8.17 Um jogador de tênis bate em uma bola de tênis com uma raquete. Considere o sistema bola e raquete. O momento linear total desse sistema é o mesmo imediatamente antes e imediatamente depois da batida? O momento linear total do sistema imediatamente depois da batida é o mesmo que o momento linear total do sistema dois segundos depois, quando a bola está no ponto superior de sua trajetória no ar? Explique qualquer diferença entre as duas situações.

Q8.18 No Exemplo 8.4 (Seção 8.2) considere o sistema rifle e bala. Qual é a velocidade do centro de massa do sistema depois do disparo? Explique.

Q8.19 Um ovo é libertado do alto de um edifício e cai até atingir o solo. À medida que o ovo cai, o que ocorre com o momento linear do sistema ovo e Terra?

Q8.20 Uma senhora está em pé no meio da superfície sem atrito de um lago gelado. Ela poderia se locomover atirando objetos, mas suponha que ela não possua nada para atirar. Ela poderia se locomover até a margem do lago *sem* jogar nada?

Q8.21 Em um ambiente com gravidade igual a zero, pode uma espaçonave movida por foguete atingir uma velocidade maior do que a velocidade relativa com a qual o combustível queimado é expelido?

Q8.22 Quando um objeto se rompe em duas partes (por explosão, decomposição radioativa, recuo etc.), o fragmento mais leve produz energia cinética maior do que o outro mais pesado. Isso ocorre em decorrência da lei da conservação do momento linear, mas também se pode explicar essa ocorrência usando as leis de Newton para o movimento?

Q.823 Uma maçã cai de uma árvore sem sofrer nenhuma resistência do ar. Conforme ela cai, qual destas afirmações é verdadeira? (a) Somente o seu momento linear é conservado; (b) somente a sua energia mecânica é conservada; (c) tanto o seu momento linear quanto a sua energia mecânica são conservados; (d) a sua energia cinética é conservada.

Q.824 Dois pedaços de argila se colidem e ficam unidos. Durante a colisão, qual destas afirmações é verdadeira? (a) Somente o momento linear da argila é conservado; (b) somente a sua energia mecânica é conservada; (c) tanto o seu momento linear quanto a sua energia mecânica são conservados; (d) a sua energia cinética é conservada.

Q.8.25 Duas bolas de gude são pressionadas entre si por uma mola ideal leve entre elas, mas elas não estão atadas à mola. Elas são então liberadas sobre uma mesa com superfície horizontal sem atrito e logo se livram da mola. Conforme as bolas de gude se afastam entre si, qual destas afirmações é verdadeira? (a) Somente o seu momento linear é conservado; (b) somente a sua energia mecânica é conservada; (c) tanto o seu momento linear quanto a sua energia mecânica são conservados; (d) a sua energia cinética é conservada.

Q8.26 Um veículo utilitário muito pesado colide frontalmente com um carro compacto muito leve. Qual destas afirmações sobre a colisão é correta? (a) A quantidade de energia cinética perdida pelo utilitário é igual à quantidade de energia cinética ganha pelo carro; (b) a quantidade de momento linear perdida pelo utilitário é igual à quantidade de momento linear ganha pelo carro; (c) o carro sofre a ação de uma força muito maior durante a colisão do que o utilitário; (d) ambos os veículos perdem a mesma quantidade de energia cinética.

Exercícios

Seção 8.1 Momento linear e impulso

8.1 a) Qual é o módulo do momento linear de um caminhão de 10000 kg que se desloca com velocidade de 12,0 m/s? b) Qual deve ser a velocidade de um carro esportivo de 2000 kg para que ele tenha i) o mesmo momento linear do caminhão? ii) a mesma energia cinética?

8.2 No Exemplo Conceitual 8.1 (Seção 8.1), mostre que o barco de massa $2m$ possui, ao chegar na linha final, um momento linear $\sqrt{2}$ vezes maior do que o momento linear do barco de massa m.

8.3 a) Mostre que a energia cinética K e o módulo do momento linear p de uma partícula de massa m são relacionados por $K = p^2/2m$. b) Um cardeal (*Richmondena cardinalis*) com massa de 0,040 kg e uma bola de beisebol de 0,145 kg possuem a mesma energia cinética. Qual desses corpos possui o maior momento linear? Qual é a razão entre o módulo do momento linear do cardeal e o módulo do momento linear da bola de beisebol? c) Um homem com 700 N e uma mulher com 450 N possuem o mesmo momento linear. Quem possui a maior energia cinética? Qual é a razão entre a energia cinética do homem e a energia cinética da mulher?

8.4 Em uma competição masculina de arremesso de peso, o peso possui massa de 7,30 kg e é liberado com uma velocidade escalar de 15,0 m/s formando um ângulo de 40° acima do plano horizontal e por sobre a perna esquerda esticada de um homem. Quais são os componentes vertical e horizontal iniciais do momento linear desse peso?

8.5 Em uma partida de futebol americano, um atacante de 100 kg está correndo da esquerda para a direita a 2,75 m/s enquanto outro atacante de 125 kg está correndo diretamente na sua direção a 2,60 m/s. Quais são (a) o módulo, a direção e o sentido do

momento linear resultante desses dois atletas e (b) a energia cinética total deles?

8.6 Dois veículos se aproximam de um cruzamento. Um deles é uma caminhonete de 2500 kg que se desloca a 14,0 m/s do leste para oeste (no sentido negativo de x), e o outro é um carro de passeio de 1500 kg que segue do sul para o norte (no sentido positivo de y, a 23,0 m/s). (a) Ache os componentes x e y do momento linear resultante desse sistema. (b) Quais são o módulo, a direção e o sentido do momento linear resultante?

8.7 Força sobre uma bola de golfe. Uma bola de golfe de 0,0450 kg que estava inicialmente em repouso passa a se deslocar a 25,0 m/s depois de receber o impulso de um taco. Se o taco e a bola permaneceram em contato durante 2,00 ms, qual é a força média do taco sobre a bola? O efeito do peso da bola durante seu contato com o taco é importante? Por que sim ou por que não?

8.8 Força sobre uma bola de beisebol. Uma bola de beisebol possui massa igual a 0,145 kg. a) Sabendo que a velocidade da bola arremessada é de 45,0 m/s e a velocidade da bola rebatida é de 55,0 m/s na mesma direção, mas em sentido contrário, calcule o módulo da variação do momento linear e do impulso aplicado pelo bastão sobre a bola. b) Se o bastão e a bola permanecem em contato durante 2,0 ms, qual é o módulo da força média do bastão sobre a bola?

8.9 Um disco de hóquei de 0,160 kg move-se sobre uma superfície horizontal com gelo e sem atrito. No instante $t = 0$, o disco de hóquei se move da esquerda para a direita a 3,0 m/s. a) Determine o módulo, a direção e o sentido da velocidade do disco de hóquei após ele ter sofrido a ação de uma força de 25,0 N aplicada durante 0,050 s da esquerda para a direita. b) Se, em vez disso, fosse aplicada uma força de 12,0 N de $t = 0$ a $t = 0{,}050$ s da direita para a esquerda, qual seria a velocidade final do disco de hóquei?

8.10 O motor de um sistema de manobra orbital em um ônibus espacial exerce uma força igual a (26700 N)$\mathbf{j}$ durante 3,90 s, ejetando uma quantidade de massa de combustível desprezível em relação à massa de 95000 kg do ônibus espacial. a) Qual é o impulso da força durante 3,90 s? b) Qual é a variação do momento linear do ônibus espacial referente a esse impulso? c) Qual é a variação da velocidade do ônibus espacial referente a esse impulso? d) Por que não podemos calcular a variação da energia cinética do ônibus espacial?

8.11 No instante $t = 0$, um foguete de 2150 kg no espaço sideral aciona um motor que exerce uma força crescente sobre ele no sentido positivo de x. Essa força obedece à equação $F_x = At^2$, onde t é o intervalo de tempo, e possui módulo de 781,25 N quando $t = 1{,}25$ s. (a) Ache o valor SI da constante A, incluindo suas unidades. (b) Qual é o impulso que o motor exerce sobre o foguete durante o intervalo de 1,50 s a partir de 2,0 s após a ignição do motor? (b) Qual é a variação da velocidade do foguete durante esse intervalo?

8.12 Uma bola de beisebol de 0,145 kg é golpeada por um bastão. Imediatamente antes do impacto, a bola se desloca a 50,0 m/s horizontalmente da esquerda para a direita e abandona o bastão se movendo com velocidade de 65,0 m/s para a esquerda formando um ângulo de 30° acima da horizontal. Considerando que o bastão e a bola permanecem em contato durante 1,75 ms, calcule o módulo do componente horizontal e do componente vertical da força média do bastão sobre a bola.

8.13 Uma pedra de 2,0 kg está deslizando a 5,0 m/s da esquerda para a direita sobre uma superfície horizontal sem atrito, quando é repentinamente atingida por um objeto que exerce uma grande força horizontal sobre ela, por um curto período de tempo. O gráfico na Figura 8.34 mostra o módulo dessa força em função do tempo. (a) Qual é o impulso que essa força exerce sobre a pedra? (b) Imediatamente após a força cessar, ache o módulo, a direção e o sentido da velocidade da pedra se a força atuar (i) para a direita e (ii) para a esquerda.

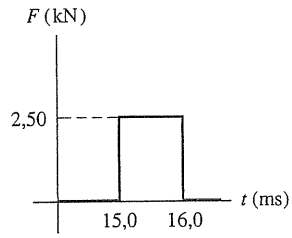


Figura 8.34 Exercício 8.13.

Seção 8.2 Conservação do momento linear

8.14 Uma astronauta de 68,5 kg está no espaço fazendo um reparo na estação espacial orbital. Ela lança fora uma ferramenta de 2,25 kg a 3,20 m/s em relação à estação espacial. Com que velocidade escalar e em que direção e sentido ela começará a se mover?

8.15 Propulsão animal. Lulas e polvos se impulsionam expelindo água. Eles fazem isso armazenando água em uma cavidade e repentinamente contraem a cavidade para expelir a água através de um orifício. Uma lula de 6,5 kg (incluindo a água na cavidade) está em repouso quando de repente avista um perigoso predador. (a) Se a lula possui 1,75 kg de água em sua cavidade, a que velocidade escalar ela deve expelir essa água para subitamente atingir uma velocidade escalar de 2,50 m/s e assim conseguir escapar do predador? Despreze qualquer efeito de arraste da água circundante. (b) Quanta energia cinética a lula cria com essa manobra?

8.16 Você está em pé sobre uma camada de gelo de um estádio de futebol em um país frio; despreze o atrito entre seus pés e o gelo. Um amigo joga para você uma bola de 0,400 kg que se desloca horizontalmente com velocidade de 10,0 m/s. Sua massa é igual a 70,0 kg. a) Se você agarra a bola, com que velocidade você e a bola se deslocarão logo a seguir? b) Se a bola colide com você e rebate em seu peito, passando a adquirir uma velocidade horizontal de 8,0 m/s em sentido oposto ao inicial, com que velocidade você se desloca após a colisão?

8.17 Sobre uma mesa de ar horizontal sem atrito, o disco de hóquei A (com massa igual a 0,250 kg) se desloca de encontro ao disco de hóquei B (com massa igual a 0,350 kg), que inicialmente está em repouso. Depois da colisão, o disco de hóquei A possui velocidade igual a 0,120 m/s da direita para a esquerda e o disco de hóquei B possui velocidade igual a 0,650 m/s da esquerda para a direita. a) Qual era a velocidade do disco de hóquei A antes da colisão? b) Calcule a variação da energia cinética total do sistema ocorrida durante a colisão.

8.18 Quando os carros forem equipados com pára-choques flexíveis, eles vão bater e recuar nas colisões em baixa velocidade, assim causando menos danos. Em um desses acidentes, um carro de 1750 kg que se desloca da esquerda para a direita a 1,50 m/s colide com um carro de 1450 kg que segue da direita para a esquerda a 1,10 m/s. Medidas indicam que a velocidade do carro mais pesado logo após a colisão era 0,250 m/s no sentido original. Despreze qualquer atrito da pista durante a colisão. a) Qual era a velocidade do carro mais leve logo após a colisão?

b) Calcule a variação na energia cinética combinada do sistema composto pelos dois carros durante essa colisão.

8.19 Os gases que se expandem ao abandonar o cano de um rifle também contribuem para o recuo. Uma bala de calibre 30 possui massa igual a 0,00720 kg e velocidade de 601 m/s em relação ao cano, quando disparada de um rifle com massa igual a 2,80 kg. Um rifle apoiado frouxamente recua com velocidade de 1,85 m/s em relação à Terra. Calcule o momento linear dos gases de propulsão em relação a um sistema de coordenadas fixo na Terra, no momento em que eles abandonam a boca do rifle.

8.20 O bloco A indicado na Figura 8.35 possui massa igual a 1,0 kg, e o bloco B possui massa igual a 3,0 kg. Os dois blocos se aproximam, comprimindo a mola S entre eles; a seguir, o sistema é libertado a partir do repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. A mola possui massa desprezível, não está presa a nenhum dos blocos e cai sobre a mesa depois que se expande. O bloco B adquire uma velocidade de 1,20 m/s. a) Qual a velocidade final do bloco A? b) Qual foi a energia potencial armazenada na mola comprimida?

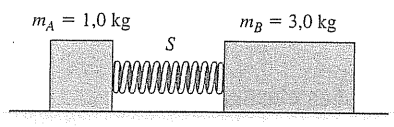


Figura 8.35 Exercício 8.20.

8.21 Um caçador está parado sobre um lago congelado e essencialmente sem atrito, quando usa um rifle que dispara balas de 4,20 g a 965 m/s. A massa do caçador (incluindo sua arma) é 72,5 kg, e o caçador segura firmemente a arma após o disparo. Ache a velocidade de recuo do caçador, caso ele dispare o rifle a) horizontalmente e b) formando um ângulo de 56,0° acima do plano horizontal.

8.22 Um núcleo atômico se rompe repentinamente em duas partes (fissões). A parte A, de massa m_A, se desloca da direita para a esquerda com velocidade escalar v_A. A parte B, de massa m_B, se desloca da esquerda para a direita com velocidade v_B. a) Use a lei de conservação do momento linear para solucionar vB em termos de m_A, m_B e v_A. b) Use os resultados da parte (a) para mostrar que $K_A/K_B = m_B/m_A$, onde K_A e K_B são as energias cinéticas das duas partes.

8.23 O núcleo do ^{124}Po se decompõe radioativamente por meio da emissão de uma partícula alfa (massa $6{,}65 \times 10^{-27}$ kg) com energia cinética $1{,}23 \times 10^{-12}$ J, conforme medição na estrutura referencial do laboratório. Supondo que Po esteja inicialmente em repouso nessa estrutura, ache a velocidade de recuo do núcleo que restou após a decomposição.

8.24 Você está parado sobre uma ampla camada de gelo sem atrito e segura uma pedra grande. Para sair do gelo, você joga a pedra de modo que ela atinja velocidade de 12,0 m/s em relação à superfície terrestre, formando um ângulo de 35,0° acima do plano horizontal. Se a sua massa for 70,0 kg e a massa da rocha for 15,0 kg, qual será a sua velocidade escalar após lançar a pedra? (Veja Questão para Discussão Q8.7.)

8.25 Daniel (massa de 65,0 kg) e Rebeca (massa de 45,0 kg) estão praticando patinação sobre uma pista de gelo. Enquanto está parado amarrando o cordão de seu patim, Daniel é atingido por Rebeca, que se deslocava a 13,0 m/s antes de colidir com ele. Depois da colisão, a velocidade de Rebeca possui módulo igual a 8,0 m/s e forma um ângulo de 53,1° com a direção de sua velocidade inicial. Ambos se movem sobre a superfície horizontal sem atrito da pista de gelo. a) Qual são o módulo, a direção e o sentido da velocidade de Daniel depois da colisão? b) Qual é a variação da energia cinética total dos dois patinadores em virtude da colisão?

8.26 Uma astronauta no espaço não pode usar uma balança para pesar objetos porque não há gravidade. Mas ela possui recursos para medir a distância e o tempo com precisão. Ela sabe que a sua própria massa é 78,4 kg, mas não tem certeza sobre a massa de um grande tubo de gás no foguete sem ar. Quando esse tubo está se aproximando dela a 3,50 m/s, ela o empurra, diminuindo a velocidade do tubo para 1,20 m/s (sem conseguir revertê-lo) e impelindo-a a uma velocidade escalar de 2,40 m/s. Qual é a massa desse tubo?

8.27 Variação de massa. Um vagão de carga aberto na parte superior possui massa de 24000 kg e se desloca sem atrito ao longo de um trilho horizontal. Está chovendo torrencialmente e as gotas caem verticalmente. No início, o vagão está vazio e se desloca com velocidade de 4,0 m/s. Qual será a velocidade do vagão depois de acumular 3000 kg de água da chuva?

8.28 Colisão de asteróides. Dois asteróides de igual massa no cinturão entre Marte e Júpiter colidem entre si com um estouro luminoso. O asteróide A, que se deslocava inicialmente a 40,0 m/s, é desviado em 30,0° da sua direção original, enquanto o asteróide B se desloca a 45,0° da direção original de A (Figura 8.36). a) Ache a velocidade escalar de cada asteróide após a colisão. b) Qual fração da energia cinética original do asteróide A se dissipa durante essa colisão?

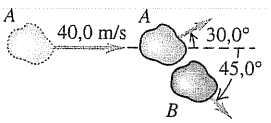


Figura 8.36 Exercício 8.28.

Seção 8.3 Conservação do momento linear e colisões

8.29 Um peixe de 15,0 kg que nada a 1,10 m/s subitamente engole um peixe de 4,50 kg que estava inicialmente em repouso. Despreze qualquer efeito de arraste da água. a) Ache a velocidade escalar do peixe maior imediatamente após ele devorar o menor. b) Quanta energia mecânica foi dissipada nessa refeição?

8.30 Duas lontras brincalhonas deslizam ao encontro uma da outra sobre uma superfície horizontal lamacenta (e, portanto, sem atrito). Uma delas, com massa de 7,50 kg, desliza da direita para a esquerda a 5,0 m/s, enquanto a outra, com massa de 5,75 kg, escorrega da esquerda para a direita a 6,0 m/s. Elas se agarram firmemente após colidirem. a) Ache o módulo, a direção e o sentido da velocidade dessas lontras logo após a colisão. b) Quanta energia mecânica se dissipa durante essa brincadeira?

8.31 Missão impacto profundo. Em julho de 2005, a missão "Impacto Profundo" da NASA espatifou uma sonda de 372 kg contra o cometa Tempel 1, atingindo a superfície a 37000 km/h. A velocidade escalar original do cometa nesse instante era de aproximadamente 40000 km/h, e sua massa foi estimada na ordem de $(0{,}10\text{-}2{,}5) \times 10^{14}$ kg. Use o menor valor da massa estimada. A) Qual variação na velocidade do cometa essa colisão produziu? Essa variação seria perceptível? B) Suponha que esse cometa fosse atingir a Terra e se fundir com ela. Em quanto ele alteraria a velocidade do nosso planeta? Essa mudança seria perceptível? (A massa da Terra é $5{,}97 \times 10^{24}$ kg.)

8.32 Um carro esportivo de 1050 kg se desloca com velocidade de 15,0 m/s de leste para oeste em uma estrada horizontal quando colide com um caminhão de 6320 kg que se desloca de oeste para leste na mesma estrada a 10,0 m/s. Os dois veículos ficam engavetados após a colisão. a) Qual é a velocidade (módulo, direção e sentido) dos veículos logo após a colisão? b) Qual deveria ser a velocidade do caminhão para que os dois veículos ficassem parados logo após a colisão? c) Calcule a variação da energia cinética total do sistema dos dois veículos para a situação descrita na parte (a) e para a situação descrita na parte (b). Em qual das duas situações ocorre a maior variação da energia cinética total?

8.33 Em um campo de futebol com lama, um zagueiro de 110 kg se choca com um jogador meio-de-campo de 85 kg. Imediatamente antes da colisão, o zagueiro se deslocava com velocidade de 8,8 m/s do sul para o norte e o outro jogador se deslocava com velocidade de 7,2 m/s do oeste para o leste. Qual é a velocidade (módulo, direção e sentido) com a qual os dois jogadores se movem unidos após a colisão?

8.34 Dois patinadores colidem e seguram um ao outro sobre gelo sem atrito. Um deles, de massa 70,0 kg, está se movendo da esquerda para a direita a 2,00 m/s, enquanto o outro, de massa 65,0 kg, está se movendo da direita para a esquerda a 2,50 m/s. Quais são o módulo, a direção e o sentido da velocidade desses patinadores logo após a colisão?

8.35 Dois carros, sendo um compacto com massa de 1200 kg e o outro um grande consumidor de gasolina com massa de 3000 kg, colidem frontalmente a velocidades típicas de estrada. a) Qual carro possui maior módulo de variação no momento linear? Qual carro possui maior variação na velocidade? b) Considerando que o carro maior altere sua velocidade em Δv, calcule a variação na velocidade do carro menor em termos de Δv. c) Os ocupantes de qual dos carros sofrerão lesões mais graves? Explique.

8.36 Em defesa dos pássaros. Para proteger seus filhotes no ninho, os falcões peregrinos voam em alta velocidade contra aves de rapina (como corvos). Em um desses episódios, um falcão de 600 g que voa a 20,0 m/s atinge um corvo de 1,50 kg que voa a 9,0 m/s. O falcão atingiu o corvo em uma direção ortogonal à sua trajetória original e recuou a 5,0 m/s. (Esses números foram estimados pelo autor, enquanto observava esse ataque ocorrer.) a) Em que ângulo o falcão mudou a direção do movimento do corvo? b) Qual era a velocidade do corvo logo após a colisão?

8.37 Em um cruzamento da cidade de São Paulo, um carro compacto com massa de 950 kg que se deslocava de oeste para leste colide com uma picape com massa de 1900 kg que se deslocava do sul para o norte e avançou o sinal vermelho (Figura 8.37). Em virtude da colisão, os dois veículos ficam engavetados e após a colisão eles se deslocam a 16,0 m/s na direção a 24,0° nordeste. Calcule o módulo da velocidade de cada veículo antes da colisão. Estava chovendo muito durante a colisão, e o atrito entre os veículos e a estrada pode ser desprezado.

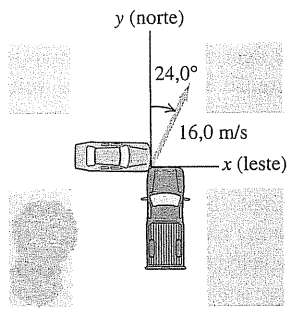


Figura 8.37 Exercício 8.37.

8.38 Uma bala de 5,0 g é disparada horizontalmente sobre um bloco de madeira de 1,20 kg que está em repouso sobre uma superfície horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre a superfície e o bloco é igual a 0,20. A bala fica cravada na madeira, e observa-se que o bloco desliza 0,230 m até parar. Qual era a velocidade inicial da bala?

8.39 Um pêndulo balístico. Uma bala de 12,0 g é disparada com velocidade de 380 m/s sobre um pêndulo balístico com massa igual a 6,0 kg, suspenso por uma corda de comprimento igual a 70,0 cm. (Veja o Exemplo 8.8 na Seção 8.3.) Calcule a) a altura vertical atingida pelo pêndulo; b) a energia cinética inicial da bala; c) a energia cinética da bala e do pêndulo imediatamente depois de a bala ficar retida no pêndulo.

8.40 Você e seus amigos estão fazendo uma experiência sobre um lago congelado que serve como uma superfície horizontal, sem atrito. Samuel, com massa de 80,0 kg, é empurrado e desliza de oeste para leste. Abigail, com massa de 50,0 kg, é empurrada do sul para o norte. Eles colidem e, após a colisão, Samuel se move a 37,0° do norte para o leste com uma velocidade escalar de 6,0 m/s e Abigail se move a 23,0° do sul para o leste com uma velocidade de 9,0 m/s. a) Qual era a velocidade de cada um antes da colisão? b) Em quanto a energia cinética total das duas pessoas diminuiu durante a colisão?

Seção 8.4 Colisões elásticas

8.41 Os blocos A (massa 2,0 kg) e B (massa 10,0 kg) movem-se sobre uma superfície horizontal sem atrito. Inicialmente, o bloco B está em repouso e o bloco A se move em direção a ele com velocidade de 2,0 m/s. Os blocos estão equipados com pára-choques de mola ideal, como no Exemplo 8.10. Acolisão é frontal, portanto todo o movimento antes e depois da colisão ocorre ao longo de uma linha reta. a) Ache a energia máxima armazenada nos pára-choques de mola e a velocidade de cada bloco nesse instante. b) Ache a velocidade de cada bloco após eles se separarem.

8.42 Um cavaleiro de 0,150 kg move-se a 0,80 m/s da esquerda para a direita sobre um trilho de ar horizontal sem atrito. Ele colide frontalmente com um cavaleiro de 0,300 kg que se move a 2,20 m/s da direita para a esquerda. Supondo colisão elástica, determine o módulo, a direção e o sentido de cada cavaleiro depois da colisão.

8.43 Uma bola de gude de 10,0 g desloca-se com velocidade de 0,400 m/s da direita para a esquerda sobre uma pista horizontal sem atrito e colide frontalmente com outra bola de gude de 30,0 g que se desloca com velocidade de 0,200 m/s da esquerda para a direita (Figura 8.38). a) Determine o módulo, a direção e o sentido de cada bola de gude depois da colisão. (Como a colisão é frontal, todos os movimentos ocorrem ao longo da mesma linha reta.) b) Calcule a *variação do momento linear* (isto é, o momento linear depois da colisão menos o momento linear antes da colisão) para cada bola de gude. Compare os valores obtidos para cada bola de gude. c) Calcule a *variação de energia cinética* (isto é, a energia cinética depois da colisão menos a energia cinética antes da colisão) para cada bola de gude. Compare os valores obtidos para cada bola de gude.

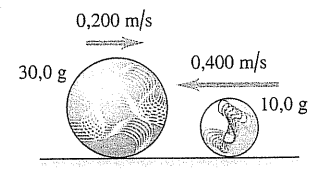


Figura 8.38 Exercício 8.43.

8.44 Forneça os detalhes dos cálculos de α e de β do Exemplo 8.13 (Seção 8.4).

8.45 Moderadores. Os reatores nucleares do Canadá usam moderadores de *água pesada*, nos quais ocorrem colisões elásticas entre nêutrons e dêuterons de massa 2,0 u. (Veja o Exemplo 8.11 da Seção 8.4). a) Qual a velocidade de um nêutron, expressa em função de sua velocidade inicial, depois de uma colisão frontal com um dêuteron que estava inicialmente em repouso? b) Qual é sua energia cinética, expressa como uma fração de sua energia cinética inicial? c) Quantas colisões sucessivas iguais a essa seriam necessárias para reduzir a velocidade de um nêutron até 1/59000 do seu valor original?

8.46 Você está controlando um acelerador de partículas, enviando um feixe de $1{,}50 \times 10^7$ m/s de prótons (massa m) sobre um alvo gasoso de um elemento desconhecido. Seu detector mostra que alguns prótons são rebatidos diretamente para trás depois de uma colisão com um núcleo do elemento desconhecido. Todos esses prótons são rebatidos para trás com velocidade igual $1{,}20 \times 10^7$ m/s. Despreze as velocidades iniciais dos núcleos dos alvos e suponha que as colisões sejam elásticas. a) Calcule a massa do núcleo do elemento desconhecido. Expresse sua resposta em função da massa m do próton. b) Qual é a velocidade do núcleo do elemento desconhecido imediatamente depois dessa colisão?

Seção 8.5 Centro de massa

8.47 As massas e as coordenadas dos centros de massa de três blocos de chocolate são dadas por: (1) 0,300 kg, (0,200 m, 0,300 m); (2) 0,400 kg,(0,100 m, −0,400m); (3) 0,200 kg, (−0,300 m, 0,600 m). Calcule as coordenadas do centro de massa do sistema constituído por esses três blocos de chocolate.

8.48 Determine a posição do centro de massa do sistema constituído pelo Sol e por Júpiter. (Como a massa de Júpiter é muito maior do que as massas dos demais planetas, esta resposta fornece essencialmente a posição do centro de massa do sistema solar.) A posição desse centro de massa está dentro ou fora do Sol? Use os dados do Apêndice F.

8.49 Plutão e Charon. O diâmetro de Plutão é de aproximadamente 2370 km, e o diâmetro do seu satélite Charon é 1250 km. Embora haja variação, em geral eles estão a 19700 km de distância, de um centro a outro. Supondo que Plutão e Charon possuem a mesma composição e, portanto, a mesma densidade média, ache a localização do centro de massa desse sistema em relação ao centro de Plutão.

8.50 Um utilitário de 1200 kg desloca-se a 12,0 m/s ao longo de um elevado retilíneo. Outro carro de 1800 kg, e se deslocando a 20,0 m/s, tem seu centro de massa situado a uma distância de 40,0 m na frente do centro de massa do utilitário (Figura 8.39). a) Calcule a posição do centro de massa do sistema constituído pelos dois carros. b) Calcule o módulo do momento linear total do sistema usando os dados acima. c) Calcule a velocidade do centro de massa do sistema. d) Calcule o módulo do momento linear total do sistema usando a velocidade do centro de massa do sistema. Compare sua resposta com o resultado obtido no item (b).

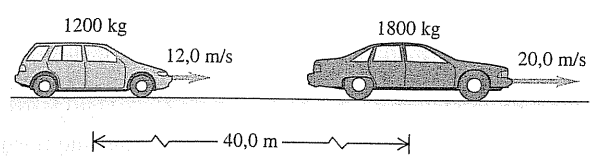


Figura 8.39 Exercício 8.50.

8.51 A peça de uma máquina consiste de uma barra fina e uniforme de 4,0 kg, com 1,50 m de comprimento e está presa por uma dobradiça perpendicular a uma barra vertical semelhante com massa de 3,0 kg e comprimento de 1,80 m. A barra mais longa possui uma bola pequena, porém densa de 2,0 kg em uma das extremidades (Figura 8.40). Qual a distância percorrida horizontalmente e verticalmente pelo centro de massa dessa peça, caso a barra vertical gire 90° no sentido anti-horário de modo a tornar toda a peça horizontal?

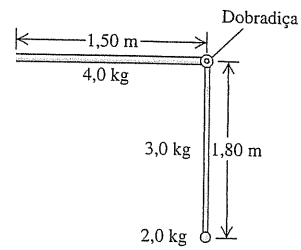


Figura 8.40 Exercício 8.51.

8.52 Em um dado instante, o centro de massa de um sistema de duas partículas está localizado sobre o eixo Ox no ponto $x = 2{,}0$ m e possui velocidade igual a $(5{,}0\ \text{m/s})\hat{\imath}$.. Uma das partículas está sobre a origem. A outra partícula possui massa de 0,10 kg e está em repouso sobre o eixo Ox no ponto $x = 8{,}0$ m. a) Qual é a massa da partícula que está sobre a origem? b) Calcule o momento linear total do sistema. c) Qual é a velocidade da partícula que está sobre a origem?

8.53 No Exemplo 8.14 (Seção 8.5), Rui puxa a corda atingindo uma velocidade de 0,70 m/s. Qual é a velocidade de Jaime?

8.54 Um sistema possui duas partículas. No instante $t = 0$ uma das partículas está na origem; a outra, com massa igual a 0,50 kg, está sobre o eixo Oy no ponto $y = 6{,}0$ m. Para $t = 0$, o centro de massa do sistema está sobre o eixo Oy no ponto $y = 2{,}4$ m. A velocidade do centro de massa do sistema é dada por $(0{,}75\ \text{m/s}^3)t^2\hat{\imath}$. a) Calcule a massa total do sistema. b) Ache a aceleração do centro de massa em função do tempo. c) Calcule a força externa resultante que atua sobre o sistema no instante $t = 3{,}0$ s.

8.55 Um modelo de avião com controle remoto possui momento linear dado por $[(-0{,}75\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^3)t^2 + (3{,}0\ \text{kg}\cdot\text{m/s})]\hat{\imath} + (0{,}25\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2)t\hat{\jmath}$. a) Quais são os componentes x, y e z da força resultante que atua sobre o avião? b) Em que instante t o componente x da força resultante que atua sobre o avião é igual a zero?

*Seção 8.6 Propulsão de um foguete

***8.56** Um pequeno foguete queima 0,0500 kg de combustível por segundo, expelindo-o como um gás cuja velocidade em relação ao foguete possui módulo igual a 1600 m/s. a) Qual é a força de propulsão sobre o foguete? b) O foguete poderia se deslocar no espaço sideral, onde não existe atmosfera? Em caso afirmativo, como você faria para mudar a direção do movimento? Você poderia frear o foguete?

***8.57** Um astronauta de 70 kg flutuando no espaço no interior de uma UMM (unidade de manobra manual) sofre uma aceleração de 0,029 m/s^2 quando aciona um dos motores de propulsão. a) Sabendo que a velocidade do gás N_2 emitido em relação ao astronauta é igual a 490 m/s, qual foi a quantidade de gás usada pelo motor de propulsão em 5,0 s? b) Qual é a força de propulsão desse motor?

***8.58** Um foguete é disparado no espaço sideral, onde a gravidade é desprezível. Sabendo que a massa inicial do foguete é igual a 6000 kg e que ele emite um gás cuja velocidade em relação ao foguete possui módulo igual a 2000 m/s, qual é a quantidade de

gás expelida no primeiro segundo para que sua aceleração seja igual a 25,0 m/s^2?

*8.59 Um foguete é disparado no espaço sideral, onde a gravidade é desprezível. No primeiro segundo ele emite $\frac{1}{160}$ da sua massa como gás de exaustão e possui uma aceleração igual a 15,0 m/s$_2$. Qual é o módulo da velocidade do gás de exaustão em relação ao foguete?

*8.60 Um modelo de motor de foguete C 6-5 possui um impulso igual a 10,0 N . s durante 1,70 s, enquanto queima 0,0125 kg de combustível. Sua força de propulsão máxima é igual a 13,3 N. A massa inicial do motor mais a massa do combustível é igual a 0,0258 kg. a) A força de propulsão média corresponde a qual fração da força de propulsão máxima? b) Calcule o módulo da velocidade relativa do gás de exaustão, considerando-o constante. c) Supondo que a velocidade relativa do gás de exaustão seja constante, ache a velocidade final do motor quando ele for disparado a partir do repouso no espaço sideral sem gravidade, desprezando a massa da estrutura na qual ele está ligado.

*8.61 Um foguete com estágio único é disparado a partir do repouso no espaço sideral, onde a gravidade é desprezível. Sabendo que ele queima seu combustível em 50,0 s e que a velocidade relativa do gás de exaustão é dada por $v_{ex} = 2100$ m/s, qual deve ser a razão m_0/m para ele atingir uma velocidade final de 8,0 km/s (a velocidade orbital aproximada de um satélite artificial da Terra)?

*8.62 Obviamente um foguete pode ser acelerado até atingir velocidades muito elevadas, porém, qual deve ser uma velocidade máxima razoável? Considere um foguete disparado a partir do repouso no espaço sideral, onde a gravidade é desprezível. a) Se a velocidade relativa do gás de exaustão é 2000 m/s e você deseja que a velocidade final do foguete seja de $1{,}0 \times 10^{-3}\,c$, onde c é a velocidade da luz, qual deve ser a fração da massa inicial do foguete e combustível que *não* é combustível? b) Qual deve ser essa fração para que a velocidade final do foguete seja de 3000 m/s?

Problemas

8.63 Uma bola de aço de massa igual a 40,0 g é solta de uma altura de 2,0 m sobre uma barra de aço horizontal. A bola é rebatida até uma altura de 1,60 m. a) Calcule o impulso comunicado para a bola durante a colisão. b) Sabendo que a bola permanece em contato com a barra durante 2,0 ms, calcule a força média exercida sobre a bola durante a colisão.

8.64 Em uma erupção vulcânica, uma rocha de 2400 kg é lançada verticalmente de baixo para cima. Em seu ponto máximo, ela explode repentinamente (devido a gases retidos) em dois fragmentos, sendo que a massa de um dos fragmentos é três vezes maior do que a do outro. O fragmento mais leve passa a se deslocar somente com velocidade horizontal e cai no solo a 274 m diretamente ao norte do ponto da explosão. Onde o outro fragmento cairá? Despreze a resistência do ar.

8.65 Imediatamente antes de colidir com a raquete, uma bola de tênis pesando 0,560 N possui uma velocidade igual a $(20{,}0\ \text{m/s})\hat{i} - (4{,}0\ \text{m/s})\hat{j}$.. Durante os 3,0 ms em que a raquete ficou em contato com a bola, a força resultante é constante e igual a $-(380\ \text{N})\hat{i} + (110\ \text{N})\hat{j}$. a) Quais são os componentes x e y do impulso da força resultante que atuam sobre a bola? b) Quais são os componentes x e y da velocidade final da bola?

8.66 Três vagões conectados estão se movendo em uma estrada de ferro e se acoplam com um quarto vagão, que estava inicialmente em repouso. Os quatro vagões continuam se movendo e se acoplam com um quinto vagão, que estava inicialmente em repouso. Esse processo continua até que a velocidade final do conjunto de vagões seja igual a um quinto da velocidade inicial dos três vagões. Todos os vagões são idênticos. Desprezando o atrito, quantos vagões existem no conjunto final de vagões?

8.67 Um automóvel conversível com massa igual a 1500 kg desloca-se do norte para o sul e um veículo utilitário com massa igual a 2000 kg desloca-se do leste para o oeste. Qual é a velocidade de cada carro, sabendo que o momento linear total do sistema dos dois carros é igual a 8000 kg · m/s^2 formando um ângulo de 60,0° no sentido da rotação do sul para o oeste?

8.68 Três discos de hóquei idênticos possuindo ímãs que se repelem estão sobre uma mesa de ar horizontal. Eles são mantidos unidos e a seguir são libertados simultaneamente. O módulo da velocidade em cada instante é sempre o mesmo para os discos. Um deles se move do leste para o oeste. Determine a direção e o sentido da velocidade de cada um dos outros discos.

8.69 As esferas A (massa 0,020 kg), B (massa 0,030 kg) e C (massa 0,050 kg) se aproximam da origem deslizando sobre uma mesa de ar sem atrito (Figura 8.41). As velocidades iniciais de A e de B são indicadas na figura. Todas as três esferas atingem a origem no mesmo instante e ficam coladas. a) Quais devem ser os componentes x e y da velocidade inicial de C para que os três objetos unidos se desloquem a 0,50 m/s no sentido do eixo $+Ox$ após a colisão? b) Se C possui a velocidade encontrada no item (a), qual é a variação da energia cinética do sistema das três esferas ocasionada pela colisão?

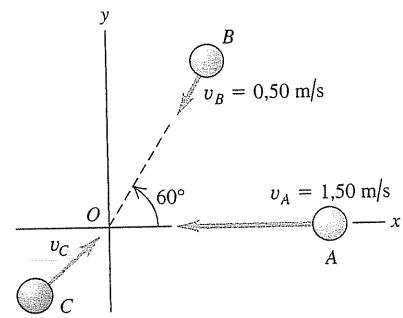


Figura 8.41 Problema 8.69.

8.70 Um carrinho de estrada de ferro, impulsionado manualmente, move-se ao longo de um trilho horizontal sem atrito e com resistência do ar desprezível. Nos casos a seguir, o carrinho possui massa total (carro mais tudo que está em seu interior) igual a 200 kg e se desloca a 5,0 m/s de oeste para leste. Calcule a velocidade final do carrinho em cada caso, supondo que ele não abandone os trilhos. a) Um corpo com 25,0 kg de massa é lançado lateralmente para fora do carrinho com velocidade de módulo igual a 2,0 m/s em relação à velocidade inicial do carrinho. b) Um corpo com 25,0 kg de massa é lançado para fora do carrinho em sentido contrário ao do seu movimento e com velocidade de módulo igual a 5,0 m/s em relação à velocidade inicial ao carrinho. c) Um corpo com 25,0 kg de massa é lançado para dentro do carrinho com velocidade de módulo igual a 6,0 m/s em relação ao solo e com sentido contrário ao da velocidade inicial do carrinho.

8.71 Variação de massa. Um vagão está cheio de areia e se desloca com uma velocidade inicial de 15,0 m/s sobre trilhos horizontais. Despreze o atrito com os trilhos. A massa total do vagão cheio de areia é igual a 85000 kg. A porta do vagão não está bem fechada e a areia começa a escoar para fora pela parte inferior. Depois de 20 minutos, 13000 kg escaparam do vagão. Qual é então a velocidade do vagão? (Compare sua análise com aquela que você usou para resolver o Exercício 8.27.)

8.72 Em uma corrida envolvendo automóveis clássicos, um carro Nash Metropolitan 1955 com 840 kg se desloca com velocidade de 9,0 m/s, seguido de um carro Packard Clipping 1957 com 1620 kg roncando com uma velocidade de 5,0 m/s. a) Qual dos dois carros possui a maior energia cinética? Qual é a razão entre a energia cinética do Nash e a energia cinética do Packard. b) Qual dos dois carros possui o maior módulo do momento linear? Qual a razão entre o módulo do momento linear do Nash e o módulo do momento linear do Packard. c) Seja F_N a força resultante necessária para fazer parar o Nash em um intervalo de tempo t_1, e seja F_P a força resultante necessária para fazer parar o Packard no mesmo intervalo de tempo. Qual das duas é maior, F_N ou F_P? Qual é a razão F_N/F_P? d) Seja F_N a força resultante necessária para fazer parar o *Nash* em uma dada distância d, e seja F_P a força resultante necessária para fazer parar o Packard na mesma distância. Qual das duas é maior, F_N ou F_P? Qual é a razão F_N/F_P?

8.73 Um soldado dispara sua pistola automática de 8 tiros com a taxa máxima de 1000 disparos por minuto. Cada bala possui massa igual a 7,45 g e velocidade igual a 293 m/s em relação ao solo no momento em que a bala sai do cano da arma. Calcule a força média de recuo da arma durante esse disparo.

8.74 Uma armação contendo um prato estica a mola onde ela está suspensa até uma distância de 0,050 m. Um pedaço de massa pegajosa de 0,200 kg é largado do repouso a uma altura de 30,0 cm em relação ao prato (Figura 8.42). Ache a distância máxima que o prato pode se mover para baixo a partir da posição de equilíbrio inicial.

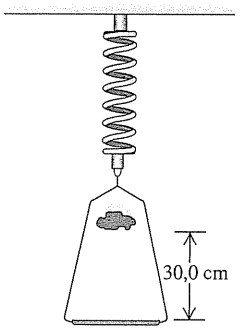


Figura 8.42 Problema 8.74.

8.75 Uma bala de 8,0 g disparada por um rifle penetra e fica retida em um bloco de 0,992 kg ligado a uma mola e apoiado sobre uma superfície horizontal sem atrito (Figura 8.43). O impacto produz uma compressão de 15,0 cm na mola. A calibração mostra que uma força de 0,750 N comprime a mola 0,250 cm. a) Calcule o módulo da velocidade do bloco imediatamente após o impacto. b) Qual era a velocidade inicial da bala?

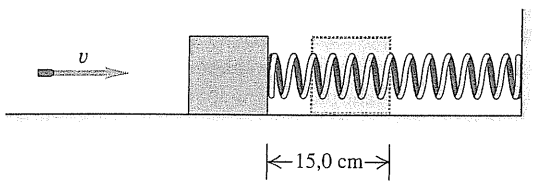


Figura 8.43 Problema 8.75.

8.76 Uma bala ricocheteando. Uma pedra de 0,100 kg está em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. Uma bala de 6,0 g, se deslocando horizontalmente a 350 m/s, colide com a pedra e ricocheteia ao longo da superfície com velocidade de 250 m/s em uma direção ortogonal à sua velocidade inicial. a) Determine o módulo, a direção e o sentido da velocidade da pedra após o impacto. b) A colisão é perfeitamente elástica?

8.77 Um dublê de cinema (massa 80,0 kg) está em pé sobre a borda de uma janela situada a 5,0 m acima do piso (Figura 8.44). Segurando uma corda amarrada a um candelabro, ele oscila para baixo para atingir o vilão do filme (massa 70,0 kg), que está em pé diretamente abaixo do candelabro. (Suponha que o centro de massa do dublê se mova para baixo 5,0 m. Ele larga a corda no instante em que atinge o vilão.) a) Com que velocidade os dois adversários engalfinhados começam a deslizar ao longo do piso? b) Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre seus corpos e o piso é dado por $\mu_C = 0{,}250$, até que distância eles deslizam ao longo do piso?

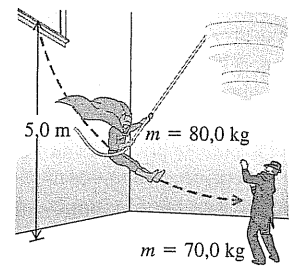


Figura 8.44 Problema 8.77.

8.78 Duas massas idênticas são liberadas do repouso em um recipiente hemisférico liso e raio R, a partir da posição indicada na Figura 8.45. Despreze o atrito entre as massas e a superfície do recipiente. Se elas colarem ao colidirem, que altura acima da parte inferior do recipiente as massas atingirão após a colisão?

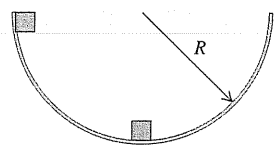


Figura 8.45 Problema 8.78.

8.79 Uma bola de massa M que se move horizontalmente a 5,0 m/s colide elasticamente com um bloco de massa $3M$, que está inicialmente suspenso em repouso do teto por um fio de 50,0 cm. Ache o ângulo máximo com que o bloco oscila após ser atingido.

8.80 Uma esfera de chumbo de 20,0 kg está preso a um gancho suspenso por um fio fino com 3,50 m de comprimento e está livre para oscilar formando um círculo completo. Subitamente a esfera de chumbo é atingida horizontalmente por um dardo de aço de 5,0 kg que a penetra. Qual deve ser a velocidade inicial mínima do dardo para que o conjunto dê uma volta completa após a colisão?

8.81 Uma bola de 8,0 kg, suspensa do teto por um fio leve de 135 cm de comprimento, é atingida em uma colisão elástica por uma bola de 2,0 kg que se move horizontalmente a 5,0 m/s imediatamente antes da colisão. Ache a tensão no fio logo após a colisão.

8.82 Uma bola de borracha com massa m é liberada do repouso a uma altura h acima do solo. Após o primeiro quique, ela sobe a 90% da sua altura original. Qual impulso (módulo, direção e sentido) o solo exerce sobre essa bola durante o seu primeiro quique? Expresse sua resposta em termos das variáveis m e h.

8.83 Uma bala de 4,0 g é disparada horizontalmente com velocidade de 400 m/s contra um bloco de madeira de 0,800 kg, inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal. A bala atravessa o bloco e emerge com uma velocidade reduzida para 120 m/s. O bloco desliza ao longo da superfície até uma distância de 45,0 cm da sua posição inicial. a) Qual é o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície? b) Qual é a diminuição da energia cinética da bala? c) Qual é a energia cinética do bloco no instante em que a bala emerge do bloco?

8.84 Uma bala de 5,0 g *atravessa* um bloco de madeira de 1,0 kg suspenso por um fio de comprimento igual a 2,0 m. O centro de massa do bloco sobe até uma altura de 0,45 cm. Sabendo que a velocidade inicial da bala era de 450 m/s, ache a velocidade da bala no instante em que ela emerge do bloco.

8.85 Um nêutron de massa m colide frontalmente com um núcleo de massa M, que está inicialmente em repouso. a) Mostre que, se a energia cinética inicial do nêutron fosse K_0, a energia cinética que ele perde durante a colisão é dada por $4mMK_0/(M + m)_2$. b) Para qual valor de M o nêutron incidente perde a maior energia? c) Quando M possui o valor calculado na parte (b), qual é a velocidade do nêutron depois da colisão?

8.86 Compartilhamento de energia em colisões elásticas. Um objeto em repouso com massa m_B é atingido frontalmente por um objeto com massa m_A que está se movendo inicialmente à velocidade v_0. a) Se a colisão for elástica, qual porcentagem da energia original cada objeto terá após a colisão? b) O que a sua resposta para o item (a) fornece para os seguintes casos especiais i) $m_A = m_B$ e ii) $m_A = 5m_B$? c) Para quais valores, se for o caso, da razão m_A/m_B a energia cinética original é compartilhada igualmente pelos dois objetos após a colisão?

8.87 No centro de distribuição de uma transportadora de carga, um carrinho aberto com massa de 50,0 kg roda da direita para a esquerda com velocidade escalar de 5,0 m/s (Figura 8.46). Despreze o atrito entre o carrinho e o piso. Um pacote de 15,0 kg desliza de cima para baixo por uma calha de transporte que está inclinada a 37° do plano horizontal e deixa o final da calha com velocidade de 3,0 m/s. O pacote cai dentro do carrinho, e eles rodam juntos. Considerando que o final da calha está a uma distância vertical de 4,0 m acima do fundo do carrinho, quais são a) a velocidade escalar do pacote pouco antes de cair dentro do carrinho e b) a velocidade escalar final do carrinho?

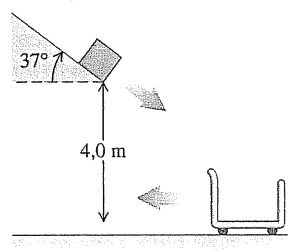


Figura 8.46 Problema 8.87.

8.88 Um disco de hóquei azul de massa 0,0400 kg, deslizando com velocidade igual a 0,200 m/s sobre uma mesa de ar horizontal sem atrito, sofre uma colisão frontal perfeitamente elástica com um disco de hóquei vermelho de massa m, inicialmente em repouso. Depois da colisão, a velocidade do disco de hóquei azul é de 0,050 m/s no mesmo sentido da sua velocidade inicial. Determine a) o módulo, a direção e o sentido do disco de hóquei vermelho depois da colisão; b) a massa m do disco de hóquei vermelho.

8.89 Dois asteróides com massas m_A e m_B se movem com velocidades $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ em relação a um astrônomo que está em um veículo espacial. a) Mostre que a energia cinética total medida pelo astrônomo é dada por

$$K = \tfrac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + \tfrac{1}{2}(m_A v_A'^2 + m_B v_B'^2)$$

onde $\vec{v}_{\text{cm}}$ e M são definidos como na Seção 8.5, $\vec{v}_A' = \vec{v}_A - \vec{v}_{\text{cm}}$, e $\vec{v}_B' = \vec{v}_B - \vec{v}_{\text{cm}}$. Nessa expressão a energia cinética total dos dois asteróides é a energia associada com o centro de massa mais a energia associada com o movimento em torno do centro de massa. b) Se ocorrer uma colisão entre os dois asteróides, qual deve ser a energia cinética *mínima* que eles podem possuir em relação ao astrônomo após a colisão? Explique.

8.90 Suponha que você mantenha uma bola pequena em contato com uma bola grande diretamente sobre seu centro. Se você largar a bola pequena um pequeno intervalo de tempo após largar a bola grande, a bola pequena será rebatida para cima com uma velocidade surpreendente. Para exemplificar o caso extremo, despreze a resistência do ar e suponha que a bola grande faça uma colisão elástica com o solo, a seguir suba e colida elasticamente com a bola pequena que ainda está descendo. Imediatamente antes da colisão entre as duas bolas, a bola grande sobe com velocidade $\vec{v}$, e a bola pequena está descendo com velocidade $-\vec{v}$. (Você sabe por quê?) Suponha que a bola grande possua massa muito maior do que a da bola pequena. a) Qual é a velocidade da bola pequena imediatamente depois da colisão com a bola grande? b) Usando a resposta do item (a), ache a razão entre a distância percorrida pela bola pequena quando ela retorna para cima e a distância que ela percorreu antes da colisão.

8.91 Jack e Jill estão em pé sobre um engradado em repouso sobre a superfície horizontal sem atrito de um lago gelado. A massa de Jack é igual a 75,0 kg, Jill possui massa de 45,0 kg e o engradado possui massa de 15,0 kg. Eles se lembram de que deveriam pegar um balde de água e pulam horizontalmente para fora do engradado. Em cada pulo, cada pessoa se afasta do engradado com velocidade de 4,0 m/s em relação ao engradado. a) Qual é a velocidade final do engradado, se Jack e Jill pulam simultaneamente na mesma direção e no mesmo sentido? (*Sugestão:* Use um sistema de referência inercial fixo no solo.) b) Qual é a velocidade final do engradado se Jack pula primeiro e, alguns segundos depois Jill pula na mesma direção e no mesmo sentido? c) Qual é a velocidade final do engradado se Jill pula primeiro e alguns segundos depois Jack pula na mesma direção e no mesmo sentido?

8.92 Compartilhamento de energia. Um objeto com massa m, inicialmente em repouso, explode em dois fragmentos, um com massa m_A e o outro com massa m_B, onde $m_A + m_B = m$. a) Se a energia Q é liberada na explosão, quanta energia cinética cada fragmento terá imediatamente após a colisão? b) Qual porcentagem da energia total liberada cada fragmento obtém quando um fragmento possui quatro vezes a massa do outro?

8.93 Decomposição do nêutron. Um nêutron em repouso se decompõe (se rompe) em um próton e um elétron. Uma energia é liberada no processo de decomposição e se transforma em energia cinética do próton e do elétron. A massa de um próton é 1836 vezes maior que a massa de um elétron. Qual fração da energia cinética total liberada se converte em energia cinética do próton?

8.94 Um núcleo de ^{232}Th (tório) em repouso se decompõe em um núcleo de ^{228}Ra (rádio) com a emissão de uma partícula alfa. A energia cinética total dos fragmentos resultantes da decomposição é $6{,}54 \times 10^{-13}$ J. Uma partícula alfa possui 1,76% da massa de um núcleo de ^{228}Ra. Calcule a energia cinética a) do núcleo de ^{228}Ra em recuo e b) da partícula alfa.

8.95 Antineutrino. Na decomposição beta, um núcleo emite um elétron. Um núcleo de ^{210}Bi (bismuto) em repouso sofre uma decomposição beta para ^{210}Po (polônio). Suponha que o elétron emitido se mova para a direita com um momento linear de $5{,}60 \times 10^{-22}$ kg . m/s. O núcleo de ^{210}Po, com massa $3{,}50 \times 10^{-25}$ kg, recua para a esquerda a uma velocidade $1{,}14 \times 10^{-3}$m/s. A conservação do momento linear requer que uma segunda partícula, chamada de antineutrino, também seja emitida. Calcule o módulo, a direção e o sentido do momento linear do antineutrino que é emitido nessa decomposição.

8.96 Um próton se deslocando ao longo do eixo $+Ox$ com velocidade v_{A1} sofre uma colisão elástica fora da linha central com outro próton idêntico que está inicialmente em repouso. Depois desse impacto, o primeiro próton se desloca com velocidade v_{A2} no primeiro quadrante, formando um ângulo α com o eixo $+Ox$, e o segundo próton se desloca com velocidade v_{B2} no quarto quadrante formando um ângulo β com o eixo $+Ox$ (veja a Figura 8.13). a) Escreva as equações que descrevem a lei da conservação do momento linear para os componentes x e y. b) Eleve ao quadrado as equações obtidas na parte (a) e some membro a membro os resultados. c) Introduza agora o fato de a colisão ser elástica. d) Demonstre que $\alpha + \beta = \pi/2$. (Você está demonstrando que esse resultado é válido para qualquer colisão elástica fora da linha central entre dois corpos de mesma massa, quando um dos corpos está inicialmente em repouso.)

8.97 Um disco de hóquei B, inicialmente em repouso sobre uma superfície de gelo sem atrito, sofre uma colisão com outro disco de hóquei A que possui a mesma massa do primeiro. O disco de hóquei A estava inicialmente se deslocando a 15,0 m/s e sofre um desvio de 25,0° em relação à direção inicial. Considere uma colisão perfeitamente elástica. Calcule o módulo da velocidade final de cada disco de hóquei e a direção e o sentido da velocidade final do disco de hóquei B. (*Sugestão:* Use a relação deduzida na parte (d) do Problema 8.96).

8.98 João e José estão sentados em um trenó que está inicialmente em repouso sobre uma superfície de gelo sem atrito. O peso de João é igual a 800 N, o peso de José é igual a 600 N e o peso do trenó é igual a 1000 N. Ao notar a presença de uma aranha venenosa no interior do trenó, eles imediatamente pulam para fora. João pula para a esquerda com velocidade (em relação ao gelo) igual a 5,0 m/s formando um ângulo de 30,0° acima da horizontal, e José pula para a direita com velocidade (em relação ao gelo) igual a 7,00 m/s formando um ângulo de 36,9° acima da horizontal. Determine o módulo, a direção e o sentido da velocidade do trenó depois que eles pulam para fora.

8.99 Os objetos da Figura 8.47 foram feitos com arames uniformes e dobrados nas formas indicadas. Ache a posição do centro de massa de cada um destes objetos.

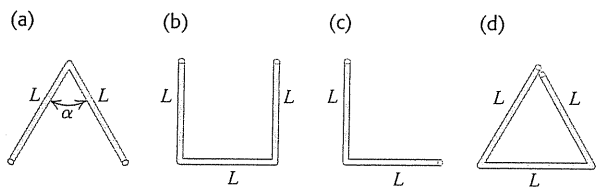


Figura 8.47 Problema 8.99.

8.100 Uma jovem de 45,0 kg está em pé sobre uma canoa de 60,0 kg e comprimento igual a 5,0 m. Ela caminha a partir de um ponto situado a 1,0 m de uma das extremidades da canoa até atingir a outra extremidade da canoa (Figura 8.48). Desprezando a resistência da água ao movimento da canoa, qual a distância que a canoa se move nesse processo?

8.101 Você está em pé sobre um bloco de concreto apoiado sobre um lago congelado. Suponha que não exista atrito entre o bloco e a superfície do lago congelado. Você possui um peso cinco vezes menor do que o peso do bloco. Se você caminhar para frente com velocidade de 2,0 m/s, com que velocidade o bloco se moverá em relação ao gelo?

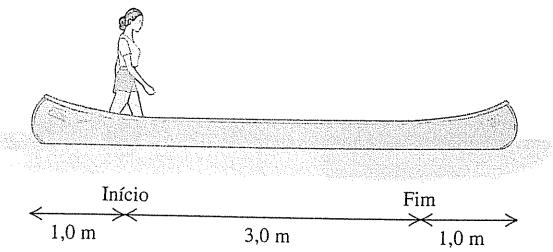


Figura 8.48 Problema 8.100.

8.102 Um projétil de 20,0 kg é disparado com velocidade de 80,0 m/s formando um ângulo de 60,0° acima da horizontal. No ponto mais elevado de sua trajetória o projétil explode se dividindo em dois fragmentos de mesma massa, um dos quais cai verticalmente com velocidade inicial igual a zero. Despreze a resistência do ar. a) Supondo um solo horizontal, qual é a distância entre o ponto inicial do disparo e o ponto onde o segundo fragmento atinge o solo? b) Qual é a quantidade de energia libertada na explosão?

8.103 Um foguete de fogos de artifício é disparado verticalmente de baixo para cima. Na sua altura máxima de 80,0 m, ele explode e se parte em dois pedaços, um com massa de 1,40 kg e o outro com massa de 0,28 kg. Na explosão, 860 J de energia química é convertida em energia cinética dos dois fragmentos. a) Qual é a velocidade escalar de cada fragmento logo após a explosão? b) É observado que os dois fragmentos atingem o solo ao mesmo tempo. A que distância um do outro eles caem no solo? Suponha que o solo é plano e a resistência do ar é desprezível.

8.104 Um projétil de 12,0 kg é lançado a um ângulo de 55,0° acima do plano horizontal, com velocidade escalar inicial de 150 m/s. Ao atingir a altura máxima, ele explode em dois fragmentos, sendo um deles três vezes mais pesado que o outro. Os dois fragmentos atingem o solo ao mesmo tempo. Considere que a resistência do ar é desprezível. Se o fragmento mais pesado aterrissar no mesmo ponto de onde o projétil foi lançado, onde o fragmento mais leve cairá no solo e quanta energia foi liberada na explosão?

8.105 Uma reação nuclear. A fissão, processo que fornece energia para um reator nuclear, ocorre quando um núcleo pesado é dividido em dois núcleos com pesos médios. Uma dessas reações ocorre quando um nêutron colide com um núcleo de ^{235}U (urânio) dividindo-o em um núcleo de ^{141}Ba (bário) e um núcleo de ^{92}Kr (criptônio). Nessa reação, dois nêutrons também são emitidos do núcleo de ^{235}U original. Antes da colisão, a configuração é indicada na Figura 8.49a. Depois da colisão o núcleo de ^{141}Ba se move no sentido do eixo $+Oz$ e o núcleo de ^{92}Kr se move no sentido do eixo $-Oz$. Os três nêutrons passam a se mover no plano xy como mostra a Figura 8.49b. Sabendo que o módulo da velocidade do nêutron original é de $3,0 \times 10^3$ m/s e que o módulo da sua velocidade final é de $2,0 \times 10^3$ m/s com as direções indicadas, quais são as velocidades dos outros dois nêutrons e o que você pode afirmar sobre as velocidades dos núcleos ^{141}Ba e ^{92}Kr? (A massa do núcleo de ^{141}Ba é aproximadamente igual a $2,3 \times 10^{-25}$ kg e a do núcleo de ^{92}Kr é aproximadamente igual a $1,5 \times 10^{-25}$ kg.)

8.106 Referencial do centro de massa. Um disco de hóquei A (com massa igual a m_A) deslocando-se com velocidade $\vec{v}_{A1}$ ao longo do eixo $+Ox$ sobre uma mesa de ar horizontal sem atrito sofre uma colisão frontal elástica com um disco de hóquei B (massa m_B) inicialmente em repouso. Depois da colisão, os dois

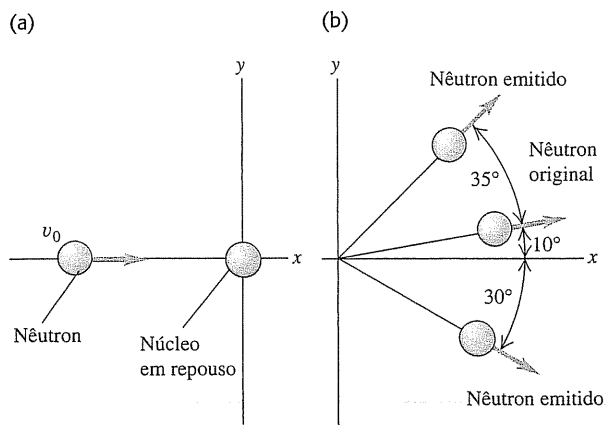


Figura 8.49 Problema 8.105.

discos se movem ao longo do eixo $+Ox$. a) Calcule a velocidade do centro de massa do sistema dos dois discos antes da colisão. b) Considere um sistema de coordenadas cuja origem é localizada no centro de massa e que se move com ele. Esse sistema de coordenadas constitui um sistema de referência inercial? c) Quais são as velocidades iniciais $\vec{u}_{A1}$ e $\vec{u}_{B1}$ neste referencial do centro de massa? Qual é o momento linear total do sistema nesse referencial do centro de massa? d) Use a lei da conservação do momento linear e a lei da conservação da energia, aplicando-as para o referencial do centro de massa, para obter relações entre o momento linear final e o momento linear inicial de cada disco de hóquei e, portanto, entre a velocidade final e a velocidade inicial de cada disco de hóquei. Os seus resultados mostrarão que problemas envolvendo uma colisão frontal elástica em uma dimensão podem ser descritos de modo muito simples em relação ao referencial do centro de massa. e) Considere $m_A = 0{,}400$ kg, $m_B = 0{,}200$ kg e $v_{A1} = 6{,}0$ m/s. Usando o resultado da parte (d), determine as velocidades do centro de massa $\vec{u}_{A1}$ e $\vec{u}_{B1}$; a seguir, transforme as velocidades para o sistema estacionário para achar as velocidades finais dos discos. Os seus resultados concordam com os obtidos nas equações (8.24) e (8.25)?

8.107 O *coeficiente de restituição* ϵ de uma colisão frontal é definido como a razão entre a velocidade relativa depois da colisão e a velocidade relativa antes da colisão. a) Qual é o valor de para ϵ uma colisão completamente inelástica? b) Qual é o valor de ϵ para uma colisão elástica? c) Uma bola é largada de uma altura h sobre uma superfície estacionária e retorna até uma altura H_1. Mostre que $\epsilon = \sqrt{H_1/h}$. d) Uma bola de basquete enchida com a pressão apropriada possui um coeficiente de restituição igual a 0,85. Se essa bola é largada de uma altura de 1,2 m acima de um piso de madeira até que altura ela retorna? e) Quando a bola é rebatida depois da primeira colisão com o solo, a altura atingida é H_1. Supondo que ϵ seja constante, mostre que a altura atingida quando a bola é rebatida depois de n colisões com o solo é dada por $H_n = \epsilon^{2n}h$. f) Supondo que ϵ seja constante, qual a altura atingida por uma bola de basquete enchida com a pressão apropriada e largada de uma altura de 1,2 m?

8.108 Energia de ligação da molécula de hidrogênio. Quando dois átomos de hidrogênio de massa m se combinam para formar a molécula diatômica do hidrogênio (H_2), a energia potencial do sistema depois da combinação é igual a $-\Delta$, onde Δ é uma grandeza positiva denominada *energia de ligação* da molécula. a) Mostre que em uma colisão envolvendo somente dois átomos de hidrogênio é *impossível* formar uma molécula de H_2, porque não poderia ocorrer simultaneamente conservação do momento linear e conservação da energia. (*Sugestão:* Se você provar que essa afirmação é válida em um dado sistema de referência, então ela será válida em qualquer sistema de referência. Você sabe por quê?) b) Em uma colisão envolvendo *três* átomos de hidrogênio, uma molécula de H_2 pode ser formada. Suponha que antes da colisão cada um dos três átomos se aproxime com velocidade igual a $1{,}0 \times 10^3$ m/s e que as direções dessas velocidades formem entre si ângulos iguais a 120°, de modo que a cada instante os átomos estejam sobre os vértices de um triângulo equilátero. Calcule a velocidade do átomo de hidrogênio que sobra depois da colisão e a velocidade da molécula de H_2. A energia de ligação da molécula de H_2 é dada por $\Delta = 7{,}23 \times 10^{-19}$ J e a massa do átomo de hidrogênio é igual a $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg.

8.109 Uma carroça com massa total de 300 kg com duas caixas de ouro estava em repouso no alto de uma ladeira com inclinação de 6,0° e a uma distância de 50 m da base (Figura 8.50). Um bandido a separa dos cavalos que a puxavam, planejando fazer a carroça rolar ladeira abaixo e continuar se deslocando no terreno horizontal até cair em uma ribanceira, no fundo da qual os outros bandidos da quadrilha esperavam. Porém, Zorro (massa 75,0 kg) e Tonto (massa 60,0 kg) aguardavam no alto de uma árvore situada a uma distância de 40 m da ribanceira. Eles saltaram verticalmente sobre a carroça no instante em que ela passava embaixo da árvore. a) Sabendo que dispunham de apenas 5,0 s para pegar o ouro e pular da carroça antes que ela caísse na ribanceira, teriam eles conseguido realizar a tarefa? Despreze o atrito de rolamento. b) Quando os dois heróis pulam para o interior da carroça, a energia cinética do sistema carroça mais heróis é conservada? Caso não seja conservada, em quanto ela aumenta ou diminui?

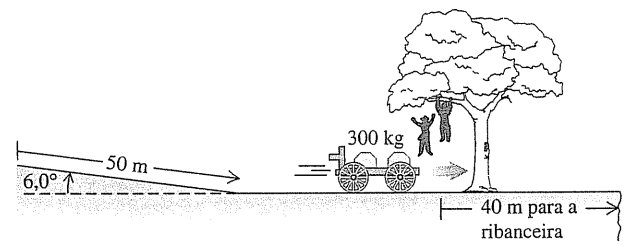


Figura 8.50 Problema 8.109.

***8.110** Na Seção 8.6 consideramos um foguete disparado no espaço sideral, onde não existe gravidade nem resistência do ar. Suponha agora que o foguete esteja sendo acelerado verticalmente a partir da superfície terrestre. Continue desprezando a resistência do ar e suponha que o foguete atinja uma altura não muito elevada de modo que o valor de g possa ser considerado constante. a) Como a Equação (8.37) se modifica com a presença da força da gravidade? b) Deduza uma expressão análoga à Equação (8.39) para a aceleração a do foguete. c) Qual seria a aceleração do foguete no Exemplo 8.15 (Seção 8.6) supondo que ele esteja próximo da superfície terrestre em vez de estar no espaço sideral? Despreze a resistência do ar. d) Calcule a velocidade do foguete no Exemplo 8.16 (Seção 8.6) 90 s depois de ele ser disparado da superfície terrestre em vez de estar no espaço sideral. Despreze a resistência do ar. Como suas respostas se comparam com as velocidades obtidas no Exemplo 8.16?

***8.111 Um Foguete com muitos estágios.** Suponha que o primeiro estágio de um foguete com dois estágios possua massa total de

12000 kg, sendo de 9000 kg a massa do combustível. A massa total do segundo estágio é igual a 1000 kg, sendo de 700 kg a massa do combustível. Suponha que a velocidade relativa v_{ex} do material expelido seja constante e despreze qualquer efeito da gravidade. (O efeito da gravidade é pequeno durante o período da combustão, quando a taxa de consumo de combustível é elevada.) a) Suponha que a massa total do combustível transportado pelo foguete com dois estágios seja utilizada em um foguete com um único estágio com a mesma massa total de 13000 kg. Para um foguete partindo do repouso, qual seria, em termos de v_{ex}, sua velocidade no momento em que o combustível termina? b) Para um foguete com dois estágios, qual seria sua velocidade no momento em que o combustível do primeiro estágio termina, sabendo que o primeiro estágio transporta o segundo até esse ponto? A seguir, essa velocidade torna-se a velocidade inicial do segundo estágio. Nesse ponto, o segundo estágio se separa do primeiro. c) Qual é a velocidade final do segundo estágio? d) Qual deve ser o valor de v_{ex} para que o segundo estágio atinja uma velocidade final igual a 7,0 km/s?

*8.112 Suponha que a massa do foguete descrito nos Exemplos 8.15 e 8.16 (Seção 8.6) seja uma função do tempo dada por

$$m(t) = \begin{cases} m_0 & \text{para } t < 0 \\ m_0\left(1 - \dfrac{t}{120\text{ s}}\right) & \text{para } 0 \le t \le 90\text{ s} \\ m_0/4 & \text{para } t \ge 90\text{ s} \end{cases}$$

a) Calcule e faça um gráfico da velocidade em função do tempo desde $t = 0$ até $t = 100$ s. b) Calcule e faça um gráfico da aceleração em função do tempo desde $t = 0$ até $t = 100$ s. c) Um astronauta de 75 kg está deitado sobre uma cadeira inclinada durante o lançamento do foguete. Qual é a força resultante máxima exercida pela cadeira sobre o astronauta durante o lançamento do foguete? Como se compara essa resposta com o peso do astronauta sobre a Terra?

Problemas Desafiadores

8.113 Na Seção 8.5 calculamos o centro de massa considerando objetos compostos por um número *finito* de massas puntiformes ou objetos que por simetria pudessem ser representados por um número finito de massas puntiformes. Para um objeto cuja distribuição de massas não permite uma determinação simples do centro de massa mediante considerações de simetria, as somas indicadas nas equações (8.28) devem ser generalizadas para integrais:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm$$

onde x e y são as coordenadas de uma pequena porção do objeto de massa dm. A integração é feita sobre o volume total do objeto. Considere uma barra delgada de comprimento L, massa M e seja A a área da seção reta da barra. Suponha um sistema de coordenadas com origem na extremidade esquerda da barra e com o eixo $+Ox$ ao longo da barra. a) Sabendo que a densidade $\rho = M/V$ do objeto é uniforme, integre as relações anteriores para mostrar que a coordenada x do centro de massa da barra coincide com o seu centro. b) Sabendo que a densidade varia linearmente com x, ou seja, $\rho = \alpha x$, onde α é uma constante positiva, determine a coordenada x do centro de massa da barra.

8.114 Use o método do Problema Desafiador 8.113 para determinar as coordenadas x e y do centro de massa de uma placa metálica semicircular com densidade uniforme ρ e espessura t. Chame de a o raio da placa. Então, a massa da placa é $M = \frac{1}{2}\rho\pi a^2 t$. Use o sistema de coordenadas indicado na Figura 8.51.

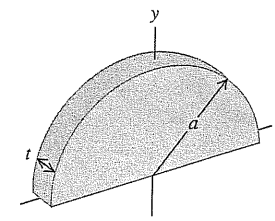


Figura 8.51 Problema Desafiador 8.114.

8.115 Um quarto de uma corda de comprimento l está suspensa no ar apoiada na borda de uma mesa sem atrito. A corda possui uma densidade linear (massa por unidade de comprimento) uniforme λ (a letra grega 'lambda'), e sua extremidade que está sobre a mesa é mantida em repouso por uma pessoa. Qual é o trabalho realizado por essa pessoa para puxar a corda lentamente e elevar a parte suspensa até que a corda fique inteiramente sobre a mesa? Resolva o problema usando dois métodos, como se segue. a) Ache a força que a pessoa deve realizar para elevar a corda e a partir daí calcule o trabalho realizado. Note que essa força é variável porque a cada instante diferente, frações da corda ficam suspensas na borda da mesa. b) Suponha que o segmento da corda que inicialmente estava suspenso na borda da mesa possui toda a sua massa concentrada em seu centro de massa. Calcule o trabalho necessário para elevar essa massa até a altura da mesa. Talvez você ache esse método mais simples do que o usado na parte (a). Como as duas respostas se comparam e por que você obtém esse resultado?

*8.116 **Uma gota de chuva com massa variável.** Em um problema de propulsão de um foguete, a massa é variável. Outro problema com massa variável é fornecido por uma gota de chuva caindo no interior de uma nuvem que contém muitas gotas minúsculas. Algumas dessas gotículas aderem à gota que cai, fazendo, portanto, *aumentar* sua massa à medida que ela cai. A força sobre a gota de chuva é dada por

$$F_{ext} = \frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

Suponha que a massa da gota de chuva dependa da distância x percorrida durante sua queda. Então, $m = kx$, onde k é uma constante, portanto $dm/dt = kv$. Como $F_{ext} = mg$, obtemos

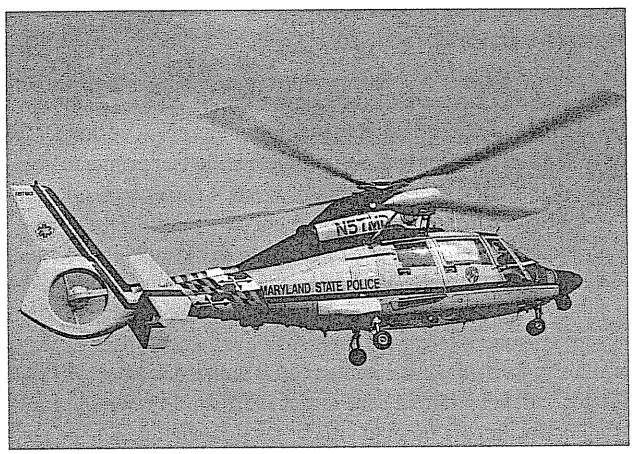
$$mg = m\frac{dv}{dt} + v(kv)$$

Ou, dividindo por k

$$xg = x\frac{dv}{dt} + v^2$$

Essa equação diferencial possui uma solução na forma $v = at$, onde a é uma aceleração constante. Considere a velocidade inicial da gota igual a zero. a) Usando a solução proposta para v, determine a aceleração a. b) Calcule a distância percorrida pela gota até o instante $t = 3{,}0$ s. c) Sabendo que $k = 2{,}0$ g/m, ache a massa da gota de chuva para $t = 3{,}0$ s. Para muitos outros aspectos intrigantes deste problema veja o artigo de K. S. Krane, *Amer. Jour. Phys.* Vol. 49 (1981), p. 113-117.

9 ROTAÇÃO DE CORPOS RÍGIDOS



Todos os segmentos das pás giratórias de um helicóptero possuem a mesma velocidade angular e aceleração angular. Em relação a um dado segmento da pá, quantas vezes maior é a velocidade escalar linear de um segundo segmento que esteja duas vezes mais afastado do eixo de rotação? Quantas vezes maior é a aceleração linear?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Como descrever a rotação de um corpo rígido em termos da coordenada angular, da velocidade angular e da aceleração angular.
- Como analisar a rotação do corpo rígido quando a aceleração angular é constante.
- Como relacionar a rotação de um corpo rígido à velocidade linear e à aceleração linear de um dado ponto no corpo.
- O significado do momento de inércia de um corpo em torno de um eixo de rotação e como ele se relaciona com a energia cinética na rotação.
- Como calcular o momento de inércia de vários corpos.

O que existe em comum entre os movimentos de um CD, de uma roda gigante, de uma serra circular e de um ventilador de teto? Nenhum desses movimentos pode ser representado adequadamente como o movimento de um *ponto*; cada um deles envolve um corpo que *gira* em torno de um eixo que permanece estacionário em algum sistema de referência inercial.

A rotação ocorre em todas as escalas, desde o movimento de elétrons em átomos até movimentos de galáxias inteiras. Precisamos desenvolver métodos genéricos para analisar o movimento de corpos que giram. Neste capítulo e no próximo vamos considerar corpos com tamanho e forma definidos, que no caso geral podem possuir um movimento de rotação combinado com um movimento de translação.

Os corpos do mundo real podem ser ainda mais complicados; as forças que atuam sobre eles podem deformá-los — esticando-os, torcendo-os e comprimindo-os. Por enquanto, desprezamos essas deformações e supomos que o corpo possua uma forma definida e imutável. Esse modelo de corpo ideal denomina-se **corpo rígido**. Neste capítulo e no próximo vamos considerar a rotação de um corpo rígido.

Começaremos com uma linguagem cinemática para *descrever* o movimento de rotação. A seguir examinaremos a energia cinética na rotação, que é a chave para usarmos os métodos de energia no estudo do movimento de rotação. Posteriormente, no Capítulo 10, desenvolveremos os princípios da dinâmica que relacionam as forças que atuam sobre um corpo com o seu movimento de rotação.

9.1 Velocidade angular e aceleração angular

Ao analisarmos o movimento de rotação, vamos inicialmente examinar a rotação do corpo rígido em torno de um eixo fixo. Por eixo fixo designamos um eixo que permanece em repouso em relação a algum referencial inercial e que não muda de direção em relação a esse eixo. O corpo rígido que gira pode ser o eixo de um motor, uma peça de churrasco girando no espeto ou um carrossel.

A Figura 9.1 mostra um corpo rígido (neste caso, o ponteiro de um velocímetro) girando em torno de um eixo fixo. O eixo passa através do ponto O perpendicularmente ao plano do diagrama, o qual resolvemos chamar de plano xy. Uma forma de descrever a rotação desse corpo é escolher um ponto específico P sobre o corpo e acompanhar os valores de x e de y desse ponto. Esse método não é muito conveniente, porque requer dois números (as duas coordenadas

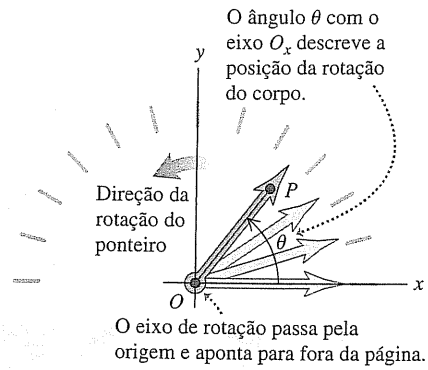


Figura 9.1 O ponteiro de um velocímetro (um exemplo de corpo rígido) girando em sentido anti-horário em torno de um eixo fixo.

x e y) para especificar a posição do corpo durante sua rotação. Em vez disso, notamos que a linha OP permanece fixa no corpo e gira com ele. O ângulo θ que essa linha faz com o eixo $+Ox$ descreve a posição da rotação do corpo; usaremos essa única grandeza θ como a *coordenada* da rotação.

A coordenada angular θ de um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo pode ser positiva ou negativa. Escolhendo como positivo o sentido contrário ao sentido da rotação dos ponteiros do relógio a partir do sentido positivo do eixo Ox, o ângulo θ na Figura 9.1 é positivo. Se em vez desse sentido escolhêssemos como positivo o sentido igual ao da rotação dos ponteiros do relógio, o ângulo θ na Figura 9.1 seria negativo. Quando estudamos o momento de uma partícula ao longo de uma linha reta, foi crucial a especificação do deslocamento positivo ao longo da reta; ao discutirmos o momento de rotação em torno de um eixo fixo torna-se igualmente crucial especificar o sentido positivo da rotação.

Para descrever o movimento de rotação, a maneira mais natural de medir o ângulo θ não é em graus, mas, sim, em **radianos**. Como indicado na Figura 9.2a, um radiano (1 rad) é o ângulo subtendido quando o comprimento de arco relativo a esse ângulo for igual ao raio da circunferência considerada. Na Figura 9.2b, um ângulo θ é subtendido por um arco de comprimento s em uma circunferência de raio r. O valor de θ (em radianos) é igual a s dividido por r:

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{ou} \qquad s = r\theta \tag{9.1}$$

Um ângulo em radianos é a razão entre dois comprimentos, logo ele é representado por um número puro, sem dimensões. Se $s = 3{,}0$ m e $r = 2{,}0$ m, então $\theta = 1{,}5$, porém escrevemos o resultado como 1,5 rad para distinguir esse caso do ângulo medido em graus ou revoluções.

O comprimento de uma circunferência (ou seja, o comprimento do arco total que delimita a fronteira do círculo) é igual a 2π vezes o raio, de modo que existem 2π (cerca de 6,283) radianos em uma revolução completa (360°). Logo,

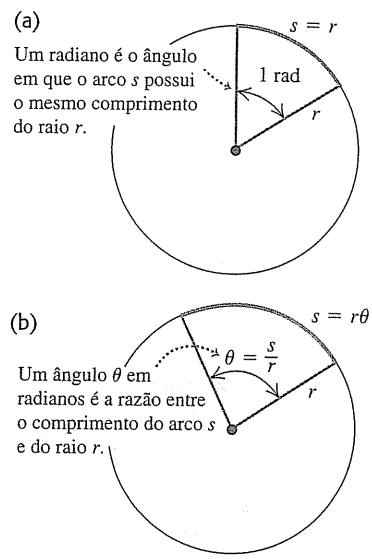


Figura 9.2 Medição de ângulos em radianos.

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = 57{,}3°$$

Analogamente, 180° = π rad, 90° = $\pi/2$ rad e assim por diante. Se em vez de medirmos o ângulo θ em radianos usássemos a medida em graus, teríamos que incluir um fator extra ($2\pi/360$) ao membro direito da Equação (9.1), $s = r\theta$. Ao medirmos um ângulo em radianos, mantemos a relação mais simples possível entre o ângulo e o comprimento de arco.

Velocidade angular

A coordenada θ na Figura 9.1 especifica a posição de rotação de um corpo rígido em um dado instante. Podemos descrever o *movimento* de rotação de um corpo rígido em termos de uma taxa de variação do ângulo θ. Vamos fazer isso de modo análogo ao método usado na descrição do movimento retilíneo no Capítulo 2. Na Figura 9.3a, uma linha de referência OP de um corpo que gira faz um ângulo θ_1 com o eixo $+Ox$ no instante t_1. Em um instante posterior t_2, o ângulo variou para θ_2. Definimos a **velocidade angular média** ω_{mz} (a letra grega ômega) do corpo em um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ como a razão entre o deslocamento angular $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ e o intervalo de tempo Δt:

$$\omega_{m\text{-}z} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{9.2}$$

O índice inferior z indica que o corpo na Figura 9.3a está girando em torno do eixo z, que é perpendicular ao plano do diagrama. A **velocidade angular instantânea** ω_z é o limite de ω_{mz} quando Δt tende a zero, ou seja, a derivada de θ em relação a t:

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \tag{9.3}$$

(definição da velocidade angular)

Quando nos referimos a uma 'velocidade angular', estamos falando da velocidade angular instantânea, e não da velocidade angular média.

A velocidade angular ω_z pode ser positiva ou negativa, dependendo da direção em que o corpo rígido está girando (Figura 9.4). A *velocidade escalar* angular ω, a qual usaremos amplamente nas seções 9.3 e 9.4, é o módulo da velocidade angular. Assim como a velocidade escalar v comum (linear), a velocidade escalar angular nunca é negativa.

ATENÇÃO Velocidade angular *versus* velocidade linear Lembre-se sempre da distinção entre a velocidade angular ω_z e a velocidade comum, ou *velocidade linear*, v_x (Seção 2.2). Se um objeto possui velocidade v_x, o objeto como um todo está se *movendo* ao longo do eixo x. Por outro lado, se um objeto possui velocidade angular ω_z, ele está *girando* em torno do eixo z. *Não* queremos dizer que o objeto está se movendo ao longo do eixo z.

Pontos diferentes de um corpo rígido que gira se movem em distâncias diferentes em um dado instante, dependendo da distância entre o ponto e o eixo de rotação. Porém, como o corpo é rígido, *todos* os pontos giram a um mesmo ângulo no mesmo instante (Figura 9.3b). Portanto, *em um dado instante, todos os pontos de um corpo rígido giram com a mesma velocidade angular.* A velocidade angular é positiva quando o corpo gira no sentido dos valores crescentes de θ, e negativa quando o giro ocorre no sentido dos valores decrescentes de θ.

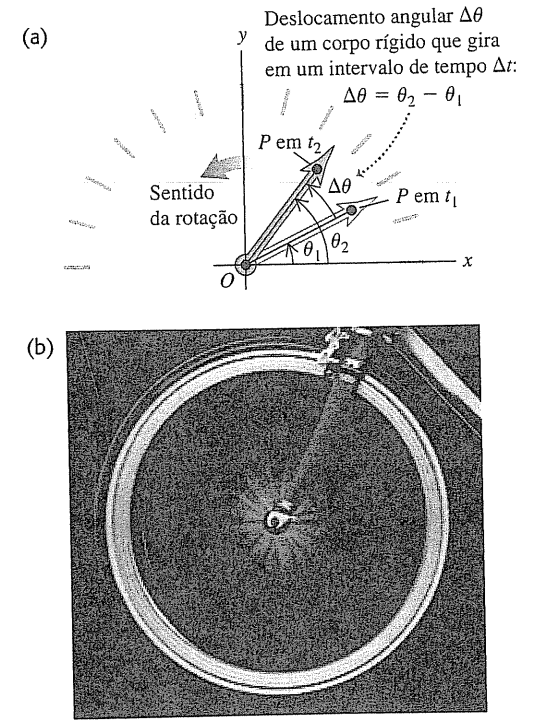


Figura 9.3 (a) Deslocamento angular $\Delta\theta$ de um corpo em rotação. (b) Todos os pontos de um corpo rígido giram com a mesma velocidade angular $\Delta\theta/\Delta t$.

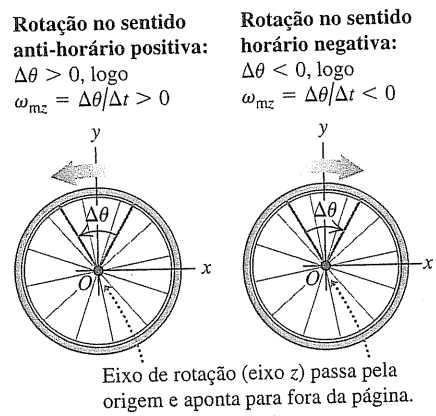


Figura 9.4 A velocidade angular média de um corpo rígido (aqui indicado) e a velocidade angular instantânea podem ser positivas ou negativas.

Quando o ângulo θ é medido em radianos, a unidade de velocidade angular é o radiano por segundo (rad/s). Outras unidades, como a revolução por minuto (rev/min ou rpm), são freqüentemente usadas. Visto que 1 rev = 2π, duas conversões úteis são

$$1 \text{ rev/s} = 2\pi \text{ rad/s} \quad \text{e} \quad 1 \text{ rev/min} = 1 \text{ rpm} = \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s}$$

Ou seja, 1 rad/s é aproximadamente igual a 10 rpm.

Exemplo 9.1

CÁLCULO DA VELOCIDADE ANGULAR O volante do protótipo de um motor automotivo está sendo testado. A posição angular θ desse volante é dada por

$$\theta = (2{,}0 \text{ rad/s}^3)t^3$$

O diâmetro do volante é igual a 0,36 m. a) Ache o ângulo θ, em radianos e em graus, nos instantes $t_1 = 2{,}0$ s e $t_2 = 5{,}0$ s. b) Ache a distância percorrida por uma partícula na periferia do volante nesse intervalo de tempo. c) Calcule a velocidade angular média, em rad/s e em rev/min (rpm), entre $t_1 = 2{,}0$ s e $t_2 = 5{,}0$ s. d) Ache a velocidade angular instantânea para $t = t_2 = 5{,}0$ s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: devemos determinar os valores de θ_1 e θ_2 da posição angular nos instantes t_1 e t_2, o deslocamento angular $\Delta\theta$ entre t_1 e t_2, a distância percorrida e a velocidade angular média entre t_1 e t_2 e a velocidade angular instantânea em t_2.

PREPARAR: sabemos a posição angular θ em função do tempo, portanto podemos facilmente achar as nossas duas primeiras incógnitas θ_1 e θ_2; o deslocamento angular $\Delta\theta$ é a diferença entre θ_1 e θ_2. Dado $\Delta\theta$, calcularemos a distância e a velocidade angular média usando as equações (9.1) e (9.2), respectivamente. Para calcular a velocidade angular instantânea, tomaremos as derivadas de θ em relação ao tempo, como na Equação (9.3).

EXECUTAR: a) Substituímos os valores de t na equação fornecida:

$$\theta_1 = (2{,}0 \text{ rad/s}^3)(2{,}0 \text{ s})^3 = 16 \text{ rad}$$

$$= (16 \text{ rad})\frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = 920^\circ$$

$$\theta_2 = (2{,}0\ \text{rad/s}^3)(5{,}0\ \text{s})^3 = 250\ \text{rad}$$
$$= (250\ \text{rad})\frac{360°}{2\pi\ \text{rad}} = 14000°$$

b) O volante gira com um deslocamento angular de $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 250\ \text{rad} - 16\ \text{rad} = 234\ \text{rad}$. O raio r é a metade do diâmetro, ou 0,18 m. A Equação (9.1) fornece:

$$s = r\theta = (0{,}18\ \text{m})(234\ \text{rad}) = 42\ \text{m}$$

Note que para usar a Equação (9.1) o ângulo *deve* ser expresso em radianos. Abandonamos 'radianos' das unidades de s porque θ é realmente um número puro sem dimensões; s é uma distância medida em metros, a mesma unidade de r.

c) Na Equação (9.2), temos

$$\omega_{mz} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{250\ \text{rad} - 16\ \text{rad}}{5{,}0\ \text{s} - 2{,}0\ \text{s}} = 78\ \text{rad/s}$$
$$= \left(78\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)\left(\frac{1\ \text{rev}}{2\pi\ \text{rad}}\right)\left(\frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}}\right) = 740\ \text{rev/min}$$

d) Usando a Equação (9.3):

$$\omega_z = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}[(2{,}0\ \text{rad/s}^3)t^3] = (2{,}0\ \text{rad/s}^3)(3t^2)$$
$$= (6{,}0\ \text{rad/s}^3)t^2$$

No instante $t = 5{,}0$ s,

$$\omega_z = (6{,}0\ \text{rad/s}^3)(5{,}0\ \text{s})^2 = 150\ \text{rad/s}$$

AVALIAR: o resultado do item (d) mostra que ω_z é proporcional a t^2 e, portanto, aumenta com o tempo. Os resultados numéricos são compatíveis com esse resultado: a velocidade angular instantânea de 150 rad/s no instante $t = 5{,}0$ é maior do que a velocidade angular média de 78 rad/s para o intervalo de 3,0 s (de $t_1 = 2{,}0$ s a $t_2 = 5{,}0$ s).

Velocidade angular como um vetor

Como vimos, nossa notação para a velocidade angular ω_z em torno do eixo z é reminiscente da notação v_x para a velocidade comum ao longo do eixo x (Seção 2.2). Assim como v_x é o componente x do vetor velocidade $\vec{v}$, ω_z é o componente z de um *vetor* velocidade angular $\vec{\omega}$ direcionado ao longo do eixo de rotação. Como indica a Figura 9.5a, a direção de $\vec{\omega}$ *é* dada pela regra da mão direita que usamos para definir o produto vetorial na Seção 1.10. Quando a rotação se dá em torno do eixo z, então $\vec{\omega}$ possui somente um componente z; esse componente é positivo se $\vec{\omega}$ estiver ao longo do eixo positivo de z, e negativo se $\vec{\omega}$ estiver ao longo do eixo negativo de z (Figura 9.5b).

A formulação do vetor é especialmente útil em situações nas quais a direção do eixo de rotação *varia*. Examinaremos esse tipo de situação brevemente ao final do Capítulo 10. Neste capítulo, porém, consideramos somente situações em que o eixo de rotação é fixo. Portanto, no decorrer deste capítulo, usaremos 'velocidade angular' para nos referirmos a ω_z, o componente do vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ ao longo do eixo.

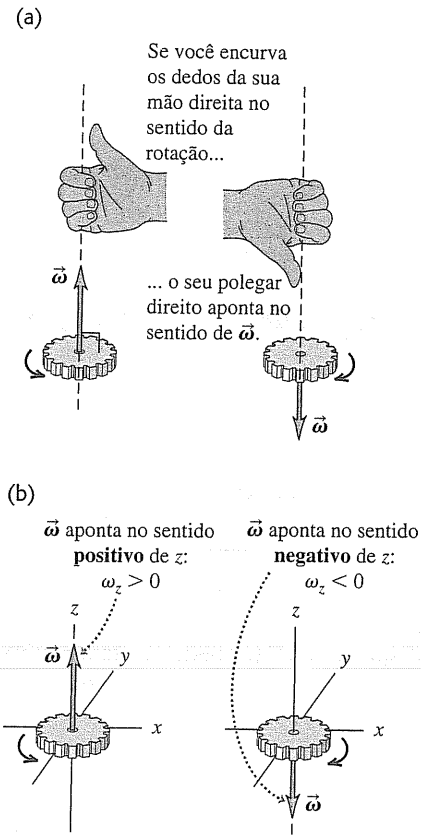


Figura 9.5 (a) A regra da mão direita para o sentido do vetor velocidade angular $\vec{\omega}$. A inversão do sentido de rotação inverte o sentido de $\vec{\omega}$. (b) O sinal de ω_z para a rotação ao longo do eixo z.

Aceleração angular

Quando a velocidade angular de um corpo rígido varia, ele possui uma *aceleração angular*. Quando você pedala sua bicicleta com mais vigor para fazer as rodas girarem mais rapidamente ou quando freia para fazer as rodas pararem, você está imprimindo às rodas uma aceleração angular. Você também imprime uma aceleração angular sempre que altera a velocidade de rotação de um mecanismo como o virabrequim de um motor automotivo.

Se ω_{1z} for a velocidade angular instantânea no instante t_1 e ω_{2z} a velocidade angular instantânea no instante t_2, definimos a **aceleração angular média** α_{mz} no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ como a variação da velocidade angular dividida por Δt (Figura 9.6):

$$\alpha_{mz} = \frac{\omega_{2z} - \omega_{1z}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} \tag{9.4}$$

A **aceleração angular instantânea** α_z é o limite de α_{mz} quando Δt tende a zero:

$$\alpha_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} \tag{9.5}$$

(definição de aceleração angular)

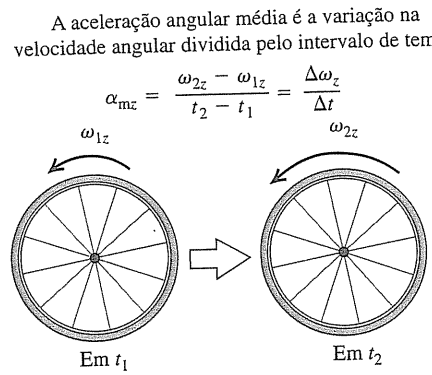


Figura 9.6 Cálculo da aceleração angular média de um corpo rígido em rotação.

A unidade usual de aceleração angular é o radiano por segundo por segundo, ou rad/s^2. Daqui por diante usaremos a expressão 'aceleração angular' para designar a aceleração angular instantânea e não a aceleração angular média.

Como $\omega_z = d\theta/dt$, podemos também expressar a aceleração angular como a derivada de segunda ordem da coordenada angular:

$$\alpha_z = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (9.6)$$

Você deve ter notado que usamos letras gregas para designar grandezas cinemáticas angulares: θ para posição angular, ω_z para velocidade angular e α_z para aceleração angular. Essas grandezas são análogas, respectivamente, a x para posição, v_x para velocidade e a_x para aceleração, referentes ao movimento retilíneo. Em cada caso, a velocidade é a taxa de variação da posição com o tempo, e a aceleração é a taxa de variação da velocidade com o tempo. Algumas vezes usaremos as expressões 'velocidade *linear*' e 'aceleração *linear*' para designar as grandezas definidas nos capítulos 2 e 3 e para acentuar a diferença entre essas grandezas e as grandezas *angulares* introduzidas neste capítulo.

No movimento de rotação, quando a aceleração angular α_z é positiva, a velocidade angular ω_z é crescente; quando α_z é negativo, ω_z é decrescente. O movimento é acelerado quando α_z e ω_z possuem o mesmo sinal, e o movimento é retardado quando α_z e ω_z possuem sinais contrários. (Essas relações são precisamente semelhantes às relações entre aceleração *linear* a_x e a velocidade linear v_x para o movimento retilíneo; veja a Seção 2.3).

Exemplo 9.2

CÁLCULO DA ACELERAÇÃO ANGULAR No exemplo 9.1, verificamos que a velocidade angular instantânea ω_z do volante em qualquer instante t é dada por

$$\omega_z = (6{,}0\ \text{rad/s}^3)t^2$$

a) Ache a aceleração angular média entre $t_1 = 2{,}0$ s e $t_2 = 5{,}0$ s.
b) Ache a aceleração angular instantânea para $t_2 = 5{,}0$ s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este exemplo usa as definições de aceleração angular média α_{mz} e aceleração angular instantânea α_z.

PREPARAR: aplicaremos as equações (9.4) e (9.5) para achar o valor de α_{mz} entre t_1 e t_2 e o valor de α_z em $t = t_2$.

EXECUTAR: a) Os valores de ω_z nos dois instantes são

$$\omega_{1z} = (6{,}0\ \text{rad/s}^3)(2{,}0\ \text{s})^2 = 24\ \text{rad/s}$$
$$\omega_{2z} = (6{,}0\ \text{rad/s}^3)(5{,}0\ \text{s})^2 = 150\ \text{rad/s}$$

Pela Equação (9.4), a aceleração angular média é

$$\alpha_{mz} = \frac{150\ \text{rad/s} - 24\ \text{rad/s}}{5{,}0\ \text{s} - 2{,}0\ \text{s}} = 42\ \text{rad/s}^2$$

b) Pela Equação (9.5), a aceleração angular instantânea em qualquer instante t é

$$\alpha_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d}{dt}[(6{,}0\ \text{rad/s}^3)(t^2)] = (6{,}0\ \text{rad/s}^3)(2t)$$
$$= (12\ \text{rad/s}^3)t$$

No instante $t = 5{,}0$ s, temos

$$\alpha_z = (12\ \text{rad/s}^3)(5{,}0\ \text{s}) = 60\ \text{rad/s}^2$$

AVALIAR: note que a aceleração angular *não* é constante neste caso. A velocidade angular ω_z é sempre crescente porque α_z é sempre positiva. Além disso, a taxa de crescimento da velocidade angular é ela própria crescente, visto que α_z aumenta com o tempo.

Aceleração angular como um vetor

Como fizemos com a velocidade angular, é útil definir um *vetor* de aceleração angular $\vec{\alpha}$. Em termos matemáticos, $\vec{\alpha}$ é a derivada de tempo do vetor velocidade angular $\vec{\omega}$. Quando um objeto gira em torno de um eixo fixo z, $\vec{\alpha}$ possui apenas um componente z; a grandeza α_z é exatamente esse componente. Nesse caso, $\vec{\alpha}$ está orientada na mesma direção de $\vec{\omega}$ quando a rotação é acelerada e no sentido contrário quando a rotação é retardada (Figura 9.7).

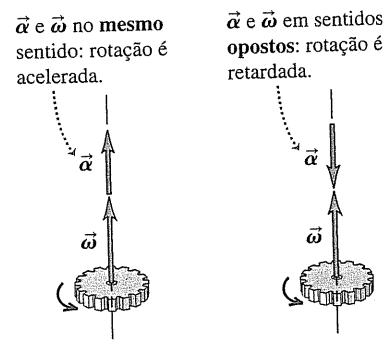
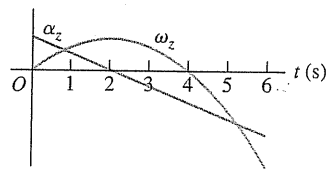


Figura 9.7 Quando o eixo de rotação é fixo, os vetores de aceleração angular e de velocidade angular estão ao longo do eixo.

A formulação vetorial será especialmente útil no Capítulo 10 quando estudarmos o que ocorre quando a direção do eixo de rotação varia. Neste capítulo, porém, o eixo de rotação estará sempre fixo e necessitamos usar apenas o componente α_z.

Teste sua compreensão da Seção 9.1 A figura mostra um gráfico de ω_z e α_z *versus* tempo para um dado corpo em rotação. a) Em quais intervalos de tempo a rotação é acelerada? i) $0 < t < 2$ s; ii) 2 s $< t <$ 4 s; iii) 4 s $< t <$ 6 s. b) Em quais intervalos de tempo a rotação é retardada? i) $0 < t < 2$ s; ii) 2 s $< t <$ 4 s; iii) 4 s $< 5 <$ 6s.



9.2 Rotação com aceleração angular constante

No Capítulo 2 verificamos que o movimento retilíneo é particularmente simples quando a aceleração é constante. Isso também é verdade no caso do movimento de rotação em torno de um eixo fixo. Quando a aceleração angular é constante, podemos deduzir equações para a velocidade angular e para a posição angular usando exatamente o mesmo procedimento utilizado para estudar o movimento retilíneo na Seção 2.4. De fato, as equações que serão deduzidas a seguir são iguais às equações (2.8), (2.12), (2.13) e (2.14), se trocarmos x por θ, v_x por ω_z e a_x por α_z. Sugerimos que você faça uma revisão da Seção 2.4 antes de continuar.

Seja ω_{0z} a velocidade angular de um corpo rígido no instante $t = 0$ e seja ω_z sua velocidade angular em um instante posterior t. A aceleração angular α_z é constante e igual à aceleração média para qualquer intervalo. Usando a Equação (9.4) no intervalo entre 0 e t, obtemos

$$\alpha_z = \frac{\omega_z - \omega_{0z}}{t - 0} \quad \text{ou}$$

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t \tag{9.7}$$

(somente aceleração angular constante)

O produto $\alpha_z t$ é a variação total de ω_z entre $t = 0$ e o instante posterior t; a velocidade angular ω_z no instante t é dada pela soma de ω_{0z} com essa variação total.

Quando a aceleração angular é constante, a velocidade angular varia com uma taxa uniforme, de modo que seu valor médio entre 0 e t é dado pela média entre o valor inicial e o valor final:

$$\omega_{mz} = \frac{\omega_{0z} + \omega_z}{2} \tag{9.8}$$

Também sabemos que ω_{mz} é dada pelo deslocamento total $(\theta - \theta_0)$ dividido pelo intervalo de tempo $(t - 0)$:

$$\omega_{mz} = \frac{\theta - \theta_0}{t - 0} \tag{9.9}$$

Quando aplicamos as equações (9.8) e (9.9) e multiplicamos o resultado por t, obtemos

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t \tag{9.10}$$

(somente aceleração angular constante)

Para obter uma relação entre θ e t que não contenha ω_z, substituímos a Equação (9.7) pela Equação (9.10):

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}[\omega_{0z} + (\omega_{0z} + \alpha_z t)]t \quad \text{ou}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2 \tag{9.11}$$

(somente aceleração angular constante)

Ou seja, se no instante inicial $t = 0$ o corpo possui posição angular θ_0 e velocidade angular ω_{0z}, então sua posição angular θ em qualquer instante posterior t é a soma de três termos: sua posição angular inicial θ_0, mais a rotação $\omega_{0z}t$ que ele teria se a velocidade angular fosse constante, mais uma rotação adicional $\frac{1}{2}\alpha_z t^2$ produzida pela velocidade angular variável.

Seguindo o mesmo procedimento adotado para o movimento retilíneo na Seção 2.4, podemos combinar as equações (9.7) e (9.11) para obter uma relação entre θ e ω_z que não contenha t. Convidamos você a fazer os detalhes da dedução, seguindo o mesmo procedimento para obter a Equação (2.13). (Veja o Exercício 9.12.) De fato, por causa da analogia perfeita entre grandezas no movimento retilíneo e grandezas no movimento de rotação, podemos simplesmente substituir na Equação (2.13) cada grandeza linear pela respectiva grandeza angular análoga. Obtemos

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0) \tag{9.12}$$

(somente aceleração angular constante)

ATENÇÃO Aceleração angular constante Não esqueça que todos os resultados anteriores valem *somente* quando a aceleração angular α_z permanece *constante*; tome cuidado para não aplicar essas relações em problemas com α_z *variável*. A Tabela 9.1 mostra as analogias entre as equações (9.7), (9.10), (9.11) e (9.12) para rotação em torno de um eixo fixo com aceleração angular constante e as respectivas relações para um movimento retilíneo com aceleração linear constante.

Tabela 9.1 Comparação entre o movimento com aceleração linear constante e o movimento de rotação com aceleração angular constante

Movimento retilíneo com aceleração linear constante	Rotação em torno de um eixo fixo com aceleração angular constante
$a_x = \text{constante}$	$\alpha_z = \text{constante}$
$v_x = v_{0x} + a_x t$	$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t$
$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$	$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_x + v_{0x})t$	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_z + \omega_{0z})t$

Exemplo 9.3

ROTAÇÃO COM ACELERAÇÃO ANGULAR CONSTANTE

Você acabou de assistir a um filme em DVD, e o disco está diminuindo a rotação para parar. A velocidade angular do disco é igual a 27,5 rad/s no instante $t = 0$ e sua aceleração angular é constante e igual a $-10{,}0$ rad/s^2. Uma linha PQ na superfície do disco coincide com o eixo $+Ox$ no instante $t = 0$ (Figura 9.8). a) Qual é a velocidade angular do disco no instante $t = 0{,}300$ s? b) Qual é o ângulo formado entre a linha PQ e o eixo $+Ox$ nesse instante?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a aceleração angular do disco é constante, portanto podemos usar qualquer equação deduzida nesta seção. As incógnitas são a velocidade angular e o deslocamento angular no instante $t = 0{,}300$ s.

PREPARAR: conhecemos a velocidade angular inicial $\omega_{0z} = 27{,}5$ rad/s, o ângulo inicial $\theta_0 = 0$ entre a linha PQ e o eixo $+Ox$, a aceleração angular $\alpha_z = -10{,}0$ rad/s^2 e o tempo $t = 0{,}300$ s. Com essas informações, é mais fácil usar as equações (9.7) e (9.11) para achar as incógnitas ω_z e θ, respectivamente.

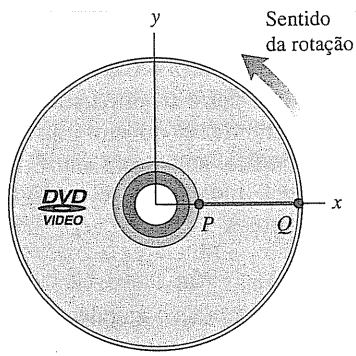


Figura 9.8 A linha PQ em um DVD girando para $t = 0$.

EXECUTAR: a) Pela Equação (9.7), no instante $t = 0{,}300$ s, temos

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t = 27{,}5 \text{ rad/s} + (-10{,}0 \text{ rad/s}^2)(0{,}300 \text{ s})$$
$$= 24{,}5 \text{ rad/s}$$

b) Pela Equação (9.11), temos

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$$
$$= 0 + (27{,}5 \text{ rad/s})(0{,}300 \text{ s}) + \frac{1}{2}(-10{,}0 \text{ rad/s}^2)(0{,}300 \text{ s})^2$$
$$= 7{,}80 \text{ rad} = 7{,}80 \text{ rad}\left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right) = 1{,}24 \text{ rev}$$

O DVD girou uma volta completa mais um deslocamento angular adicional de 0,24 rev, ou seja, através de um ângulo adicional de (0,24 rev)(360°/rev) = 87°. Logo, a linha PQ forma com o eixo $+Ox$ um ângulo de 87°.

AVALIAR: a resposta para o item (a) indica que a velocidade angular diminuiu. Isso está dentro da expectativa, já que α_z é negativa. Podemos também usar a resposta para ω_z no item (a) para conferir o resultado obtido para θ no item (b). Para isso, resolvemos a Equação (9.12), $\omega_z^2 = \omega_0^2 + 2\,\alpha_z(\theta - \theta_0)$, para o ângulo θ:

$$\theta = \theta_0 + \left(\frac{\omega_z^2 - \omega_{0z}^2}{2\alpha_z}\right)$$
$$= 0 + \frac{(24{,}5 \text{ rad/s})^2 - (27{,}5 \text{ rad/s})^2}{2(-10{,}0 \text{ rad/s}^2)} = 7{,}80 \text{ rad}$$

o que coincide com o resultado obtido anteriormente.

Teste sua compreensão da Seção 9.2 Suponha que o DVD no Exemplo 9.3 estava inicialmente girando ao dobro da taxa (55,0 rad/s em vez de 27,5 rad/s) e diminuiu a rotação ao dobro da taxa ($-20{,}0$ rad/s^2 em vez de $-10{,}0$ rad/s^2). a) Em comparação com a situação no Exemplo 9.3, quanto tempo levaria para o DVD parar? i) o mesmo intervalo de tempo; ii) o dobro do tempo; iii) 4 vezes a mais; iv) $\frac{1}{2}$ vez a mais; v) $\frac{1}{4}$ a mais. b) Em comparação com a situação no Exemplo 9.3, por quantas revoluções o DVD giraria antes de parar? i) o mesmo número de revoluções; ii) o dobro de revoluções; iii) 4 vezes a mais; iv) $\frac{1}{2}$ vez a mais; v) $\frac{1}{4}$ a mais. ■

9.3 Relações entre a cinemática linear e a cinemática angular

Como podemos achar a velocidade linear e a aceleração de um dado ponto em um corpo girando? Precisamos responder a essa pergunta a fim de prosseguir com nossos estudos de rotação. Por exemplo, para achar a energia cinética de um corpo em rotação, devemos iniciar com a fórmula $K = \frac{1}{2}mv^2$ para uma partícula, e isso requer o conhecimento de v para cada partícula do corpo. Portanto, é conveniente desenvolver relações gerais entre a velocidade *angular* e a aceleração de um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo e entre a velocidade *linear* e a aceleração de um ponto específico ou de uma partícula específica do corpo.

Velocidade linear na rotação de um corpo rígido

Quando um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo, cada partícula do corpo se move em uma trajetória

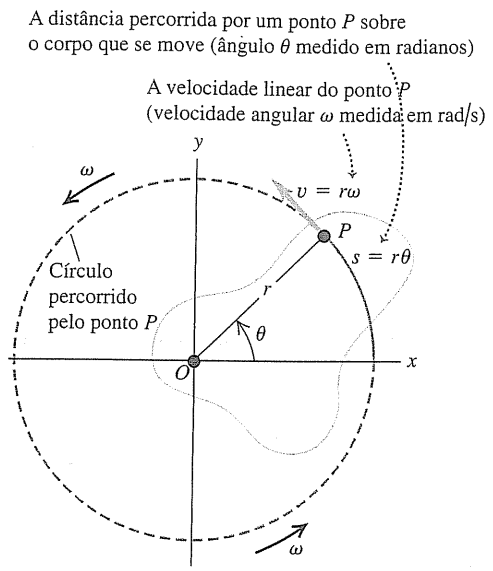


Figura 9.9 Um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo através do ponto *O*.

circular. O círculo fica sobre um plano perpendicular ao eixo e possui centro no eixo. A velocidade de uma partícula é diretamente proporcional à velocidade angular do corpo; quanto mais rápido ele gira, maior é a velocidade de cada partícula. Na Figura 9.9, o ponto P está a uma distância constante r do eixo de rotação, de modo que ele gira em um círculo de raio r. Em qualquer instante o ângulo θ (em radianos) e o comprimento de arco s são relacionados por

$$s = r\theta$$

Derivando essa equação em relação ao tempo, notando que r é constante para uma dada partícula e tomando o módulo de ambos os membros da equação, obtemos:

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = r\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$$

Agora $|ds/dt|$ é o valor absoluto da taxa de variação do comprimento de arco, que é igual à velocidade *linear* v da partícula. Analogamente, $|d\theta/dt|$, o valor absoluto da taxa de variação do ângulo, é a **velocidade angular escalar** ω, ou seja, o módulo da velocidade angular instantânea em rad/s. Logo

$$v = r\omega \qquad (9.13)$$

(relação entre velocidade linear e velocidade angular)

Quanto mais afastado o ponto estiver do eixo, maior será sua velocidade linear. A *direção* do *vetor* velocidade linear é tangente à sua trajetória circular em cada um dos seus pontos (Figura 9.9).

ATENÇÃO Velocidade escalar *versus* vetor velocidade Lembre-se da distinção entre as *velocidades escalares* linear e angular, v e ω, que aparecem na Equação (9.13), e as *velocidades* linear e angular, v_x e ω_z. As grandezas sem índices inferiores, v e ω, nunca são negativas; são módulos dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{\omega}$, respectivamente, e seus valores indicam somente com que rapidez uma partícula se move (v) ou gira (ω). As grandezas correspondentes com índices inferiores, v_x e ω_z, podem ser tanto positivas quanto negativas; seus sinais indicam a direção do movimento.

Aceleração linear na rotação de um corpo rígido

Podemos representar a aceleração de uma partícula que se move ao longo da circunferência em termos do componente centrípeto e do componente tangencial, a_{rad} e a_{tg} (Figura 9.10), como fizemos na Seção 3.4. Seria uma boa idéia fazer uma revisão dessa seção agora. Verificamos que o **componente tangencial da aceleração** a_{tg}, o componente paralelo à velocidade instantânea, atua fazendo alterar o *módulo* da velocidade da partícula (ou seja, sua velocidade escalar), fornecendo a taxa de variação de sua velocidade escalar. Derivando a Equação (9.13) em relação ao tempo, achamos

$$a_{tg} = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \qquad (9.14)$$

(aceleração tangencial de um ponto em um corpo rígido)

Esse componente da aceleração da partícula é sempre tangente à trajetória circular da partícula.

A grandeza $\alpha = d\omega/dt$ na Equação (9.14) é a taxa de variação da *velocidade escalar* angular. Não é o mesmo que $\alpha_z = d\omega_z/dt$, que é a taxa de variação do *vetor velocidade angular*. Por exemplo, considere um corpo girando de modo que seu vetor velocidade angular aponta na direção $-z$ (Figura 9.5b). Se o corpo está ganhando velocidade

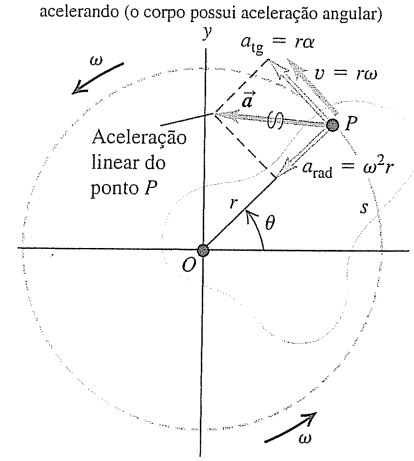


Figura 9.10 O corpo rígido indicado está sendo acelerado. A aceleração do ponto P possui um componente a_{rad} em direção ao eixo de rotação (perpendicular a $\vec{v}$) e um componente a_{tg} ao longo do círculo que o ponto P segue (paralelo a $\vec{v}$).

escalar angular a uma taxa de 10 rad/s por segundo, então $\alpha = 10$ rad/s^2. Mas ω_z é negativo e se torna mais negativo à medida que a rotação ganha velocidade escalar, portanto $\alpha_z = -10$ rad/s^2. A regra para rotação em torno de um eixo fixo é que α é igual a α_z se ω_z for positivo, mas igual a $-\alpha_z$ se ω_z for negativo.

O componente da aceleração da partícula direcionado para o interior do eixo de rotação, o **componente da aceleração centrípeta** a_{rad}, está associado com a variação de *direção* da velocidade da partícula. Na Seção 3.4 utilizamos a relação $a_{rad} = v^2/r$. Podemos expressar esse resultado em termos de ω usando a Equação (9.13):

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad (9.15)$$

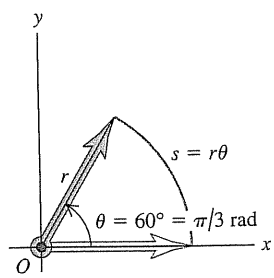
(aceleração centrípeta de um ponto em um corpo rígido)

Esse resultado é verdadeiro em cada instante, *mesmo quando v e ω não são constantes*. A aceleração centrípeta sempre aponta no sentido do eixo de rotação.

A soma vetorial da aceleração centrípeta com a aceleração tangencial de uma partícula em um corpo rígido fornece a aceleração linear $\vec{a}$ (Figura 9.10).

ATENÇÃO Use ângulos em radianos em todas as equações É importante lembrar-nos de que a Equação (9.1), $s = r\theta$, vale *somente* quando θ é medido em radianos. A mesma observação se aplica para qualquer equação deduzida a partir dessa relação, incluindo as equações (9.13), (9.14) e (9.15). Ao trabalhar com essas equações, você *deve* usar somente grandezas angulares em radianos, não podendo utilizar nem em revoluções nem em graus (Figura 9.11).

As equações (9.1), (9.13) e (9.14) também se aplicam para qualquer partícula que possua a mesma velocidade tangencial de um ponto em um corpo rígido em rotação.



Em qualquer equação que relacione grandezas lineares com grandezas angulares, os ângulos DEVEM ser expressos em radianos...

CERTO!▶ $s = (\pi/3)r$

... nunca em graus ou revoluções.

ERRADO!▶ $s = 60r$

Figura 9.11 Sempre use radianos ao relacionar grandezas lineares com grandezas angulares.

Por exemplo, quando uma corda enrolada em torno de um cilindro se desenrola sem deslizar nem se esticar, sua velocidade e sua aceleração em qualquer instante são iguais à respectiva velocidade e aceleração de qualquer ponto situado na periferia do cilindro. O mesmo princípio se aplica para situações tais como a corrente da bicicleta e a roda dentada, correias e polias que giram sem deslizar e assim por diante. Teremos oportunidades de usar essas relações mais adiante neste capítulo e no Capítulo 10. Note que a Equação (9.15) para a aceleração centrípeta a_{rad} se aplica para a corda ou para a corrente *somente* nos pontos em que existe contato com o cilindro ou com a roda dentada. Os demais pontos não possuem a mesma aceleração orientada para o centro possuída por esses pontos sobre o cilindro ou sobre a roda dentada.

Exemplo 9.4

LANÇAMENTO DE UM DISCO O lançador de um disco faz o disco se mover ao longo de uma circunferência de raio igual a 0,80 m. Em um dado instante, o lançador gira com velocidade escalar angular de 10,0 rad/s, que aumenta a 50 rad/s^2 Nesse instante, determine o componente tangencial e o componente centrípeto da aceleração do disco e o módulo da aceleração.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: modelamos o corpo como uma partícula deslocando-se ao longo de uma trajetória circular (Figura 9.12a); logo, podemos usar os conceitos desenvolvidos nesta seção.

PREPARAR: conhecemos o raio $r = 0{,}800$ m, a velocidade escalar angular $\omega = 10{,}0$ rad/s e a taxa de variação da velocidade escalar angular $\alpha = 50{,}0$ rad/s^2 (Figura 9.12b). As duas primeiras incógnitas são os componentes de aceleração a_{tg} e a_{rad}, que encontraremos com as equações (9.14) e (9.15), respectivamente. Obtendo-se esses componentes do vetor aceleração, encontraremos seu módulo a (a terceira incógnita) usando o teorema de Pitágoras.

EXECUTAR: pelas equações (9.14) e (9.15):

$$a_{tg} = r\alpha = (0{,}800\text{ m})(50{,}0\text{ rad/s}^2) = 40{,}0\text{ m/s}^2$$
$$a_{rad} = \omega^2 r = (10{,}0\text{ rad/s})^2(0{,}800\text{ m}) = 80{,}0\text{ m/s}^2$$

O módulo do vetor aceleração é

$$a = \sqrt{a_{tg}^2 + a_{rad}^2} = 89{,}4\text{ m/s}^2$$

AVALIAR: note que omitimos a unidade 'radiano' dos resultados de a_{tg}, a_{rad} e a; podemos fazer isso porque 'radiano' é uma grandeza que não possui dimensão.

O módulo a é aproximadamente nove vezes a aceleração da gravidade. Você é capaz de mostrar que, se a velocidade escalar angular dobrar para 20,0 rad/s enquanto α permanece o mesmo, o módulo da aceleração a aumentará para 322 m/s^2, ou quase $33g$?

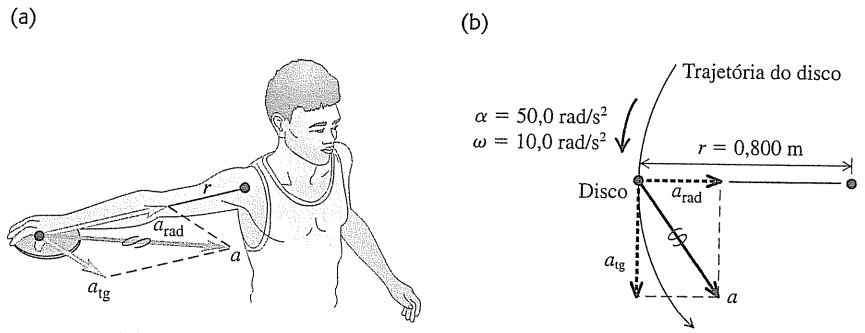


Figura 9.12 (a) Girando um disco em círculo. (b) O esquema indica os componentes da aceleração para o disco.

Exemplo 9.5

PROJETO DE UMA HÉLICE Você foi solicitado para projetar a hélice de um avião que deve girar a 2400 rpm. A velocidade do avião deve ser de 75,0 m/s (270 km/h), e a velocidade da extremidade da lâmina da hélice não pode superar 270 m/s (Figura 9.13a). (Isso é cerca de 0,80 vezes a velocidade do som no ar. Se as extremidades das lâminas se deslocassem com a velocidade do som, elas poderiam produzir uma enorme quantidade de ruído.) a) Qual é o raio máximo que a hélice pode ter? b) Com esse raio, qual é a aceleração da extremidade da hélice?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o objeto de interesse neste exemplo é uma partícula na extremidade da hélice; as incógnitas são a distância da partícula a partir do eixo e sua aceleração. Note que a velocidade escalar dessa partícula pelo ar (que não pode exceder 270 m/s) se deve *tanto* à rotação da hélice *quanto* ao deslocamento para a frente do avião.

PREPARAR: como indica a Figura 9.13b, a velocidade v_{extrem} de uma partícula na ponta da hélice é a soma vetorial da sua velocidade tangencial em função da rotação da hélice (módulo v_{tg}, dado pela Equação (9.13)) e a velocidade para a frente do avião (módulo $v_{avião}$ = 75,0 m/s). O plano de rotação da hélice é perpendicular à direção do vôo, de modo que esses dois vetores são perpendiculares e podemos usar o teorema de Pitágoras para relacionar v_{tg} e $v_{avião}$ a v_{extrem}. A seguir, vamos determinar que v_{extrem} = 270 m/s e solucionar o raio r. Note que a velocidade escalar angular da hélice é constante, portanto a aceleração da extremidade da hélice possui somente um componente radial; acharemos esse componente radial usando a Equação (9.15).

EXECUTAR: inicialmente convertemos ω para rad/s (veja a Figura 9.11):

$$\omega = 2400 \text{ rpm} = \left(2400 \frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right)$$

$$= 251 \text{ rad/s}$$

a) Pela Figura 9.13b e a Equação (9.13), o módulo da velocidade v_{total} é dado por

$$v_{extrem}^2 = v_{avião}^2 + v_{tg}^2 = v_{avião}^2 + r^2\omega^2 \quad \text{logo}$$

$$r^2 = \frac{v_{extrem}^2 - v_{avião}^2}{\omega^2} \qquad \text{e} \qquad r = \frac{\sqrt{v_{extrem}^2 - v_{avião}^2}}{\omega}$$

Se v_{extrem} = 270 m/s, o raio da hélice é

$$r = \frac{\sqrt{(270 \text{ m/s})^2 - (75{,}0 \text{ m/s})^2}}{251 \text{ rad/s}} = 1{,}03 \text{ m}$$

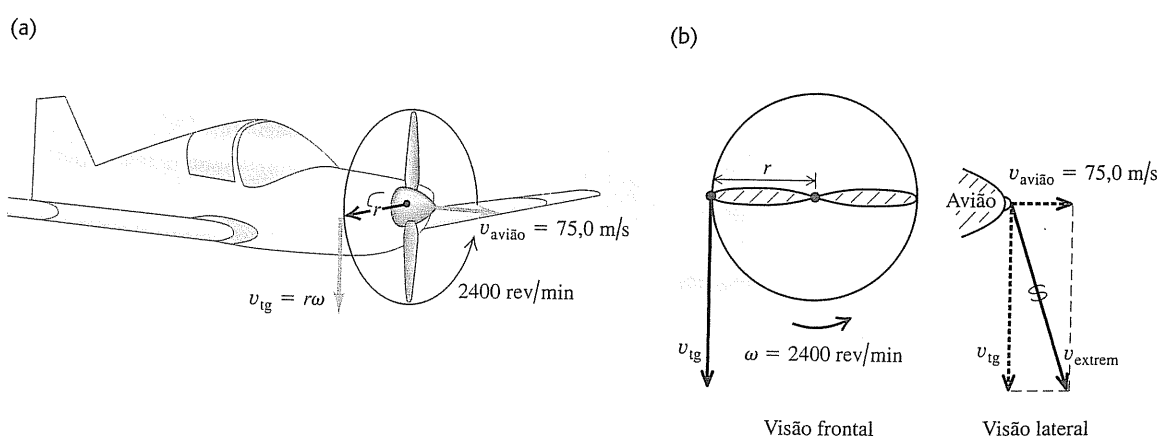


Figura 9.13 (a) Um avião movido a hélice em vôo. (b) O esquema indica os componentes de velocidade para a extremidade da hélice.

b) A aceleração centrípeta é:

$$a_{rad} = \omega^2 r$$
$$= (251 \text{ rad/s})^2(1{,}03 \text{ m}) = 6{,}5 \times 10^4 \text{ m/s}^2$$

A aceleração *tangencial* é zero porque a velocidade escalar angular é constante.

AVALIAR: de acordo com $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, a hélice deve exercer uma força igual a $6{,}5 \times 10^4$ N sobre cada quilograma do material em sua extremidade! É por isso que as hélices são fabricadas com materiais leves e duros (geralmente ligas de alumínio).

Exemplo conceitual 9.6

ENGRENAGENS DE UMA BICICLETA Como relacionar as velocidades angulares das duas rodas dentadas de uma bicicleta (Figura 9.14) com o número de dentes de cada roda dentada?

SOLUÇÃO a corrente não desliza nem se estica, logo a velocidade escalar tangencial é a mesma na periferia das duas rodas dentadas. Pela Equação (9.13), temos

$$v = r_{\text{frontal}}\omega_{\text{frontal}} = r_{\text{traseira}}\omega_{\text{traseira}} \quad \text{logo} \quad \frac{\omega_{\text{traseira}}}{\omega_{\text{frontal}}} = \frac{r_{\text{frontal}}}{r_{\text{traseira}}}$$

A velocidade escalar angular de cada roda é inversamente proporcional ao raio. Essa relação também se aplica a polias ligadas por uma correia, desde que a correia não deslize. Para rodas dentadas, os dentes devem ser espaçados igualmente ao longo das circunferências das duas rodas dentadas a fim de que os dentes se ajustem apropriadamente às duas rodas. Considere como N_{frontal} e N_{traseira} os números de dentes; a condição de que o espaçamento entre os dentes seja o mesmo nas duas rodas dentadas é dada por

$$\frac{2\pi r_{\text{frontal}}}{N_{\text{frontal}}} = \frac{2\pi r_{\text{traseira}}}{N_{\text{traseira}}} \quad \text{ou} \quad \frac{r_{\text{frontal}}}{r_{\text{traseira}}} = \frac{N_{\text{frontal}}}{N_{\text{traseira}}}$$

Combinando esse resultado com a relação obtida anteriormente, temos

$$\frac{\omega_{\text{traseira}}}{\omega_{\text{frontal}}} = \frac{N_{\text{frontal}}}{N_{\text{traseira}}}$$

A velocidade angular de cada roda dentada é inversamente proporcional ao número de dentes. Em uma bicicleta com várias marchas, você obtém a velocidade angular mais elevada ω_{traseira} da roda traseira pedalando com uma taxa ω_{frontal} quando a razão $N_{\text{frontal}}/N_{\text{traseira}}$ é máxima; isso significa que você deve usar a roda dentada dianteira com maior raio (maior valor de N_{frontal}) e a roda traseira com menor raio (menor valor de N_{traseira}).

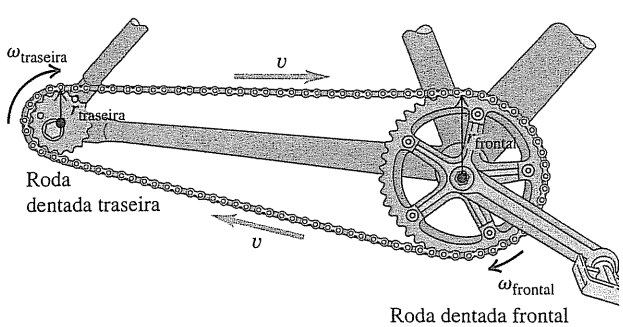


Figura 9.14 As rodas dentadas e a correia de uma bicicleta.

Teste sua compreensão da Seção 9.3 As informações são armazenadas em um CD ou DVD (Figura 9.8) em um padrão codificado constituído por minúsculas reentrâncias. Essas reentrâncias são agrupadas ao longo de uma trilha em forma de espiral orientada de dentro para fora até a periferia do disco. À medida que o disco gira dentro de um tocador, a trilha é percorrida a uma velocidade escalar constante. Como a velocidade escalar de rotação do disco deve variar conforme a cabeça de escaneamento do tocador se move pela trilha? i) A velocidade escalar de rotação deve aumentar. ii) A velocidade escalar de rotação deve diminuir. iii) A velocidade escalar de rotação deve permanecer inalterada. ∎

9.4 Energia no movimento de rotação

Um corpo rígido girando é constituído por massas em movimento, logo ele possui energia cinética. Podemos descrever essa energia cinética em termos da velocidade angular do corpo e de uma nova grandeza denominada *momento de inércia*, que depende da massa do corpo e de como a massa é distribuída.

Para desenvolvermos essa relação, imaginamos o corpo constituído por um grande número de partículas com massas m_1, m_2 ... situadas a distâncias r_1, r_2 ... do eixo de rotação. As partículas são identificadas por um índice *i:* a massa da *i*-ésima partícula é m_i e sua distância ao eixo de rotação é r_i. As partículas não estão necessariamente distribuídas no mesmo plano, de modo que definiremos r_i como a distância *perpendicular* entre a partícula de massa m_i e o eixo de rotação.

Quando um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo, a velocidade v_i da *i*-ésima partícula é dada pela Equação (9.13), $v_i = r_i\omega$, onde ω é a velocidade angular do corpo. Partículas diferentes possuem valores diferentes de r, porém ω possui sempre o mesmo valor para todas (senão o corpo não seria rígido). A energia cinética da *i*-ésima partícula pode ser expressa por

$$\frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2$$

A energia cinética *total* do corpo é a soma das energias cinéticas de todas as partículas que constituem o corpo:

$$K = \frac{1}{2}m_1 r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2 r_2^2\omega^2 + \cdots = \sum_i \frac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2$$

Colocando em evidência o fator comum $\omega^2/2$ obtemos

$$K = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2$$

A grandeza entre parênteses, obtida multiplicando-se a massa de cada partícula pelo quadrado da distância ao eixo de rotação e somando-se esses produtos, é

designada por I e denomina-se **momento de inércia** do corpo em relação a este eixo de rotação:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots = \sum_i m_i r_i^2 \qquad (9.16)$$

(definição de momento de inércia).

A palavra 'momento' dá idéia de que I depende da maneira como a massa do corpo é distribuída no espaço; ela não tem nada a ver com o 'momento' do tempo. Para um corpo com um dado eixo de rotação e uma dada massa total, quanto mais afastadas as partículas estiverem do eixo de rotação, maior será o momento de inércia. Em um corpo rígido, as distâncias r_i são todas constantes e I não depende de como o corpo está girando em torno de um dado eixo. A unidade SI do momento de inércia é quilograma vezes metro^2 (kg · m^2).

Em termos do momento de inércia I, a **energia cinética de rotação** K de um corpo rígido é

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad (9.17)$$

(energia cinética de rotação de um corpo rígido)

A energia cinética dada pela Equação (9.17) *não* é uma nova forma de energia; ela é a soma das energias cinéticas das partículas individuais que constituem o corpo rígido que se move. Ao usarmos a Equação (9.17), ω *deve* ser expressa em radianos por segundo, e não em revoluções por segundo ou em graus por segundo, para obtermos K em joules; isso ocorre porque usamos $v_i = r_i\omega$ na dedução que fizemos.

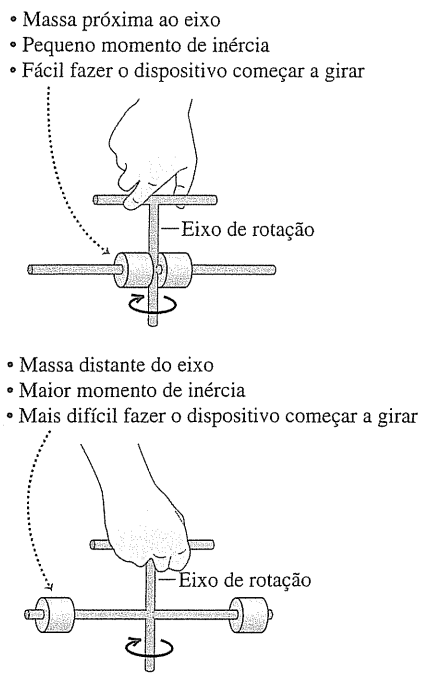


Figura 9.15 Um dispositivo que pode girar livremente em torno de um eixo vertical. Para que o momento de inércia varie, os dois cilindros de igual massa podem ser bloqueados em qualquer posição ao longo do eixo horizontal.

A Equação (9.17) fornece uma interpretação física simples para o momento de inércia: *quanto maior for o momento de inércia, maior será a energia cinética do corpo girando com uma dada velocidade angular* ω. Aprendemos no Capítulo 6 que a energia cinética de um corpo é igual ao trabalho realizado para acelerar o corpo do repouso até a velocidade considerada. Sendo assim, quanto maior for o momento de inércia de um corpo, mais difícil será fazê-lo girar a partir do repouso e mais difícil será fazê-lo parar quando estiver girando (Figura 9.15). Por essa razão, algumas vezes, a grandeza I também é chamada de *inércia rotacional*.

No Exemplo 9.7 mostraremos como a *troca* do eixo de rotação pode alterar o valor de I

Exemplo 9.7

MOMENTOS DE INÉRCIA EM RELAÇÃO A DIFERENTES EIXOS DE ROTAÇÃO Um engenheiro está projetando certa peça de uma máquina que consiste em três conectores pesados ligados por suportes leves (Figura 9.16). a) Qual é o momento de inércia desse corpo em relação a um eixo perpendicular ao plano do desenho e que passa pelo centro do disco A? b) Qual é o momento de inércia em torno de um eixo que coincide com o disco B e C? c) Se o corpo gira em torno de um eixo perpendicular ao plano do desenho e passa por A, com velocidade angular $\omega = 4{,}0$ rad/s, qual é sua energia cinética?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: os conectores podem ser considerados como partículas pesadas conectadas por hastes com massas desprezíveis. Desse modo, podemos usar os conceitos estudados nesta seção para calcular o momento de inércia desse conjunto de três partículas.

PREPARAR: nos itens (a) e (b), usaremos a Equação (9.16) para obter os momentos de inércia para cada um dos dois eixos. Dado o momento de inércia para o eixo A, usaremos a Equação (9.17) no item (c) para obter a energia cinética na rotação.

EXECUTAR: a) A partícula no ponto A está *sobre* o eixo. Sua distância r ao eixo é igual a zero. A Equação (9.16) fornece

$$I = \sum m_i r_i^2 = (0{,}10\text{ kg})(0{,}50\text{ m})^2 + (0{,}20\text{ kg})(0{,}40\text{ m})^2$$
$$= 0{,}057\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

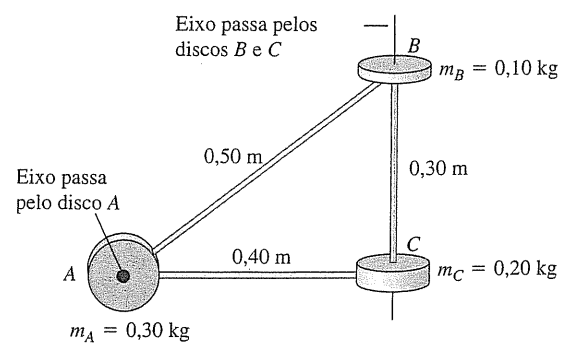


Figura 9.16 Peça de uma máquina com forma estranha.

b) As partículas em B e C estão *sobre* o eixo, logo, para elas, $r = 0$ e nenhuma delas contribui para o momento de inércia. Somente A contribui, e obtemos

$$I = \sum m_i r_i^2 = (0{,}30\ \text{kg})(0{,}40\ \text{m})^2 = 0{,}048\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

c) Usando a Equação (9.17),

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}(0{,}057\ \text{kg} \cdot \text{m}^2)(4{,}0\ \text{rad/s})^2 = 0{,}46\ \text{J}$$

AVALIAR: os resultados mostram que o momento de inércia para o eixo que passa por A é maior do que aquele para o eixo que passa por B e C. Portanto, dentre os dois eixos, é mais fácil fazer o corpo girar em torno do eixo que passa por B e C.

ATENÇÃO Momento de inércia depende da escolha do eixo Os resultados encontrados nas partes (a) e (b) do Exemplo 9.7 mostram que o momento de inércia de um corpo depende da localização e da orientação do eixo. Não é suficiente dizer 'O momento de inércia de um corpo é 0,048 kg · m²'. É necessário ser mais específico e dizer 'O momento de inércia de um corpo *em relação ao eixo que passa por B e C* é 0,048 kg · m²'.

No Exemplo 9.7 representamos o corpo por um conjunto de massas puntiformes e avaliamos diretamente a soma indicada na Equação (9.16). Quando o corpo é uma distribuição *contínua* de matéria, como um cilindro maciço ou uma placa, a soma se transforma em uma integral e precisamos usar o cálculo integral para obter o momento de inércia. Mostraremos diversos exemplos desse tipo de cálculo na Seção 9.6; enquanto isso, apresentamos os momentos de inércia de formas familiares em termos da massa e das dimensões do corpo na Tabela 9.2. Cada corpo indicado nessa tabela é *uniforme*, ou seja, a densidade é a mesma em todos os pontos das partes sólidas dos respectivos corpos.

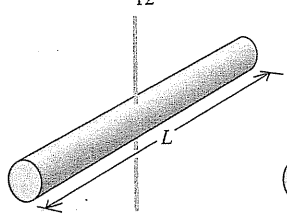
ATENÇÃO Cálculo do momento de inércia Podemos ser tentados a calcular o momento de inércia de um corpo supondo que toda a massa do corpo esteja concentrada em seu centro de massa e a seguir multiplicar a massa pelo quadrado da distância entre o centro de massa e o eixo de rotação. Resista a essa tentação; isso não funciona! Por exemplo, quando uma barra uniforme fina de comprimento L e massa M está pivotada em torno de um eixo perpendicular à barra passando pela sua extremidade, seu momento de inércia é dado por $I = ML^2/3$ (caso (b) da Tabela 9.2). Se você imaginasse a massa da barra concentrada em seu centro, a uma distância $L/2$ do eixo, você obteria o resultado *errado* $I = M(L/2)^2 = ML^2/4$.

Agora que sabemos como calcular a energia cinética de um corpo rígido girando, podemos aplicar os princípios de energia do Capítulo 7 para o movimento de rotação. A

Tabela 9.2 Momentos de inércia de diversos corpos

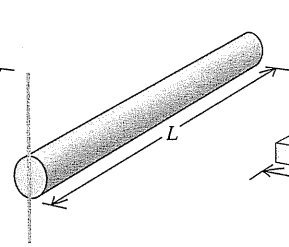
(a) Barra delgada, eixo passa pelo centro

$I = \frac{1}{12}ML^2$



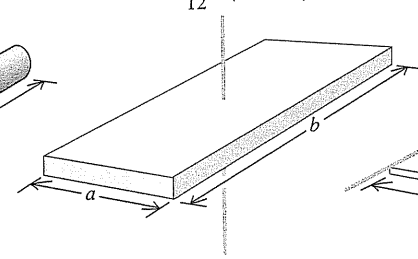
(b) Barra delgada, eixo passa por uma extremidade

$I = \frac{1}{3}ML^2$



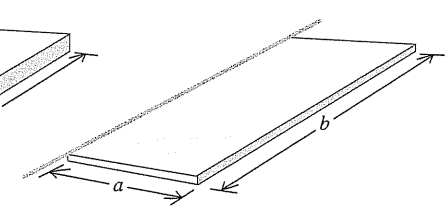
(c) Placa retangular, eixo passa pelo centro

$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$



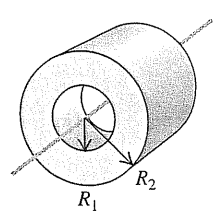
(d) Placa retangular fina, eixo passa ao longo da borda

$I = \frac{1}{3}Ma^2$



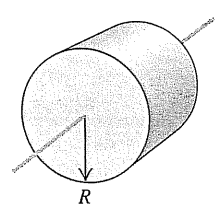
(e) Cilindro oco

$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$



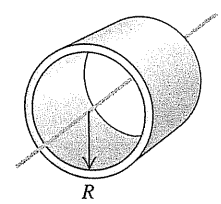
(f) Cilindro maciço

$I = \frac{1}{2}MR^2$



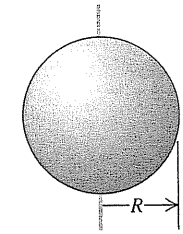
(g) Cilindro oco com paredes finas

$I = MR^2$



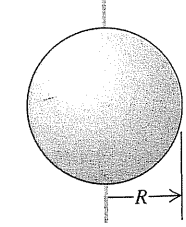
(h) Esfera maciça

$I = \frac{2}{5}MR^2$



(i) Esfera oca com paredes finas

$I = \frac{2}{3}MR^2$



seguir apresentaremos algumas observações estratégicas e alguns exemplos.

Estratégia para a solução de problemas 9.1

ENERGIA ROTACIONAL

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: você pode usar as relações entre trabalho e energia e a conservação da energia para achar relações envolvendo a posição e o movimento de um corpo rígido em rotação. Como vimos no Capítulo 7, geralmente o método da energia não se aplica para problemas que envolvem passagem de tempo. No Capítulo 10, veremos como abordar problemas de rotação desse tipo.

PREPARAR *o problema* usando as mesmas etapas da Estratégia para a Solução de Problemas 7.1 (Seção 7.1), com o seguinte acréscimo:

5. Muitos problemas envolvem uma corda enrolada em torno de um corpo rígido que gira e funciona como uma polia. Nessas situações, lembre-se de que o ponto sobre a polia que fica em contato com a corda possui a mesma velocidade linear da corda, desde que a corda não deslize sobre a polia. Nesse caso você pode usar as equações (9.13) e (9.14), que relacionam a velocidade linear e a aceleração tangencial de um ponto sobre um corpo rígido com a velocidade angular e a aceleração angular do corpo. Os exemplos 9.8 e 9.9 ilustram esse ponto.

EXECUTAR *a solução:* como no Capítulo 7, escreva expressões para a energia cinética inicial, energia cinética final e energias potenciais (K_1, K_2, U_1 e U_2) e para o trabalho não conservativo ω_{outro} (se houver). O novo elemento é a energia cinética na rotação, expressa em termos do momento de inércia I do corpo para um dado eixo e sua velocidade angular ω $\left(K = \frac{1}{2}I\omega^2\right)$ em vez da sua massa m e velocidade escalar v. Substitua essas expressões por $K_1 + U_1 + \omega_{outro} = K_2 + U_2$ (se o trabalho não conservativo for realizado) ou $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$ (se somente o trabalho conservativo for realizado) e solucione a(s) incógnita(s). Como no Capítulo 7, é útil desenhar gráficos de barra para mostrar os valores inicial e final de K, U e $E = K + U$.

AVALIAR *sua resposta:* como sempre, confira se sua resposta tem sentido físico.

Exemplo 9.8

DESENROLANDO UM CABO I Um cabo leve, flexível e não deformável é enrolado diversas vezes em torno da periferia de um tambor, um cilindro maciço com diâmetro de 0,120 m e massa igual a 50 kg, que pode girar em torno de um eixo estacionário horizontal mantido por mancais sem atrito (Figura 9.17). A extremidade livre do cabo é puxada com uma força constante de módulo igual a 9,0 N, deslocando-se por uma distância de 2,0 m. Ele se desenrola sem deslizar e faz o cilindro girar. Se o cilindro inicialmente está em repouso, calcule sua velocidade angular e a velocidade escalar final do cabo.

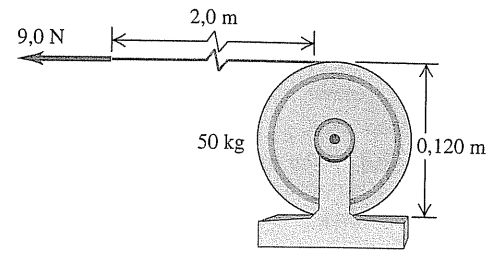


Figura 9.17 Um cabo é desenrolado de um cilindro (perspectiva lateral).

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: solucionaremos este problema usando os métodos de energia. O ponto 1 indica quando o cilindro começa a se mover e o ponto 2, quando o cabo se moveu 2,0 m. Consideraremos que o cabo leve não possua massa, de modo que somente o cilindro possua energia cinética. O cilindro não se move verticalmente, por isso não há variação na energia potencial gravitacional. Existe atrito entre o cabo e o cilindro, que é justamente o que faz o cilindro girar quando puxamos o cabo. Porém, como o cabo não desliza, não existe nenhuma velocidade relativa de deslizamento entre o cabo e o cilindro, e nenhuma energia mecânica é perdida em virtude do atrito. Como o cabo não possui massa, a força que ele exerce sobre a borda do cilindro é igual à força aplicada F.

PREPARAR: o cilindro parte do repouso, portanto sua energia cinética inicial é $K_1 = 0$. Entre os pontos 1 e 2 a força F realiza trabalho sobre o cilindro por uma distância $d = 2{,}0$ m. Por decorrência, a energia cinética no ponto 2 é $K_2 = \frac{1}{2}I\omega^2$. Uma das quatro incógnitas é ω; a outra é a velocidade escalar do cabo no ponto 2, que é igual à velocidade escalar tangencial v do cilindro nesse ponto. Encontraremos v a partir de ω usando a Equação (9.13).

EXECUTAR: o trabalho realizado sobre o cilindro é $W_{outro} = Fd = (9{,}0\text{ N})(2{,}0\text{ m}) = 18$ J. De acordo com a Tabela 9.2, o momento de inércia é

$$I = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}(50\text{ kg})(0{,}060\text{ m})^2 = 0{,}090\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

(O raio R é metade do diâmetro do cilindro). A relação $K_1 + U_1 + W_{outro} = K_2 + U_2$ fornece

$$0 + 0 + W_{outro} = \frac{1}{2}I\omega^2 + 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2W_{outro}}{I}} = \sqrt{\frac{2(18\text{ J})}{0{,}090\text{ kg}\cdot\text{m}^2}}$$

$$= 20\text{ rad/s}$$

A velocidade final do cabo é igual à velocidade final tangencial v do cilindro, que é:

$$v = R\omega = (0{,}060\text{ m})(20\text{ rad/s}) = 1{,}2\text{ m/s}$$

AVALIAR: se a massa do cabo não pudesse ser desprezada, então parte do trabalho realizado iria para a energia cinética do cabo. Logo, o cilindro acabaria com menos energia cinética e menor velocidade escalar angular do que calculamos aqui.

Exemplo 9.9

DESENROLANDO UM CABO II Enrolamos um cabo leve e flexível em torno de um cilindro maciço com massa M e raio R. O cilindro gira com atrito desprezível em torno de um eixo horizontal estacionário. Amarramos a extremidade livre do cabo a um objeto de massa m e libertamos o objeto sem velocidade inicial a uma distância h acima do solo. À medida que o objeto cai,

o cabo se desenrola sem deslizar nem se esticar, fazendo o cilindro girar. Calcule a velocidade do objeto que cai e a velocidade angular do cilindro no instante em que o objeto atinge o solo.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como no Exemplo 9.8, o cabo não desliza, e o atrito não realiza trabalho. O cabo não realiza trabalho *resultante*; na extremidade superior a força e o deslocamento estão no mesmo sentido, e na outra extremidade a força possui sentido contrário ao do deslocamento. Portanto, o trabalho total realizado pelas duas extremidades do cabo é igual a zero. Desse modo, somente a gravidade realiza trabalho, e por isso a energia mecânica é conservada.

PREPARAR: a Figura 9.18a mostra a situação imediatamente antes que o bloco comece a cair. Nesse ponto, o sistema não possui nenhuma energia cinética ($K_1 = 0$). Consideramos a energia potencial igual a zero quando o objeto está no nível do solo; logo $U_1 = mgh$ e $U_2 = 0$. (Podemos ignorar a energia potencial gravitacional do cilindro girando, visto que sua altura não varia.) Imediatamente antes de o objeto colidir com o solo (Figura 9.18b), tanto o objeto quanto o cilindro possuem energia cinética. A energia cinética total K_2 nesse instante é

$$K_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

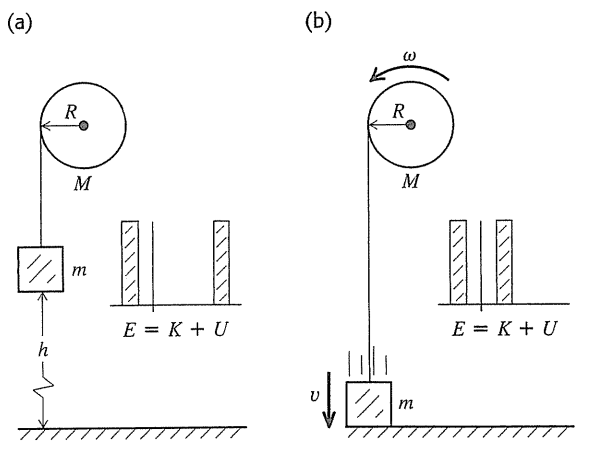
De acordo com a Tabela 9.2, o momento de inércia do cilindro é $I = \frac{1}{2}MR^2$. Também, v e ω são relacionados por $v = R\omega$, uma vez que a velocidade da massa que cai deve ser igual à velocidade tangencial de um corpo na periferia do cilindro. Usaremos essas relações para solucionar as incógnitas v e ω como mostra a Figura 9.18b.

EXECUTAR: usamos as expressões para K_1, U_1, K_2 e U_2 e a relação $\omega = v/R$ na equação de conservação da energia $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$. Então solucionamos v:

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 + 0 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}M\right)v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + M/2m}}$$

A velocidade angular final é obtida da relação $\omega = v/R$.



Bloco e cilindro em repouso — Bloco quase colidindo com o solo

Figura 9.18 Esquematização do problema.

AVALIAR: vamos conferir o resultado para alguns casos particulares. Quando a massa M é muito maior que m, v é muito pequeno, como era de se esperar. Quando M é muito menor que m, v é aproximadamente igual a $\sqrt{2gh}$, que é a velocidade de um corpo em queda livre a partir de uma altura h. Você ficou surpreso pelo fato de v não depender do raio do cilindro?

Energia potencial gravitacional para um corpo com massa distribuída

No Exemplo 9.9 o cabo possuía massa desprezível, de modo que ignoramos sua energia cinética e a energia potencial gravitacional associada ao cabo. Quando a massa *não* é desprezível, precisamos aprender a calcular a *energia potencial gravitacional* associada com um corpo que possui uma distribuição contínua de massas. Quando a aceleração da gravidade g é a mesma em todos os pontos do corpo, a energia potencial gravitacional é a mesma que a de uma partícula com massa total do corpo centralizada em seu centro de massa. Suponha que você oriente o eixo Oy verticalmente de baixo para cima. Então, para um corpo de massa total M, a energia potencial gravitacional U é simplesmente

$$U = Mgy_{cm} \qquad (9.18)$$

(energia potencial gravitacional para um corpo rígido)

onde y_{cm} é a coordenada y do centro de massa. A expressão se aplica para qualquer corpo que possua massa distribuída, independentemente de ele ser rígido ou não (Figura 9.19).

Para provar a Equação (9.18), novamente consideramos o corpo como um conjunto de elementos de massa m_i. A energia potencial de um elemento de massa m_i é $m_i g y_i$, de modo que a energia potencial é dada por

$$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \cdots = (m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots)g$$

Figura 9.19 Em uma técnica denominada 'inversão de Fosbury', em homenagem ao seu criador, este atleta encurva seu corpo quando passa sobre a barra no salto em altura. Em conseqüência, seu centro de massa passa efetivamente *embaixo* da barra. Essa técnica necessita de um menor aumento da energia potencial gravitacional (Equação (9.18)) do que a técnica antiga, na qual o centro de massa passava em cima da barra.

Porém, pela Equação (8.28), que define as coordenadas do centro de massa,

$$m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots = (m_1 + m_2 + \cdots)y_{cm} = My_{cm}$$

onde $M = m_1 + m_2 + \ldots$ é a massa total. Combinando essa relação com a expressão anterior de U, achamos $U = Mgy_{cm}$, concordando com a Equação (9.18).

Deixamos a aplicação da Equação (9.18) para os problemas. Usaremos essa relação no Capítulo 10 ao analisarmos problemas de corpos rígidos que possuem eixos de rotação que se movem.

Teste sua compreensão da Seção 9.4 Suponha que o cilindro e o bloco do Exemplo 9.9 possuam a mesma massa, de modo que $m = M$. Imediatamente antes de o bloco atingir o solo, qual afirmação é correta sobre a relação entre a energia cinética do bloco em queda e a energia cinética na rotação do cilindro? i) O bloco possui mais energia cinética do que o cilindro. ii) O bloco possui menos energia cinética do que o cilindro. iii) O bloco e o cilindro possuem o mesmo valor de energia cinética. ∎

9.5 Teorema dos eixos paralelos

Na Seção 9.4 dissemos que um corpo rígido não possui somente um momento de inércia. De fato, ele possui um número infinito de momentos de inércia, porque existe um número infinito de eixos de rotação. No entanto, existe uma relação simples entre o momento de inércia I_{cm} em relação ao centro de massa do corpo de massa M e o momento de inércia I_P em relação a outro eixo paralelo ao primeiro, porém situado a uma distância d do primeiro. Essa relação, conhecida como **teorema dos eixos paralelos**, afirma que

$$I_P = I_{cm} + Md^2 \qquad (9.19)$$

(teorema dos eixos paralelos)

Para demonstrarmos esse teorema, consideramos dois eixos paralelos ao eixo Oz, um passando pelo centro de massa e o outro passando pelo ponto P (Figura 9.20). Inicialmente tomamos uma fatia muito fina do corpo, paralela ao plano xy e perpendicular ao eixo Oz. A origem do nosso sistema de coordenadas coincide com o centro de massa do corpo; as coordenadas do centro de massa são, portanto, $x_{cm} = y_{cm} = z_{cm} = 0$. O eixo que passa no centro de massa atravessa a fatia no ponto O, e o eixo paralelo passa através do ponto P, cujas coordenadas x e y são dadas por (a, b). A distância entre esses dois eixos é igual a d, sendo $d^2 = a^2 + b^2$.

Podemos escrever uma expressão para o momento de inércia I_P em relação ao eixo passando através do ponto P. Seja m_i um elemento de massa da fatia com coordenadas (x_i, y_i, z_i). Então o momento de inércia I_{cm} da fatia em relação ao eixo que passa no centro de massa (em O) é dado por

$$I_{cm} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

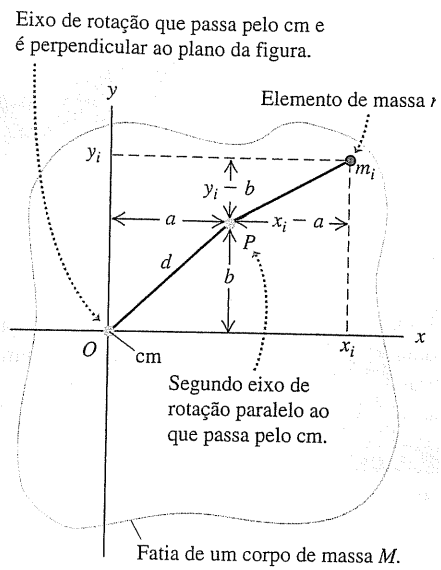


Figura 9.20 O elemento de massa m_i possui coordenadas (x_i, y_i) em relação ao eixo que passa no centro de massa (cm) e coordenadas $(x_i - a, y_i - b)$ em relação ao eixo paralelo que passa no ponto P.

O momento de inércia da fatia em relação ao eixo que passa no ponto P é

$$I_P = \sum_i m_i[(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2]$$

Essas expressões não envolvem a coordenada z_i medida perpendicularmente a todas as fatias, logo podemos estender as somas para incluir *todas* as partículas em *todas* as fatias. Então, I_P fornece o momento de inércia do corpo *inteiro* em relação a um eixo passando pelo ponto P. A seguir desenvolvendo os termos elevados ao quadrado e reagrupando-os, obtemos

$$I_P = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) - 2a\sum_i m_i x_i - 2b\sum_i m_i y_i + (a^2 + b^2)\sum_i m_i$$

A primeira soma é I_{cm}. Pela Equação (8.28), que define o centro de massa, a segunda e a terceira soma são proporcionais a x_{cm} e y_{cm}; esses valores são nulos porque a origem do nosso sistema coincide com o centro de massa. O último termo é d^2 multiplicado pela massa total, ou Md^2, e isso completa a demonstração de que $I_P = I_{cm} + Md^2$.

Como mostra a Equação (9.19), o momento de inércia de um corpo rígido em relação a um eixo passando em seu centro de massa é menor que o momento de inércia em relação a qualquer outro eixo paralelo. Assim, é mais fácil fazer um corpo girar quando o eixo de rotação passa através do centro de massa. Isso sugere que é bastante natural que um corpo rígido gire em torno de um eixo que passe em seu centro de massa; desenvolveremos essa idéia de modo mais quantitativo no Capítulo 10.

Exemplo 9.10

USO DO TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS Uma das peças de uma articulação mecânica (Figura 9.21) possui massa igual a

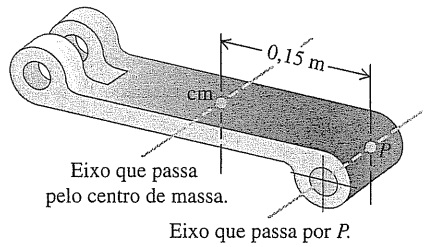


Figura 9.21 Cálculo de I_{cm} a partir da medida de I_P.

3,6 kg. Medimos seu momento de inércia em relação a um eixo situado a uma distância de 0,15 m do seu centro de massa e encontramos o valor $I_P = 0{,}132\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. Qual é o momento de inércia I_{cm} em relação a um eixo paralelo que passa pelo centro de massa?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o teorema do eixo paralelo nos permite relacionar os momentos de inércia I_{cm} e I_P que passam por dois eixos paralelos.

PREPARAR: usaremos a Equação (9.19) para determinar a incógnita I_{cm}.

EXECUTAR: reagrupando a Equação (9.19) e substituindo os valores, obtemos:

$$I_{cm} = I_P - Md^2 = 0{,}132\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 - (3{,}6\ \text{kg})(0{,}15\ \text{m})^2$$
$$= 0{,}051\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

AVALIAR: o resultado mostra que I_{cm} é menor que I_P. Isso corresponde à expectativa. Como vimos anteriormente, o momento de inércia para um eixo que passa pelo centro de massa é inferior ao que passa por qualquer outro eixo paralelo.

Teste sua compreensão da Seção 9.5 Um taco de bilhar é uma vara de madeira com composição uniforme e afilada, de modo que o diâmetro em uma das extremidades é maior do que o da outra extremidade. Use o teorema do eixo paralelo para decidir se um taco de bilhar possui um momento de inércia maior i) para um eixo que passa pela extremidade mais grossa da vara e perpendicular ao seu comprimento ou ii) para um eixo que passa pela extremidade mais delgada da vara e perpendicular ao seu comprimento. ∎

*9.6 Cálculos do momento de inércia

NOTA: esta seção opcional destina-se a estudantes que estejam familiarizados com o cálculo integral.

Quando um corpo rígido é uma distribuição contínua de massas – como um cilindro maciço ou uma esfera maciça – ele não pode ser representado por massas puntiformes. Nesse caso, a soma das massas e distâncias que definem o momento de inércia [Equação (9.16)] se transforma em uma integral. Imagine o corpo como se ele estivesse dividido em pequenos elementos de massa dm, de modo que todos os pontos no interior de um dado elemento estejam essencialmente a uma mesma distância perpendicular ao eixo de rotação. Chamamos essa distância de r, como anteriormente. Então, o momento de inércia é

Figura 9.22 Medindo pequenas variações nas órbitas dos satélites, os geofísicos podem determinar o momento de inércia da Terra. Isso nos informa como a massa de nosso planeta está distribuída em seu interior. Os dados revelam que a Terra é muito mais densa no centro do que nas camadas externas.

$$I = \int r^2\, dm \tag{9.20}$$

Para calcularmos essa integral, devemos representar r e dm em termos da mesma variável de integração. Quando o objeto é efetivamente unidimensional, como as barras delgadas (a) e (b) na Tabela 9.2, podemos usar uma coordenada x ao longo do comprimento e relacionar dm com o incremento dx. Para um objeto em três dimensões geralmente é mais fácil escrever dm em termos do elemento de volume dV e da *densidade* ρ do corpo. A densidade ou massa específica é dada por $\rho = dm/dV$, de modo que a Equação (9.20) pode ser escrita como

$$I = \int r^2 \rho\, dV$$

Essa expressão indica que o momento de inércia de um corpo depende de como a sua densidade varia em relação ao seu volume (Figura 9.22). Quando o corpo possui densidade uniforme, a constante ρ pode ser retirada da integral

$$I = \rho \int r^2\, dV \tag{9.21}$$

Para usarmos esta equação, devemos relacionar o elemento de volume dV com as diferenciais das variáveis de integração, como $dV = dx\, dy\, dz$. O elemento dV deve ser sempre escolhido de modo que todos os pontos no seu interior estejam aproximadamente situados à mesma distância do eixo de rotação. Os limites da integral são determinados pela forma e pelas dimensões do corpo. Para corpos com formas geométricas regulares, essa integração normalmente pode ser bem fácil de executar.

Exemplo 9.11

BARRA DELGADA UNIFORME, EIXO ORTOGONAL AO SEU COMPRIMENTO A Figura 9.23 mostra uma barra delgada

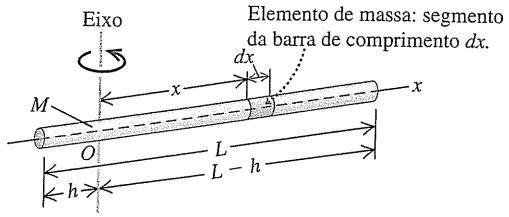


Figura 9.23 Determinação do momento de inércia de uma barra delgada em relação a um eixo passando pelo ponto *O*.

uniforme de massa M e comprimento L. Ela poderia ser, por exemplo, a batuta de um maestro. Determine o seu momento de inércia em relação a um eixo passando pelo ponto O, a uma distância arbitrária h de uma das suas extremidades.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a barra é uma distribuição contínua de massa, por isso devemos usar a integração para determinar o momento de inércia. Escolhemos como elemento de massa uma seção reta da barra com comprimento dx situada a uma distância x do ponto O.

PREPARAR: a razão entre esse elemento de massa dm e a massa total M é igual à razão entre o elemento de comprimento dx e o comprimento total L:

$$\frac{dm}{M} = \frac{dx}{L} \qquad \text{logo} \qquad dm = \frac{M}{L}\,dx$$

Determinaremos I pela Equação (9.20), substituindo r por x (veja Figura 9.23).

EXECUTAR: a Figura 9.23 indica que os limites de integração sobre x estão entre $-h$ e $(L - h)$. Logo, obtemos

$$I = \int x^2\,dm = \frac{M}{L}\int_{-h}^{L-h} x^2\,dx$$

$$= \left[\frac{M}{L}\left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_{-h}^{L-h} = \frac{1}{3}M(L^2 - 3Lh + 3h^2)$$

AVALIAR: a partir dessa expressão geral podemos achar o momento de inércia em relação a um eixo que passa em qualquer ponto da barra. Por exemplo, se o eixo passa na extremidade esquerda da barra, $h = 0$, logo

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

Se o eixo passa pela extremidade direita, devemos obter o mesmo resultado. Fazendo $h = L$, obtemos novamente

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

Se o eixo passa pelo centro, o ponto usual para a batuta de um maestro, então $h = L/2$ e

$$I = \frac{1}{12}ML^2$$

Esses resultados confirmam as expressões indicadas na Tabela 9.2.

Exemplo 9.12

CILINDRO MACIÇO OU OCO GIRANDO EM TORNO DO SEU EIXO DE SIMETRIA A Figura 9.24 mostra um cilindro oco e uniforme com comprimento L, raio interno R_1 e raio externo R_2. Esse objeto poderia ser um cilindro de aço para máquina de impressão ou um cilindro para laminação de aço. Calcule o momento de inércia em relação ao eixo de simetria do cilindro.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: novamente devemos usar a integração para calcular o momento de inércia, mas desta vez escolhemos como elemento de volume uma casca cilíndrica fina de raio r, espessura dr e comprimento L. Todas as partes desse elemento de massa estão situadas a uma mesma distância do eixo do cilindro.

PREPARAR: o volume do elemento é aproximadamente igual ao volume de uma placa com comprimento L, espessura dr e largura $2\pi r$ (a circunferência da casca cilíndrica). Portanto,

$$dm = \rho\,dV = \rho(2\pi rL\,dr)$$

Usaremos essa expressão na Equação (9.20) e faremos a integração de $r = R_1$ para $r = R_2$.

EXECUTAR: o momento de inércia é dado por

$$I = \int r^2\,dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2\rho(2\pi rL\,dr)$$

$$= 2\pi\rho L\int_{R_1}^{R_2} r^3\,dr$$

$$= \frac{2\pi\rho L}{4}(R_2^4 - R_1^4)$$

$$= \frac{\pi\rho L}{2}(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$$

Geralmente é mais conveniente expressar o momento de inércia em função da massa total M do corpo, que é sua densidade ρ multiplicada pelo volume total V. O volume é

$$V = \pi L(R_2^2 - R_1^2)$$

de modo que a massa total é

$$M = \rho V = \pi L\rho(R_2^2 - R_1^2)$$

e o momento de inércia é

$$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$$

AVALIAR: esse resultado é indicado no caso (e) da Tabela 9.2. No caso de um cilindro maciço, temos $R_1 = 0$. Chamando o raio externo R_2 simplesmente de R, verificamos que o momento de inércia de um cilindro maciço de raio R é dado por

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Caso o cilindro possua uma parede muito fina (como um tubo), R_1 é aproximadamente igual a R_2; se designarmos por R o raio comum, obtemos

$$I = MR^2$$

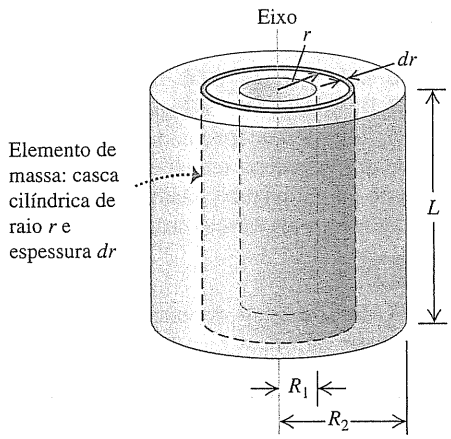


Figura 9.24 Determinação do momento de inércia de um cilindro oco em relação ao seu eixo de simetria.

Poderíamos prever esse último resultado; em uma casca cilíndrica, todas as massas estão situadas a uma mesma distância $r = R$ do eixo, logo $I = \int r^2\, dm = R^2 \int dm = MR^2$.

Exemplo 9.13

ESFERA HOMOGÊNEA COM RAIO R, EIXO PASSANDO PELO CENTRO Determine o momento de inércia de uma esfera maciça e uniforme (como uma bola de bilhar ou a bolha de aço de um mancal) em relação a um eixo que passa pelo seu centro.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: para calcular o momento de inércia dividimos a esfera em discos finos de espessura dx (Figura 9.25), cujos momentos de inércia conhecemos pelo Exemplo 9.12. Vamos fazer a integração deles para calcular o momento de inércia total. O único ponto capcioso é que o raio e a massa de um disco dependem da sua distância x do centro da esfera.

PREPARAR: o raio r do disco indicado na Figura 9.25 é dado por

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Seu volume é

$$dV = \pi r^2\, dx = \pi(R^2 - x^2)\, dx$$

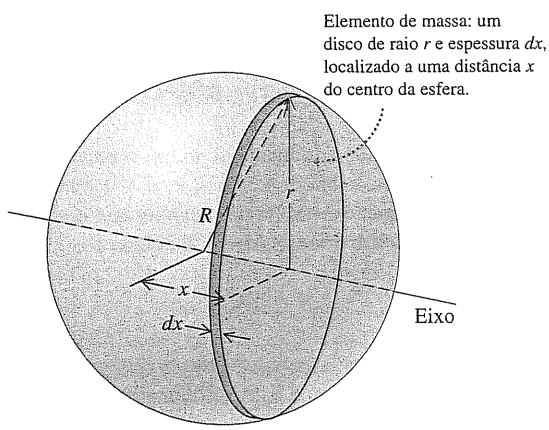


Figura 9.25 Determinação do momento de inércia de uma esfera em relação a um eixo que passa através do seu centro.

e sua massa é

$$dm = \rho\, dV = \pi\rho(R^2 - x^2)\, dx$$

EXECUTAR: pelo Exemplo 9.12, o momento de inércia de um disco de raio r e massa dm é

$$dI = \frac{1}{2}r^2\, dm = \frac{1}{2}\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2[\pi\rho(R^2 - x^2)\, dx]$$
$$= \frac{\pi\rho}{2}(R^2 - x^2)^2\, dx$$

Integrando a expressão anterior de $x = 0$ a $x = R$, obtemos o momento de inércia do hemisfério da direita. Pela simetria, o momento de inércia total I para a esfera inteira é o dobro desse valor:

$$I = (2)\frac{\pi\rho}{2}\int_0^R (R^2 - x^2)^2\, dx$$

Integrando, encontramos

$$I = \frac{8\pi\rho}{15}R^5$$

A massa M da esfera que possui volume $V = 4\pi R^3/3$ é dada por

$$M = \rho V = \frac{4\pi\rho R^3}{3}$$

Comparando as expressões de I e de M, achamos

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

AVALIAR: esse resultado concorda com a expressão indicada na Tabela 9.2, caso (h). Note que o momento de inércia de uma esfera homogênea de massa M e raio R é menor do que o momento de inércia de um *cilindro* que possui a mesma massa e o mesmo raio, $I = \frac{1}{2}MR^2$. A razão é que uma parte maior da massa da esfera está localizada próxima de seu eixo.

Teste sua compreensão da Seção 9.6 Dois cilindros ocos possuem o mesmo raio interno e externo e a mesma massa, mas possuem comprimentos diferentes. Um é feito de madeira de baixa densidade e o outro de chumbo de alta densidade. Qual cilindro possui o maior momento de inércia em torno do seu eixo de simetria? i) o cilindro de madeira; ii) o cilindro de chumbo; iii) os dois momentos de inércia se equivalem. ∎

Resumo

Cinemática rotacional: quando um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo (geralmente designado como eixo z), sua posição é descrita por uma coordenada angular θ. A velocidade angular ω_z é definida como a derivada da coordenada θ em relação ao tempo, e a aceleração angular α_z é definida como a derivada da velocidade angular ω_z ou a derivada de segunda ordem da coordenada angular θ (exemplos 9.1 e 9.2). Quando um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo com aceleração angular constante, θ, ω_z e α_z são relacionadas por equações cinemáticas simples análogas àquelas para o movimento em linha reta com aceleração linear constante (Exemplo 9.3).

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \tag{9.3}$$

$$\alpha_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{9.5}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2 \tag{9.11}$$

(somente α_z constante)

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_z + \omega_{0z})t \tag{9.10}$$

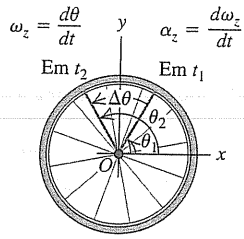
(somente α_z constante)

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t \tag{9.7}$$

(somente α_z constante)

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0) \tag{9.12}$$

(somente α_z constante)

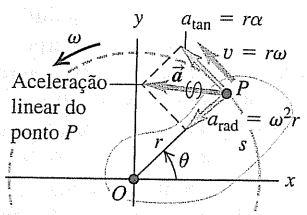


Relação entre cinemática linear e angular: a velocidade escalar angular ω de um corpo rígido é o módulo da sua velocidade angular. A taxa de variação de ω é $\alpha = d\omega/dt$. Para uma partícula do corpo que esteja a uma distânica r do eixo de rotação, a velocidade escalar v e os componentes da aceleração $\vec{a}$ estão relacionadas a ω e α (exemplos 9.4 a 9.6).

$$v = r\omega \tag{9.13}$$

$$a_{tg} = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \tag{9.14}$$

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \tag{9.15}$$

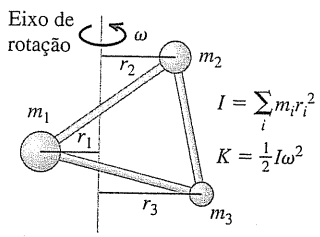


Momento de inércia e energia cinética da rotação: o momento de inércia I de um corpo girando em torno de um dado eixo é uma medida da sua inércia rotacional: quanto maior for o momento de inércia, mais difícil será alterar o estado de rotação do corpo. O momento de inércia pode ser expresso como uma soma das partículas m_i que compõem o corpo, cada qual na sua própria distância perpendicular r_i do eixo. A energia cinética rotacional de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo depende da velocidade escalar angular ω e do momento de inércia I para esse eixo de rotação (exemplos 9.7 a 9.9).

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots$$

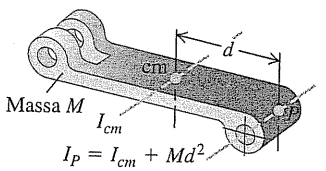
$$= \sum_i m_i r_i^2 \tag{9.16}$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{9.17}$$



Cálculo do momento de inércia: o teorema do eixo paralelo relaciona os momentos de inércia de um corpo rígido de massa M em torno de dois eixos paralelos: um eixo que passa através do seu centro de massa (momento de inércia I_{cm}) e um eixo paralelo situado a uma distância d do primeiro eixo (momento de inércia I_P) (Exemplo 9.10). Se o corpo possui uma distribuição de massa contínua, o momento de inércia pode ser calculado pela integração (exemplos 9.11 a 9.13).

$$I_P = I_{cm} + Md^2 \tag{9.19}$$



Principais termos

aceleração angular instantânea, 289
aceleração angular média, 289
componente centrípeto da aceleração, 294
componente tangencial da aceleração, 293
corpo rígido, 286
deslocamento angular, 287
energia cinética de rotação, 297
momento de inércia, 297
radianos, 287
teorema dos eixos paralelos, 301
velocidade angular escalar, 293
velocidade angular instantânea, 287
velocidade angular média, 287

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Ambos os segmentos da pá rígida possuem a mesma velocidade escalar angular ω. Pelas equações (9.13) e (9.15), dobrar a distância r para a mesma ω dobra a velocidade linear $v = r\omega$ e dobra a aceleração radial $a_{rad} = \omega^2 r$.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

9.1 Respostas: a) i) e iii), b) ii) A rotação é acelerada quando a velocidade angular e a aceleração angular possuem o mesmo

9.8 Uma roda gira em torno de um eixo que está na direção z. A velocidade angular ω_z é –6,0 rad/s para $t = 0$, aumenta linearmente no decorrer do tempo e é +8,0 m/s para $t = 7{,}0$ s. Consideramos a rotação anti-horária como positiva. a) A aceleração angular nesse intervalo de tempo é positiva ou negativa? b) Em qual intervalo de tempo a velocidade escalar da roda aumenta? Diminui? c) Qual é o deslocamento angular da roda para $t + 7{,}0$ s?

Seção 9.2 Rotação com aceleração angular constante

9.9 A roda de uma bicicleta possui velocidade angular de 1,50 rad/s. a) Se sua aceleração angular é constante e igual a 0,300 rad/s^2, qual é sua velocidade angular para $t = 2{,}50$ s? b) Qual foi o deslocamento angular da roda entre $t = 0$ e $t = 2{,}50$ s?

9.10 Um ventilador elétrico é desligado, e sua velocidade angular diminui uniformemente de 500 rev/min até 200 rev/min em 4,0 s. a) Ache a aceleração angular em rev/s e o número de revoluções feitas no intervalo de 4,0 s. b) Supondo que a aceleração angular calculada no item (a) permaneça constante, durante quantos segundos a mais a roda continuará a girar até parar?

9.11 A lâmina rotatória de um misturador gira com aceleração angular constante igual a 1,50 rad/s^2. a) Partindo do repouso, quanto tempo ela leva para atingir uma velocidade angular de 36,0 rad/s? b) Qual o número de revoluções descritas pela rotação da lâmina nesse intervalo de tempo?

9.12 a) Deduza a Equação (9.12) combinando a Equação (9.7) com a Equação (9.11) para eliminar t. b) A velocidade angular da hélice de um avião cresce de 12,0 rad/s até 16,0 rad/s, quando ela sofre um deslocamento angular de 7,0 rad. Qual é a aceleração angular em rad/s^2?

9.13 Uma plataforma giratória gira com aceleração angular constante de 2,25 rad/s^2. Após 4,0 s, ela girou por um ângulo de 60,0 rad. Qual era a velocidade angular da roda no início do intervalo de 4,0 s?

9.14 A lâmina de uma serra circular de diâmetro igual a 0,200 m começa a girar a partir do repouso. Em 6,0 s ela se acelera com velocidade angular constante até uma velocidade angular igual a 140 rad/s. Calcule a aceleração angular e o deslocamento angular total da lâmina.

9.15 Um volante de alta velocidade em um motor está girando a 500 rpm quando subitamente ocorre uma falha no fornecimento de energia. O volante possui massa de 40,0 kg e diâmetro de 75,0 cm. A energia elétrica fica desligada por 30,0 s e nesse período o volante diminui a velocidade em função do atrito nos seus mancais. Enquanto a energia está desligada, o volante faz 200 revoluções completas. a) Qual é a taxa de rotação do volante quando a energia retorna? b) Quanto tempo após o início da falta de energia teria levado para o volante parar, caso a energia não tivesse retornado, e quantas revoluções o volante teria feito nesse período?

9.16 A unidade de disco de um computador é ligada a partir do repouso e possui aceleração angular constante. Se levou 0,750 s para a unidade fazer a sua *segunda* revolução completa, a) quanto tempo ela levou para fazer a primeira revolução e b) qual é a sua aceleração angular, em rad/s^2?

9.17 Um dispositivo de segurança faz a lâmina de uma serra mecânica reduzir sua velocidade angular de um valor ω_1 no repouso, completando 1,0 revolução. Com essa mesma aceleração constante, quantas revoluções seriam necessárias para fazer a lâmina parar a partir de uma velocidade angular ω_3, sendo $\omega_3 = 3\omega_1$?

9.18 Uma fita refletora estreita se estende do centro à periferia de uma roda. Você escurece a sala e usa uma câmara e uma unidade estroboscópica que emite um *flash* a cada 0,050 s para fotografar a roda enquanto ela gira em um sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Você dispara o estroboscópio de tal modo que o primeiro *flash* ($t = 0$) ocorre quando a fita está na horizontal voltada para a direita com deslocamento angular igual a zero. Para as situações descritas a seguir, faça um desenho da foto que você obterá para a exposição no intervalo de tempo para cinco *flashes* (para $t = 0$; 0,050 s; 0,100 s; 0,150 s; e 0,200 s); faça um gráfico de θ *versus* t e de ω *versus* t desde $t = 0$ até $t = 0{,}200$ s. a) A velocidade angular é constante e igual a 10,0 rev/s. b) A roda parte do repouso com uma aceleração angular de 25,0 rev/s^2. c) A roda está girando a 10,0 rev/s para $t = 0$ e varia sua velocidade angular com uma taxa constante de –50,0 rev/s^2.

9.19 Para $t = 0$, a roda de um esmeril possui velocidade angular igual a 24,0 rad/s. Ela possui uma aceleração angular constante igual a 30,0 rad/s^2 quando um freio é acionado em $t = 2{,}0$ s. A partir desse instante ela gira 432 rad à medida que pára com uma aceleração angular constante. a) Qual foi o deslocamento angular total da roda desde $t = 0$ até o instante em que ela parou? b) Em que instante ela parou? c) Qual foi o módulo da sua aceleração quando ela diminuía de velocidade?

Seção 9.3 Relações entre a cinemática angular e a cinemática linear

9.20 Em um charmoso hotel do século XIX, um elevador antigo está conectado a um contrapeso por um cabo que passa por um disco giratório de 2,50 m de diâmetro (Figura 9.28). O elevador sobe e desce ao se girar o disco, e o cabo não desliza pela borda do disco, mas gira com ele. a) A quantas rpm deve o disco girar para que o elevador suba a 25,0 cm/s? b) Para colocar o elevador em movimento, ele deve ser acelerado a 1/8 g. Qual deve ser a aceleração angular do disco, em rad/s^2? c) A qual ângulo (em radianos e em graus) o disco girou, após levantar o elevador 3,25 m entre dois andares?

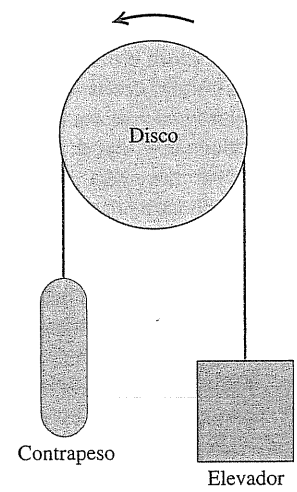


Figura 9.28 Exercício 9.20.

9.21 Usando dados de astronomia do Apêndice F, juntamente com o fato de que a Terra gira em torno do seu eixo uma vez por dia, calcule a) a velocidade escalar angular orbital da Terra (em rad/s) em função do seu movimento em torno do Sol, b) sua velocidade escalar angular (em rad/s) em função do seu giro axial, c) a velocidade escalar tangencial da Terra em torno do Sol (supondo-se uma órbita circular), d) a velocidade escalar tangencial de um ponto na linha do Equador na Terra em função do giro axial do planeta e e) os componentes radial e tangencial da aceleração do ponto no item (d).

9.22 Disco compacto. Um CD armazena músicas em uma configuração codificada constituída por pequenas reentrâncias com profundidade de 10^{-7} m. Essas reentrâncias são agrupadas ao

longo de uma trilha em forma de espiral orientada de dentro para fora até a periferia do disco; o raio interno da espiral é igual a 25,0 mm e o raio externo é igual a 58,0 mm. À medida que o disco gira em um tocador de CD, a trilha é percorrida com uma velocidade *linear* constante de 1,25 m/s. a) Qual é a velocidade angular do CD quando a parte mais interna da trilha está sendo percorrida? E quando a parte mais externa está sendo percorrida? b) O tempo máximo para a reprodução do som de um CD é igual a 74,0 min. Qual seria o comprimento total da trilha desse CD, caso a espiral fosse esticada para formar uma trilha reta? c) Qual é a aceleração angular média para esse CD de máxima duração durante o tempo de 74,0 min? Considere como positivo o sentido da rotação do disco.

9.23 Uma roda com diâmetro de 40,0 cm parte do repouso e gira com aceleração angular constante de 3,0 rad/s^2. No instante em que a roda realiza a sua segunda revolução, calcule a aceleração radial de um ponto da borda, de duas formas: a) usando a relação $a_{rad} = \omega^2 r$ e b) a partir da relação $a_{rad} = v^2/r$.

9.24 Ultracentrífuga. Calcule a velocidade angular necessária (em rev/min) de uma ultracentrífuga para que a aceleração radial de um ponto a 2,50 cm do eixo seja igual a $400000g$ (isto é, 400000 vezes maior do que a aceleração da gravidade).

9.25 Um volante de raio igual a 0,300 m parte do repouso e se acelera com aceleração angular constante de 0,600 rad/s^2. Calcule o módulo da aceleração tangencial, da aceleração radial e da aceleração resultante de um ponto da periferia do volante a) no início; b) depois de ele ter girado um ângulo de 60,0°; c) depois de ele ter girado um ângulo de 120,0°.

9.26 Uma plataforma giratória possui diâmetro de 0,750 m e está girando em torno de um eixo fixo com uma velocidade angular inicial igual a 0,250 rev/s e aceleração angular igual a 0,900 rev/s^2. a) Calcule a velocidade angular depois de 0,200 s. b) Quantas revoluções foram feitas pela plataforma durante esse intervalo de tempo? c) Qual é a velocidade tangencial de um ponto na extremidade da plataforma para $t = 0{,}200$ s? d) Qual é o módulo da aceleração resultante de um ponto na extremidade da plataforma para $t = 0{,}200$ s?

9.27 Uma propaganda afirma que uma centrífuga precisa somente de 0,127 m para produzir uma aceleração radial de $3000g$ para 5000 rev/min. Calcule o raio necessário dessa centrífuga. A afirmação da propaganda é viável?

9.28 a) Deduza uma equação para a aceleração radial que inclua v e ω, mas não inclua r. b) Você está projetando um carrossel para o qual um ponto da periferia possui uma aceleração radial igual a 0,500 m/s^2, quando a velocidade tangencial desse ponto possui módulo igual a 2,0 m/s. Qual é a velocidade angular necessária para se atingir esses valores?

9.29 Um problema de furadeira. Ao furar um buraco com diâmetro igual a 12,7 mm na madeira, no plástico ou no alumínio, o manual do fabricante recomenda uma velocidade de operação igual a 1250 rev/min. Para uma broca com um diâmetro de 12,7 mm girando com uma velocidade constante igual a 1250 rev/min, calcule a) a velocidade linear máxima de qualquer ponto da broca; b) a aceleração radial máxima de qualquer ponto da broca.

9.30 Para $t = 3{,}0$ s, um ponto na periferia de uma roda com raio de 0,200 m possui uma velocidade tangencial igual a 50,0 m/s quando a roda está freando com uma aceleração tangencial constante com módulo igual a 10,0 m/s^2. a) Calcule a aceleração angular constante da roda. b) Calcule as velocidades angulares para $t = 3{,}0$ s e $t = 0$. c) Qual foi o deslocamento angular do giro da roda entre $t = 0$ e $t = 3{,}0$ s? d) Em qual instante a aceleração radial torna-se igual a g?

9.31 Os ciclos de rotação de uma máquina de lavar possuem duas velocidades angulares, 423 rev/min e 640 rev/min. O diâmetro interno do tambor é igual a 0,470 m. a) Qual é a razão entre a força radial máxima sobre a roupa, quando a velocidade angular é máxima, e a força radial, quando a velocidade angular é mínima? b) Qual é a razão da velocidade tangencial máxima da roupa quando a velocidade angular é máxima e quando a velocidade angular é mínima? c) Calcule, em função de g, a velocidade tangencial máxima da roupa e a aceleração radial máxima.

9.32 Você é solicitado a projetar um eixo cilíndrico rotativo para erguer 800 N de baldes de cimento a partir do solo até um teto a 78,0 m do solo. Os baldes serão presos a um gancho na extremidade livre de um cabo que passa pela borda do eixo; à medida que o eixo gira, os baldes são erguidos. a) Qual deve ser o diâmetro do eixo para erguer os baldes a regulares 2,0 cm/s, quando ele gira a 7,5 rpm? b) Se, em vez disso, o eixo deve dar aos baldes uma aceleração de baixo para cima de 0,400 m/s^2, qual deve ser a aceleração angular do eixo?

9.33 Ao pedalar uma bicicleta com várias marchas, o ciclista pode selecionar o raio da roda dentada traseira, que é fixa ao eixo de roda traseiro. A roda dentada dianteira de uma bicicleta possui raio de 12,0 cm. Se a velocidade escalar angular da roda dentada dianteira é 0,600 rev/s, qual é o raio da roda dentada traseira para a qual a velocidade escalar tangencial de um ponto na borda da roda traseira será de 5,0 m/s? A roda traseira possui raio de 0,330 m.

Seção 9.4 Energia no movimento de rotação

9.34 Quatro pequenas esferas, todas consideradas massas puntiformes com massa de 0,200 kg, estão dispostas nos vértices de um quadrado de lado igual a 0,400 m e conectadas por hastes leves (Figura 9.29). Calcule o momento de inércia do sistema em relação a um eixo a) perpendicular ao quadrado e passando pelo seu centro (um eixo passando pelo ponto O na figura); b) cortando ao meio dois lados opostos do quadrado (um eixo ao longo da linha AB indicada na figura); c) passando pelo centro da esfera superior da esquerda e pelo centro da esfera inferior da direita e através do ponto O.

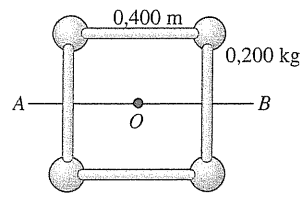


Figura 9.29 Exercício 9.34.

9.35 Calcule o momento de inércia em relação a cada um dos seguintes objetos uniformes em relação aos eixos indicados. Se necessário, use as fórmulas da Tabela 9.2. a) Uma barra delgada de 2,50 kg e 75,0 cm de comprimento, em relação a um eixo perpendicular a ela e passando i) por uma das extremidades, ii) pelo seu centro e iii) em relação a um eixo paralelo à barra e passando por ela. b) Uma esfera de 3,0 kg e 38,0 cm de diâmetro, em relação a um eixo passando pelo seu centro, se a esfera for i) maciça e ii) uma casca oca de paredes finas. c) Um cilindro de 8,0 kg, 19,5 cm de comprimento e 12,0 cm de diâmetro, em relação ao eixo central do cilindro, se o cilindro for i) oco de paredes finas e ii) maciço.

9.36 Pequenos blocos, todos com a mesma massa m, estão presos às extremidades e ao centro de uma barra leve de comprimento igual a L. Calcule o momento de inércia do sistema em relação a um eixo perpendicular à barra passando a) pelo centro da barra e b) por um ponto a um quarto do comprimento a partir de uma das extremidades.

9.37 Uma barra uniforme possui duas pequenas bolas coladas às suas extremidades. A barra possui 2,0 m de comprimento e massa de 4,0 kg, enquanto as bolas possuem 0,500 kg cada uma e podem ser tratadas como pontos de massas. Ache o momento de inércia desse sistema em relação a cada um dos seguintes eixos: a) um eixo perpendicular à barra e que passa pelo seu centro; b) um eixo perpendicular à barra e que passa por uma das bolas; c) um eixo paralelo à barra e que passa por ambas as bolas; d) um eixo paralelo à barra e a uma distância de 0,500 m dela.

9.38 Uma batuta consiste em um fino cilindro metálico de massa M e comprimento L. Cada extremidade possui uma tampa de borracha de massa m, e cada tampa pode ser tratada com precisão como uma partícula neste problema. Calcule o momento de inércia da batuta em relação ao eixo usual de rotação (perpendicular à batuta e passando pelo seu centro).

9.39 Uma roda de carroça é feita como indicado na Figura 9.30. O raio da roda é igual a 0,300 m e o aro possui massa igual a 1,40 kg. Cada um dos seus oito raios, distribuídos ao longo de diâmetros, possuem comprimento de 0,300 m e massa igual a 0,280 kg. Qual é o momento de inércia da roda em relação a um eixo perpendicular ao plano da roda e passando pelo seu centro? (Use as fórmulas indicadas na Tabela 9.2.)

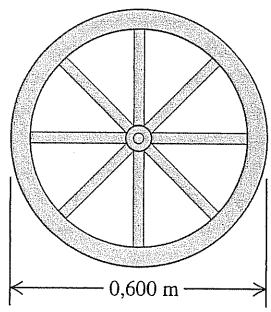


Figura 9.30 Exercício 9.39.

9.40 Um disco uniforme de raio R é cortado ao meio, de modo que uma das metades possui massa M (Figura 9.31a). a) Qual é o momento de inércia dessa metade em relação a um eixo perpendicular ao seu plano e que passa pelo ponto A? b) Por que a resposta ao item (a) é a mesma que no caso de um disco completo de massa M? c) Qual seria o momento de inércia de um quarto de disco com massa M e raio R em relação a um eixo perpendicular ao seu plano e que passa pelo ponto B (Figura 9.31b)?

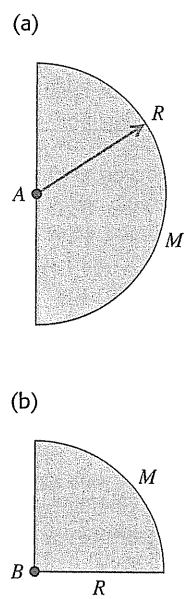


Figura 9.31 Exercício 9.40.

9.41 Um disco composto de diâmetro externo de 140,0 cm é constituído de um disco maciço uniforme com raio de 50,0 cm e densidade de área de 3,0 g/cm^2, cercado por um anel concêntrico com raio interno de 50,0 cm, raio externo de 70,0 cm e densidade de área de 2,0 g/cm^2. Ache o momento de inércia desse objeto em relação a um eixo perpendicular ao plano do objeto e que passa pelo seu centro.

9.42 Uma hélice de avião possui massa de 117 kg e comprimento igual a 2,08 m (de uma extremidade à outra). A hélice está girando a 2400 rev/min em relação a um eixo que passa pelo seu centro. a) Qual é sua energia cinética rotacional? Considere a hélice como uma barra delgada. b) Suponha que, devido a restrições de peso, você teve que reduzir a massa da hélice a 75,0% da sua massa original, mas precisou manter o mesmo tamanho e a mesma energia cinética. Qual deveria ser sua velocidade escalar angular, em rpm?

9.43 Energia da Lua? Suponha que em algum momento no futuro você decida explorar a energia rotacional da Lua para uso na Terra. Além dos dados de astronomia no Apêndice F, você pode necessitar saber que a Lua gira em torno do seu eixo uma vez a cada 27,3 dias. Suponha que a rotação da Lua seja uniforme por todo esse período. a) Qual o total de energia que nós podemos obter da rotação da Lua? b) Atualmente, o mundo consome cerca de $4{,}0 \times 10^{20}$ J de energia por ano. Se no futuro o mundo consumir cinco vezes mais energia por ano, quantos anos duraria a energia de rotação fornecida pela Lua? À luz da sua resposta, essa parece ser uma fonte de energia economicamente viável na qual investir?

9.44 Você deve projetar uma plataforma giratória industrial com 60,0 cm de diâmetro e energia cinética de 0,250 J quando gira a 45,0 rpm (rev/min). a) Qual deve ser o momento de inércia da plataforma em relação ao eixo de rotação? b) Se a sua oficina construir essa plataforma no formato de um disco maciço e uniforme, qual deve ser a sua massa?

9.45 Um volante de motor a gasolina deve fornecer uma energia cinética igual a 500 J, quando sua velocidade angular diminui de 650 rev/min para 520 rev/min. Qual é o momento de inércia necessário?

9.46 Uma corda leve e flexível é enrolada diversas vezes em torno da periferia de uma *casca cilíndrica* com raio de 0,25 m e massa igual a 40,0 N, que gira sem atrito em torno de um eixo horizontal fixo. O cilindro é ligado ao eixo por meio de raios com momentos de inércia desprezíveis. O cilindro está inicialmente em repouso. A extremidade livre da corda é puxada com uma força constante P até uma distância de 5,0 m, e nesse ponto a extremidade da corda se move a 6,0 m/s. Sabendo que a corda não desliza sobre o cilindro, qual é o valor de P?

9.47 Desejamos armazenar energia em um volante de 70,0 kg que possui forma de um disco maciço uniforme com raio $R = 1{,}20$ m. Para impedir danos estruturais, a aceleração radial máxima de um ponto na sua periferia é igual a 3500 m/s^2. Qual é a energia cinética máxima que pode ser armazenada no volante?

9.48 Suponha que o cilindro maciço do dispositivo descrito no Exemplo 9.9 (Seção 9.4) seja substituído por uma casca cilíndrica com o mesmo raio R e com a mesma massa M. O cilindro é ligado ao eixo por meio de raios com momentos de inércia desprezíveis. a) Calcule a velocidade da massa m suspensa no instante em que ela atinge o solo. b) Use os conceitos de energia para explicar por que a resposta ao item (a) é diferente da velocidade escalar obtida no Exemplo 9.9.

9.49 Uma polia sem atrito possui o formato de um disco maciço e uniforme com massa de 2,50 kg e raio de 20,0 cm. Uma pedra de 1,50 kg é presa a um cabo muito leve que envol-

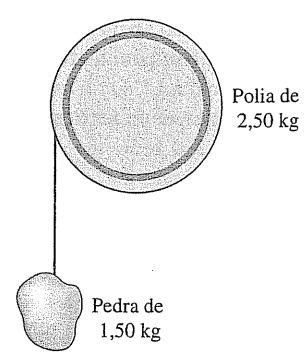


Figura 9.32 Exercício 9.49.

ve a borda da polia (Figura 9.32), e o sistema é libertado a partir do repouso. a) A que distância a pedra deve cair para que a polia tenha 4,50 J de energia cinética? b) Qual porcentagem da energia cinética total a polia possui?

9.50 Um balde com massa m é preso a um cabo sem massa que envolve a borda externa de uma polia uniforme e sem atrito, com raio R, semelhante ao sistema indicado na Figura 9.32. Em termos das variáveis enunciadas, qual deve ser o momento de inércia da polia para que ela sempre tenha metade da energia cinética do balde?

9.51 Fator de escala de *I*. Quando multiplicamos todas as dimensões de um objeto por um fator de escala f, sua massa e seu volume ficam multiplicados por f^3. a) O momento de inércia ficará multiplicado por qual fator? b) Sabendo que um modelo feito com uma escala de 1/48 possui uma energia cinética rotacional de 2,5 J, qual será a energia cinética do objeto feito com o mesmo material, sem nenhuma redução de escala e girando com a mesma velocidade angular?

9.52 Uma escada uniforme de 2,0 m e massa de 9,0 kg está recostada em uma parede vertical formando um ângulo de 53,0° em relação ao solo. Um operário empurra a escada contra a parede, deixando-a na posição vertical. Quanto trabalho essa pessoa realizou contra a gravidade?

9.53 Uma corda uniforme de 3,0 kg e 24,0 m de comprimento está em repouso sobre o solo no topo de um rochedo vertical. Um escalador no topo deixa cair metade dela, para ajudar o amigo a escalar o rochedo. Qual foi a variação na energia potencial da corda com essa manobra?

Seção 9.5 Teorema dos eixos paralelos

9.54 Calcule o momento de inércia de um aro (um anel fino) de raio R e massa M em relação a um eixo perpendicular ao plano do aro passando pela sua periferia.

9.55 Em relação à qual eixo uma esfera uniforme de madeira leve possui o mesmo momento de inércia de uma casca cilíndrica de chumbo de mesma massa e raio em relação a um diâmetro?

9.56 Use o teorema dos eixos paralelos para mostrar que os momentos de inércia das partes (a) e (b) da Tabela 9.2 são coerentes.

9.57 Uma placa metálica fina de massa M tem forma retangular com lados a e b. Use o teorema dos eixos paralelos para determinar seu momento de inércia em relação a um eixo perpendicular ao plano da placa passando por um dos seus vértices.

9.58 a) Para a placa retangular fina indicada na parte (d) da Tabela 9.2, ache o momento de inércia em relação a um eixo situado sobre o plano da placa passando pelo seu centro e paralelo ao eixo indicado na figura. b) Ache o momento de inércia da placa em relação a um eixo situado sobre o plano da placa passando pelo seu centro e perpendicular ao eixo mencionado no item (a).

9.59 Uma barra delgada e uniforme de massa M e comprimento L é encurvada no seu centro, de modo que os dois segmentos passam a ser perpendiculares um ao outro. Ache o momento de inércia em relação a um eixo perpendicular ao seu plano e que passe a) pelo ponto onde os dois segmentos se encontram e b) pelo ponto na metade da linha que conecta as duas extremidades.

*Seção 9.6 Cálculos do momento de inércia

***9.60** Usando o teorema dos eixos paralelos e informações da Tabela 9.2, ache o momento de inércia da barra delgada de massa M e comprimento L indicado na Figura 9.23 em relação a um eixo passando pelo ponto O situado a uma distância arbitrária h de uma de suas extremidades. Compare seu resultado com o encontrado no Exemplo 9.11 (Seção 9.6).

***9.61** Use a Equação (9.20) para calcular o momento de inércia de um disco maciço, uniforme, de raio R e massa M em relação a um eixo perpendicular ao plano do disco passando pelo seu centro.

***9.62** Use a Equação (9.20) para calcular o momento de inércia de uma barra delgada de massa M e comprimento L em relação a um eixo perpendicular à barra e passando pela sua extremidade.

***9.63** Uma barra delgada de comprimento L possui massa por unidade de comprimento variando a partir da extremidade esquerda, onde $x = 0$, de acordo com $dm/dx = \gamma x$, onde γ é constante com unidades de kg/m^2. a) Calcule a massa total da barra em termos de g e de L. b) Use a Equação (9.20) para calcular o momento de inércia da barra em relação a um eixo perpendicular à barra e passando pela sua extremidade esquerda. Use a relação encontrada na parte (a) para obter a expressão de I em termos de M e de L. Como seu resultado se compara com o obtido para uma barra delgada uniforme? Explique essa comparação. c) Repita o procedimento da parte (b) para um eixo passando pela extremidade direita da barra. Como seu resultado se compara com o obtido nas partes (b) e (c)? Explique esse resultado.

Problemas

9.64 Faça um desenho de uma roda situada no plano do papel e girando no sentido anti-horário. Escolha um ponto sobre a circunferência e desenhe um vetor $\vec{r}$ ligando o centro com esse ponto. a) Qual é a direção e o sentido de $\vec{\omega}$? b) Mostre que a velocidade desse ponto é dada por $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. c) Mostre que a aceleração radial desse ponto é dada por $\vec{a}_{rad} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$. (Veja o Exercício 9.28.)

9.65 Viagem a Marte Você está trabalhando em um projeto com a NASA para lançar um foguete a Marte. Esse foguete deve ser lançado da Terra, quando a Terra e Marte estiverem em alinhamento retilíneo a partir do Sol. Se Marte estiver 60° à frente da Terra em sua órbita ao redor do Sol, quando o foguete deve ser lançado? (*Nota*: todos os planetas orbitam o Sol na mesma direção e 1 ano em Marte corresponde a 1,9 anos na Terra; considere órbitas circulares para ambos os planetas.)

9.66 O rolo de uma impressora gira um ângulo $\theta(t) = \gamma t^2 - \beta t^3$, onde $\gamma = 3{,}20$ rad/s^2 e $\beta = 0{,}500$ rad/s^3. a) Calcule a velocidade angular do rolo em função do tempo. b) Calcule a aceleração angular do rolo em função do tempo. c) Qual é a velocidade angular positiva máxima e para qual valor de t isso ocorre?

***9.67** Um disco com raio igual a 25,0 cm está livre para girar em torno de um eixo perpendicular a ele e que passa pelo seu centro. Ele possui um fio delgado, porém forte, enrolado em torno da sua borda e o fio está preso a uma bola que é puxada tangencialmente afastando-se da borda do disco (Figura 9.33). O módulo da força de puxar aumenta e produz uma aceleração da bola, que segue a equação $a(t) = At$, onde t está em segundos e A é uma constante. O cilindro parte do repouso e, ao final do terceiro segundo, a aceleração da bola é 1,80 m/s^2. a) Determine A. b) Expresse a aceleração do disco em função do tempo. c) Quanto tempo depois de começar a girar o disco atinge uma velocidade escalar angular de 15,0 rad/s? d) Qual é o ângulo do giro do disco ao atingir 15,0 rad/s? (*Sugestão:* Veja a Seção 2.6.)

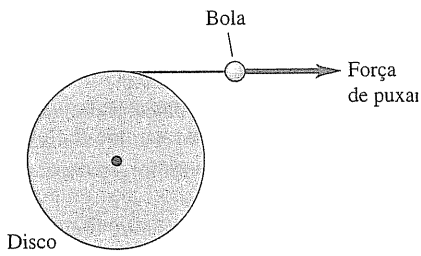


Figura 9.33 Problema 9.67.

9.68 Quando um carrinho de brinquedo é atritado contra o piso, ele acumula energia em um volante. O carrinho possui massa igual a 0,180 kg, e seu volante possui momento de inércia igual a $4{,}0 \times 10^{-5}$ kg · m^2. O carrinho possui comprimento igual a 15,0 cm. Uma propaganda alega que a velocidade de escala do carrinho pode atingir 700 km/h. A velocidade de escala é a velocidade do carrinho multiplicada pelo fator de escala dado pela razão entre o comprimento de um carro real e o comprimento do carrinho de brinquedo. Considere um carro real de comprimento igual a 3,0 m. a) Para uma velocidade de escala de 700 km/h, qual deve ser a velocidade de translação efetiva do carrinho? b) Supondo que toda a energia cinética inicialmente acumulada no volante possa ser convertida em energia cinética de translação do carrinho, qual foi a energia cinética inicialmente acumulada no volante? c) Qual será a velocidade angular inicial necessária para que o volante tenha a quantidade de energia cinética acumulada no item (b)?

9.69 Um automóvel clássico Chevrolet Corvette 1957 com 1240 kg parte do repouso e acelera com aceleração tangencial constante igual a 3,0 m/s^2 em uma pista de teste circular com raio de 60,0 m. Considere o carro como uma partícula. a) Qual é sua aceleração angular? b) Qual é sua velocidade angular 6,0 s depois do início? c) Qual é sua aceleração radial nesse instante? d) Faça um esboço de uma vista do topo mostrando a pista circular, o carro, o vetor velocidade e os componentes do vetor aceleração 6,0 s depois de o carro iniciar o movimento. e) Qual é o módulo da aceleração resultante e da força resultante sobre o carro nesse instante? f) Qual é o ângulo formado entre a velocidade do carro nesse instante e a aceleração resultante e entre a velocidade e a força resultante?

9.70 Engenheiros projetam um sistema por meio do qual uma massa m em queda livre imprime energia cinética a um tambor uniforme em rotação, ao qual a massa está presa por um cabo delgado e leve, enrolado em volta do tambor (Figura 9.34). Não há nenhum atrito significativo no eixo do tambor e tudo parte do repouso. Esse sistema está sendo testado na Terra, mas é para ser usado em Marte, onde a aceleração da gravidade é 3,71 m/s^2. Nos testes na Terra, quando m possui 15,0 kg e deve cair por 5,0 m, ela fornece 250,0 J de energia cinética ao tambor. a) Quando o sistema for operado em Marte, qual distância a massa de 15,0 kg terá que cair para gerar o mesmo valor de energia cinética para o tambor?

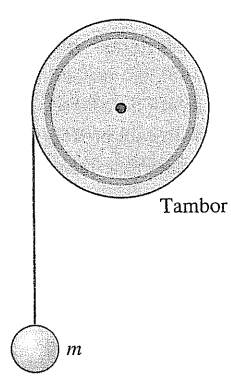


Figura 9.34 Problema 9.70.

b) Qual a velocidade da massa de 15,0 kg em Marte quando o tambor obtiver 250,0 J de energia cinética?

9.71 A correia de uma máquina de lavar a vácuo é enrolada ligando um eixo de raio igual a 0,45 cm com uma roda de raio igual a 2,0 cm. O arranjo envolvendo a correia, o eixo e a roda é semelhante ao descrito na Figura 9.14 envolvendo a corrente e as rodas dentadas de uma bicicleta. O motor faz o eixo girar com 60,0 rev/s e a correia faz a roda girar, que por sua vez está ligada a outro eixo que empurra a sujeira para fora do tapete que está sendo lavado a vácuo. Suponha que a correia não deslize nem sobre o eixo nem sobre a roda. a) Qual é a velocidade de um ponto sobre a correia? b) Qual é a velocidade angular da roda em rad/s?

9.72 O motor de uma serra de mesa gira com 3450 rev/min. Uma polia ligada ao eixo do motor movimenta uma segunda polia com metade do diâmetro por meio de uma correia V. Uma serra circular de diâmetro igual a 0,208 m está montada sobre o mesmo eixo da segunda polia. a) O operador não é cuidadoso, e a lâmina lança para trás um pequeno pedaço de madeira. A velocidade do pedaço de madeira é igual à velocidade tangencial na periferia da lâmina. Qual é essa velocidade? b) Calcule a aceleração radial nos pontos sobre a periferia da lâmina para entender por que o pó da madeira serrada não fica grudado em seus dentes.

9.73 Uma roda varia sua velocidade angular com uma aceleração angular constante enquanto gira em torno de um eixo fixo passando em seu centro. a) Mostre que a variação do módulo da aceleração radial de um ponto sobre a roda durante qualquer intervalo de tempo é igual ao dobro do produto da aceleração angular vezes o deslocamento angular e vezes a distância perpendicular do ponto ao eixo. b) A aceleração radial de um ponto sobre a roda situado a uma distância de 0,250 m do eixo varia de 25,0 m/s^2 a 85,0 m/s^2 para um deslocamento angular da roda igual a 15,0 rad. Calcule a aceleração tangencial desse ponto. c) Mostre que a variação da energia cinética da roda durante qualquer intervalo de tempo é igual ao produto do momento de inércia da roda em relação ao eixo vezes a aceleração angular e vezes o deslocamento angular. d) Durante o deslocamento angular de 15,0 rad mencionado na parte (b), a energia cinética da roda cresce de 20,0 J para 45,0 J. Qual é o momento de inércia da roda em relação ao eixo de rotação?

9.74 Uma esfera consiste de uma bola maciça de madeira com densidade uniforme de 800 kg/m^3 e raio de 0,20 m e está coberta por um fino papel laminado com densidade de área de 20 kg/m^2. Calcule o momento de inércia dessa esfera em relação a um eixo que passa pelo seu centro.

9.75 Estime o seu próprio momento de inércia em relação a um eixo vertical que passa pelo centro do topo da sua cabeça, quando você está em pé com os braços abertos. Faça as aproximações cabíveis e meça ou estime as grandezas necessárias.

9.76 Uma barra delgada e uniforme de 50,0 cm de comprimento e massa de 0,320 kg é encurvada no seu centro formando um V com ângulo de 70,0° no vértice. Ache o momento de inércia desse objeto em formato de V em relação a um eixo perpendicular ao plano do V no seu vértice.

9.77 Foi aventado que as usinas hidrelétricas devem aproveitar as horas fora do pico (como tarde da noite) para gerar energia mecânica e armazená-la para atender à demanda em horários de pico, como no meio do dia. Uma sugestão é armazenar a energia em grandes volantes que giram sobre mancais praticamente livres de atrito. Considere um volante feito de ferro (densidade

7800 kg/m^3) no formato de um disco delgado e uniforme de 10,0 cm. a) Qual deve ser o diâmetro desse disco para armazenar 10,0 megajoules de energia cinética ao girar a 90,0 rpm em torno de um eixo perpendicular ao disco, no seu centro? b) Qual será a aceleração centrípeta de um ponto na borda, quando o disco gira nessa taxa?

9.78 Ao reprojetar o motor de um foguete, você deseja reduzir seu peso substituindo uma peça esférica maciça por uma casca esférica oca do mesmo tamanho. As peças giram em torno de um eixo que passa pelo seu centro. Você deve se certificar de que a nova peça possua sempre a mesma energia cinética de rotação que a peça original, seja qual for a taxa de rotação. Se a peça original possuía massa M, qual deve ser a massa da nova peça?

9.79 A Terra, que não é uma esfera uniforme, possui momento de inércia igual a $0{,}3308MR^2$ em relação a um eixo ligando o pólo norte ao pólo sul. O tempo para a Terra completar um giro é igual a 86164 s. Use o Apêndice F para calcular a) a energia cinética da Terra oriunda do movimento de rotação em torno desse eixo e b) a energia cinética da Terra oriunda do movimento orbital da Terra em torno do Sol. c) Explique como o valor do momento de inércia da Terra nos informa que a massa da Terra está mais concentrada perto do seu centro.

9.80 Um disco maciço uniforme de massa m e raio R está apoiado sobre um eixo horizontal passando em seu centro. Um pequeno objeto de massa m está colado na periferia do disco. Se o disco for libertado do repouso com o pequeno objeto situado na extremidade de um raio horizontal, ache a velocidade angular quando o pequeno objeto estiver verticalmente embaixo do eixo.

9.81 Uma placa de sinalização em metal de uma concessionária de automóveis é um triângulo retângulo delgado com base de comprimento b e altura h. A placa possui massa M. a) Qual é o momento de inércia da placa para uma rotação em torno do lado de comprimento h? b) Se $M = 5{,}40$ kg, $b = 1{,}60$ m e $h = 1{,}20$ m, qual é a energia cinética da placa quando ela gira em torno de um eixo com 1,20 m de lado a 2,0 rev/s?

9.82 Medição de *I*. Como estagiário de uma empresa de engenharia, você é solicitado a medir o momento de inércia de uma grande roda, para uma rotação em torno de um eixo que passa pelo seu centro. Como você foi um bom aluno de física, sabe o que fazer. Você mede o diâmetro da roda que é de 0,740 m e calcula o peso em 280 N. Você monta a roda, usando mancais livres de atrito, sobre um eixo horizontal que passa pelo centro da roda. Você enrola uma corda leve em volta da roda e pendura uma massa de 8,0 kg na extremidade livre da corda, como indica a Figura 9.18. Você liberta a massa do repouso; a massa cai, e a roda gira à medida que a corda se desenrola. Você determina que a massa possua velocidade escalar de 5,0 m/s após cair por 2,0 m. a) Qual é o momento de inércia da roda para um eixo perpendicular à roda no seu centro? b) Seu chefe diz que é necessário um I maior. Ele lhe pede para projetar uma roda com a mesma massa e raio, com $I = 19{,}0$ kg · m^2. Qual sua resposta?

9.83 Uma régua de um metro e massa igual a 0,160 kg possui um pivô em uma de suas extremidades de modo que ela pode girar sem atrito em torno de um eixo horizontal. A régua é mantida em uma posição horizontal e a seguir é libertada. Enquanto ela oscila passando pela vertical, calcule a) a variação da energia potencial gravitacional ocorrida; b) a velocidade angular da régua; c) a velocidade linear na extremidade da régua oposta ao eixo. d) Compare a resposta da parte (c) com a velocidade de um objeto caindo de uma altura de 1,0 m a partir do repouso.

9.84 Exatamente uma volta de uma corda flexível de massa m é enrolada na periferia de um cilindro uniforme maciço de massa M e raio R. O cilindro gira sem atrito em torno de um eixo horizontal ao longo do seu eixo. Uma das extremidades da corda está presa ao cilindro. O cilindro começa a girar com velocidade angular ω_0. Depois de uma revolução, a corda se desenrolou e nesse instante ela está pendurada verticalmente tangente ao cilindro. Calcule a velocidade angular do cilindro e a velocidade linear da extremidade inferior da corda nesse instante. Despreze a espessura da corda. (*Sugestão:* Use a Equação (9.18).)

9.85 A polia indicada na Figura 9.35 possui raio R e momento de inércia I. A corda não desliza sobre a polia e esta gira em um eixo sem atrito. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco A e o topo da mesa é μ_c. O sistema é libertado a partir do repouso, e o bloco B começa a descer. O bloco A possui massa m_A e o bloco B possui massa m_B. Use métodos de conservação da energia para calcular a velocidade do bloco B em função da distância d que ele desceu.

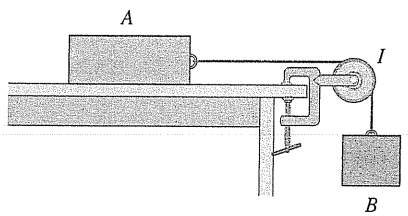


Figura 9.35 Problema 9.85.

9.86 A polia indicada na Figura 9.36 possui raio 0,160 m e momento de inércia 0,480 kg · m^2. A corda não desliza sobre a periferia da polia. Use métodos de conservação da energia para calcular a velocidade do bloco de 4,0 kg no momento em que ele atinge o solo.

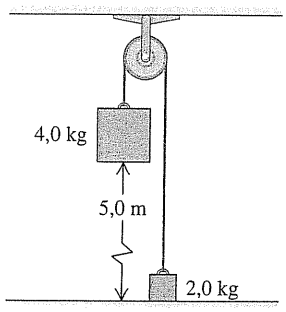


Figura 9.36 Problema 9.86.

9.87 Você pendura um aro fino de raio R em um prego na periferia do aro. Você o desloca lateralmente (dentro do plano do aro) até um ângulo β a partir de sua posição de equilíbrio e a seguir o liberta. Qual é sua velocidade angular quando ele retorna para sua posição de equilíbrio? (*Sugestão:* Use a Equação (9.18).)

9.88 Um ônibus de passageiro em Zurique, na Suíça, usa sua potência motora oriunda da energia acumulada em um volante grande. Utilizando-se de energia da rede elétrica, a roda é colocada em movimento periodicamente quando o ônibus pára em uma estação. O volante é um cilindro maciço de massa igual a 1000 kg e raio igual a 1,80 m; sua velocidade angular máxima é igual a 3000 rev/min. a) Para essa velocidade angular, qual é a energia cinética do volante? b) Se a potência média necessária para operar o ônibus for igual a $1{,}86 \times 10^4$ W, qual é a distância máxima que ele pode se mover entre duas paradas?

9.89 Dois discos metálicos, um com raio $R_1 = 2{,}50$ cm e massa $M_1 = 0{,}80$ kg e o outro com raio $R_2 = 5{,}0$ cm e massa $M_2 = 1{,}60$ kg, são soldados juntos e montados em um eixo sem atrito passando pelo centro comum (Figura 9.37). a) Qual é o momento de inércia dos dois discos? b) Um fio fino é enrolado

na periferia do disco menor, e um bloco de 1,50 kg é suspenso pela extremidade livre do fio. Se o bloco é libertado do repouso a uma distância de 2,0 m acima do solo, qual é sua velocidade no momento em que atinge o solo? c) Repita o cálculo do item (b), desta vez com o fio enrolado na borda do disco maior. Em qual caso a velocidade escalar final do bloco é maior? Explique por quê.

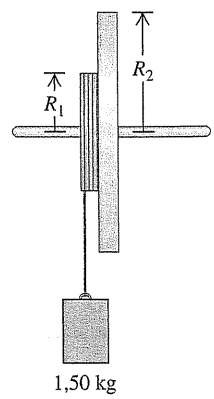


Figura 9.37 Problema 9.89.

9.90 No cilindro junto com a massa do Exemplo 9.9 (Seção 9.4), suponha que a massa m que cai seja feita de borracha, de modo que nenhuma energia mecânica é perdida quando a massa atinge o solo. a) Supondo que o cilindro não estivesse girando inicialmente e a massa m fosse libertada do repouso a uma altura h acima do solo, até que altura essa massa atingiria quando ela retornasse verticalmente para cima depois de colidir com o solo? b) Explique, em termos de energia, por que a resposta da parte (a) é *menor* do que h.

9.91 No sistema indicado na Figura 9.18, uma massa de 12,0 kg é libertada do repouso e cai, fazendo com que o cilindro uniforme de 10,0 kg e diâmetro de 30,0 cm gire em torno de um eixo sem atrito que passa pelo seu centro. Quanto a massa terá que cair para fornecer ao cilindro 250 J de energia cinética?

9.92 Na Figura 9.38, o cilindro e a polia giram sem atrito em torno de um eixo horizontal fixo que passa pelos seus centros. Uma corda leve é enrolada em volta do cilindro, passa sobre a polia e possui uma caixa de 3,0 kg suspensa por sua extremidade livre. Não há deslizamento entre a corda e a superfície da polia. O cilindro uniforme possui massa de 5,0 kg e raio de 40,0 cm. A polia é um disco uniforme com massa de 2,0 kg e raio de 20,0 cm. A caixa é libertada do repouso e cai à medida que a corda se desenrola do cilindro. Ache a velocidade escalar da caixa após ela ter caído 1,50 m.

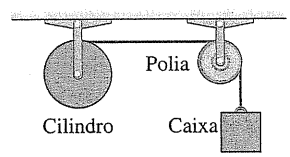


Figura 9.38 Problema 9.92.

9.93 Um disco uniforme fino possui massa M e raio R. Fazemos um buraco circular de raio $R/4$ centralizado em um ponto situado a uma distância $R/2$ do centro do disco. a) Calcule o momento de inércia do disco com o buraco em relação a um eixo perpendicular ao plano do disco passando pelo centro original do disco. (*Sugestão:* Ache o momento de inércia do disco que foi retirado do disco maciço.) b) Calcule o momento de inércia do disco com o buraco em relação a um eixo perpendicular ao plano do disco passando pelo centro do buraco.

9.94 Um pêndulo é constituído por uma esfera uniforme maciça com massa M e raio R suspensa pela extremidade de uma haste leve. A distância entre o ponto de suspensão na extremidade superior da haste e o centro da esfera é igual a L. O momento de inércia do pêndulo I_P para uma rotação em torno do ponto de suspensão é geralmente aproximado como ML^2. a) Use o teorema dos eixos paralelos para mostrar que, se R for 5% de L e se a massa da haste for desprezível, I_P será somente 0,1% maior do que ML^2. b) Se a massa da haste for 1% de M e se R for 5% de L, qual será a razão entre I_{haste} em relação a um eixo passando pelo pivô e ML^2?

9.95 Teorema dos eixos perpendiculares. Considere um corpo rígido constituído por uma placa plana fina de forma arbitrária. Suponha que o corpo esteja sobre o plano xy e imagine que a origem seja um ponto O no interior ou no exterior do corpo. Seja Ix o momento de inércia em relação ao eixo Ox, I_y o momento de inércia em relação ao eixo Oy e I_O o momento de inércia do corpo em relação a um eixo perpendicular ao plano e passando pelo ponto O. a) Considerando elementos de massa m_i com coordenadas (x_i, y_i), mostre que $I_x + I_y = I_O$. Essa relação é o teorema dos eixos perpendiculares. Note que o ponto O não precisa ser o centro de massa. b) Para uma arruela fina de massa M, raio interno R_1 e raio externo R_2, use o teorema dos eixos perpendiculares para achar o momento de inércia em relação a um eixo situado no plano da arruela e que passa através de seu centro. Você pode usar as informações da Tabela 9.2. c) Use o teorema dos eixos perpendiculares para mostrar que o momento de inércia de uma placa fina quadrada de massa M e lado L em relação a *qualquer* eixo situado no plano da placa e que passa através de seu centro é igual a $\frac{1}{2} ML^2$. Você pode usar as informações da Tabela 9.2.

9.96 Uma haste uniforme fina é dobrada em forma de um quadrado de lado a. Sendo M a massa total, ache o momento de inércia em relação a um eixo situado no plano do quadrado e que passa através de seu centro. (*Sugestão:* Use o teorema dos eixos paralelos.)

***9.97** Um cilindro de massa M e raio R possui uma densidade que cresce linearmente a partir do seu eixo, $\rho = \alpha r$, onde α é uma constante positiva. a) Calcule o momento de inércia do cilindro em relação a um eixo longitudinal que passa através de seu centro em termos de M e de R. b) Sua resposta é maior ou menor do que o momento de inércia de um cilindro com mesma massa e mesmo raio, porém com densidade constante? Explique qualitativamente por que esse resultado faz sentido.

9.98 Estrelas de nêutrons e restos de supernovas. A nebulosa do Caranguejo é uma nuvem de gás luminoso que possui uma extensão de 10 anos-luz, localizada a uma distância aproximadamente igual a 6500 anos-luz da Terra (Figura 9.39). São os restos de uma *explosão de uma supernova*, observada da Terra no ano de 1054. A nebulosa do Caranguejo libera energia com uma taxa aproximada de 5×10^{31} ω, cerca de 10^5 vezes maior do que a taxa de emissão de energia do Sol. A nebulosa do Caranguejo obtém essa energia da energia cinética da rotação muito rápida de uma *estrela de nêutrons* que existe em seu centro. Esse objeto completa um giro a cada 0,0331 s, e esse período cresce $4{,}22 \times 10^{-13}$ s em cada segundo. a) Supondo que a taxa de energia perdida pela estrela de nêutrons seja igual à taxa com a qual a energia é libertada pela nebulosa, calcule o momento de inércia da estrela de nêutrons. b) Teorias de supernovas afirmam que a estrela de nêutrons na nebulosa do Caranguejo possui massa aproximadamente igual a 1,4 vezes a massa do Sol. Modelando a estrela de nêutrons como uma esfera uniforme, calcule seu raio em quilômetros. c) Qual é a velocidade linear de um ponto sobre o equador da estrela de nêutrons? Compare o resultado com a velocidade da luz. d) Suponha

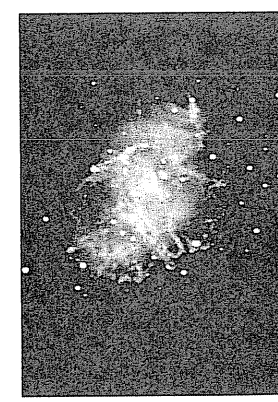


Figura 9.39 Problema 9.98.

que a densidade da estrela de nêutrons seja uniforme e calcule sua densidade. Compare o resultado com a densidade de uma rocha comum (3000 kg/m^3) e com a densidade do núcleo de um átomo (cerca de 10^{17} kg/m^3). Justifique a afirmação de que uma estrela de nêutrons é essencialmente um enorme núcleo atômico.

Problemas desafiadores

9.99 O momento de inércia de uma esfera com densidade constante em relação a um eixo que passa através de seu centro é dado por $\frac{2}{5}MR^2 = 0{,}400MR^2$. Observações feitas por satélites mostram que o momento de inércia da Terra é dado por $0{,}3308MR^2$. Os dados geofísicos sugerem que a Terra é constituída basicamente de cinco regiões: o núcleo central (de $r = 0$ a $r = 1220$ km) com densidade média igual a 12900 kg/m^3, o núcleo externo (de $r = 1220$ km a $r = 3480$ km) com densidade média igual a 10900 kg/m^3, o manto inferior (de $r = 3480$ km a $r = 5700$ km) com densidade média igual a 4900 kg/m^3, o manto superior (de $r = 5700$ km a $r = 6350$ km) com densidade média igual a 3600 kg/m^3 e a crosta e os oceanos (de $r = 6350$ km a $r = 6370$ km) com densidade média igual a 2400 kg/m^3. a) Mostre que o momento de inércia de uma esfera oca com raio interno R_1, raio externo R_2 e densidade constante ρ é dado por $I = \rho(8\pi/15)(R_2^5 - R_1^5)$. (*Sugestão:* Forme a esfera oca pela superposição de uma esfera grande com densidade ρ e uma esfera pequena com densidade $-\rho$.) b) Confira os dados usando-os para calcular a massa da Terra. c) Use os dados fornecidos para calcular o momento de inércia da Terra em termos de MR^2.

***9.100** Determine o momento de inércia de um cone maciço uniforme em relação a um eixo que passa através do seu centro (Figura 9.40). O cone possui massa M e altura h. O raio do círculo da sua base é igual a R.

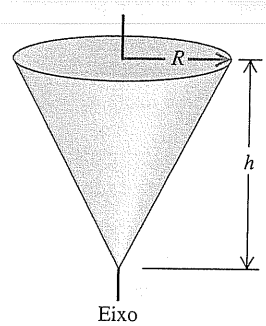


Figura 9.40 Problema Desafiador 9.100.

9.101 Em um CD, a música é codificada em uma configuração de minúsculas reentrâncias dispostas ao longo de uma trilha que avança formando uma espiral do interior à periferia do disco. À medida que o disco gira no interior de um tocador de CD, a trilha é varrida com velocidade *linear* constante $v = 1{,}25$ m/s. Como o raio da trilha espiral aumenta à medida que o disco gira, a velocidade *angular* do disco deve variar quando o CD está girando. (Veja o Exercício 9.22.) Vamos ver qual é a aceleração angular necessária para manter v constante. A equação de uma espiral é dada por $r(\theta) = r_0 + \beta\theta$, onde r_0 é o raio da espiral para $\theta = 0$ e β é uma constante. Em um CD, r_0 é o raio interno da trilha espiral. Considerando como positivo o sentido da rotação do CD, β deve ser positivo, de modo que r e θ crescem à medida que o disco gira. a) Quando o disco gira através de um pequeno ângulo $d\theta$, a distância varrida ao longo da trilha é $ds = r\,d\theta$. Usando a expressão anterior para $r(\theta)$, integre ds para calcular a distância total s varrida ao longo da trilha em função do ângulo total θ descrito pela rotação do disco. b) Como a trilha é varrida com velocidade linear constante v, a distância total s encontrada na parte (a) é igual a vt. Use esse resultado para achar θ em função do tempo. Existem duas soluções para θ; escolha a positiva e explique por que devemos escolher essa solução. c) Use essa expressão de $\theta(t)$ para determinar a velocidade angular ω_z e a aceleração angular α_z em função do tempo. O valor de α_z é constante? d) Em um CD, o raio interno da trilha é igual a 25,0 mm, o raio da trilha cresce 1,55 mm em cada volta e o tempo de duração é igual a 74,0 min. Calcule os valores de r_0 e de β e ache o número total de voltas feitas durante o tempo total da reprodução do som. e) Usando os resultados obtidos nas partes (c) e (d), faça um gráfico de ω_z (em rad/s) *versus* t e um gráfico de α_z (em rad/s^2) *versus* t desde $t = 0$ até $t = 74{,}0$ min.

10 DINÂMICA DO MOVIMENTO DE ROTAÇÃO

Se este pára-quedista não está tocando o solo, como ele pode alterar sua velocidade escalar de rotação? Qual princípio físico está em ação aqui?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- O que significa o torque produzido por uma força.
- Como o torque resultante sobre um corpo afeta o movimento de rotação do corpo.
- Como analisar o movimento de um corpo que gira e também se move como um todo pelo espaço.
- Como solucionar problemas que envolvem trabalho e potência para corpos em rotação.
- A que se refere o momento angular de uma partícula ou de um corpo rígido.
- Como o momento angular de um sistema varia com o tempo.
- Por que um giroscópio em rotação passa pelo curioso movimento chamado de precessão.

Nos capítulos 4 e 5 aprendemos que uma força resultante aplicada sobre um corpo fornece a esse corpo uma aceleração. Mas o que produz aceleração *angular* em um corpo? Ou seja, o que é necessário para fazer um corpo fixo começar a girar ou fazer um corpo em rotação parar? É necessária uma força, porém ela deve ser aplicada de modo a provocar uma ação giratória ou de torção.

Neste capítulo vamos definir uma nova grandeza física, o *torque*, que descreve a ação giratória ou o efeito de torção de uma força. Verificaremos que o torque resultante que atua sobre um corpo rígido determina sua aceleração angular, do mesmo modo que a força resultante sobre um corpo determina sua aceleração linear. Examinaremos também o conceito de trabalho e de potência no movimento de rotação para compreendermos problemas como a transmissão de energia de um eixo rotor da direção de um carro. Finalmente, desenvolveremos um novo princípio de conservação, a lei da *conservação do momento angular*, que é extremamente útil para entender o movimento de rotação de corpos rígidos e de corpos não rígidos. Finalizaremos este capítulo estudando o *giroscópio*, um dispositivo rotatório que parece não obedecer ao senso comum e que não deixa o objeto cair quando você pensa que ele deveria cair — mas que na verdade se comporta de acordo com a dinâmica do movimento de rotação.

10.1 Torque

Sabemos que as forças que atuam sobre um corpo podem afetar seu **movimento de translação** — ou seja, o movimento do corpo como um todo pelo espaço. Agora queremos aprender quais aspectos de uma força determina a sua eficácia em causar ou alterar o movimento de *rotação*. O módulo, a direção e o sentido da força são importantes, mas o ponto de aplicação da força também é relevante. Na Figura 10.1, uma chave de boca é usada para afrouxar uma porca presa firmemente. A força $\vec{F}_b$, aplicada próxima da extremidade do punho da chave, é mais eficiente do que a força $\vec{F}_a$ aplicada nas proximidades da porca. A força $\vec{F}_c$ não ajuda em nada; ela é aplicada no mesmo ponto da força $\vec{F}_b$ e possui o mesmo módulo, porém sua direção coincide com a direção do punho da chave. O *torque* fornece a medida quantitativa de como a ação de uma força pode provocar ou alterar o movimento de rotação de um corpo; dizemos que $\vec{F}_a$ aplica um torque em torno do ponto O para a chave na Figura 10.1, $\vec{F}_b$ aplica um torque maior em torno de O e $\vec{F}_c$ aplica torque nulo em torno de O.

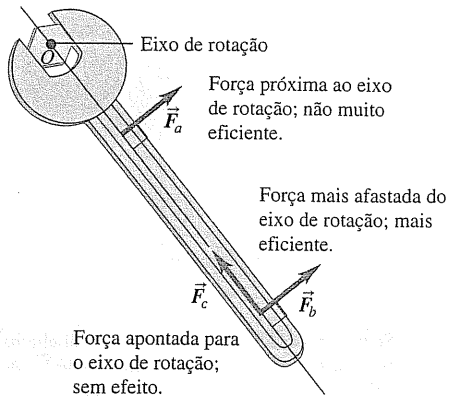


Figura 10.1 Qual das três forças indicadas é mais eficiente para afrouxar a porca presa firmemente?

A Figura 10.2 mostra três exemplos de como calcular o torque. O corpo na figura pode girar em torno de um eixo passando pelo ponto O e é perpendicular ao plano da figura. O corpo está submetido a três forças, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$, situadas no plano da figura. A tendência da força $\vec{F}_1$ para produzir rotação em torno do ponto O depende do módulo de F_1. Depende também da distância *perpendicular* l_1 entre o ponto O e a **linha de ação** da força (isto é, a linha ao longo da qual o vetor força se encontra). Denominamos a distância l_1 de **braço da alavanca** (ou **braço do momento**) da força $\vec{F}_1$ em torno do ponto O. O esforço de torção depende simultaneamente de F_1 e de l_1, por isso definimos o **torque** (ou *momento*) da força $\vec{F}_1$ em relação ao ponto O como o produto $F_1 l_1$. Usaremos a letra grega τ ('tau') para o torque. Para uma força de módulo F cuja linha de ação seja perpendicular a uma distância l ao ponto O, o torque é

$$\tau = Fl \qquad (10.1)$$

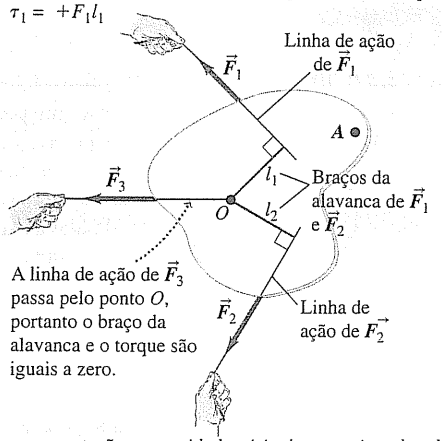


Figura 10.2 O torque de uma força em relação a um ponto é o produto do módulo da força pelo braço da alavanca.

Os físicos normalmente usam o termo 'torque', enquanto os engenheiros usam 'momento' (a menos que se refiram a um eixo rotor). Ambos usam o termo 'braço da alavanca' ou 'braço do momento' para designar a distância l.

O braço da alavanca da força $\vec{F}_1$ na Figura 10.2 é a distância perpendicular l_1, e o braço da alavanca da força $\vec{F}_2$ é a distância perpendicular l_2. A linha de ação da força $\vec{F}_3$ passa pelo ponto de referência O, de modo que o braço da alavanca para $\vec{F}_3$ é zero e seu torque em relação ao ponto O é igual a zero. Analogamente, a força $\vec{F}_c$ na Figura 10.1 possui torque nulo em relação ao ponto O. Por outro lado, $\vec{F}_b$ possui torque maior do que o torque da força $\vec{F}_a$ porque o seu braço da alavanca é maior.

ATENÇÃO Torque é sempre medido em torno de um ponto Note que o torque é *sempre* definido em relação a um ponto específico. Se deslocarmos a posição desse ponto, o torque de cada força pode também mudar. Por exemplo, o torque da força $\vec{F}_3$ na Figura 10.2 é igual a zero em relação ao ponto O, mas *não* é zero em torno de A. Quando descrevemos o torque de uma certa força, não é suficiente falar 'o torque da força $\vec{F}$'; devemos falar 'o torque da força $\vec{F}$ em relação ao ponto X' ou 'o torque de $\vec{F}$ em torno de X'.

A força $\vec{F}_1$ na Figura 10.2 tende a fazer uma rotação em torno de O no sentido *contrário ao dos ponteiros do relógio*, enquanto a força $\vec{F}_2$ tende a produzir uma rotação no *mesmo sentido dos ponteiros do relógio*. Para distinguirmos entre essas duas possibilidades, escolheremos um sentido positivo para a rotação. Escolhemos como *torque positivo o que produz rotação no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e torque negativo o que produz rotação no mesmo sentido dos ponteiros do relógio.* Sendo assim, os torques de $\vec{F}_1$ e de $\vec{F}_2$ em torno de O são

$$\tau_1 = +F_1 l_1 \qquad \tau_2 = -F_2 l_2$$

A Figura 10.2 mostra essa escolha para o sinal de torque. Freqüentemente usamos o símbolo ⊕ para indicar a escolha do sentido positivo da rotação.

A unidade SI de torque é Newton-metro. Em nossa discussão sobre trabalho e energia denominamos essa combinação de joule. Porém, o torque *não* é trabalho nem energia, e o torque deve ser expresso explicitamente como Newton-metro, e *não* como joule.

A Figura 10.3 mostra uma força $\vec{F}$ aplicada em um ponto P definido pelo vetor posição $\vec{r}$ em relação a um ponto escolhido O. Existem três modos de calcular o torque dessa força:

1. Determinar o braço da alavanca l e usar $\tau = Fl$.
2. Determinar o ângulo ϕ entre os vetores $\vec{F}$ e $\vec{r}$; o braço da alavanca é r sen ϕ, de modo que $\tau = rF$ sen ϕ.
3. Representar $\vec{F}$ em termos de um componente radial F_{rad} ao longo da direção de $\vec{r}$ e do componente tangencial F_{tg} ortogonal a $\vec{r}$ tendo ambos ângulos retos. (Chamamos esse componente de

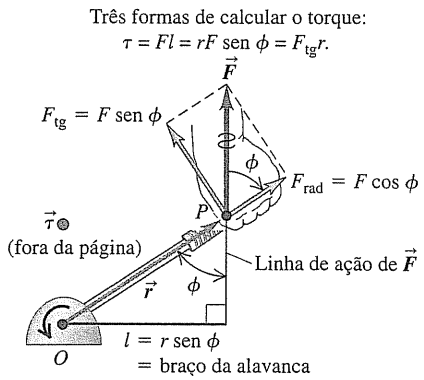


Figura 10.3 Três formas de calcular o torque da força $\vec{F}$ em torno do ponto *O*. Nesta Figura, $\vec{r}$ e $\vec{F}$ estão no plano da página e o vetor torque $\vec{\tau}$ aponta para fora da página e em direção a você.

tangencial porque, caso haja rotação do corpo, o ponto onde atua a força descreve uma circunferência.) Então, $F_{tg} = F \operatorname{sen} \phi$ e $\tau = r(F \operatorname{sen} \phi) = F_{tg} r$. O componente F_{rad} *não* possui nenhum torque em relação ao ponto *O* porque o braço da alavanca em relação a esse ponto é igual a zero (compare com as forças $\vec{F}_c$ na Figura 10.1 e $\vec{F}_3$ na Figura 10.2).

Resumindo essas três expressões para o torque, temos

$$\tau = Fl = rF \operatorname{sen} \phi = F_{tg} r \qquad (10.2)$$

(módulo de torque)

Torque como vetor

Vimos na Seção 9.1 que a velocidade angular e a aceleração angular podem ser representadas como vetores; isso também é verdade para o torque. Para verificar como fazer isso, note que a grandeza $rF \operatorname{sen} \phi$ na Equação (10.2) é o módulo do *produto vetorial* $\vec{r} \times \vec{F}$ que foi definido na Seção 1.10. (Você deve fazer uma revisão dessa definição.) Agora generalizamos a definição de torque do seguinte modo: quando uma força $\vec{F}$ atua em um ponto cujo vetor posição é $\vec{r}$ em relação a uma origem *O*, como na Figura 10.3, o torque $\vec{\tau}$ da força em relação ao ponto *O* é a grandeza *vetorial*

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (10.3)$$

(definição do vetor torque)

O torque, como definido pela Equação (10.2) nada mais é do que o módulo do vetor torque $\vec{r} \times \vec{F}$. A direção de $\vec{\tau}$ é simultaneamente perpendicular a $\vec{r}$ e a $\vec{F}$. Em particular, quando $\vec{r}$ e $\vec{F}$ estão localizadas em um plano perpendicular ao eixo de rotação, como na Figura 10.3, então o vetor torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ possui a mesma direção do eixo de rotação, sendo seu sentido dado pela regra da mão direita (Figura 1.29). As relações entre as direções e os sentidos são indicadas na Figura 10.4.

Nos diagramas que envolvem $\vec{r}$, $\vec{F}$ e $\vec{\tau}$, é comum ter um dos vetores orientado perpendicularmente à página. (De fato, pela própria natureza do produto, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ *deve* ser perpendicular ao plano dos vetores $\vec{r}$ e $\vec{F}$.) Usamos um ponto (•) para representar um vetor que aponta para fora da página (veja Figura 10.3) e uma cruz (×) para representar um vetor que aponta para dentro da página.

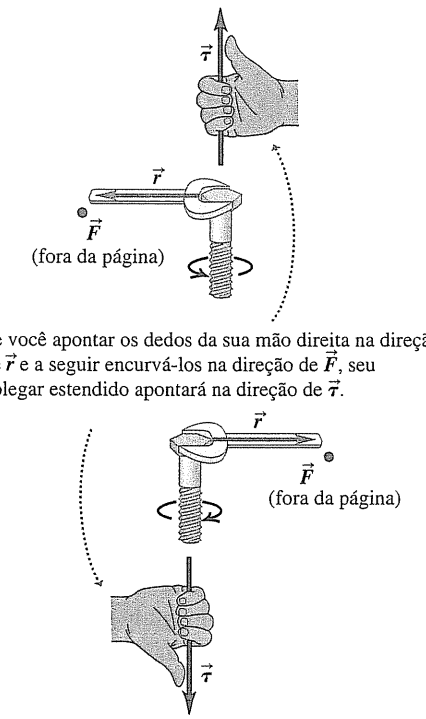


Figura 10.4 O vetor torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ aponta na direção ao longo do eixo do parafuso, perpendicular tanto a $\vec{r}$ quanto a $\vec{F}$. Os dedos da mão direita se encurvam na direção da rotação que o torque tende a causar.

Nas seções seguintes, normalmente consideraremos a rotação de um corpo em torno de um eixo orientado em uma dada direção constante. Nesse caso, somente o componente do torque ao longo desse eixo tem importância, e normalmente chamamos esse componente de torque em relação ao *eixo* especificado.

Exemplo 10.1

APLICANDO UM TORQUE Um bombeiro hidráulico, incapaz de afrouxar a conexão de um tubo, encaixa um pedaço de tubo de sucata (uma 'alavanca') sobre a haste da chave de grifa. A seguir ele usa seu peso todo de 900 N, ficando em pé na extremidade da alavanca. A distância entre o centro da conexão e o ponto onde o peso atua é igual a 0,80 m, e o eixo da alavanca faz um ângulo de 19° com a horizontal (Figura 10.5a). Calcule o módulo, a direção e o sentido do torque que ele aplica em torno do centro da conexão do tubo.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: conforme a Figura 10.5b, o ângulo ϕ entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$ é igual a 109°. Usaremos nosso conhecimento desses vetores para calcular o vetor torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$.

PREPARAR: a Equação (10.1) ou (10.2) fornecerá o módulo do torque, e a regra da mão direita com a Equação (10.3) fornecerá a direção do torque.

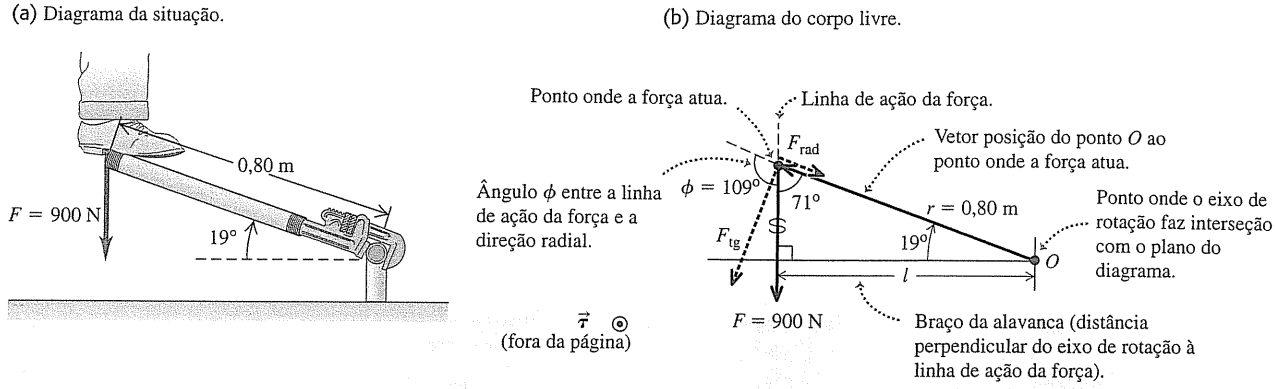


Figura 10.5 (a) Um bombeiro hidráulico tenta afrouxar a conexão de um tubo ficando em pé na extremidade de uma 'alavanca'. (b) Diagrama vetorial para achar o torque em torno de *O*.

EXECUTAR: para usar a Equação (10.1), primeiramente calculamos o braço de alavanca l. Como indica a Figura 10.5b,

$$l = (0{,}80\ \text{m})\,\text{sen}\,109° = (0{,}80\ \text{m})\,\text{sen}\,71° = 0{,}76\ \text{m}$$

Agora, podemos achar o módulo do torque usando a Equação (10.1):

$$\tau = Fl = (900\ \text{N})(0{,}76\ \text{m}) = 680\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Ou pela Equação (10.2),

$$\tau = rF\,\text{sen}\,\phi = (0{,}80\ \text{m})(900\ \text{N})(\text{sen}\,109°) = 680\ \text{N}\cdot\text{m}$$

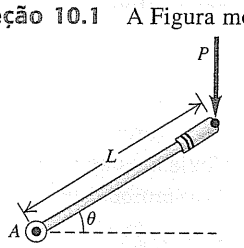
Alternativamente, podemos achar F_{tg}, o componente tangencial de $\vec{F}$. Esse componente atua ortogonalmente ao vetor $\vec{r}$ (ou seja, perpendicularmente ao eixo da 'alavanca'). O vetor $\vec{r}$ faz um ângulo de 19° com a horizontal, de modo que a perpendicular a $\vec{r}$ está em uma direção a 19° da vertical. Uma vez que $\vec{F}$ é vertical, isso significa que $F_{tg} = F$ (cos 19°) = (900 N) (cos 19°) = 851 N. Então, o torque é

$$\tau = F_{tg}r = (851\ \text{N})(0{,}80\ \text{m}) = 680\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Se você encurvar os dedos da mão direita da direção de $\vec{r}$ (no plano da Figura 10.5b, para a esquerda e para cima) para a direção de $\vec{F}$ (diretamente para baixo), seu polegar direito apontará para fora do plano da figura. Essa é a direção do torque $\vec{\tau}$.

AVALIAR: já conferimos a resposta para o módulo τ calculando-o de três modos diferentes. Para conferir o resultado obtido para a direção do torque, note que a força na Figura 10.5 tende a produzir uma rotação em torno de *O* no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Se você encurvar os dedos da mão direita em um sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, o polegar apontará para fora do plano da Figura 10.5, que é de fato a direção do torque.

Teste sua compreensão da Seção 10.1 A Figura mostra uma força P sendo aplicada a uma extremidade de uma alavanca de comprimento L. Qual é o módulo do torque dessa força em torno do ponto A? i) PL sen θ; ii) PL cos θ; iii) PL tg θ. ■



10.2 Torque e aceleração angular de um corpo rígido

Estamos agora preparados para desenvolver uma relação fundamental para a dinâmica da rotação de um corpo rígido. Mostraremos que a aceleração angular de um corpo rígido que gira é diretamente proporcional à soma dos componentes do torque ao longo do eixo de rotação. O fator de proporcionalidade é o momento de inércia.

Para desenvolvermos essa relação, podemos imaginar novamente o corpo como constituído por um grande número de partículas. Escolhemos para o eixo da rotação o eixo Oz; a primeira partícula possui massa m_1 e está a uma distância r_1 do eixo (Figura 10.6). A *força resultante* $\vec{F}_1$ que atua sobre essa partícula possui um componente $F_{1,rad}$ ao longo da direção radial, um componente $F_{1,tg}$ tangente à circunferência de raio r_1, ao longo da qual a partícula se move quando o corpo gira, e um componente F_{1z} ao longo do eixo de rotação. A segunda lei de Newton para o componente tangencial fornece

$$F_{1,tg} = m_1 a_{1,tg} \qquad (10.4)$$

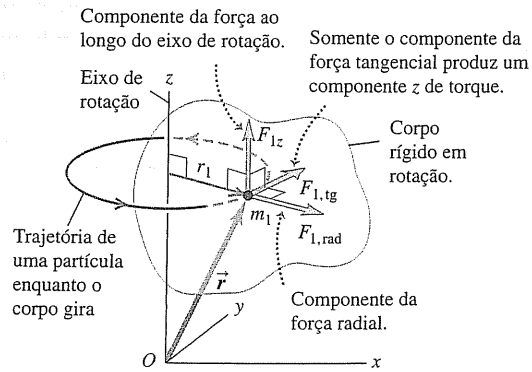


Figura 10.6 Enquanto um corpo rígido gira em torno do eixo z, uma força resultante $\vec{F}_1$ atua sobre uma partícula do corpo. Somente o componente da força $F_{1,tg}$ pode afetar a rotação, porque somente ele exerce um torque em torno de *O* com um componente z (ao longo do eixo de rotação).

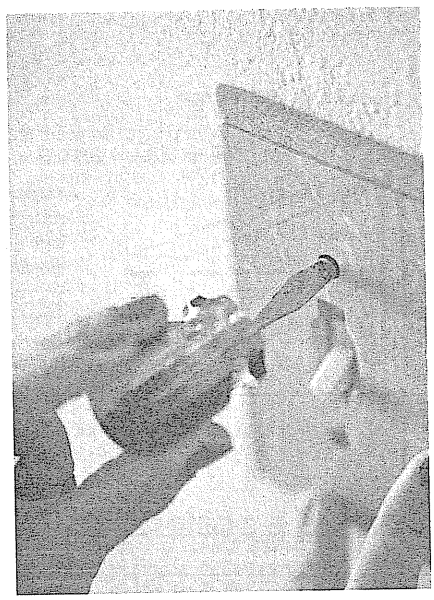


Figura 10.7 Para afrouxar ou apertar um parafuso é necessário fornecer a ele uma aceleração angular e, portanto, aplicar um torque. Essa tarefa é facilitada usando-se uma chave de fenda com um punho com raio grande, para que o braço da alavanca da força que você aplica com a sua mão seja maior.

Podemos expressar o componente tangencial da aceleração da primeira partícula em termos da aceleração angular α_z do corpo, usando a Equação (9.14): $a_{1,\mathrm{tg}} = r_1\alpha_z$. Usando essa relação e multiplicando ambos os membros da Equação (10.4) por r_1, obtemos

$$F_{1,\mathrm{tg}}r_1 = m_1r_1^2\alpha_z \qquad (10.5)$$

Pela Equação (10.2), $F_{1,\mathrm{tg}}r_1$ é precisamente o módulo do *torque* τ_{1z} da força resultante em relação ao eixo de rotação. O índice inferior z é um lembrete de que o torque afeta a rotação em torno do eixo z, analogamente ao índice inferior em F_{1z} que é um lembrete de que essa força afeta o movimento da partícula 1 ao longo do eixo z.

Nenhum dos componentes $F_{1,\mathrm{rad}}$ ou F_{1z} contribui para o torque em torno do eixo Oz, visto que nenhum deles tende a produzir variação da rotação da partícula em torno desse eixo. Então, $\tau_{1z} = F_{1,\mathrm{tg}}r_1$ é o torque resultante que atua sobre a partícula em relação ao eixo de rotação. Também, $m_1r_1^2$ é I_1, o momento de inércia da partícula em torno do eixo de rotação. Levando em conta isso, podemos escrever a Equação (10.5) como

$$\tau_{1z} = I_1\alpha_z = m_1r_1^2\alpha_z$$

Escrevemos uma equação análoga a essa para cada partícula do corpo e a seguir somamos todas as equações:

$$\tau_{1z} + \tau_{2z} + \cdots = I_1\alpha_z + I_2\alpha_z + \cdots$$
$$\cdots = m_1r_1^2\alpha_z + m_2r_2^2\alpha_z + \cdots$$

ou

$$\sum\tau_{iz} = \left(\sum m_ir_i^2\right)\alpha_z \qquad (10.6)$$

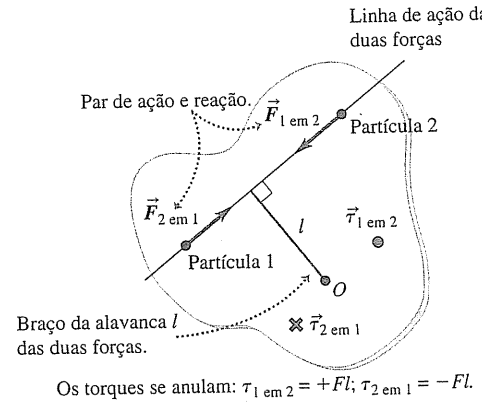


Figura 10.8 A partícula 1 e a partícula 2 de um corpo rígido exercem entre si forças iguais e contrárias. Se essas forças atuam ao longo da linha que une as duas partículas, os braços das alavancas são iguais e os torques dessas forças são iguais e contrários. Somente torques de forças *externas* alteram o movimento de rotação de um corpo rígido.

O membro esquerdo da Equação (10.6) é a soma de todos os torques em torno do eixo de rotação, que atua sobre todas as partículas. O membro direito é $I = \Sigma m_ir_i^2$, o momento de inércia total em torno do eixo de rotação, multiplicado pela aceleração angular α_z. Note que α_z é a mesma para todas as partículas, porque trata-se de um corpo *rígido*. Logo, para o corpo rígido como um todo, podemos enunciar a *segunda lei de Newton para o movimento de rotação:*

$$\sum\tau_z = I\alpha_z \qquad (10.7)$$

(forma análoga da segunda lei de Newton para a rotação de um corpo rígido)

Do mesmo modo que a segunda lei de Newton afirma que a força resultante sobre uma partícula é igual à sua massa multiplicada pela aceleração, a Equação (10.7) diz que o torque resultante sobre um corpo rígido é igual ao seu momento de inércia em relação ao eixo de rotação vezes sua aceleração angular (Figura 10.7).

Note que como deduzimos que a aceleração angular α_z é a mesma para todas as partículas no corpo, note que a Equação (10.7) vale *somente* para corpos *rígidos*. Portanto, essa equação não se aplica a um tanque de água girando ou um tornado fazendo girar a massa de ar, quando a aceleração angular é diferente para diferentes partículas do corpo. Observe também que, como na dedução usamos a Equação (9.14), $a_{\mathrm{tg}} = r\alpha_z$, α_z deve ser medido em rad/s^2.

O torque sobre cada partícula é devido à força resultante que atua sobre essa partícula, dada pela soma vetorial das forças internas e externas (definidas na Seção 8.2). De acordo com a terceira lei de Newton, as forças *internas* que um par de partículas exerce mutuamente entre si em um corpo rígido são iguais e opostas (Figura 10.8). Se essas forças atuam ao longo da linha que une as duas partículas, os seus braços da alavanca em relação a qualquer eixo também são iguais. Assim, os torques para esse par de partículas são iguais e contrários e fornecem uma resultante igual a zero. Na verdade, *todos* os torques internos pro-

duzem uma resultante igual a zero, de modo que a soma $\Sigma\tau_z$ na Equação (10.7) inclui apenas os torques das forças *externas*.

Freqüentemente, uma das forças externas mais importantes que atuam sobre um corpo é o seu *peso*. Essa força não é concentrada em um único ponto, ela atua em cada partícula constituinte do corpo. Contudo, devido ao fato de $\vec{g}$ ser constante em todos os pontos do corpo, sempre obteremos o torque correto (em torno de qualquer eixo específico) se imaginarmos que o peso total do corpo esteja concentrado em seu *centro de massa*. Demonstraremos esse resultado no Capítulo 11, mas, por enquanto, precisaremos usar esse resultado em alguns problemas deste capítulo.

Estratégia para a solução de problemas 10.1

DINÂMICA DAS ROTAÇÕES PARA CORPOS RÍGIDOS

Nossa estratégia para a solução de problemas de dinâmica das rotações é semelhante à usada na Seção 5.2 para a aplicação da segunda lei de Newton:

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* a equação $\Sigma\tau_z = I\alpha_z$ é útil sempre que os torques atuam sobre um corpo rígido – ou seja, sempre que forças atuarem sobre um corpo de modo a causar variação na sua rotação.

Em alguns casos, talvez você consiga usar uma abordagem de energia, como fizemos na Seção 9.4. Entretanto, se a incógnita é um força, um torque, uma aceleração angular ou um intervalo de tempo decorrido, usar $\Sigma\tau_z = I\alpha_z$ é quase sempre a melhor abordagem.

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. Desenhe um esquema da situação e selecione o corpo ou os corpos a serem analisados.
2. Faça um diagrama do corpo livre para cada corpo e identifique as grandezas desconhecidas usando símbolos algébricos. Uma nova consideração é que você deve mostrar a *forma* do corpo de modo preciso, incluindo todas as dimensões e ângulos necessários para calcular os torques.
3. Escolha um sistema de coordenadas para o corpo, indicando o sentido positivo da rotação de cada corpo. Caso exista uma aceleração linear, é conveniente escolher um eixo com a mesma direção e com o sentido positivo em relação à aceleração. Caso você saiba previamente o sentido de α_z, considerar esse sentido como positivo da rotação simplifica os cálculos.

EXECUTAR *a solução* como segue:

1. Para cada corpo do problema, defina se eles possuem movimento de translação, movimento de rotação ou ambos. Dependendo do tipo de movimento, aplique a fórmula $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ (como na Seção 5.2) ou $\Sigma\tau_z = I\alpha_z$ ou as duas fórmulas simultaneamente.
2. Podem existir relações *geométricas* entre os movimentos de dois ou mais corpos, como no caso de um fio que se desenrola de uma polia enquanto ela gira ou, então, como no caso de uma roda que rola sem deslizar (caso que será discutido na Seção 10.3). Expresse essas relações sob forma algébrica, em geral como relações envolvendo duas acelerações lineares ou uma aceleração linear e uma aceleração angular.
3. Verifique se o número de equações é compatível com o número de grandezas incógnitas. A seguir, resolva as equações para achar as incógnitas.

AVALIAR *sua resposta:* confira se os sinais algébricos dos resultados fazem sentido. Por exemplo, suponha que o problema se refere a um carretel de linha. Se você está puxando a linha do carretel, suas respostas *não* podem indicar que o carretel está girando na direção que enrola o fio de volta no carretel! Sempre que possível, confira os resultados para casos especiais ou para valores-limite das grandezas. Pergunte a si mesmo: 'Será que este resultado faz sentido?'.

Exemplo 10.2

DESENROLANDO UM CABO I A Figura 10.9a mostra a mesma situação analisada no Exemplo 9.8 (Seção 9.4) usando o método da energia. Um cabo é enrolado diversas vezes em torno de um cilindro sólido uniforme que pode girar em torno do seu eixo. O cilindro possui diâmetro igual a 0,120 m e massa de 50 kg. O cabo é puxado com uma força igual a 9,0 N. Supondo que o cabo seja desenrolado sem se dilatar e sem deslizar, qual é sua aceleração?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a incógnita é a aceleração do cabo, que não podemos calcular diretamente por meio do método de energia da Seção 9.4 (a qual não envolve aceleração). Em vez disso, aplicaremos a dinâmica da rotação ao cilindro. Para obter a aceleração

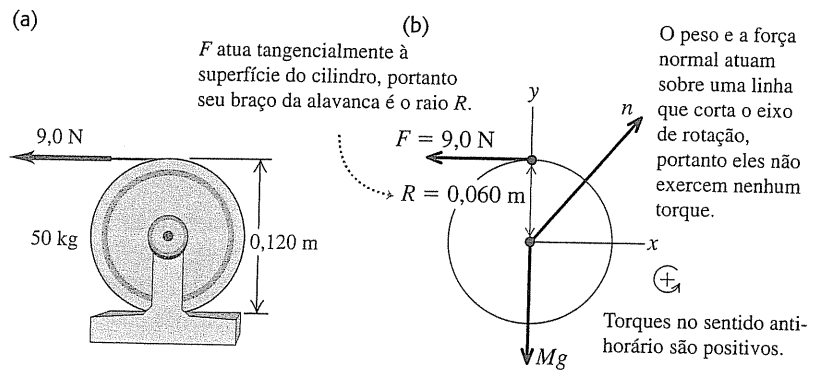


Figura 10.9 (a) Cilindro e cabo. (b) Diagrama do corpo livre do cilindro.

do cabo, encontraremos uma relação entre o movimento do cabo e o movimento da borda do cilindro.

PREPARAR: o cilindro gira no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio quando o cabo é puxado, por isso consideramos como positivo o sentido anti-horário. A força resultante sobre o cilindro deve ser igual a zero porque seu centro de massa permanece em repouso (Figura 10.9b). O peso (módulo igual a Mg) e a força normal (módulo n) exercida pelo cilindro atuam ao longo de linhas que cortam o eixo e, portanto, não possuem torque em relação a esse eixo. O único torque ao longo do eixo de rotação é produzido pela força F.

EXECUTAR: a força F possui um braço da alavanca igual ao raio R do cilindro: $l = R = 0{,}060$ m; logo, o torque em função de F é $\tau_z = FR$. (Esse torque é positivo uma vez que tende a causar uma rotação no sentido anti-horário.) Pelo Exemplo 9.8, o momento de inércia é $I = \frac{1}{2}MR^2$. Portanto, a aceleração *angular* do cilindro é dada pela Equação (10.7):

$$\alpha_z = \frac{\tau_z}{I} = \frac{FR}{MR^2/2} = \frac{2F}{MR} = \frac{2(9{,}0\text{ N})}{(50\text{ kg})(0{,}060\text{ m})} = 6{,}0\text{ rad/s}^2$$

(Convidamos você a conferir as unidades nessa equação. Podemos acrescentar o 'rad' ao resultado porque um radiano é uma grandeza sem dimensão.)

Para obter a aceleração *linear* do cabo, precisamos de uma relação cinemática. Na Seção 9.3 observamos que a aceleração de um cabo desenrolando-se de um cilindro é a mesma que o componente tangencial da aceleração de um ponto do cabo tangente à periferia do cilindro. A aceleração tangencial é dada pela Equação (9.14):

$$a_x = R\alpha = (0{,}060\text{ m})(6{,}0\text{ rad/s}^2) = 0{,}36\text{ m/s}^2$$

AVALIAR: você é capaz de usar esse resultado juntamente com uma equação do Capítulo 2 para determinar a velocidade do cabo depois que ele é puxado 2,0 m? Tente fazer isso e compare seu resultado com o do Exemplo 9.8, no qual achamos essa velocidade usando considerações de trabalho e energia.

Exemplo 10.3

DESENROLANDO UM CABO II A Figura 10.9a mostra a mesma situação analisada no Exemplo 9.9 (Seção 9.4) usando métodos de energia. Ache a aceleração do objeto de massa m.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: vamos aplicar a dinâmica da translação ao bloco suspenso e a dinâmica rotacional ao cilindro. Como o cabo não desliza sobre o cilindro, há uma relação entre a aceleração linear do bloco (a incógnita) e a aceleração angular do cilindro.

PREPARAR: A Figura 10.10 mostra um diagrama do corpo livre para cada um dos dois corpos. Consideramos como positiva a rotação no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e o sentido positivo do eixo Oy correspondendo ao sentido do objeto descendo.

EXECUTAR: para o objeto, a segunda lei de Newton fornece

$$\sum F_y = mg + (-T) = ma_y$$

Para o cilindro, o peso Mg e a força normal n (exercida pelo eixo) não possuem torque em relação ao eixo de rotação, porque

(a) Diagrama da situação. (b) Diagramas do corpo livre.

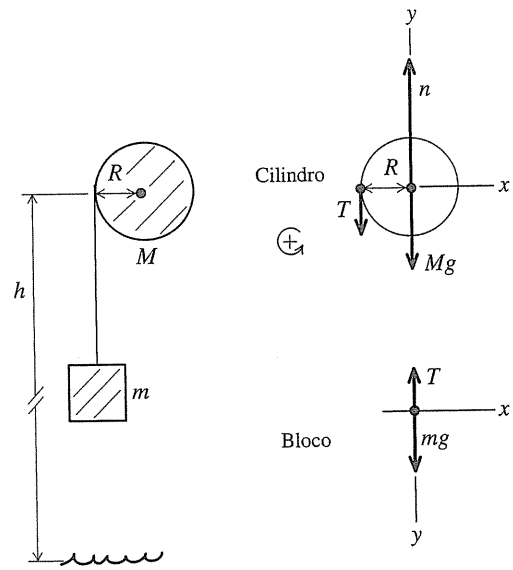


Figura 10.10 (a) Diagrama da situação. (b) Diagramas do corpo livre para o cilindro e para o bloco. O cabo possui massa desprezível.

ambos atuam ao longo de linhas que cruzam o eixo, como no Exemplo 10.2. O único torque existente é produzido pela tensão T no cabo. Aplicando a Equação (10.7) ao cilindro obtemos

$$\sum \tau_z = RT = I\alpha_z = \frac{1}{2}MR^2\alpha_z$$

Como no Exemplo 10.2, a aceleração do cabo é a mesma que a aceleração tangencial de um ponto sobre a periferia do cilindro. De acordo com a Equação (9.14), esta aceleração é dada por $a_y = a_{tg} = R\alpha_z$. Usamos essa relação para substituirmos $R\alpha_z$ por a_y na relação anterior, e a seguir dividimos o resultado por R; o resultado obtido é

$$T = \frac{1}{2}Ma_y$$

Agora substituímos T na equação da segunda lei de Newton para o objeto e explicitamos a_y:

$$mg - \frac{1}{2}Ma_y = ma_y$$

$$a_y = \frac{g}{1 + M/2m}$$

AVALIAR: a aceleração é positiva (na direção de cima para baixo) e menor que g, como era de se esperar, já que o cabo está segurando o objeto. Para verificar quanta força o cabo exerce, substitua a expressão para a_y na segunda lei de Newton para o objeto a fim de achar T:

$$T = mg - ma_y = mg - m\left(\frac{g}{1 + M/2m}\right) = \frac{mg}{1 + 2m/M}$$

Note que a tensão no cabo *não* é igual ao peso mg do objeto; caso fosse igual, o objeto não poderia se acelerar.

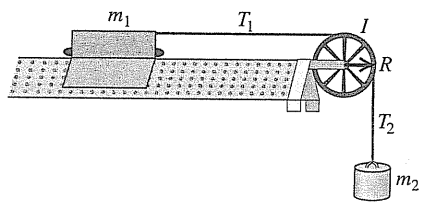
Vamos testar o resultado examinando alguns casos particulares. Quando a massa M é muito maior do que m, a tensão é aproximadamente igual ao peso mg e a aceleração correspondente é

muito menor que g. Quando M é zero, $T = 0$ e $a_y = g$; nesse caso, o objeto cai livremente. Se o objeto começa a se deslocar a partir do repouso ($v_{0y} = 0$) e de uma altura h acima do solo, sua velocidade y quando atinge o solo é dada por $v_y^2 = {v_{0y}}^2 + 2a_y h = 2a_y h$, portanto $v_0 = 0$

$$v_y = \sqrt{2a_y h} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + M/2m}}$$

Esse resultado é igual ao obtido por considerações de energia no Exemplo 9.9.

Teste sua compreensão da Seção 10.2 A Figura mostra um cavaleiro de massa m_1 que pode deslizar sem atrito sobre um trilho de ar horizontal. Ele está preso a um objeto de massa m_2 por um fio de massa desprezível. A polia possui raio R e o momento de inércia I em torno do seu eixo de rotação. Quando libertado, o objeto suspenso acelera de cima para baixo, o cavaleiro se acelera da esquerda para a direita e o fio faz girar a polia sem deslizar nem distender. Classifique os módulos das seguintes forças que atuam durante o movimento, em ordem decrescente. i) a força de tensão (módulo T_1) na parte horizontal do fio; ii) a força de tensão (módulo T_2) na parte vertical do fio; iii) o peso $m_2 g$ do objeto suspenso.



10.3 Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo móvel

Podemos estender nossa análise da dinâmica do movimento de rotação para casos em que o eixo de rotação se move. Quando isso ocorre, dizemos que o corpo sofre um **movimento combinado de rotação e translação**. A chave para compreender tais situações é a seguinte: todo movimento possível de um corpo rígido pode ser representado como uma combinação do *movimento de translação do centro de massa* e *de uma rotação em torno de um eixo passando pelo centro de massa*. Isso é verdade mesmo quando o centro de massa se acelera, de modo que ele não pode estar em repouso em nenhum sistema de referência inercial. Um exemplo gráfico é fornecido pelo movimento de um bastão (Figura 10.11). O centro de massa do bastão segue uma trajetória parabólica, como se houvesse uma partícula com a massa do bastão localizada em seu centro de massa. Outros exemplos desse tipo de movimento são o movimento do ioiô que se desenrola de um fio e o movimento de uma bola rolando ao longo de uma encosta.

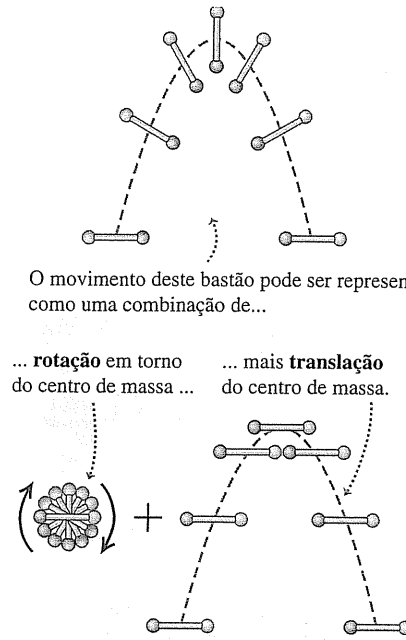


Figura 10.11 O movimento de um corpo rígido é a combinação do movimento translacional do centro de massa e de rotação em torno do centro de massa.

Movimento combinado de rotação e translação: relações envolvendo energia

Está além do escopo deste livro demonstrar que todo movimento de um corpo rígido pode ser sempre dividido em um movimento de translação do centro de massa e de rotação em torno do centro de massa. Porém, podemos demonstrar que isso é verdade para a *energia cinética* de um corpo rígido que possui um movimento combinado de translação e rotação. Nesse caso, a energia cinética do corpo é a soma da parte $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$ associada com o movimento de translação do centro de massa e da parte $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$ associada com a rotação em torno de um eixo passando pelo centro de massa:

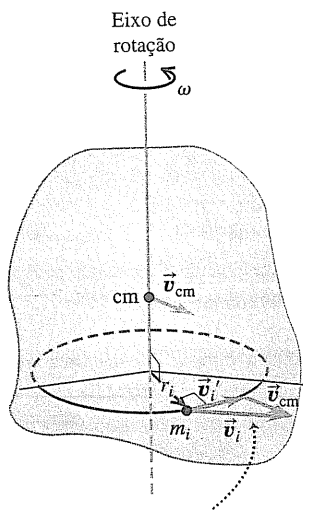
$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \qquad (10.8)$$

(corpo rígido com rotação e translação)

Para demonstrar essa relação, novamente imaginamos que o corpo rígido seja constituído por partículas. Considere uma partícula típica com massa m_i, conforme mostra a Figura 10.12. A velocidade $\vec{v}_i$ dessa partícula em relação a um sistema de referência inercial é a soma vetorial da velocidade $\vec{v}_{cm}$ do centro de massa e da velocidade $\vec{v}_i'$ da partícula *relativa* ao centro de massa:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i' \qquad (10.9)$$

A energia cinética K_i dessa partícula no referencial inercial é $\frac{1}{2}m_i v_i^2$, a qual pode ser sempre expressa como $\frac{1}{2}m_i(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$. Substituindo a Equação (10.9) nesta última forma, obtemos



A velocidade $\vec{v}_i$ de uma partícula de um corpo rígido em rotação e translação = (velocidade $\vec{v}_{cm}$ do centro de massa) mais (velocidade da partícula $\vec{v}_i'$ em relação ao centro de massa).

Figura 10.12 Um corpo rígido com movimento combinado de translação e rotação.

$$K_i = \frac{1}{2}m_i(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i') \cdot (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i')$$
$$= \frac{1}{2}m_i(\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{cm} + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i' + \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_i')$$
$$= \frac{1}{2}m_i(v_{cm}^2 + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i' + v_i'^2)$$

A energia cinética total é a soma ΣK_i para todas as partículas que constituem o corpo. Escrevendo os três termos da equação anterior como somas separadas, encontramos

$$K = \sum K_i = \sum\left(\frac{1}{2}m_i v_{cm}^2\right) + \sum(m_i\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i') + \sum\left(\frac{1}{2}m_i v_i'^2\right)$$

O primeiro e o segundo termos possuem fatores comuns que podem ser colocados em evidência:

$$K = \frac{1}{2}(\sum m_i)v_{cm}^2 + \vec{v}_{cm} \cdot (\sum m_i\vec{v}_i') + \sum\left(\frac{1}{2}m_i v_i'^2\right) \quad (10.10)$$

Agora obtemos a recompensa pelos nossos esforços. No primeiro termo, Σm_i é a massa total M. O segundo termo é zero porque $\Sigma m_i\vec{v}_i'$ é M vezes a velocidade do centro de massa *em relação ao centro de massa*, que é igual a zero por definição. O último termo é a soma da energia cinética das partículas determinada pelo cálculo das suas velocidades em relação ao centro de massa. Usando as mesmas etapas que conduziram à Equação (9.17) para a energia cinética da rotação de um corpo rígido, podemos escrever esse último termo como $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$, onde I_{cm} é o momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de massa e ω é a velocidade angular. Desse modo, a Equação (10.10) se transforma na Equação (10.8):

$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

Rolamento sem deslizamento

Um caso importante do movimento combinado de rotação e translação é o **rolamento sem deslizamento**, como o movimento da roda ilustrada na Figura 10.13. A roda é simétrica, de modo que seu centro de massa é dado pelo seu centro geométrico. Visualizamos o movimento em um referencial inercial para o qual a superfície em que a roda rola está em repouso. Neste sistema, o ponto sobre a roda que está em contato com a superfície deve permanecer instantaneamente *em repouso,* de modo que ele não escorrega. Logo, a velocidade $\vec{v}_1'$ do ponto de contato em relação ao centro de massa deve ser igual e contrária à velocidade do centro de massa $\vec{v}_{cm}$. Sendo R o raio da roda e ω sua velocidade angular, então o módulo do vetor $\vec{v}_1'$ é $R\omega$; logo devemos ter

$$v_{cm} = R\omega \quad (10.11)$$

(condição para o rolamento sem deslizamento)

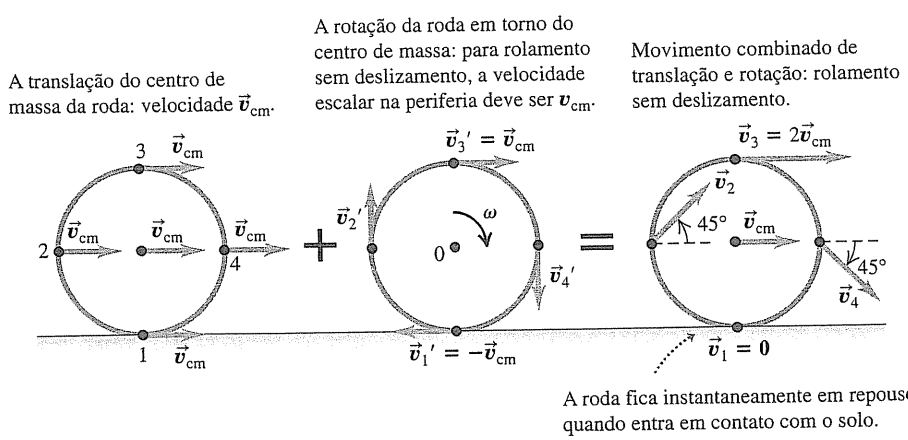


Figura 10.13 O movimento de uma roda que gira é a soma do movimento de translação do centro de massa mais o movimento de rotação da roda em torno do centro de massa.

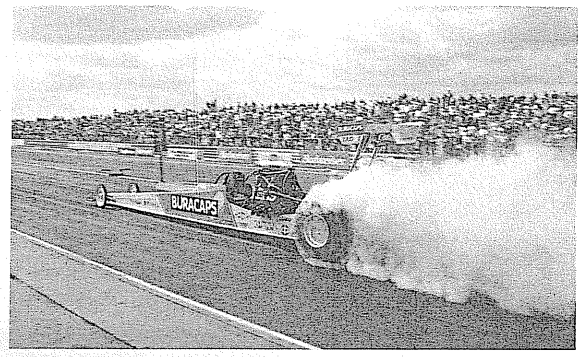


Figura 10.14 A fumaça provocada pelos pneus traseiros deste carro de corrida indica que os pneus estão deslizando sobre o piso, de modo que v_{cm} não é igual a $R\omega$.

Como mostra a Figura 10.13, a velocidade em um ponto da roda é a soma vetorial da velocidade do centro de massa com a velocidade do ponto em relação ao centro de massa. Logo, enquanto o ponto de contato 1 está instantaneamente em repouso, o ponto 3 no topo da roda se desloca com o *dobro da velocidade* do centro de massa, e os pontos 2 e 4 nos lados da roda possuem velocidades formando um ângulo de 45° com a horizontal.

Em qualquer instante podemos supor que a roda esteja girando em torno de um 'eixo instantâneo' de rotação que passa no ponto de contato com o solo. A velocidade angular ω é a mesma tanto para esse eixo como para um eixo passando pelo centro de massa. Um observador no centro de massa vê a periferia da roda girar com o mesmo número de revoluções por segundo que um observador na periferia olhando o centro de massa girar em torno dele. Se estudarmos o movimento da roda que gira na Figura 10.13 sob esse ponto de vista, a energia cinética da roda é $K = \frac{1}{2}I_1\omega^2$, onde I_1 é o momento de inércia da roda em torno de um eixo que passa pelo ponto 1. Porém, pelo teorema dos eixos paralelos, Equação (9.19), $I_1 = I_{cm} + MR^2$, onde M é a massa total da roda e I_{cm} é o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa. Logo, usando a Equação (10.11), a energia cinética da roda é

$$K = \frac{1}{2}I_1\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2$$

que é o mesmo resultado indicado na Equação (10.8).

ATENÇÃO Rolamento sem deslizamento Note que a relação $v_{cm} = R\omega$ se aplica *somente* quando há rolamento sem deslizamento. Quando um carro de corrida entra inicialmente em movimento, os pneus traseiros giram muito rapidamente, muito embora o carro mal se mova, portanto $R\omega$ é maior do que v_{cm} (Figura 10.14). Se o piloto pisar no freio com demasiada força fazendo o carro derrapar, os pneus vão parar de girar e $R\omega$ será menor que v_{cm}.

Quando um corpo rígido muda de altura à medida que ele se move, devemos levar em conta a energia potencial gravitacional. Conforme discutimos na Seção 9.4, a energia potencial gravitacional associada com qualquer corpo de massa M, rígido ou não, é igual à energia potencial gravitacional de uma partícula de massa M localizada no centro de massa do corpo. Ou seja,

$$U = Mgy_{cm}$$

Exemplo 10.4

VELOCIDADE DE UM IOIÔ PRIMITIVO Um ioiô primitivo é feito enrolando-se um fio diversas vezes em torno de um cilindro de massa M e raio R (Figura 10.15). Você mantém presa a extremidade do fio enquanto o cilindro é liberado sem velocidade inicial. O fio se desenrola, mas não desliza nem se dilata a medida que o cilindro cai e gira. Use considerações de energia para achar a velocidade v_{cm} do centro de massa do cilindro sólido depois que ele caiu até uma distância h.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a extremidade superior do fio permanece fixa, ela não é puxada para cima, de modo que a mão indicada na Figura 10.15 não realiza nenhum trabalho sobre o sistema fio e cilindro. Como no Exemplo 9.8 (Seção 9.4), existe atrito entre o fio e o cilindro, porém como o fio não desliza sobre a superfície do cilindro, não ocorre nenhuma perda de energia mecânica. Portanto, podemos usar a lei da conservação da energia mecânica.

PREPARAR: as energias potenciais são $U_1 = Mgh$ e $U_2 = 0$. A energia cinética do fio é igual a zero porque sua massa é desprezível. A energia cinética inicial do cilindro é $K_1 = 0$, e sua energia cinética final K_2 é dada pela Equação (10.8). O momento de inércia é $I = \frac{1}{2}MR^2$, e $\omega = v_{cm}/R$ porque o cilindro não desliza sobre o fio.

EXECUTAR: pela Equação (10.8), a energia cinética no ponto 2 é

$$K_2 = \frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4}Mv_{cm}{}^2$$

A energia cinética é $1\frac{1}{2}$ vezes maior, como se o ioiô estivesse caindo a uma velocidade escalar v_{cm} sem girar. Dois terços do total de energia cinética ($\frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2$) é de translação e um terço ($\frac{1}{4}Mv_{cm}{}^2$) é de rotação. Finalmente, a conservação de energia fornece

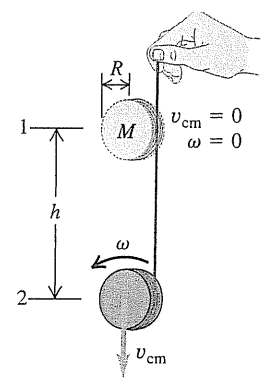


Figura 10.15 Cálculo da velocidade de um ioiô primitivo.

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$
$$0 + Mgh = \frac{3}{4}Mv_{cm}^2 + 0$$

e

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

AVALIAR: esse valor é menor do que $\sqrt{2gh}$, a velocidade que um objeto atinge ao cair de uma altura h, porque um terço da energia potencial do cilindro se transforma em energia cinética de rotação.

Exemplo 10.5

COMPETIÇÃO ENTRE CORPOS GIRANDO Em uma demonstração durante a aula de física, o professor faz uma 'competição' de vários corpos rígidos arredondados deixando-os rolar do alto de um plano inclinado (Figura 10.16). Qual é a forma do corpo que alcança primeiro a parte inferior do plano inclinado?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: podemos usar novamente a conservação de energia porque não ocorre deslizamento dos corpos ao longo do plano inclinado. O atrito cinético não realiza nenhum trabalho quando o corpo rola sem deslizar. Podemos também ignorar os efeitos do *atrito de rolamento*, introduzidos na Seção 5.3, desde que os corpos e o plano sejam perfeitamente rígidos. (Mais adiante nesta seção explicaremos o motivo dessa conclusão.)

PREPARAR: cada corpo parte do repouso no topo do plano inclinado com altura h, de modo que $K_1 = 0$, $U_1 = Mgh$ e $U_2 = 0$. A energia cinética na parte inferior da inclinação é dada pela Equação (10.8). Como os corpos rolam sem deslizar, $\omega = v_{cm}/R$. Os momentos de inércia dos corpos fornecidos na Tabela 9.2 (em torno de um eixo passando pelo respectivo centro de massa) podem ser expressos por $I_{cm} = cMR^2$, onde c é um número puro menor do que 1 ou no máximo igual a 1 e que depende da forma do corpo. O objetivo é encontrar o valor de c que fornece ao corpo a maior velocidade escalar na parte inferior da inclinação.

EXECUTAR: então, pela conservação de energia,

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$
$$0 + Mgh = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}cMR^2\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 + 0$$
$$= \frac{1}{2}(1 + c)Mv_{cm}^2$$

Logo, a velocidade na parte inferior do plano inclinado é

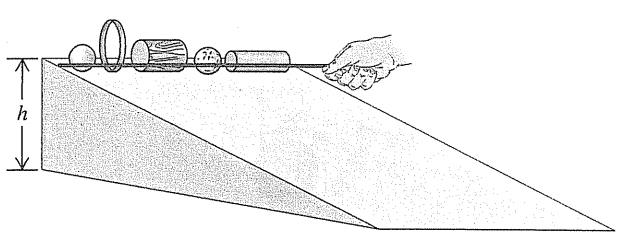


Figura 10.16 Qual é o corpo que rola mais rapidamente para baixo do plano inclinado, e por quê?

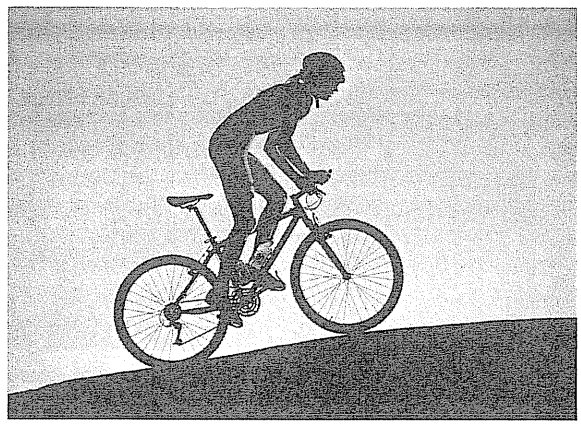


Figura 10.17 O eixo da roda de uma bicicleta passa pelo centro de massa da roda e é um eixo de simetria. Portanto, a rotação da roda é descrita pela Equação (10.13), desde que a bicicleta não tombe lateralmente (o que faria alterar a orientação do eixo).

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + c}}$$

AVALIAR: esse resultado é bastante interessante: a velocidade não depende nem da massa M do corpo, nem do raio R. Todos os cilindros sólidos possuem a mesma velocidade no ponto inferior do plano, mesmo quando possuem massas e raios diferentes, porque eles possuem o mesmo valor da constante c. Todas as esferas sólidas possuem a mesma velocidade na base do plano e assim por diante. Quanto menor o valor de c, maior a velocidade do corpo quando ele chega ao ponto inferior do plano (e em qualquer nível ao longo do plano). Os corpos com valores de c pequenos chegam primeiro que os corpos com valores elevados, porque eles gastam menos energia cinética na rotação, deixando uma parte maior para a energia cinética de translação. Lendo os valores de c indicados na Tabela 9.2, vemos que a ordem de chegada na base do plano é: qualquer esfera maciça, qualquer cilindro maciço, qualquer esfera oca com parede fina e qualquer cilindro oco com parede fina.

Movimento combinado de rotação e translação: dinâmica

Podemos também analisar o movimento combinado de rotação e translação de um corpo rígido do ponto de vista da dinâmica. Conforme verificamos na Seção 8.5, para um corpo com massa total M, a aceleração $\vec{a}_{cm}$ do centro de massa é a mesma aceleração de uma partícula de massa M submetida à força externa resultante que atua sobre o corpo rígido real:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \qquad (10.12)$$

O movimento de rotação em torno do centro de massa é descrito pela segunda lei de Newton na rotação, Equação (10.7):

$$\sum \tau_z = I_{cm}\alpha_z \qquad (10.13)$$

onde I_{cm} é o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa e a soma $\Sigma\tau_z$ inclui todos os torques externos em relação a esse eixo. Não é imediatamente óbvio que a Equação (10.13) possa ser aplicada ao movimento de translação de um corpo rígido; afinal, nossa dedução da fórmula $\Sigma\tau_z = I\alpha_z$ na Seção 10.2 utilizava a hipótese de que o eixo de rotação permanecia fixo. Porém, na verdade, a Equação (10.13) vale *mesmo quando o eixo de rotação se move,* desde que as duas condições seguintes sejam obedecidas:

1. O eixo que passa no centro de massa deve ser um eixo de simetria.
2. O eixo não pode mudar de direção.

Essas condições são atendidas por muitos tipos de rotação (Figura 10.17). Note que em geral esse eixo *não* está em repouso em um sistema de referência inercial.

Podemos agora resolver problemas de dinâmica envolvendo um corpo rígido que possui simultaneamente movimento de translação e rotação, desde que o eixo de rotação satisfaça simultaneamente as duas condições mencionadas anteriormente. A Estratégia para a Solução de Problemas 10.1 desenvolvida na Seção 10.2 é igualmente útil aqui, e seria conveniente revê-la agora. Lembre-se de que, quando um corpo realiza simultaneamente um movimento de rotação e de translação, devemos separar as equações do movimento *para o mesmo corpo*. Uma delas, a Equação (10.12), descreve o movimento de translação do centro de massa. A outra equação do movimento, a Equação (10.13), descreve o movimento de rotação em torno do centro de massa.

Exemplo 10.6

ACELERAÇÃO DE UM IOIÔ PRIMITIVO Para o ioiô primitivo do Exemplo 10.4 (Figura 10.18a), ache a aceleração de cima para baixo do cilindro e a tensão no fio.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: um diagrama do corpo livre do ioiô é indicado na Figura 10.18b, incluindo a escolha do sentido positivo do eixo de referência. Com essas coordenadas, as variáveis do problema são a_{cmy} e T.

PREPARAR: usaremos as equações (10.12) e (10.13), além da condição de que o fio não deslize sobre o cilindro.

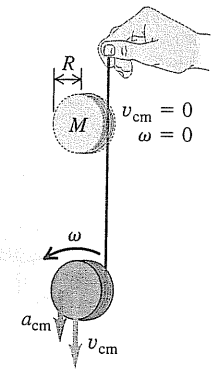
EXECUTAR: a equação para o movimento de translação do centro de massa é

$$\sum F_y = Mg + (-T) = Ma_{cmy} \qquad (10.14)$$

O momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa é $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$. Somente a força de tensão possui torque em relação ao eixo que passa pelo centro de massa, de modo que a equação para o movimento de rotação em torno desse eixo é

$$\sum \tau_z = TR = I_{cm}\alpha_z = \frac{1}{2}MR^2\alpha_z \qquad (10.15)$$

(a) O ioiô.



(b) Diagrama do corpo livre para o ioiô.

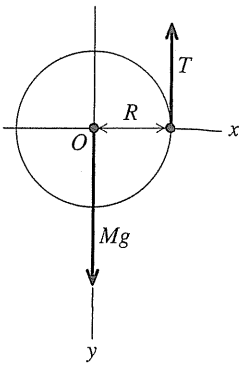


Figura 10.18 Dinâmica de um ioiô primitivo (veja a Figura 10.15).

O fio se desenrola sem deslizar, logo $v_{cmz} = R\omega_z$ pela Equação (10.11); a derivada dessa equação em relação ao tempo fornece

$$a_{cmy} = R\alpha_z \qquad (10.16)$$

Agora usamos a Equação (10.16) para eliminar α_z da Equação (10.15) e a seguir resolvemos as equações (10.14) e (10.15) para obter T e a_{cmy}. Os resultados são bastante simples:

$$a_{cmy} = \frac{2}{3}g \qquad T = \frac{1}{3}Mg$$

Usando a fórmula do movimento com aceleração constante $(v_{cmy})^2 = (v_{cm0y})^2 + 2a_{cmy}h$, você pode mostrar que a velocidade do ioiô depois que ele cai uma distância h é $v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$, confirmando o resultado encontrado no Exemplo 10.4.

AVALIAR: do ponto de vista da dinâmica, a força de tensão é essencial; ela contribui para que a aceleração do ioiô seja menor do que g, e o seu torque é o responsável pela rotação do ioiô. Contudo, nossa análise feita pelo método da energia no Exemplo 10.4 não considerava de forma alguma a força de tensão! Como não existe nenhuma variação da energia mecânica, do ponto de vista da energia o fio é importante apenas como auxiliar na conversão da energia potencial gravitacional em energia cinética rotacional.

Exemplo 10.7

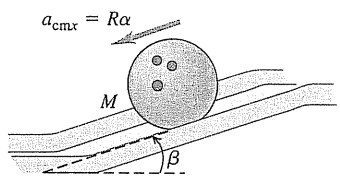
ACELERAÇÃO DE UMA ESFERA ROLANDO Uma bola de boliche sólida desce pela rampa de retorno ao longo da pista rolando sem deslizar (Figura 10.19a). O ângulo de inclinação da rampa em relação à horizontal é igual a β. Qual é a aceleração da bola? Considere a bola como uma esfera sólida homogênea, desprezando seus orifícios.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: as incógnitas do problema são a aceleração do centro de massa da bola e o módulo da força de atrito. A Figura 10.19b é um diagrama do corpo livre, mostrando que somente a força de atrito exerce um torque em torno do centro de massa.

PREPARAR: como no Exemplo 10.6, usaremos a Equação (10.12) para descrever o movimento de translação e a Equação (10.13) para descrever o movimento de rotação.

(a) A bola de boliche.



(b) Diagrama do corpo livre para a bola de boliche.

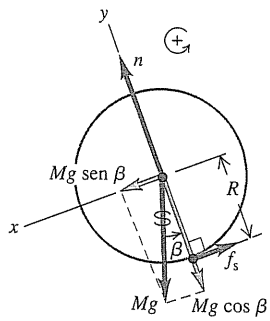


Figura 10.19 Uma bola de boliche rolando para baixo de uma rampa.

EXECUTAR: pela Tabela 9.2 o momento de inércia de uma esfera sólida é dado por $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$. As equações do movimento para a translação e para a rotação em torno de um eixo passando pelo centro de massa são, respectivamente, dadas por

$$\sum F_x = Mg\,\text{sen}\,\beta + (-f) = Ma_{cmx} \qquad (10.17)$$

$$\sum \tau_z = fR = I_{cm}\alpha_z = \left(\frac{2}{5}MR^2\right)\alpha_z \qquad (10.18)$$

Como a bola rola sem deslizar, temos a mesma relação cinemática $a_{cmx} = R\alpha_z$ como no Exemplo 10.6. Usamos essa relação para eliminar α_z da Equação (10.18):

$$fR = \frac{2}{5}MRa_{cmx}$$

Essa equação e a Equação (10.17) formam um sistema de duas equações com as duas incógnitas a_{cmx} e f. Explicitando f na Equação (10.17), substitua o resultado na equação anterior para eliminar f e, a seguir, explicite a_{cmx} para obter

$$a_{cmx} = \frac{5}{7}g\,\text{sen}\,\beta$$

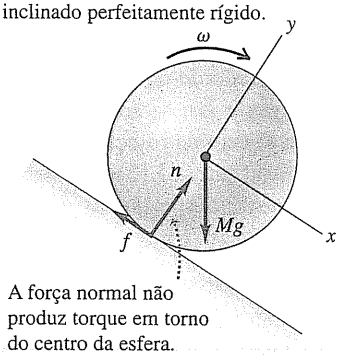
A aceleração é precisamente $\frac{5}{7}$ maior do que a aceleração da bola, caso ela *deslizasse* sem atrito ao longo do plano inclinado, tal como no caso do tobogã do Exemplo 5.10 (Seção 5.2). Finalmente, substituindo o resultado anterior na Equação (10.17) e explicitando f:

$$f = \frac{2}{7}Mg\,\text{sen}\,\beta$$

AVALIAR: como a bola não desliza no ponto que fica instantaneamente em contato com a rampa, a força de atrito f a ser considerada é a força de atrito *estático*; ela impede o deslizamento e fornece para a bola sua aceleração angular. Podemos deduzir uma expressão para o coeficiente de atrito estático μ_s necessário para impedir o deslizamento. A força normal é dada por $n = Mg\cos\beta$. A força de atrito estático máximo é igual a $\mu_s n$, de modo que o coeficiente de atrito estático deve ser maior que ou pelo menos igual a

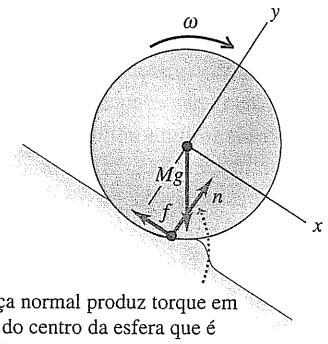
$$\mu_s = \frac{f}{n} = \frac{\frac{2}{7}Mg\,\text{sen}\,\beta}{Mg\cos\beta} = \frac{2}{7}\text{tg}\,\beta$$

(a) Uma esfera perfeitamente rígida rolando para baixo de um plano inclinado perfeitamente rígido.



A força normal não produz torque em torno do centro da esfera.

(b) Uma esfera rígida rolando sobre uma superfície deformada.



A força normal produz torque em torno do centro da esfera que é contrária ao sentido da rotação.

Figura 10.20 Rolando para baixo (a) de uma superfície perfeitamente rígida e (b) de uma superfície deformada. A deformação no item (b) é exagerada.

Quando a inclinação do plano é bem pequena, β é pequeno, e somente um valor pequeno de μ_s é necessário para impedir o deslizamento. Porém, à medida que o ângulo aumenta, o valor de μ_s aumenta, como intuitivamente era de se esperar. Quando a bola começa a deslizar, as equações (10.17) e (10.18) continuam válidas, porém não é mais verdade que $v_{cmx} = R\omega_z$, nem que $a_{cmx} = R\alpha_z$. Temos agora duas equações para três incógnitas (a_{cmx}, α_z e f). Para resolver este problema de rolamento *com* deslizamento é necessário levar em conta o atrito *cinético* (veja o Problema Desafiador 10.101).

Quando a bola de boliche percorre uma distância vertical h ao descer a rampa, o deslocamento ao longo da rampa é $h/\text{sen}\,\beta$. Você deve ser capaz de mostrar que a velocidade da bola no fim da rampa é dada por $v_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$, que é precisamente o resultado encontrado no Exemplo 10.5 com $c = \frac{2}{5}$.

Caso a bola estivesse rolando *para cima* da rampa, a força de atrito ainda estaria orientada de baixo para cima, como na Figura 10.19b. Você é capaz de explicar por quê?

Atrito de rolamento

No Exemplo 10.5, dissemos que podemos desprezar o atrito de rolamento quando o corpo que rola e a superfície de apoio são corpos rígidos perfeitos. Na Figura 10.20a uma esfera perfeitamente rígida está rolando para baixo de um plano inclinado perfeitamente rígido. A linha de ação

da força normal passa pelo centro da esfera, de modo que seu torque é zero; não existe nenhum atrito de deslizamento no ponto de contato, portanto a força de atrito não realiza trabalho. A Figura 10.20b mostra uma situação mais realista, na qual a superfície 'enruga' na parte frontal da esfera e a esfera passa por uma depressão rasa. Por causa dessa deformação, as forças de contato sobre a esfera não mais atuam sobre um único ponto, porém sobre uma área; as forças são concentradas sobre a parte frontal da esfera conforme indicado. Como resultado, a força normal agora exerce um torque que se opõe à rotação. Além disso, existe um certo deslizamento da esfera sobre a superfície por causa da deformação, produzindo uma perda de energia mecânica. A combinação desses dois efeitos origina o fenômeno do *atrito de rolamento*. O atrito de rolamento também ocorre quando o corpo é deformável, tal como um pneu de automóvel. Geralmente o corpo que rola e a superfície são rígidos a ponto de podermos desprezar o atrito de rolamento, como fizemos em todos os exemplos desta seção.

Teste sua compreensão da Seção 10.3 Suponha que o cilindro maciço usado como um ioiô no Exemplo 10.6 seja substituído por um cilindro oco com a mesma massa e o mesmo raio. a) A aceleração do ioiô vai i) aumentar, ii) diminuir ou iii) permanecer constante? b) A tensão do fio vai i) aumentar, ii) diminuir ou iii) permanecer constante? ∎

10.4 Trabalho e potência no movimento de rotação

Quando você pedala uma bicicleta, aplica forças a um corpo que gira e realiza um trabalho sobre ele. Eventos semelhantes ocorrem em muitas outras situações da vida real, como a rotação do eixo de um motor que faz girar um aparelho eletrodoméstico ou o motor de um carro impulsionando um veículo. Podemos descrever esse trabalho em termos do torque e do deslocamento angular.

Suponha que uma força tangencial $\vec{F}_{tg}$ atue sobre a periferia de uma roda com um pivô central — por exemplo, no caso de uma criança correndo enquanto empurra um carrossel em um parque de diversões (Figura 10.21a). A roda gira produzindo um deslocamento angular infinitesimal $d\theta$ em torno de um eixo fixo durante um intervalo de tempo infinitesimal dt (Figura 10.21b). O trabalho dW realizado pela força $\vec{F}_{tg}$ enquanto um ponto da periferia se move uma distância ds é $dW = F_{tg}\,ds$. Se $d\theta$ for medido em radianos, então $ds = Rd\theta$ e

$$dW = F_{tg}R\,d\theta$$

Mas $F_{tg}R$ é o *torque* τ_z produzido pela força $\vec{F}_{tg}$, logo

$$dW = \tau_z\,d\theta \tag{10.19}$$

O trabalho total W realizado pelo torque durante um deslocamento angular de θ_1 a θ_2 é

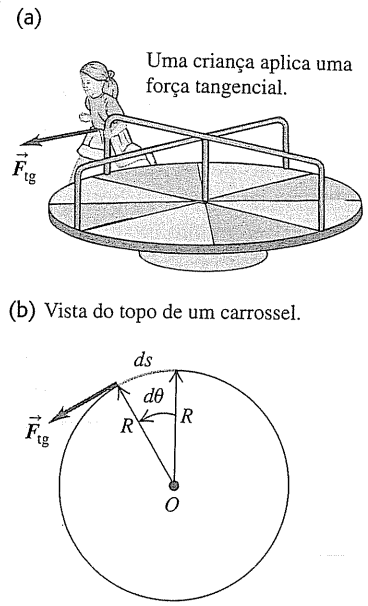


Figura 10.21 Uma força tangencial atuando sobre um corpo que gira produz trabalho.

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z\,d\theta \tag{10.20}$$

(trabalho realizado por um torque).

Quando o torque permanece *constante* enquanto ocorre uma variação finita $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, obtemos

$$W = \tau_z(\theta_2 - \theta_1) = \tau_z\Delta\theta \tag{10.21}$$

(trabalho realizado por um torque constante)

O trabalho realizado por um torque *constante* é igual ao produto do torque pelo deslocamento angular. Quando o torque é expresso em newton · metro (N · m) e o deslocamento angular é dado em radianos, o trabalho é expresso em joules. A Equação (10.21) usada para o movimento de rotação é análoga à Equação (6.1), $W = Fs$, e a Equação (10.20) é análoga à Equação (6.7), $W = \int F_x\,dx$, que dá o trabalho realizado por uma força em um deslocamento retilíneo.

Caso a força indicada na Figura 10.21 tivesse um componente radial (paralelo ao eixo de rotação) ou um componente radial (apontado para o eixo ou afastando-se do eixo), esse componente não realizaria nenhum trabalho porque o deslocamento do ponto de aplicação possui somente um componente tangencial. Um componente axial ou radial da força também não produziria nenhuma contribuição para o torque em torno do eixo de rotação, de modo que as equações (10.20) e (10.21) permanecem válidas para *qualquer* força, independentemente da natureza dos seus componentes.

Quando um torque realiza trabalho sobre um corpo rígido, a energia cinética varia de uma quantidade igual ao trabalho realizado. Podemos provar isso usando exatamente

o mesmo procedimento adotado para a energia cinética de translação de uma partícula nas equações (6.11), (6.12) e (6.13). Inicialmente indicamos por τ_z o torque *resultante* sobre o corpo, de modo que, pela Equação (10.7), $\tau_z = I\alpha_z$. Usando essa equação, estamos supondo que o corpo é rígido, portanto o momento de inércia I é constante. A seguir, transformamos a integral da Equação (10.20) em uma integral sobre ω_z do seguinte modo:

$$\tau_z d\theta = (I\alpha_z)\, d\theta = I\frac{d\omega_z}{dt}\, d\theta = I\frac{d\theta}{dt}\, d\omega_z = I\omega_z\, d\omega_z$$

Uma vez que τ_z é o torque resultante, a integral na Equação (10.20) é um trabalho *total* realizado sobre o corpo rígido que gira. Essa equação fornece o resultado

$$W_{\text{tot}} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega_z\, d\omega_z = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 \qquad (10.22)$$

A variação da energia cinética da rotação de um corpo *rígido* é igual ao trabalho realizado pelas forças externas ao corpo (Figura 10.22). Essa equação é análoga à Equação (6.13), o teorema do trabalho-energia para uma partícula.

O que podemos dizer acerca da *potência* associada com o trabalho realizado por um torque que atua sobre um corpo que gira? Dividindo ambos os membros da Equação (10.19) pelo intervalo de tempo dt durante o qual o deslocamento angular ocorre, obtemos

$$\frac{dW}{dt} = \tau_z\frac{d\theta}{dt}$$

Porém dW/dt é a taxa da realização do trabalho, ou *potência* P, e $d\theta/dt$ é a velocidade angular ω_z, logo

$$P = \tau_z\omega_z \qquad (10.23)$$

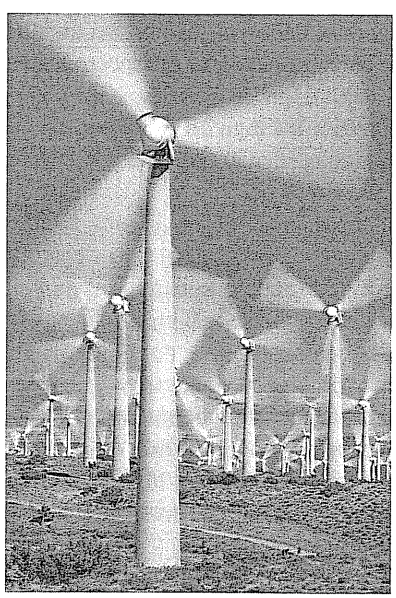


Figura 10.22 A energia cinética de rotação de uma turbina eólica é igual ao trabalho total realizado para colocá-la em rotação.

Quando um torque τ_z (em relação ao eixo de rotação) atua sobre um corpo que gira com velocidade angular ω_z, essa potência (taxa da realização do trabalho) é o produto de τ_z e ω_z. Essa relação é o análogo da relação $P = \vec{F}\cdot\vec{v}$ que foi desenvolvida na Seção 6.4 para o movimento de uma partícula.

Exemplo 10.8

POTÊNCIA E TORQUE DE UM MOTOR Um anúncio fazendo propaganda da potência desenvolvida pelo motor de um automóvel afirma que o motor desenvolve $1{,}49 \cdot 10^5$ W para uma rotação de 6000 rpm. Qual é o torque desenvolvido pelo motor?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este exemplo usa a relação entre potência, velocidade angular e torque (a incógnita).

PREPARAR: conhecemos a potência P e a velocidade angular ω_z, de modo que podemos calcular o torque usando a Equação (10.23).

EXECUTAR: inicialmente vamos converter rpm para rad/s:

$$P = 1{,}49 \times 10^5\ \text{W}$$

$$\omega_z = 6000\ \text{rev/min} = \left(\frac{6000\ \text{rev}}{1\ \text{min}}\right)\left(\frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}}\right)\left(\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}\right)$$

$$= 628\ \text{rad/s}$$

Pela Equação (10.23),

$$\tau_z = \frac{P}{\omega_z} = \frac{1{,}49 \times 10^5\ \text{N}\cdot\text{m/s}}{628\ \text{rad/s}} = 237\ \text{N}\cdot\text{m}$$

AVALIAR: você poderia aplicar um torque semelhante a esse usando uma chave inglesa de comprimento igual a 0,25 m e aplicando à extremidade da chave uma força de 948 N. Você seria capaz de fazer isso?

Exemplo 10.9

CÁLCULO DE POTÊNCIA PELO TORQUE Um motor elétrico exerce um torque constante de 10 N · m sobre um esmeril montado em seu eixo motor. O momento de inércia é $I = 2{,}0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. Sabendo que o sistema começa a se mover a partir do repouso, calcule o trabalho realizado pelo motor em 8,0 s e a energia cinética no instante final. Qual é a potência média desenvolvida pelo motor?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como o torque é constante, o esmeril possui uma aceleração angular constante α_z. Ao determinarmos o valor de α_z, poderemos determinar o ângulo $\Delta\theta$ em que o esmeril gira em 8,0 s [o que, pela Equação (10.21), indica o trabalho realizado W] e a velocidade angular ω_z nesse instante (o que indica a energia cinética K). Podemos determinar a potência média P_m dividindo o trabalho realizado pelo intervalo de tempo.

PREPARAR: usamos a versão para rotação da segunda lei de Newton, $\Sigma\tau_z = I\alpha_z$, para calcular a aceleração angular α_z. Então,

usamos as equações cinemáticas da Seção 9.2 para calcular $\Delta\theta$ e ω_z e a partir deles calculamos W, K e P_m.

EXECUTAR: temos $\Sigma\tau_z = 10\ \text{N} \cdot \text{m}$ (o único torque em atuação é aquele devido ao motor) e $I = 2{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$, portanto, da relação $\Sigma\tau_z = I\alpha_z$, vemos que a aceleração angular é $5{,}0\ \text{rad/s}^2$. Pela Equação (9.11), o ângulo total descrito pelo sistema quando ele gira durante 8,0 s é dado por

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_z t^2 = \frac{1}{2}(5{,}0\ \text{rad/s}^2)(8{,}0\ \text{s})^2 = 160\ \text{rad}$$

e o trabalho realizado pelo torque é

$$W = \tau_z \Delta\theta = (10\ \text{N} \cdot \text{m})(160\ \text{rad}) = 1600\ \text{J}$$

Pelas equações (9.7) e (9.17), a velocidade angular e a energia cinética para $t = 8{,}0$ s são

$$\omega_z = \alpha_z t = (5{,}0\ \text{rad/s}^2)(8{,}0\ \text{s}) = 40\ \text{rad/s}$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega_z^2 = \frac{1}{2}(2{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2)(40\ \text{rad/s})^2 = 1600\ \text{J}$$

A energia cinética inicial era nula, portanto o trabalho realizado equivale ao aumento em energia cinética [veja a Equação (10.22)]. A potência média é

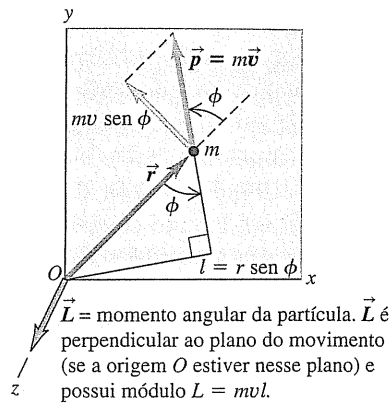
$$P_m = \frac{1600\ \text{J}}{8{,}0\ \text{s}} = 200\ \text{J/s} = 200\ \text{W}$$

AVALIAR: podemos conferir o resultado para a potência *média* considerando a potência *instantânea* $P = \tau_z\omega_z$. Como ω_z cresce continuamente, P também cresce continuamente. A potência instantânea P cresce de zero no instante inicial $t = 0$ até $(10\ \text{N} \cdot \text{m})(40\ \text{rad/s}) = 400\ \text{W}$ no instante final $t = 8{,}0$ s. A velocidade angular e a potência crescem uniformemente com o tempo, de modo que a potência *média* é apenas metade desse valor máximo, ou 200 W.

Teste sua compreensão da Seção 10.4 Você aplica torques iguais a dois cilindros diferentes, um dos quais possui um momento de inércia que é o dobro do outro. Cada cilindro está inicialmente em repouso. Após uma rotação completa, qual deles possui maior energia cinética? I) o cilindro com o maior momento de inércia; ii) o cilindro com o menor momento de inércia; iii) ambos possuem a mesma energia cinética. ∎

10.5 Momento angular

Para cada grandeza referente ao movimento de rotação definida nos capítulos 9 e 10, existe uma grandeza análoga referente ao movimento de translação de uma partícula. A grandeza análoga ao *momento linear* de uma partícula é o **momento angular**, uma grandeza vetorial designada por $\vec{L}$. Sua relação com $\vec{p}$ (que é sempre chamado de *momento linear*) é análoga à relação que liga o torque com a força, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$. Para uma partícula com massa constante m, velocidade $\vec{v}$, momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$ e vetor posição $\vec{r}$ em relação a uma origem O de um referencial inercial, definimos o momento angular $\vec{L}$ como



$\vec{L}$ = momento angular da partícula. $\vec{L}$ é perpendicular ao plano do movimento (se a origem O estiver nesse plano) e possui módulo $L = mvl$.

Figura 10.23 Cálculo do momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$ de uma partícula com massa m se movendo no plano xy.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad (10.24)$$

(momento angular de uma partícula)

O valor de $\vec{L}$ depende da escolha da origem O, visto que ele envolve o vetor posição da partícula em relação à origem. As unidades de momento angular são $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

Na Figura 10.23, uma partícula se move no plano xy; seu vetor posição $\vec{r}$ e seu momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$ estão indicados. O momento angular $\vec{L}$ é ortogonal ao plano xy. A regra da mão direita para o produto vetorial mostra que sua direção está ao longo do eixo $+Oz$ e seu módulo é

$$L = mvr\,\text{sen}\,\phi = mvl \qquad (10.25)$$

onde l é a distância perpendicular do ponto O à linha da direção do vetor $\vec{v}$. Essa distância desempenha o papel do 'braço da alavanca' para o vetor momento linear.

Quando uma força resultante $\vec{F}$ atua sobre uma partícula, sua velocidade e seu momento linear variam, de modo que seu momento angular também pode variar. Podemos mostrar que a *taxa de variação* do momento angular é igual ao torque da força resultante. Tomando a derivada da Equação (10.24) em relação ao tempo e usando a regra da derivada de um produto, encontramos:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}\right) + \left(\vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = (\vec{v} \times m\vec{v}) + (\vec{r} \times m\vec{a})$$

O primeiro termo é zero porque contém o produto vetorial do vetor $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ por ele mesmo. No segundo termo substituímos $m\vec{a}$ pela força resultante $\vec{F}$ e obtemos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \qquad (10.26)$$

(para uma partícula sob ação da força resultante $\vec{F}$)

A taxa de variação do momento angular de uma partícula é igual ao torque da força resultante que atua sobre ela. Compare esse resultado com a Equação (8.3), a qual afirma que a taxa de variação $d\vec{p}/dt$ do momento *linear* de uma partícula é igual à força resultante que atua sobre ela.

Momento angular de um corpo rígido

Podemos usar a Equação (10.25) para achar o momento angular total de um *corpo rígido* que gira em torno do eixo Oz com velocidade angular ω. Inicialmente considere uma fatia fina do corpo situada sobre o plano xy (Figura 10.24). Cada partícula dessa fatia se move em um círculo centralizado na origem, e em cada instante sua velocidade $\vec{v}_i$ é perpendicular ao vetor posição $\vec{r}_i$, conforme indicado. Logo, na Equação (10.25), $\phi = 90°$ para cada partícula. Uma partícula com massa m_i a uma distância r_i do ponto O possui uma velocidade $v_i = r_i\omega$. Pela Equação (10.25), o módulo L_i do seu momento angular é

$$L_i = m_i(r_i\omega)\, r_i = m_i r_i^2 \omega \qquad (10.27)$$

A direção e o sentido do momento angular de cada partícula, de acordo com a regra da mão direita, são dados pelo eixo $+Oz$.

O momento angular *total* da fatia do corpo que está sobre o plano xy é a soma ΣL_i dos momentos angulares L_i de todas as partículas. Somando ambos os membros da Equação (10.27), obtemos o resultado

$$L = \sum L_i = (\sum m_i r_i^2)\omega = I\omega$$

onde I é o momento de inércia da fatia em torno do eixo Oz.

Podemos adotar esse procedimento para todas as fatias do corpo paralelas ao plano xy. Para os pontos que não estão sobre o plano xy, surge uma complicação porque os vetores $\vec{r}$ possuem componentes na direção e no sentido do eixo Oz, assim como ao longo dos eixos Ox e Oy; isso faz com que o momento angular de cada partícula possua um componente perpendicular ao eixo Oz. Contudo, *se o eixo Oz for um eixo de simetria*, os componentes perpendiculares de partículas que estejam em lados opostos se anulam (Figura 10.25). Logo, quando um corpo gira em torno de um eixo de simetria, seu vetor momento angular $\vec{L}$ permanece ao longo do eixo de simetria, e seu módulo é dado por $L = I\omega$.

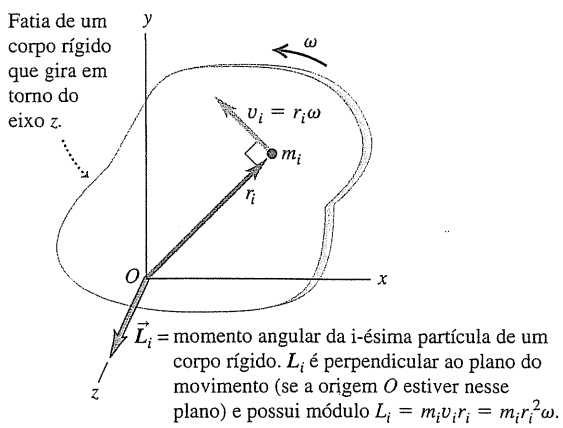


Figura 10.24 Cálculo do momento angular de uma partícula de massa m_1 em um corpo rígido girando a uma velocidade escalar angular ω. (Compare com a Figura 10.23.)

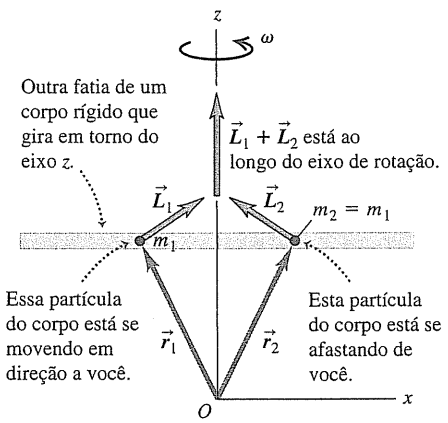


Figura 10.25 Duas partículas de mesma massa localizadas simetricamente de cada lado do eixo de rotação de um corpo rígido. Os momentos angulares $\vec{L}_1$ e $\vec{L}_2$ das partículas individuais não estão sobre o eixo de rotação, porém, a soma vetorial $\vec{L}_1 + \vec{L}_2$ permanece ao longo desse eixo.

O vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ também permanece ao longo do eixo de rotação, conforme discutimos no final da Seção 9.1. Portanto, para um corpo rígido que gira em torno de um eixo de simetria, $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ possuem a mesma direção e o mesmo sentido (Figura 10.26). Logo, é válida a seguinte relação *vetorial*

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad (10.28)$$

(para um corpo rígido girando em torno de um eixo de simetria)

Pela Equação (10.26), a taxa de variação do momento angular de uma partícula é igual ao torque da força resultante sobre a partícula. Para qualquer sistema de partículas (tanto para corpos rígidos como para corpos não rígidos), a taxa de variação do momento angular *total* é igual à soma dos torques de todas as forças que atuam sobre todas as partículas. Os torques das forças *internas* se anulam quando a linha de ação dessas forças une as duas partículas, como na Figura 10.8, e, portanto, a soma dos torques inclui somente torques das forças *externas*. (Um cancelamento semelhante ocorreu em nossa discussão do movimento do centro de massa na Seção 8.5.) Se o momento angular total de um sistema de partículas é $\vec{L}$ e a soma dos torques externos é $\sum\vec{\tau}$, então

$$\sum\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (10.29)$$

(para qualquer sistema de partículas)

Finalmente, quando o sistema de partículas for um corpo rígido girando em torno de um eixo de simetria, então $L_z = I\omega_z$ e I é constante. Quando esse eixo possui direção fixa no espaço, então os vetores $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ variam apenas em módulo, mas a direção e o sentido não variam. Nesse caso, $dL_z/dt = I\, d\omega_z/dt = I\alpha_z$, ou

$$\sum\tau_z = I\alpha_z$$

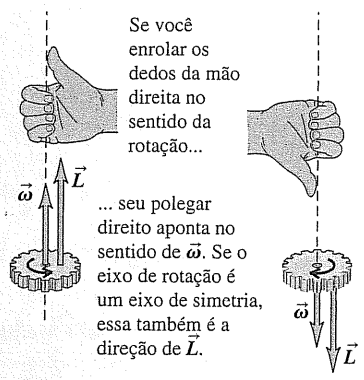


Figura 10.26 Para a rotação em torno de um eixo de simetria, $\vec{\omega}$ e $\vec{L}$ são vetores paralelos e estão sobre o eixo de simetria. As respectivas direções e sentidos são obtidos pela mesma regra da mão direita (compare com a Figura 9.5).

que é novamente a relação básica para a dinâmica da rotação de um corpo rígido. Caso o corpo *não* seja rígido, I pode variar, e nesse caso L varia, mesmo quando ω permanece constante. Para um corpo não rígido, a Equação (10.29) ainda permanece válida, embora a Equação (10.7) não seja mais válida.

Quando o eixo de rotação *não* é um eixo de simetria, o momento angular em geral *não* é paralelo ao eixo (Figura 10.27). À medida que o corpo gira, o vetor momento angular $\vec{L}$ descreve um cone em torno do eixo de rotação. Como $\vec{L}$ varia, deve existir um torque resultante externo atuando sobre o corpo, embora o módulo da velocidade angular ω permaneça constante. Se o corpo for uma roda não balanceada de um carro, esse torque será fornecido por atrito nos mancais, desgastando-os em decorrência. O 'balanceamento' de uma roda significa fazer a distribuição de massas de modo que o eixo de rotação seja um eixo de simetria; então, o vetor $\vec{L}$ aponta ao longo do eixo de rotação, e nenhum torque resultante é necessário para manter a roda girando.

Na rotação em torno de um eixo fixo, normalmente usamos a expressão 'momento angular de um corpo' para fazer referência somente ao *componente* de $\vec{L}$ ao longo do eixo de rotação do corpo (o eixo Oz mostrado na Figura 10.27), com um sinal positivo ou negativo para indicar o sentido da rotação, como no caso da velocidade angular.

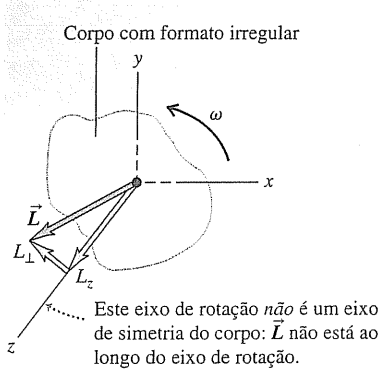


Figura 10.27 Quando o eixo de rotação de um corpo rígido não é um eixo de simetria, o vetor momento angular $\vec{L}$ não se encontra em geral ao longo do eixo de rotação. Mesmo quando $\vec{\omega}$ é constante, a direção de $\vec{L}$ pode variar, e torna-se necessário um torque externo para manter a rotação.

Exemplo 10.10

MOMENTO ANGULAR E TORQUE A hélice da turbina de um motor a jato possui momento de inércia 2,5 kg . m^2 em torno do eixo de rotação. Quando a turbina começa a girar, sua velocidade angular em função do tempo é dada por

$$\omega_z = (40\ \text{rad/s}^3)t^2$$

a) Calcule o momento angular da hélice em função do tempo e ache seu valor no instante $t = 3{,}0$ s. b) Determine o torque resultante que atua sobre a hélice em função do tempo e calcule seu valor para $t = 3{,}0$ s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: assim como no caso de um ventilador elétrico, a hélice da turbina gira em torno de um eixo de simetria (o eixo z). Logo, o vetor do momento angular possui somente um componente z L_z, o qual podemos determinar a partir da velocidade angular ω_z. Como a direção do momento angular é constante, o torque resultante também possui somente um componente τ_z ao longo do eixo de rotação; isso equivale à derivada de tempo de L_z.

PREPARAR: podemos usar a Equação (10.28) para achar L_z a partir de ω_z e a Equação (10.29) para achar t_z a partir da derivada de tempo de L_z.

EXECUTAR: a) O componente do momento angular ao longo do eixo de rotação z é

$$L_z = I\omega_z = (2.5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(40\ \text{rad/s}^3)t^2 = (100\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)\,t^2$$

(Abandonamos o 'rad' na resposta porque um radiano é uma grandeza sem dimensão). No instante $t = 3{,}0$ s, $L_z = 900\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$.

b) Pela Equação (10.29), o componente do torque resultante ao longo do eixo de rotação é

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = (100\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)(2t) = (200\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)\,t$$

No instante $t = 3{,}0$ s,

$$\tau_z = (200\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)(3.0\ \text{s}) = 600\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 = 600\ \text{N}\cdot\text{m}$$

AVALIAR: para conferir o resultado, note que a aceleração angular da hélice da turbina é $\alpha_z = d\omega_z/dt = (40\ \text{rad/s}^2)(2t) = (80\ \text{rad/s}^2)t$. Pelo equivalente rotacional da segunda lei de Newton, o torque sobre a hélice é $\tau_z = I\alpha_z = (2{,}5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(80\ \text{rad/s}^2)t = (200\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)t$, exatamente como calculamos anteriormente.

Teste sua compreensão da Seção 10.5 Uma bola é presa a uma extremidade de um pedaço de fio. Você segura a outra extremidade do fio e gira a bola descrevendo um círculo em torno da sua mão. a) Se a bola se move a uma velocidade escalar constante, o seu momento linear $\vec{p}$ é constante? Por que sim ou por que não? b) O seu momento angular $\vec{L}$ é constante? Por que sim ou por que não? ∎

10.6 Conservação do momento angular

Acabamos de mostrar que o momento angular pode ser usado como uma formulação alternativa do princípio fundamental da dinâmica das rotações. Esse tratamento também é a base para formular o **princípio da conservação do momento angular**. Tal como a conservação da energia e a conservação do momento linear, esse princípio constitui uma lei geral da conservação, válida em todas as escalas, desde sistemas atômicos e nucleares até o movimento de galáxias. Esse princípio decorre diretamente da Equação (10.29): $\sum\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$. Quando $\sum\vec{\tau} = \mathbf{0}$, então $d\vec{L}/dt = \mathbf{0}$, em que $\vec{L}$ é um vetor constante.

Quando o torque externo resultante que atua sobre um sistema é igual a zero, o momento angular do sistema permanece constante (se conserva).

Um patinador que dá uma pirueta apoiado na ponta de um único patim sobre o gelo, um acrobata e um mergulhador, todos utilizam esse princípio. Suponha que uma acrobata acabou de sair de um salto com os braços e pernas estendidos, girando no sentido anti-horário em torno de seu centro de massa. Quando ela fecha os braços e as pernas, seu momento de inércia I_{cm} em relação ao centro de massa passa de um valor grande I_1 a um valor muito menor I_2. A única força externa que atua sobre a acrobata é seu peso, que não possui nenhum torque em relação a um eixo passando pelo centro de massa. Logo, o momento angular da acrobata $L_z = I_{cm}\omega_z$ permanece constante, e sua velocidade angular ω_z cresce à medida que I_{cm} diminui. Ou seja,

$$I_1\omega_{1z} = I_2\omega_{2z} \qquad (10.30)$$

(torque externo resultante igual a zero)

Quando uma patinadora ou uma bailarina gira com os braços estendidos e a seguir os recolhe, sua velocidade angular aumenta à medida que seu momento de inércia diminui. Em cada caso existe conservação de momento angular no sistema porque o torque externo resultante é igual a zero.

Quando um sistema possui muitas partes, as forças internas entre as partes produzem variações dos momentos angulares das partes, porém o momento angular *total* não varia. A seguir fornecemos um exemplo. Considere dois corpos A e B que interagem entre si e não interagem com nenhum outro corpo, como os astronautas mencionados na Seção 8.2 (Figura 8.8). Suponha que o corpo A exerça uma força $\vec{F}_{A\text{ em }B}$ sobre o corpo B; o torque correspondente (em relação a qualquer ponto que você escolha) é $\vec{\tau}_{A\text{ em }B}$. De acordo com a Equação (10.29), esse torque é igual à taxa de variação do momento angular do corpo B

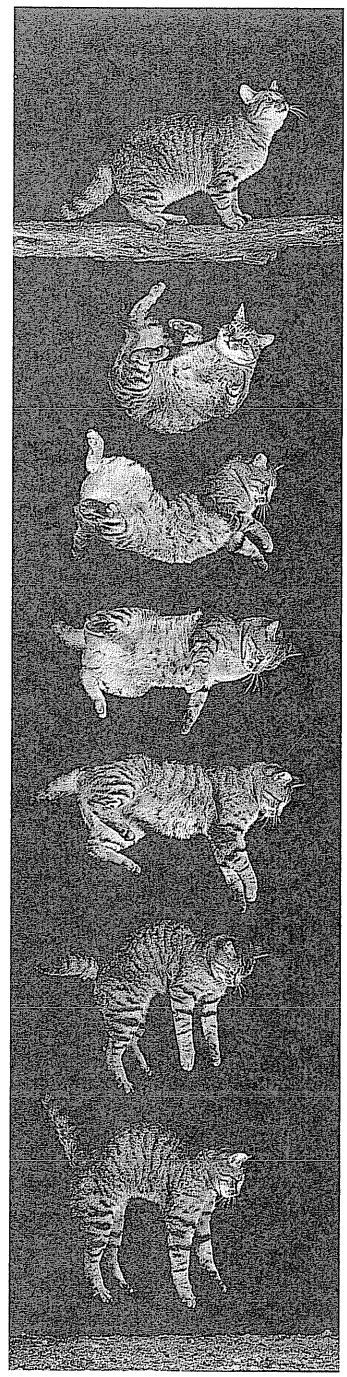


Figura 10.28 Um gato em queda produz torção em diversas partes de seu corpo e em diferentes direções, de modo que ele cai em pé. Em todas as etapas durante a queda o momento angular do gato como um todo permanece constante.

$$\vec{\tau}_{A\text{ em }B} = \frac{d\vec{L}_B}{dt}$$

Ao mesmo tempo, o corpo B exerce sobre A uma força $\vec{F}_{B\text{ em }A}$, com o torque correspondente $\vec{\tau}_{B\text{ em }A}$, e

$$\vec{\tau}_{B\text{ em }A} = \frac{d\vec{L}_A}{dt}$$

Pela terceira lei de Newton, $\vec{F}_{B\text{ em }A} = -\vec{F}_{A\text{ em }B}$. Além disso, se as forças atuam ao longo da mesma linha, como na Figura 10.8, seus braços da alavanca em relação ao eixo escolhido são iguais. Logo, os *torques* dessas forças são iguais e de sentidos contrários, e $\vec{\tau}_{B\text{ em }A} = -\vec{\tau}_{A\text{ em }B}$. Assim, quando somamos as duas equações anteriores, obtemos:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} + \frac{d\vec{L}_B}{dt} = 0$$

ou, como $\vec{L}_A + \vec{L}_B$ é o momento angular *total* $\vec{L}$ do sistema,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \qquad (10.31)$$

(torque externo resultante igual a zero)

Ou seja, o momento angular total do sistema permanece constante. Os torques das forças internas podem transferir momento angular de uma parte para outra do corpo, mas eles não podem alterar o momento angular *total* do sistema (Figura 10.28).

Exemplo 10.11

QUALQUER UM PODE SER UM BAILARINO Um acrobata professor de física está em pé sobre o centro de uma mesa giratória, mantendo os braços estendidos horizontalmente com um haltere de 5,0 kg em cada mão (Figura 10.29). Ele está girando em torno de um eixo vertical e completa uma volta em 2,0 s. Calcule a nova velocidade angular do professor, quando ele aproxima os dois halteres do estômago, e discuta como isso modifica sua energia cinética. Seu momento de inércia (sem os halteres) é igual a 3,0 kg · m², quando seus braços estão estendidos, diminuindo para 2,2 kg · m² quando suas mãos estão próximas do estômago. Os halteres estão inicialmente a uma distância de 1,0 m do eixo e a distância final é igual a 0,20 m. Considere os halteres como partículas.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: se desprezarmos o atrito na mesa giratória, nenhum torque externo atua em torno do eixo vertical (z), de modo que o momento angular em torno desse eixo é constante.

PREPARAR: podemos usar a Equação (10.30) para achar a incógnita do problema, a velocidade angular final ω_{2z}.

EXECUTAR: o momento do sistema é $I = I_{\text{prof}} + I_{\text{haltere}}$. Cada haltere de massa m contribui mr^2 para I_{haltere}, onde r é a distância perpendicular do eixo de rotação até o haltere. Inicialmente, temos

$$I_1 = 3{,}0\text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 2(5{,}0\text{ kg})(1{,}0\text{ m})^2 = 13\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\omega_{1z} = \frac{1\text{ rev}}{2{,}0\text{ s}} = 0{,}50\text{ rev/s}$$

O momento de inércia final é

$$I_2 = 2{,}2\text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 2(5{,}0\text{ kg})(0{,}20\text{ m})^2 = 2{,}6\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Pela Equação (10.30), a velocidade angular final é

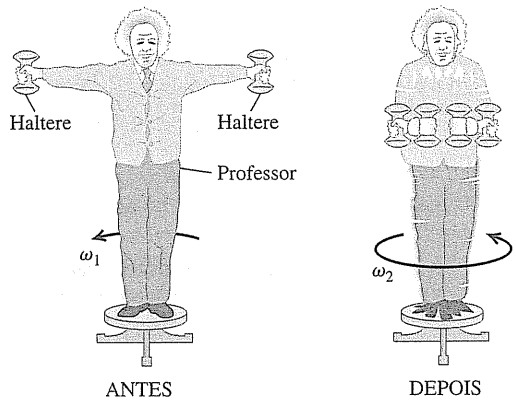


Figura 10.29 Divertimento com a conservação do momento angular.

$$\omega_{2z} = \frac{I_1}{I_2}\omega_{1z} = \frac{13\text{ kg} \cdot \text{m}^2}{2{,}6\text{ kg} \cdot \text{m}^2}(0{,}50\text{ rev/s}) = 2{,}5\text{ rev/s}$$

Ou seja, a velocidade angular cresce de um fator cinco enquanto o momento angular permanece constante. Note que não precisamos transformar 'revolução' para 'radianos' nos cálculos realizados. Por quê?

AVALIAR: é útil examinar como a energia cinética varia nesse processo. Para calcular a energia cinética, devemos usar ω_1 e ω_2 em rad/s. (Por quê?) Temos $\omega_{1z} = (0{,}50\text{ rev/s})(2\pi\text{ rad/rev}) = 3{,}14\text{ rad/s}$ e $\omega_{2z} = (2{,}5\text{ rev/s})(2\pi\text{ rad/rev}) = 15{,}7\text{ rad/s}$. A energia cinética inicial é

$$K_1 = \frac{1}{2}I_1\omega_{1z}^2 = \frac{1}{2}(13\text{ kg} \cdot \text{m}^2)(3{,}14\text{ rad/s})^2 = 64\text{ J}$$

e a energia cinética final é

$$K_2 = \frac{1}{2}I_2\omega_{2z}^2 = \frac{1}{2}(2{,}6\text{ kg} \cdot \text{m}^2)(15{,}7\text{ rad/s})^2 = 320\text{ J}$$

A energia cinética excedente veio do trabalho que o professor realizou ao puxar os braços e os halteres para junto de si.

Exemplo 10.12

'COLISÃO' EM ROTAÇÃO I A Figura 10.30 mostra dois discos: um deles (A) é o volante de um motor e o outro (B) é um disco ligado a um eixo de transmissão. Seus momentos de inércia são I_A e I_B; inicialmente eles estão girando com a mesma velocidade angular ω_A e ω_B, respectivamente. A seguir, empurramos os dois discos juntos, aplicando forças que atuam ao longo do eixo, de modo que sobre nenhum dos dois discos surge torque em relação ao eixo. Os discos se deslocam unidos e acabam atingindo a mesma velocidade angular final ω. Deduza uma expressão para ω.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o único torque que atua sobre cada disco é o torque que um exerce sobre o outro; não existe nenhum torque externo. Logo, o momento angular total do sistema dos dois discos é o mesmo antes e depois de serem empurrados unidos. No equilíbrio final eles giram juntos como se constituíssem um único corpo com momento de inércia total $I = I_A + I_B$ e velocidade angular ω, que é a incógnita do problema.

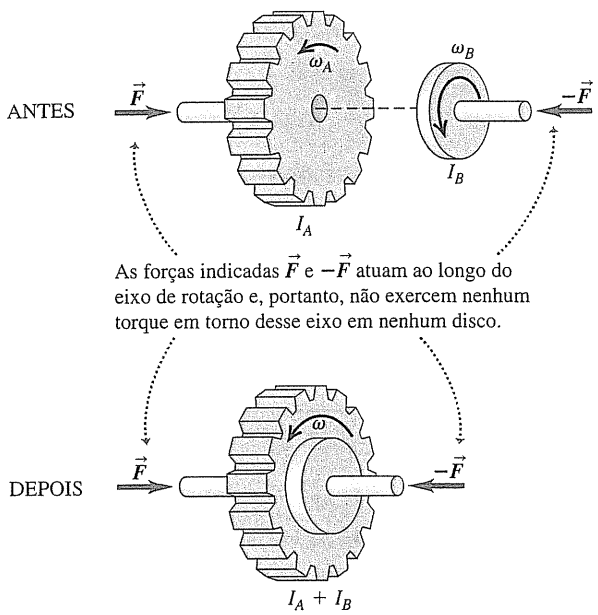


FIGURA 10.30 Quando o torque externo total é igual a zero, o momento angular se conserva.

PREPARAR: a Figura 10.30 mostra que todas as velocidades angulares apontam na mesma direção, por isso podemos considerar ω_A, ω_B e ω como os componentes da velocidade angular ao longo do eixo de rotação.

EXECUTAR: a conservação do momento angular fornece

$$I_A\omega_A + I_B\omega_B = (I_A + I_B)\omega$$

$$\omega = \frac{I_A\omega_A + I_B\omega_B}{I_A + I_B}$$

AVALIAR: essa 'colisão' entre dois discos é análoga a uma colisão completamente inelástica (Seção 8.3). Quando dois objetos em movimento de translação ao longo do mesmo eixo se unem e aderem um ao outro, o momento linear do sistema é conservado. Na situação indicada na Figura 10.30, dois objetos em movimento de *rotação* ao longo do mesmo eixo se unem e aderem um ao outro, e o momento *angular* é conservado. A energia cinética do sistema diminui em uma colisão completamente inelástica; no próximo exemplo, veremos o que acontece com a energia cinética na 'colisão' de dois discos em rotação.

Exemplo 10.13

'COLISÃO' EM ROTAÇÃO II No Exemplo 10.12, suponha que o volante A possua massa de 2,0 kg, um raio de 0,20 m e uma velocidade angular inicial de 50 rad/s, e a embreagem B possua massa de 4,0 kg, um raio de 0,10 m e uma velocidade angular inicial de 200 rad/s. Calcule a velocidade angular comum final ω depois que os discos ficam em contato. A energia cinética se conserva durante esse processo?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: necessitamos calcular a energia cinética de rotação de cada disco antes da colisão e a combinação das suas energias cinéticas após a colisão.

PREPARAR: usaremos o resultado do Exemplo 10.12 e a expressão $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ para a energia cinética de rotação.

EXECUTAR: os momentos de inércia dos dois discos são

$$I_A = \frac{1}{2}m_A r_A^2 = \frac{1}{2}(2{,}0\text{ kg})(0{,}20\text{ m})^2 = 0{,}040\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_B = \frac{1}{2}m_B r_B^2 = \frac{1}{2}(4{,}0\text{ kg})(0{,}10\text{ m})^2 = 0{,}020\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Pelo Exemplo 10.12 temos a velocidade escalar angular

$$\omega = \frac{I_A\omega_A + I_B\omega_B}{I_A + I_B}$$

$$= \frac{(0{,}040\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(50\text{ rad/s}) + (0{,}020\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(200\text{ rad/s})}{0{,}040\text{ kg}\cdot\text{m}^2 + 0{,}020\text{ kg}\cdot\text{m}^2}$$

$$= 100\text{ rad/s}$$

A energia cinética inicial é

$$K_1 = \frac{1}{2}I_A\omega_A^2 + \frac{1}{2}I_B\omega_B^2$$

$$= \frac{1}{2}(0{,}040\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(50\text{ rad/s})^2$$

$$+\frac{1}{2}(0{,}020\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(200\text{ rad/s})^2$$

$$= 450\text{ J}$$

A energia cinética final é

$$K_2 = \frac{1}{2}(I_A + I_B)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}(0{,}040\text{ kg}\cdot\text{m}^2 + 0{,}020\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(100\text{ rad/s})^2 = 300\text{ J}$$

AVALIAR: um terço da energia cinética inicial foi perdida durante essa 'colisão angular', o análogo rotacional de uma colisão linear completamente inelástica. Não deveríamos esperar conservação da energia cinética, embora a força externa resultante e o torque externo resultante sejam nulos, porque existem forças internas não conservativas (forças de atrito) que atuam enquanto os dois discos giram unidos e tendem a se aproximar de uma velocidade angular comum.

Exemplo 10.14

MOMENTO ANGULAR EM UMA AÇÃO POLICIAL Uma porta de largura igual a 1,0 m e massa de 15 kg, é articulada com dobradiças em um dos lados de modo que possa girar sem atrito em torno de um eixo vertical. Ela inicialmente não está aberta. Um policial dá um tiro com uma bala de 10 g e velocidade de 400 m/s exatamente no centro da porta e em uma direção perpendicular ao plano da porta. Calcule a velocidade angular da porta imediatamente depois que a bala penetra nela. A energia cinética se conserva?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: considere um sistema formado pela porta juntamente com a bala em seu interior. Não existe nenhum torque externo em torno do eixo definido pelas dobradiças, de modo que o momento angular em torno desse eixo deve se conservar.

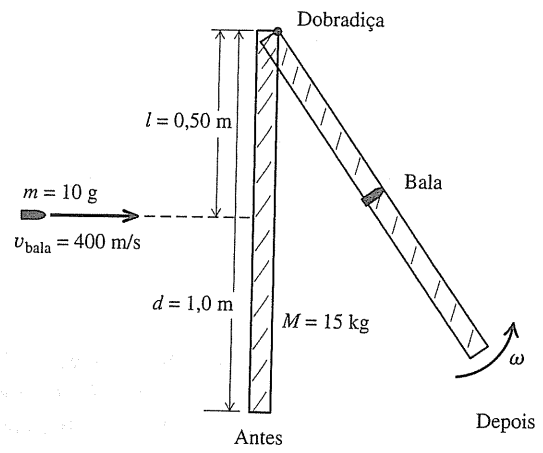


Figura 10.31 Esquematização do problema.

PREPARAR: A Figura 10.31 mostra a esquematização do problema. O momento angular inicial está totalmente na bola e é dado pela Equação (10.25). O momento angular final é o de um corpo rígido composto pela porta e a bala encravada nela. Consideraremos esses dois elementos como sendo iguais e solucionaremos a velocidade escalar angular ω da porta e da bala imediatamente após a colisão.

EXECUTAR: o momento angular inicial da bala é:

$$L = mvl = (0{,}010\text{ kg})(400\text{ m/s})(0{,}50\text{ m}) = 2{,}0\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

O momento angular final é $I\omega$, onde $I = I_{porta} + I_{bala}$. Pela Tabela 9.2, para uma porta de largura d,

$$I_{porta} = \frac{Md^2}{3} = \frac{(15\text{ kg})(1{,}0\text{ m})^2}{3} = 5{,}0\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

O momento de inércia da bala (em relação a um eixo passando pelas dobradiças) é

$$I_{bala} = ml^2 = (0{,}010\text{ kg})(0{,}50\text{ m})^2 = 0{,}0025\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

A conservação do momento angular exige que $mvl = I\omega$, ou

$$\omega = \frac{mvl}{I} = \frac{2{,}0\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}{5{,}0\text{ kg}\cdot\text{m}^2 + 0{,}0025\text{ kg}\cdot\text{m}^2} = 0{,}40\text{ rad/s}$$

A colisão entre a bala e a porta é inelástica porque forças não conservativas atuam durante o impacto da bala. Logo, não esperamos que haja conservação da energia cinética. Para conferirmos, calculamos a energia cinética inicial e a energia cinética final:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0{,}010\text{ kg})(400\text{ m/s})^2 = 800\text{ J}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(5{,}0025\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(0{,}40\text{ rad/s})^2$$
$$= 0{,}40\text{ J}$$

A energia cinética final é apenas 1/2000 da energia cinética inicial!

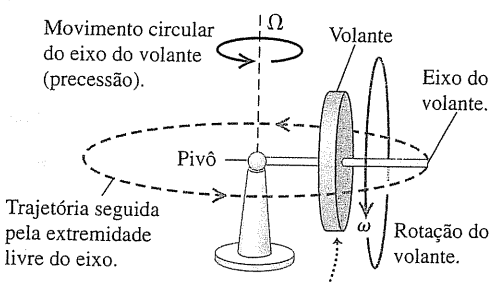
AVALIAR: a velocidade escalar angular final da porta é bastante lenta: a 0,40 rad/s a porta leva 3,9 s para oscilar 90° ($\pi/2$ radianos). Você é capaz de observar que a velocidade escalar dobraria se a bala fosse disparada no canto da porta, em um ponto próximo à maçaneta?

Teste sua compreensão da Seção 10.6 Se as calotas polares derretessem por completo devido ao aquecimento global, o gelo derretido se redistribuiria pela superfície terrestre. Essa variação faria com que a duração do dia (o tempo necessário para a Terra girar uma vez sobre seu eixo) i) aumentasse; ii) diminuísse; iii) permanecesse inalterada. (*Sugestão*: use os conceitos de momento angular. Considere que o Sol, a Lua e os planetas exercem torques desprezíveis sobre a Terra.) ▮

10.7 Giroscópios e precessão

Em todas as situações analisadas neste capítulo até o momento, o eixo de rotação ou permanecia fixo ou se movia, porém mantendo sempre a mesma direção (como no caso do rolamento sem deslizamento). Entretanto, uma diversidade de novos fenômenos físicos, alguns até inesperados, pode ocorrer quando o eixo de rotação muda de direção. Por exemplo, considere um giroscópio de brinquedo suportado em uma de suas extremidades (Figura 10.32). Se o eixo do volante for inicialmente colocado em posição horizontal e, a seguir, solto, sua extremidade livre começará a cair sob a ação da gravidade — *se* o volante inicialmente não estava girando. Porém, quando o volante *está* girando inicialmente, o que ocorre é bastante diferente. Um movimento possível é o movimento circular uniforme do eixo em um plano horizontal, combinado com o movimento de rotação do volante em torno desse eixo. Esse movimento surpreendente, que não é intuitivo, denomina-se **precessão**. A precessão ocorre na natureza, assim como em máquinas que giram, como no caso do giroscópio. Enquanto você lê estas palavras, a própria Terra está sofrendo precessão; seu eixo de rotação (o eixo que liga o pólo norte ao pólo sul) muda lentamente de direção, e a direção desse eixo só retorna exatamente à posição inicial depois de um ciclo completo de precessão que dura 26000 anos.

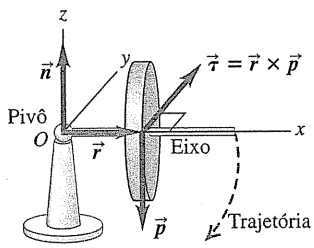
Para estudarmos o estranho fenômeno da precessão, devemos nos lembrar de que a velocidade angular, o momento angular e o torque são grandezas *vetoriais*.



Quando o volante e seu eixo estão parados, eles caem sobre a superfície da mesa. Quando o volante gira, ele e seu eixo 'flutuam' no ar, enquanto se movem em círculo em torno de um pivô.

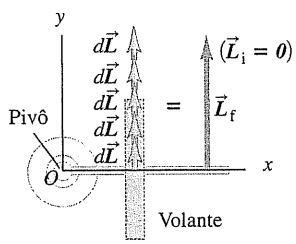
Figura 10.32 Um giroscópio suportado em uma de suas extremidades. O movimento circular horizontal do volante e seu eixo é denominado precessão. A velocidade angular de precessão é representada por Ω.

(a) O volante que não gira cai.



Quando o volante não está girando, seu peso cria um torque em torno do pivô, fazendo com que ele caia ao longo de uma trajetória circular até que seu eixo fique em repouso sobre a superfície da mesa.

(b) Vista de cima para baixo da queda do volante.



Na queda, o volante gira em torno do pivô e assim adquire um momento angular $\vec{L}$. A *direção* de $\vec{L}$ permanece constante.

Figura 10.33 (a) Se o volante na Figura 10.32 não está inicialmente girando, seu momento angular inicial é igual a zero. (b) Em cada intervalo de tempo sucessivo dt, o torque produz variação $d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt$ do momento angular. O volante adquire um momento angular $\vec{L}$ na mesma direção que $\vec{\tau}$, e o eixo do volante cai.

Em particular, precisamos da relação geral entre o torque resultante $\Sigma\vec{\tau}$ que atua sobre um corpo e a taxa de variação do momento angular $\vec{L}$, dada pela Equação (10.29), $\Sigma\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$. Vamos inicialmente aplicar essa equação ao caso em que o volante *não* está girando (Figura 10.33a). Tomamos a origem sobre o ponto O do pivô e supomos que o volante seja simétrico, com massa M e momento de inércia I em torno do eixo do volante. O eixo do volante está inicialmente ao longo do eixo Ox. As únicas forças que atuam sobre o giroscópio são a força normal $\vec{n}$, que atua sobre o pivô (com atrito desprezível) e o peso $\vec{p}$ do volante que atua no centro de massa, situado a uma distância r do pivô. A força normal possui torque nulo em relação ao pivô, e o peso possui um torque $\vec{\tau}$ na direção do eixo Oy, como indicado na Figura 10.33a. Inicialmente não existe rotação, e o momento angular inicial $\vec{L}_i$ é igual a zero. Pela Equação (10.29), a *variação* $d\vec{L}$ do momento angular em um intervalo de tempo curto dt depois do início é dada por

$$d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt \tag{10.32}$$

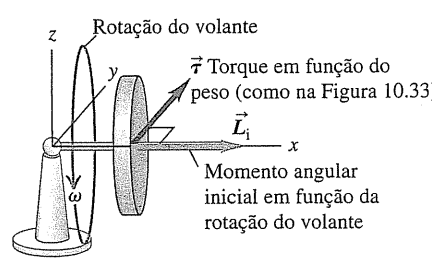
Essa variação está na direção do eixo Oy porque $\vec{\tau}$ também está. À medida que decorre cada intervalo de tempo dt, o momento angular varia em incrementos adicionais $d\vec{L}$ na direção Oy porque a direção do torque é constante (Figura 10.33b). O aumento crescente do momento angular horizontal significa que o giroscópio gira para baixo com velocidade crescente em torno do eixo Oy, até que atinja o suporte ou então caia na mesa onde se apóia.

Vamos agora analisar o que ocorre quando o volante *está* inicialmente girando, de modo que o momento angular inicial $\vec{L}_i$ não é igual a zero (Figura 10.34a). Uma vez que o volante gira em torno do eixo de simetria, $\vec{L}_i$ está ao longo desse eixo. Porém, cada variação de momento angular $d\vec{L}$ é perpendicular ao eixo, porque o torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{p}$ é perpendicular ao eixo (Figura 10.34b). Isso faz com que a *direção* do eixo varie, mas não o seu módulo. As variações de $d\vec{L}$ ocorrem sempre no plano xy horizontal, de modo que o vetor momento angular e o eixo do volante que com ele se move estão sempre em um plano horizontal. Em outras palavras, o eixo não cai — ele apenas sofre precessão.

Caso isso ainda lhe pareça difícil, pense em uma bola presa a um fio. Se a bola estiver inicialmente em repouso e você puxar o fio para você, a bola também se deslocará para você. Porém, se a bola estiver inicialmente se movendo e você puxar o fio perpendicularmente à direção do movimento da bola, ela se moverá em um círculo em torno de sua mão; ela não se aproximará de sua mão. No primeiro caso a bola possuía momento linear $\vec{p}$ zero; quando você aplica uma força $\vec{F}$ orientada para você durante um intervalo de

(a) Volante em rotação.

Quando o volante está girando, o sistema se inicia com um momento angular $\vec{L}_i$ paralelo ao eixo de rotação do volante.



(b) Vista do topo.

Agora o efeito do torque deve fazer com que o momento angular sofra precessão em torno do pivô. O giroscópio gira em torno do seu pivô sem cair.

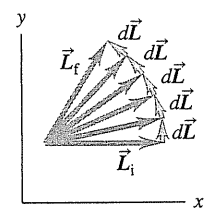


Figura 10.34 (a) O volante gira inicialmente com momento angular $\vec{L}_i$. As forças (não indicadas) são análogas às da Figura 10.33a. (b) Existindo um momento angular inicial, cada variação $d\vec{L} = \tau\Delta t$ é perpendicular a $\vec{L}$. Isso faz com que o módulo de $\vec{L}$ permaneça o mesmo, mas sua direção sofra uma variação contínua.

Em um intervalo de tempo dt, o vetor momento angular e o eixo do volante (ao qual é paralelo) realizam uma precessão através de um ângulo $d\phi$.

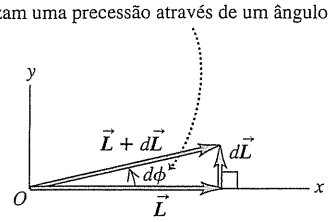


Figura 10.35 Visão detalhada de parte da Figura 10.34b.

tempo dt, a bola adquire um momento linear $d\vec{p} = \vec{F}\,dt$, que também está orientado para você. No entanto, quando a bola já possui um momento linear $\vec{p}$, uma variação do momento $d\vec{p}$ perpendicular a $\vec{p}$ produzirá uma variação da direção do movimento, e não uma variação do módulo da sua velocidade. Troque $\vec{p}$ por $\vec{L}$ e $\vec{F}$ por $\vec{\tau}$ neste raciocínio, e você verá que a precessão é simplesmente o análogo rotacional do movimento circular uniforme.

No instante indicado na Figura 10.34a, o giroscópio possui momento angular $\vec{L}$. Depois de um intervalo de tempo curto dt, o momento angular passa para $\vec{L} + d\vec{L}$; a variação infinitesimal do momento angular é $d\vec{L} = \vec{\tau}dt$, que é perpendicular a $\vec{L}$. Como indica o diagrama vetorial da Figura 10.35, isso significa que o eixo do volante do giroscópio girou de um ângulo pequeno $d\phi$ dado por $d\phi = |d\vec{L}|/|\vec{L}|$. A taxa com a qual o eixo se move, $d\phi/dt$, denomina-se **velocidade angular de precessão escalar**; representando essa grandeza por Ω, achamos

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{|d\vec{L}|/|\vec{L}|}{dt} = \frac{\tau_z}{L_z} = \frac{pr}{I\omega} \qquad (10.33)$$

Portanto, a velocidade angular de precessão é *inversamente* proporcional à velocidade angular da rotação em torno do eixo. Um giroscópio que gira rapidamente realiza uma precessão lenta; caso o atrito nos mancais faça diminuir a velocidade angular do volante, a velocidade angular de precessão *aumenta*! A velocidade angular de precessão da Terra é muito lenta (1 rev/26000 anos) porque sua velocidade angular em torno do eixo, ou velocidade angular de spin L_z, é muito grande e o torque τ_z, devido às influências gravitacionais do Sol e da Lua, é relativamente pequeno.

À medida que o giroscópio realiza uma precessão, seu centro de massa se move em um círculo de raio r sobre um plano horizontal. Seu componente vertical da aceleração é zero, de modo que a força normal de baixo para cima $\vec{n}$ exercida pelo pivô deve ter módulo precisamente igual ao peso. O movimento circular do centro de massa com velocidade angular Ω necessita de uma força $\vec{F}$ orientada para o interior do círculo, com módulo $F = M\Omega^2 r$. Essa força também deve ser fornecida pelo pivô.

Uma hipótese básica que fizemos em nossa análise do giroscópio foi que o vetor momento angular $\vec{L}$ está associado somente com o momento angular de spin do volante e é puramente horizontal. Contudo, existirá também um componente vertical do momento angular associado com o movimento de precessão do giroscópio. Ignorando isso, estamos tacitamente supondo que a precessão é *lenta*; isto é, que a velocidade angular de precessão Ω é muito menor do que a velocidade angular de spin ω. Como a Equação (10.33) mostra, um valor elevado de ω automaticamente fornece um valor pequeno de Ω, de modo que essa aproximação é razoável. Quando a precessão não é lenta, efeitos adicionais mostram que surge um movimento ondulado de cima para baixo, denominado *nutação* do eixo do volante, que se superpõe com o movimento de precessão. Você pode ver o movimento de nutação ocorrendo em um giroscópio à medida que sua velocidade angular de spin diminui, de modo que Ω aumenta, e o componente vertical de $\vec{L}$ não pode mais ser desprezado.

Exemplo 10.15

UM GIROSCÓPIO EM PRECESSÃO A Figura 10.36a mostra a vista de topo de um giroscópio cilíndrico que recebeu uma velocidade angular de spin de um motor elétrico. O pivô está no ponto O, e a massa do eixo é desprezível. a) Visto de cima para baixo, a precessão ocorre no sentido horário ou anti-horário? b) Se o giroscópio leva 4,0 s para uma revolução de precessão, qual deve ser a velocidade angular de spin do volante?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: esta situação é similar à do volante anterior, mostrado na Figura 10.34.

PREPARAR: determinaremos a direção da precessão usando a regra da mão direita como na Figura 10.34, que mostra o mesmo tipo de giroscópio da Figura 10.36. Usaremos a relação entre velocidade angular de precessão escalar Ω e a velocidade angular de spin escalar ω, a Equação (10.33), para achar o valor de ω.

EXECUTAR: a) A regra da mão direita mostra que $\vec{\omega}$ e $\vec{L}$ são orientados da direita para a esquerda (Figura 10.36b). O peso $\vec{p}$ aponta para o interior da página nesta vista de topo e atua no centro de massa (designado por um $\times$); o torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{p}$ está orientado para o topo da página; e $d\vec{L}/dt$ também está orientado para o topo da página. A soma de um pequeno vetor $d\vec{L}$ ao $\vec{L}$ inicial faz a direção de $\vec{L}$ mudar conforme mostrado, de modo que a precessão vista de cima para baixo ocorre no sentido horário do relógio.

b) Tome cuidado para não confundir ω e Ω! Foi fornecido o valor $\Omega = (1\text{ rev})/(4{,}0\text{ s}) = (2\pi\text{ rad})/(4{,}0\text{ s}) = 1{,}57\text{ rad/s}$. O peso é mg, e o momento de inércia em torno do eixo de simetria central de um cilindro maciço de raio R é dado por $I = \frac{1}{2}mR^2$. Explicitando ω da Equação (10.33), encontramos

$$\omega = \frac{pr}{I\Omega} = \frac{mgr}{(mR^2/2)\Omega} = \frac{2gr}{R^2\Omega}$$

$$= \frac{2(9{,}8\text{ m/s}^2)(2{,}0 \times 10^{-2}\text{ m})}{(3{,}0 \times 10^{-2}\text{ m})^2(1{,}57\text{ rad/s})} = 280\text{ rad/s} = 2600\text{ rev/min}$$

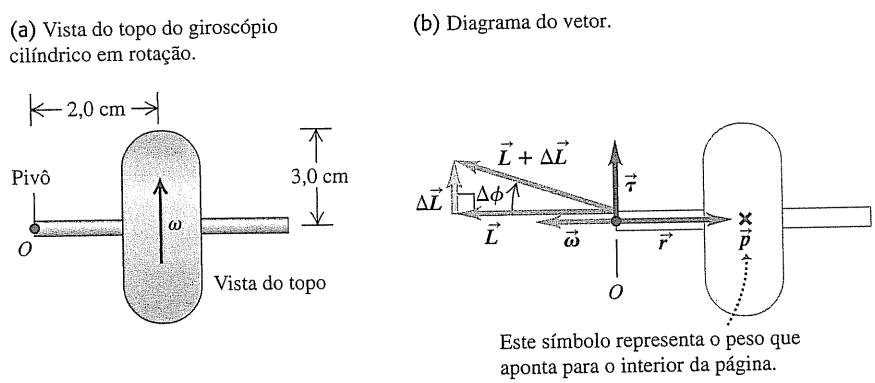


Figura 10.36 Qual é o sentido e qual é a velocidade escalar do movimento de precessão deste giroscópio?

AVALIAR: a velocidade angular de precessão Ω é muito menor do que a velocidade angular de spin ω, de modo que este é um exemplo de precessão lenta.

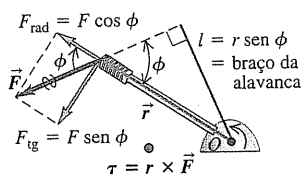
Teste sua compreensão da Seção 10.7 Suponha que a massa do volante na Figura 10.34 fosse duplicada, enquanto todas as demais dimensões e a velocidade angular do spin permanecessem as mesmas. Qual efeito essa variação surtiria na velocidade angular de precessão Ω? i) Ω aumentaria por um fator de 4; ii) Ω dobraria; iii) Ω não seria afetada; iv) Ω teria a metade do valor; v) Ω teria um quarto do valor. ▮

Resumo

Torque: quando uma força $\vec{F}$ atua sobre um corpo, o torque $\vec{\tau}$ dessa força em relação a um ponto O possui um módulo dado pelo produto do módulo de força F e o braço da alavanca l. De acordo com uma definição generalizada, o vetor torque $\vec{\tau}$ é igual ao produto vetorial de $\vec{r}$ (o vetor posição do ponto em que a força atua) por $\vec{F}$ (Exemplo 10.1).

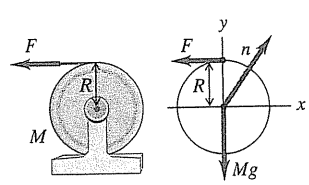
$$\tau = Fl \tag{10.2}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{10.3}$$



Dinâmica da rotação: o análogo rotacional da segunda lei de Newton diz que o torque resultante que atua sobre um corpo é igual ao produto do momento de inércia do corpo pela sua aceleração angular (exemplos 10.2 e 10.3).

$$\sum \tau_z = I\alpha_z \tag{10.7}$$



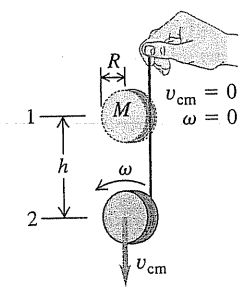
Movimento combinado de translação e rotação: quando um corpo rígido possui simultaneamente movimento de rotação e movimento de translação, a energia cinética pode ser expressa como a soma da energia cinética da translação do centro de massa e da energia cinética da rotação em torno de um eixo passando pelo centro de massa. Em termos da dinâmica, a segunda lei de Newton descreve o movimento do centro de massa, e o equivalente rotacional da segunda lei de Newton descreve a rotação em torno do centro de massa. No caso do rolamento sem deslizamento, há uma relação especial entre o movimento do centro de massa e o movimento de rotação (exemplos 10.4 – 10.7).

$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \tag{10.8}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \tag{10.12}$$

$$\sum \tau_z = I_{cm}\alpha_z \tag{10.13}$$

$$v_{cm} = R\omega \tag{10.11}$$



Trabalho realizado por um torque: um torque que atua sobre um corpo rígido enquanto o corpo gira realiza trabalho sobre esse corpo. O trabalho pode ser expresso como uma integral do torque. Segundo o teorema do trabalho-energia, o trabalho rotacional total realizado sobre um corpo rígido é igual à variação da energia cinética na rotação. A potência, ou a taxa em que o torque realiza trabalho, é o produto do torque pela velocidade angular (exemplos 10.8 e 10.9).

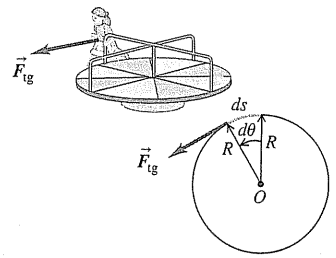
$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z\, d\theta \tag{10.20}$$

$$W = \tau_z(\theta_2 - \theta_1) = \tau_z\Delta\theta \tag{10.21}$$

(somente torque constante)

$$W_{\text{tot}} = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 \qquad (10.22)$$

$$P = \tau_z\omega_z \qquad (10.23)$$



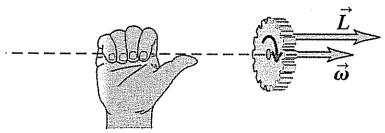
Momento angular: o momento angular de uma partícula em relação a um ponto O é o produto vetorial do vetor posição $\vec{r}$ da partícula em relação a O pelo seu momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$. Quando um corpo simétrico gira em torno de um eixo de simetria fixo, seu momento angular é dado pelo produto do seu momento de inércia pelo seu vetor velocidade angular $\vec{\omega}$. Quando um corpo não é simétrico ou o eixo de rotação (z) não é um eixo de simetria, a componente do momento angular em torno do eixo de rotação é igual a $I\omega_z$. (Exemplo 10.10.)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad (10.24)$$

(partícula)

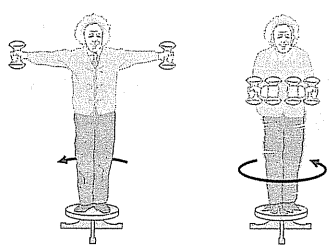
$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad (10.28)$$

(corpo rígido girando em torno do eixo de simetria)



Relação entre a dinâmica do movimento de rotação e o momento angular: o torque resultante externo que atua sobre um sistema é igual à taxa de variação do seu momento angular. Quando o torque resultante externo que atua sobre um sistema é igual a zero, o momento angular total do sistema é constante (se conserva). (exemplos 10.11 – 10.15.)

$$\sum\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (10.29)$$



Principais termos

braço da alavanca (braço do momento), 317
linha de ação, 317
momento angular, 331
movimento combinado de rotação e translação, 323
movimento de translação, 316
precessão, 337
princípio da conservação do momento angular, 334
rolamento sem deslizamento, 324
torque, 317
velocidade angular de precessão escalar, 339

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Quando o pára-quedista está no ar, nenhum torque resultante atua sobre o seu centro de massa. Portanto, o momento angular do corpo dele (o produto do momento de inércia I pela velocidade escalar angular ω) em torno do centro de massa permanece constante. Esticando braços e pernas, ele aumenta I e portanto ω diminui; se ele recolhe braços e pernas, I diminui e ω aumenta.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

10.1 Resposta: (ii) A força P atua ao longo de uma linha vertical, portanto o braço da alavanca é a distância horizontal de A até a linha de ação. Esse é o componente horizontal da distância L, que é L cos θ. Logo, o módulo do torque é o produto do módulo da força P pelo braço da alavanca L *cos* θ, ou $\tau = PL$ cos θ.

10.2 Respostas: (iii), (ii), (i) Para o objeto suspenso de massa m_2 acelerar de cima para baixo, a força resultante que atua sobre ele deve estar apontada de cima para baixo. Logo, o módulo m_2g da força do peso de cima para baixo deve ser maior do que o módulo T_2 da força de tensão de baixo para cima. Para que a polia tenha uma aceleração angular no sentido horário, o torque resultante que atua sobre a polia deve estar nesse sentido também. A tensão T_2 tende a girar a polia no sentido horário, enquanto a tensão T_1 tende a girar a polia no sentido contrário. Ambas as forças de tensão possuem o mesmo braço da alavanca R, portanto existe um torque no sentido horário T_2R e um toque no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio T_1R. Para que o torque resultante esteja no sentido horário, T_2 deve ser maior do que T_1. Logo, $m_2g > T_2 > T_1$.

10.3 Respostas: (a) (ii), (b) (i) Se você refizer o cálculo do Exemplo 10.6 com um cilindro oco (momento de inércia $I_{\text{cm}} = MR^2$) em vez de um cilindro maciço (momento de inércia $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}MR^2$), você obterá $a_{\text{cm}y} = \frac{1}{2}g$ e $T = \frac{1}{2}Mg$ (em vez de $a_{\text{cm}y} = \frac{2}{3}g$ e $T = \frac{1}{3}Mg$ para um cilindro maciço). Logo, a aceleração é menor, mas a tensão é maior. Você poderá chegar à mesma conclusão sem fazer o cálculo. O maior momento de inércia significa que o cilindro oco girará de forma mais lenta e, portanto, rolará de cima para baixo mais devagar. Para retardar o movimento de cima para baixo, uma maior força de tensão de baixo para cima é necessária, de modo a se opor à força de gravidade de cima para baixo.

10.4 Resposta: (iii) Você aplica o mesmo torque pelo mesmo deslocamento angular para ambos os cilindros. Logo, pela Equação (10.21), você realiza o mesmo trabalho para ambos os cilindros e fornece a mesma energia cinética para ambos. (Aquele com o momento de inércia menor acaba com uma velocidade escalar angular maior, mas não é essa a questão. Compare com o Exemplo Conceitual 6.5, na Seção 6.2).

10.5 Respostas: (a) não, (b) sim Enquanto a bola segue a trajetória circular, o módulo de $\vec{p} = m\vec{v}$ permanece o mesmo (a velocidade escalar é constante), mas sua direção muda, portanto, o vetor do momento linear não é constante. Mas $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ é constante: a bola mantém um módulo constante (a velocidade escalar e a distância perpendicular da sua mão em relação à bola são ambas constantes) e uma direção constante (ao longo do eixo de rotação, perpendicular ao plano do movimento da bola). O momento linear varia porque há uma *força* resultante $\vec{F}$ que atua sobre a bola (em direção ao centro do círculo). O momento angular permanece constante porque não há *torque* resultante; o vetor $\vec{r}$ aponta da sua mão para a bola, e a força $\vec{F}$ que atua sobre a bola aponta para a sua mão, portanto o produto vetorial $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ é igual a zero.

10.6 Resposta: (i) Na ausência de quaisquer torques externos, o momento angular da Terra $L_z = I\omega_z$ permanceria constante. O gelo derretido se deslocaria dos pólos para o Equador – ou seja, distante do eixo de rotação de nosso planeta – e o momento de inércia I da Terra aumentaria levemente. Portanto, a velocidade angular ω_z diminuiria suavemente e o dia seria um pouco mais longo.

10.7 Resposta: (i) Duplicar a massa do volante significa duplicar tanto o seu momento de inércia I quanto o seu peso p, portanto a razão I/p não varia. A Equação (10.33) mostra que a velocidade angular de precessão escalar depende dessa razão, de modo que não há *nenhum* efeito sobre o valor de Ω.

Questões para discussão

Q10.1 Ao apertar os parafusos da cabeça do motor de um automóvel, a grandeza critica é o *torque* aplicado aos parafusos. Por que o torque é mais importante que a *força* efetiva aplicada sobre o punho da chave de boca?

Q10.2 Pode uma única força aplicada a um corpo alterar simultaneamente seu movimento de translação e de rotação? Explique.

Q10.3 Suponha que você possa escolher qualquer tipo de roda para o projeto de um carro de competição *soapbox* (um veículo de quatro rodas sem motor que desce uma encosta a partir do repouso). Seguindo as regras do limite máximo para o peso do carro somado ao peso do competidor, você usaria rodas grandes e pesadas ou rodas pequenas e leves? Você usaria rodas maciças ou rodas ocas com a massa concentrada em um aro na periferia da roda? Explique.

Q10.4 Um veículo com tração nas quatro rodas está acelerando para a frente a partir do repouso. Indique em qual direção as rodas do veículo giram e como isso provoca uma força de atrito em função do pavimento que acelera o veículo para frente.

Q10.5 Ciclistas experientes afirmam que se for para reduzir o peso de uma bicicleta, é mais eficaz fazê-lo nas rodas em vez de em sua estrutura. Por que a redução no peso das rodas facilita mais a ação do ciclista do que reduzir o mesmo valor na estrutura?

Q10.6 Quanto mais fortemente você pisar no freio enquanto o carro se desloca para a frente, mais para baixo a parte dianteira do carro se move (e a parte traseira se move mais para cima). Por quê? O que ocorre durante a aceleração? Por que os carros de corrida do tipo *dragster* não usam apenas direção nas rodas dianteiras?

Q10.7 Quando uma acrobata anda sobre uma corda esticada, ela abre e estende os braços lateralmente. Ela faz isso para que seja mais fácil se equilibrar, caso tombe para um lado ou para o outro. Explique como isso funciona. (*Sugestão:* raciocine usando a Equação (10.7).)

Q10.8 Quando um motor elétrico é acionado, ele leva mais tempo para atingir sua velocidade final quando existe um esmeril ligado ao eixo do motor. Por quê?

Q10.9 Sem quebrar a casca do ovo, um cozinheiro experiente pode distinguir um ovo natural de outro que já tenha sido cozido na água fazendo os dois rolarem sobre um plano inclinado (se você fizer a experiência, tome cuidado para segurar os ovos na base do plano). Como isso é possível? O que ele espera concluir?

Q10.10 O trabalho realizado por uma força é o produto da força pela distância. O torque em função de uma força é o produto da força pela distância. Isso significa que o torque e o trabalho são equivalentes? Explique.

Q10.11 Um bom cliente traz uma bola de estimação à sua empresa de engenharia, querendo saber se ela é maciça ou oca. Ele tentou dar leves batidas nela, mas isso forneceu pouca informação. Prepare uma experiência simples e barata que você possa realizar de forma rápida, sem causar danos à preciosa bola, para descobrir se ela é maciça ou oca.

Q10.12 Você criou duas versões do mesmo objeto, a partir do mesmo material com densidade uniforme. Todas as dimensões de uma delas são exatamente o dobro da outra. Se o mesmo torque atua sobre ambas as versões, e considerando a aceleração angular da menor como α, qual será a aceleração angular da versão maior em relação a α?

Q10.13 Duas massas idênticas presas a polias com atrito desprezível por dois fios bem leves enrolados na borda das polias são libertadas do repouso. Ambas as polias possuem a mesma massa e o mesmo diâmetro, mas uma é maciça e a outra é um aro. À medida que as massas caem, em qual dos casos a tensão no fio é maior, ou ela é a mesma? Justifique sua resposta.

Q10.14 A força da gravidade atua sobre o bastão na Figura 10.11, produzindo torques que provocam variação na velocidade angular de um corpo. Por que, então, a velocidade angular do bastão na figura é constante?

Q10.15 Uma certa bola maciça e uniforme atinge uma altura máxima h_0 ao rolar de baixo para cima de uma colina, sem deslizar. Qual altura máxima (em termos de h_0) ela atingirá, caso você a) dobre o seu diâmetro, b) dobre a sua massa, c) dobre tanto o diâmetro quanto a massa, d) dobre sua velocidade escalar angular na base da colina?

Q10.16 Uma roda está rolando sem deslizamento sobre uma superfície horizontal. Em um sistema de referência inercial no qual a superfície está em repouso, existe algum ponto sobre a roda que possua uma velocidade puramente vertical? Existe algum ponto sobre a roda que possua velocidade com um componente horizontal com sentido oposto ao da velocidade do centro de massa? Explique. Caso a roda deslize durante o giro, suas respostas se modificam? Explique.

Q10.17 Parte da energia cinética da rotação de um automóvel em movimento está em suas rodas. Quando você aplica fortemente os freios em uma rua com gelo, as rodas ficam 'bloqueadas', e o carro começa a deslizar. O que ocorre com a energia cinética da rotação?

Q10.18 Um aro, um cilindro maciço e uniforme, uma casca esférica e uma esfera maciça e uniforme são libertados do repouso no topo de um plano inclinado. Qual é a ordem de chegada desses

itens na parte inferior da inclinação? Importa se as massas e os raios dos objetos são os mesmos? Explique.

Q10.19 Uma bola rola sobre uma superfície horizontal a uma velocidade escalar v, sem deslizar, quando encontra uma colina que se ergue a um ângulo constante acima da horizontal. Em qual caso ela subirá a colina: se a colina possuir atrito suficiente para impedir o deslizamento ou se a colina for perfeitamente lisa? Justifique suas respostas em ambos os casos em termos da conservação da energia e em termos da segunda lei de Newton.

Q10.20 Você está em pé no centro de um carrossel horizontal que gira em um parque de diversões. O carrossel gira sobre apoios sem atrito, e sua rotação é livre (ou seja, não existe nenhum motor fazendo o carrossel girar). Quando você caminha até a periferia do carrossel, diga o que ocorre com o momento angular total do sistema constituído por você junto com o carrossel. O que ocorre com a velocidade angular do carrossel? Explique suas respostas.

Q10.21 Aquecimento global. À medida que o clima na Terra continua a aquecer, o gelo nas calotas polares continua derretendo e se juntando aos oceanos. Qual efeito isso terá sobre a duração do dia? (*Sugestão:* consulte um mapa para ver onde ficam os oceanos.)

Q10.22 Uma partícula se move em linha reta com velocidade constante, e a distância entre a reta e a origem é igual a l. Em relação à origem, o momento angular da partícula é igual a zero ou diferente de zero? À medida que a partícula se desloca ao longo da reta, seu momento angular em relação à origem varia?

Q10.23 No Exemplo 10.11 (Seção 10.6) a velocidade angular ω varia e isso deve significar que existe uma aceleração angular diferente de zero. Porém, não existe nenhum torque em torno do eixo de rotação quando as forças que o professor aplica sobre os pesos estão orientadas radialmente para dentro. Então, pela Equação (10.7), α_z deve ser igual a zero. Explique o que há de errado nesse raciocínio que leva a uma aparente contradição.

Q10.24 No exemplo 10.11 (Seção 10.6), a energia cinética do professor junto com os halteres aumenta. Contudo, como não existem torques externos, não existe nenhum trabalho capaz de alterar a energia cinética da rotação. Então, pela Equação (10.22), a energia cinética deve permanecer constante! Explique o que há de errado nesse raciocínio que leva a uma aparente contradição. De *onde* vem a energia cinética extra?

Q10.25 Conforme discutimos na Seção 10.6, o momento angular de uma acrobata no circo se conserva à medida que ela se move pelo ar. Seu momento *linear* se conserva? Explique sua resposta.

Q10.26 Quando você segura por um intervalo mínimo de tempo um ovo fresco que está girando e a seguir o liberta, o ovo começa a girar novamente. Quando você repete a experiência com um ovo cozido, ele permanece parado. Experimente fazer isso. Explique.

Q10.27 Um helicóptero possui um rotor grande principal que gira em um plano horizontal e ocasiona a força de sustentação. Existe também um rotor pequeno na traseira do helicóptero que gira em um plano vertical. Qual é a finalidade do rotor traseiro? (*Sugestão:* caso não existisse o rotor traseiro, o que ocorreria quando o piloto fizesse variar a velocidade angular do rotor principal?) Alguns helicópteros não possuem rotor traseiro, mas possuem dois rotores principais grandes que giram em um plano horizontal. Por que é importante que esses rotores girem em sentidos contrários?

Q10.28 Em um projeto comum de giroscópio, o volante e o eixo do volante permanecem no interior de uma estrutura leve e esférica, com o volante no centro da estrutura. O giroscópio é a seguir equilibrado no topo de um pivô, de modo que o volante fique diretamente acima do pivô. O giroscópio realiza precessão quando é libertado enquanto o volante está girando? Explique.

Q10.29 Um giroscópio leva 3,8 s para fazer uma precessão de 1,0 revolução em torno de um eixo vertical. Dois minutos depois ele leva 1,9 s para fazer uma precessão de 1,0 revolução. Ninguém tocou no giroscópio. Explique o que ocorreu.

Q10.30 Um giroscópio realiza um movimento de precessão como indicado na Figura 10.32. O que ocorrerá se você colocar suavemente algum peso em um ponto o mais afastado possível do pivô, ou seja, na extremidade do eixo do volante?

Q10.31 Uma bala sai de um rifle girando sobre o seu eixo. Explique como isso evita que a bala vire e que ela mantenha a extremidade aerodinâmica apontada para a frente?

Q10.32 Uma certa plataforma giratória com diâmetro D_0 possui um momento angular L_0. Se você quisesse reprojetá-la de modo a dobrar o momento angular, porém mantendo a mesma massa e a mesma velocidade angular anterior, qual deveria ser o seu diâmetro em termos de D_0?

Exercícios

Seção 10.1 Torque

10.1 Calcule o torque (módulo, direção e sentido) em torno de um ponto O de uma força $\vec{F}$ em cada uma das situações esquematizadas na Figura 10.37. Em cada caso, a força $\vec{F}$ e a barra estão no plano da página, o comprimento da barra é igual a 4,0 m e a força possui módulo $F = 10{,}0$ N.

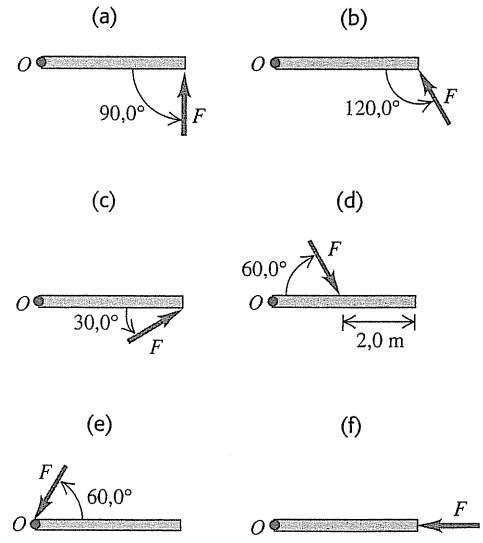


Figura 10.37 Exercício 10.1.

10.2 Calcule o torque resultante em torno de um ponto O para as duas forças aplicadas mostradas na Figura 10.38. A barra e as forças estão sobre o plano da página.

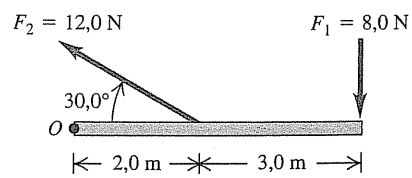


Figura 10.38 Exercício 10.2.

10.3 Uma placa metálica quadrada de lado igual a 0,180 m possui um eixo pivotado perpendicularmente ao plano da página passando em seu centro O (Figura 10.39). Calcule o torque resultante em torno desse eixo produzido pelas três forças mostradas na figura, sabendo que os módulos das forças são $F_1 = 18{,}0$ N, $F_2 = 26{,}0$ N e $F_3 = 14{,}0$ N. O plano da placa e de todas essas forças é o plano da página.

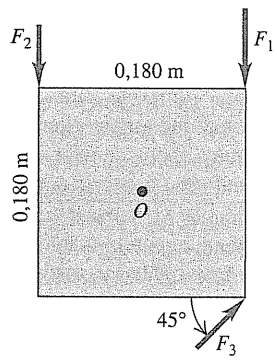


Figura 10.39 Exercício 10.3.

10.4 Três forças são aplicadas a uma roda com raio igual a 0,350 m, conforme mostra a Figura 10.40. Uma força é perpendicular à borda, outra é tangente a ela e a outra forma um ângulo de 40° com o raio. Qual é o torque resultante da roda produzido por essas três forças em relação a um eixo perpendicular à roda e que passa através do seu centro?

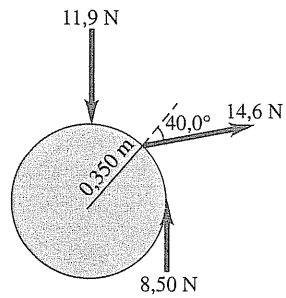


Figura 10.40 Exercício 10.4.

10.5 Uma força atuando sobre uma peça de uma máquina é dada pela expressão $\vec{F} = (-5{,}0\text{ N})\hat{\imath} + (4{,}0\text{ N})\hat{\jmath}$. O vetor da origem ao ponto onde a força é aplicada é dado por $\vec{r} = (-0{,}450\text{ m})\hat{\imath} + (0{,}150\text{ m})\hat{\jmath}$. a) Faça um diagrama mostrando $\vec{r}$, $\vec{F}$ e a origem. b) Use a regra da mão direita para determinar a direção e o sentido do torque. c) Determine algebricamente o vetor torque produzido por essa força. Verifique se a direção e o sentido do torque são iguais aos obtidos no item (b).

10.6 Um operário está usando uma chave de boca para afrouxar uma porca. A ferramenta tem 25,0 cm de comprimento, e ele exerce uma força de 17,0 N sobre a extremidade do cabo formando um ângulo de 37° com o cabo (Figura 10.41). a) Qual torque o operário exerce sobre o centro da porca? b) Qual é o torque máximo que ele pode exercer com essa força, e como a força deve ser orientada?

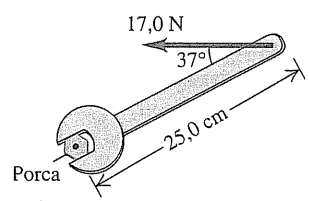


Figura 10.41 Exercício 10.6.

Seção 10.2 Torque e aceleração angular de um corpo rígido

10.7 O volante de certa máquina possui momento de inércia igual a 2,50 kg · m^2 em torno do seu eixo de rotação. Qual é o torque constante necessário para que, partindo do repouso, sua velocidade angular atinja o valor de 400 rev/min em 8,0 s?

10.8 Uma casca esférica uniforme de 8,40 kg e 50,0 cm de diâmetro possui quatro pequenas massas de 2,0 kg presas à superfície externa e igualmente espaçadas entre si. Esse sistema está girando em torno de um eixo que passa pelo centro da esfera e por duas das pequenas massas (Figura 10.42). Qual torque de atrito é necessário para reduzir a velocidade escalar angular de 75,0 rpm para 50 rpm em 30,0 s?

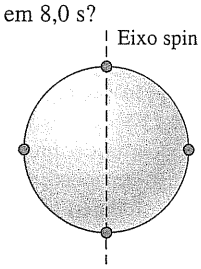


Figura 10.42 Exercício 10.8.

10.9 A peça de uma máquina tem o formato de uma esfera maciça e uniforme com massa de 225 g e diâmetro de 3,0 cm. Ela está girando em torno de um eixo com atrito desprezível que passa pelo seu centro, mas em um ponto no seu equador ela está roçando contra uma parte metálica, resultando em uma força de atrito de 0,0200 N nesse ponto. a) Ache a aceleração angular. a) Quanto tempo levará para a velocidade escalar rotacional ser reduzida em 22,5 rad/s?

10.10 Uma corda é enrolada em torno da periferia de uma roda maciça e uniforme de raio igual a 0,250 m e massa de 9,20 kg. A corda é puxada por uma força constante horizontal de 40,0 N para a direita e tangencialmente à roda. A roda está montada sobre mancais com atrito desprezível sobre um eixo horizontal que passa pelo seu centro. a) Calcule a aceleração angular da roda e a aceleração da parte da corda que já foi puxada para fora da roda. b) Ache o módulo, a direção e o sentido da força que o eixo exerce sobre a roda. c) Qual das respostas nos itens (a) e (b) sofreria variação, caso a força de puxar fosse de baixo para cima em vez de horizontal?

10.11 Um cilindro maciço e uniforme com massa de 8,25 kg e diâmetro de 15,0 cm está girando a 220 rpm sobre um eixo delgado e de atrito desprezível, que passa ao longo do eixo de cilindro. Você projeta um freio de atrito simples, que pára o cilindro pressionando o freio de encontro à periferia externa com uma força normal. O coeficiente de atrito cinético entre o freio e a periferia é 0,333. Qual deve ser a força normal aplicada para colocar o cilindro em repouso após ele ter girado por 5,25 revoluções?

10.12 Uma pedra é suspensa pela extremidade livre de um cabo que está enrolado na periferia externa de uma polia, de modo semelhante ao indicado na Figura 10.10. A polia é um disco uniforme com massa de 10,0 kg e raio de 50,0 cm, que gira sobre mancais com atrito desprezível. Você mede que a pedra se desloca 12,6 m nos primeiros 3,0 s a partir do repouso. Ache a) a massa da pedra e b) a tensão no cabo.

10.13 Um esmeril em forma de disco sólido com diâmetro de 0,520 m e massa de 50,0 kg gira a 850 rev/min. Você pressiona um machado contra sua periferia com uma força normal de 160 N (Figura 10.43), e o esmeril atinge o repouso em 7,50 s. Ache o coeficiente de atrito entre o machado e o esmeril. Despreze o atrito nos mancais.

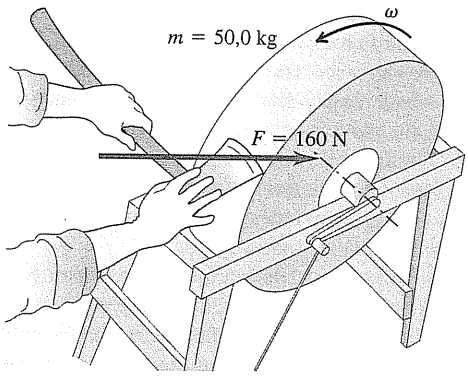


Figura 10.43 Exercício 10.13 e Problema 10.53.

10.14 Um balde com água de 15,0 kg é suspenso por uma corda enrolada em torno de um sarilho, constituído por um cilindro sólido com diâmetro de 0,300 m e massa igual a 12,0 kg. O cilindro é pivotado sobre um eixo sem atrito passando em seu centro. O balde é libertado a partir do repouso no topo de um poço e cai 10,0 m até atingir a água. Despreze o peso da corda. a) Qual é a tensão na corda enquanto o balde está caindo? b) Com que velocidade o balde atinge a água? c) Qual é o tempo de queda? d) Enquanto o balde está caindo, qual é a força exercida pelo eixo sobre o cilindro?

10.15 Um livro de 2,0 kg está em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. Uma corda amarrada ao livro passa sobre uma polia com diâmetro igual a 0,150 m e sua outra extremidade está presa a outro livro suspenso com massa de 3,0 kg. O sistema é solto a partir do repouso, e os livros se deslocam 1,20 m em 0,800 s. a) Qual é a tensão em cada parte da corda? b) Qual é o momento de inércia da polia em torno do seu eixo de rotação?

10.16 Uma caixa de 12,0 kg em repouso sobre uma superfície horizontal e livre de atrito está atada a um peso de 5,0 kg por uma cabo delgado e leve que passa sobre uma polia com atrito desprezível (Figura 10.44). A polia possui a forma de um disco maciço e uniforme com massa de 2,0 kg e diâmetro de 0,500 m. Após o sistema ser libertado, ache a) a tensão no cabo sobre ambos os lados da polia, b) a aceleração da caixa e c) os componentes horizontal e vertical da força que o eixo exerce sobre a polia.

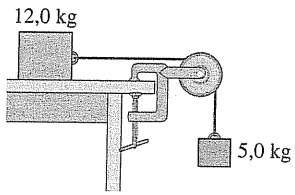


Figura 10.44 Exercício 10.16.

10.17 Um poste delgado e uniforme de 15,0 kg e 1,75 m de comprimento é mantido na posição vertical por um cabo e está preso a uma massa de 5,0 kg e um pivô na sua extremidade inferior (Figura 10.45). O fio preso à massa de 5,0 kg passa sobre uma polia de massa e atrito desprezíveis e que puxa perpendicularmente ao poste. De repente, o cabo se rompe. a) Ache a aceleração angular do poste em torno do pivô assim que o cabo se rompe. b) A aceleração angular no item (a) permanece constante enquanto o poste cai (antes que atinja a polia)? Por quê? c) Qual é a aceleração da massa de 5,0 kg no instante em que o cabo se rompe? Essa aceleração permanece constante? Por quê?

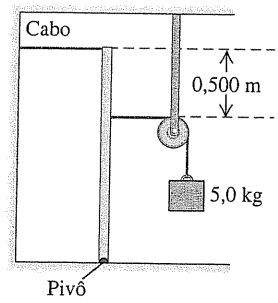


Figura 10.45 Exercício 10.17.

10.18 Uma barra horizontal fina de comprimento l e massa M é articulada em torno de um eixo vertical passando em sua extremidade. Uma força com módulo constante F é aplicada à outra extremidade, fazendo a barra girar em um plano horizontal. A força é mantida perpendicularmente à barra e ao eixo da rotação. Calcule o módulo da aceleração angular da barra.

Seção 10.3 Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo móvel

10.19 Um aro de 2,20 kg e 1,20 m de diâmetro está rolando da esquerda para a direita sem deslizar, sobre um piso horizontal a constantes 3,0 rad/s. a) Com que velocidade o seu centro está se movendo? b) Qual é a energia cinética total do aro? c) Ache o vetor velocidade de cada um dos seguintes pontos, do ponto de vista de uma pessoa em repouso sobre o chão: i) o ponto mais alto do aro; ii) o ponto mais baixo do aro; ii) um ponto do lado direito do aro, a meio caminho entre o topo e a base. d) Ache o vetor velocidade para cada um dos pontos no item (c), só que do ponto de vista de alguém que se move com a mesma velocidade do aro.

10.20 Um fio é enrolado diversas vezes em torno da periferia de um pequeno aro de raio 8,0 cm e massa 0,180 kg. A extremidade livre do fio é mantida fixa e o aro é libertado a partir do repouso (Figura 10.46). Após o aro cair por 75,0 cm, calcule a) a velocidade escalar angular do aro em rotação e b) a velocidade escalar no seu centro.

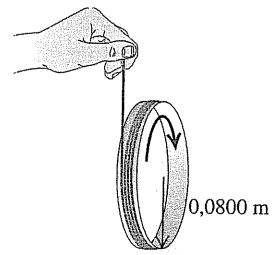


Figura 10.46 Exercício 10.20 e Problema 10.72.

10.21 Qual fração da energia cinética total é rotacional para os seguintes objetos que rolam sem deslizar sobre uma superfície horizontal? a) Um cilindro maciço e uniforme; b) uma esfera uniforme; c) uma esfera oca de paredes finas; d) um cilindro oco com raio externo R e raio interno $R/2$.

10.22 Uma casca esférica de massa igual a 2,0 kg rola sem deslizar ao longo de um plano inclinado de 38,0°. a) Ache a aceleração, a força de atrito e o coeficiente de atrito mínimo necessário para impedir o deslizamento. b) Como suas respostas do item (a) seriam alteradas caso a massa fosse dobrada para 4,0 kg?

10.23 Uma bola maciça é liberada do repouso e desliza para baixo pela encosta de uma colina com inclinação de 65,0° com o plano horizontal. a) Qual valor mínimo deve o coeficiente de atrito estático entre as superfícies da colina e da bola ter para que nenhum deslizamento ocorra? b) O coeficiente de atrito calculado no item

(a) é suficiente para impedir que uma bola oca (como uma bola de futebol) deslize? Justifique sua resposta. c) No item (a), por que usamos o coeficiente de atrito estático e não o coeficiente de atrito cinético?

10.24 Uma bola de gude homogênea rola para baixo a partir do topo da lateral esquerda de uma tigela simétrica, partindo do repouso. O topo de cada lateral está a uma distância h do fundo da tigela. A metade esquerda da tigela é áspera o suficiente para fazer a bola de gude rolar sem deslizar, mas a metade direita não possui nenhum atrito porque está coberta de óleo. a) A que altura da lateral lisa a bola de gude subirá, se medida verticalmente a partir do fundo? b) A que altura a bola de gude iria se ambos os lados fossem tão ásperos quanto o lado esquerdo? c) A que você atribui o fato de que a bola de gude sobe *mais* com o atrito do lado direito do que sem atrito?

10.25 Uma roda de 392 N sai do eixo de um caminhão em movimento e rola sem deslizar ao longo de uma estrada inclinada. Na base de um morro ela está girando a 25,0 rad/s. O raio da roda é igual a 0,600 m e seu momento de inércia em torno do eixo de rotação é igual a $0{,}800MR^2$. O atrito realiza trabalho sobre a roda à medida que ela sobe o morro até parar, a uma altura h acima da base do morro; esse trabalho possui módulo igual a 3500 J. Calcule h.

10.26 Uma bola subindo uma inclinação. Uma bola de boliche rola sem deslizar para cima de uma rampa inclinada de um ângulo β com a horizontal. (Veja o Exemplo 10.7 na Seção 10.3.) Considere a bola uma esfera maciça homogênea e ignore os seus orifícios. a) Faça um diagrama do corpo livre para a bola. Explique por que a força de atrito deve possuir sentido *para cima*. b) Qual é a aceleração do centro de massa da bola? c) Qual deve ser o coeficiente de atrito estático mínimo para impedir o deslizamento?

Seção 10.4 Trabalho e potência no movimento de rotação

10.27 Um carrossel de um parque de diversões possui raio de 2,40 m e momento de inércia igual a 2100 kg · m^2 em torno de um eixo vertical passando em seu centro e gira com atrito desprezível. a) Uma criança aplica uma força de 18,0 N tangencialmente à periferia do carrossel durante 15,0 s. Se o carrossel está inicialmente em repouso, qual é sua velocidade angular depois deste instante de tempo de 15,0 s? b) Qual é o trabalho realizado pela criança sobre o carrossel? c) Qual é a potência média fornecida pela criança?

10.28 O motor fornece 175 hp para a hélice de um avião a uma rotação de 2400 rev/min. a) Qual é o torque fornecido pelo motor do avião? b) Qual é o trabalho realizado pelo motor em uma revolução da hélice?

10.29 A roda de um esmeril de 1,50 kg possui forma cilíndrica com raio igual a 0,100 m. a) Qual deve ser o torque constante capaz de levá-la do repouso a uma revolução angular de 1200 rev/min em 2,5 s? b) Que ângulo ela girou durante esse intervalo de tempo? c) Use a Equação (10.21) para calcular o trabalho realizado pelo torque. d) Qual é a energia cinética do esmeril quando ele está girando a 1200 rev/min? Compare sua resposta com o resultado do item (c).

10.30 Um motor elétrico consome 9,0 kJ de energia elétrica em 1,0 min. Se um terço dessa energia é consumida no aquecimento e em outras formas de energia interna do motor e o restante é a produção do motor, qual é o torque desenvolvido por esse motor, se ele gira a 2500 rpm?

10.31 As extremidades dos dentes de carboneto de uma serra circular estão situadas a uma distância de 8,6 cm do eixo de rotação. a) Quando a serra não está cortando nenhum objeto, sua velocidade angular é de 4800 rev/min. Por que sua potência é desprezível quando ela não está cortando nenhum objeto? b) Quando ela está cortando tábuas, sua velocidade angular se reduz para 2400 rev/min e a potência de saída é igual a 1.9 hp. Qual é a força tangencial que a madeira exerce sobre as extremidades dos dentes de carboneto?

10.32 A hélice propulsora de um avião possui comprimento de 2,08 m (de uma extremidade a outra) e sua massa é de 117 kg. Logo no início do funcionamento do motor, ele aplica um torque de 1950 N · m na hélice, que começa a se mover a partir do repouso. a) Qual é a aceleração angular da hélice? Considere a hélice como uma barra fina. (*Sugestão:* veja a Tabela 9.2.) b) Qual é a velocidade angular da hélice propulsora quando ela atinge 5,0 rev? c) Qual é o trabalho realizado pelo motor durante as 5,0 rev iniciais? d) Qual é a potência média fornecida pela máquina durante as 5,0 rev iniciais? e) Qual é a potência instantânea do motor no instante em que a hélice propulsora completa essas 5,0 rev?

10.33 a) Calcule o torque desenvolvido por um motor industrial com potência de 150 kW para uma velocidade angular de 4000 rev/min. b) Um tambor de massa desprezível, com diâmetro igual a 0,400 m, é ligado ao eixo do motor e a potência disponível do motor é usada para elevar um peso pendurado em uma corda enrolada em torno do tambor. Qual é o peso máximo que pode ser elevado com velocidade constante? c) Com que velocidade constante o peso sobe?

Seção 10.5 Momento angular

10.34 Uma mulher com massa de 50 kg está em pé sobre a periferia de um grande disco que gira com 0,50 rev/s em torno de um eixo que passa através do seu centro. O disco possui massa de 110 kg e raio igual a 4,0 m. Calcule o módulo do momento angular total do sistema mulher-disco. (Suponha que a mulher possa ser tratada como um ponto.)

10.35 Uma pedra de 2,0 kg possui uma velocidade horizontal com módulo de 12,0 m/s quando está no ponto P na Figura 10.47. a) Nesse instante, qual é o módulo, a direção e o sentido do seu momento angular em relação ao ponto O? b) Caso a única força que atue sobre a pedra seja seu peso, qual é a taxa de variação (módulo, direção e sentido) do momento angular nesse instante?

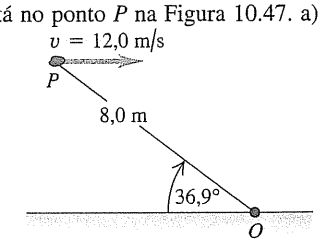


Figura 10.47 Exercício 10.35.

10.36 a) Calcule o módulo do momento angular da Terra descrevendo uma órbita em volta do Sol. É razoável modelá-la como uma partícula? a) Calcule o módulo do momento angular da Terra em função da sua rotação em torno de um eixo que passa pelos pólos norte e sul, modelando-a como uma esfera uniforme. Consulte o Apêndice E e os dados de astronomia no Apêndice F.

10.37 Ache o módulo do momento angular do ponteiro dos segundos de um relógio em torno do eixo que passa pelo centro de massa da face frontal do relógio. Esse ponteiro do relógio possui comprimento de 15,0 cm e massa de 6,0 g. Considere-o uma barra delgada girando com velocidade angular constante em torno de uma de suas extremidades.

10.38 Uma esfera oca com paredes finas de massa igual a 12,0 kg e diâmetro de 48,0 cm está girando em torno de um eixo que passa pelo seu centro. O ângulo (em radianos) em que ele gira em função do tempo (em segundos) é dado por $\theta(t) = At^2 + Bt^4$, onde A possui o valor numérico de 1,50 e B de 1,10. a) Quais são as unidades das constantes A e B? b) No instante de 3,0 s, ache i) o momento angular da esfera e ii) o torque resultante sobre a esfera.

Seção 10.6 Conservação do momento angular

10.39 Sob determinadas circunstâncias, uma estrela pode sofrer um colapso e se transformar em um objeto extremamente denso, constituído principalmente por nêutrons e chamado *estrela de nêutrons*. A densidade de uma estrela de nêutrons é aproximadamente 10^{14} vezes maior do que a da matéria comum. Suponha que a estrela seja uma esfera maciça e homogênea antes e depois do colapso. O raio inicial da estrela era de $7{,}0 \times 10^5$ km (comparável com o raio do Sol); seu raio final é igual a 16 km. Supondo que a estrela original completava um giro em 30 dias, ache a velocidade angular da estrela de nêutrons.

10.40 Um pequeno bloco apoiado sobre uma mesa horizontal sem atrito possui massa de 0,0250 kg. Ele está preso a uma corda sem massa que passa através de um buraco na superfície (Figura 10.48). No início, o bloco está girando a uma distância de 0,300 m do buraco com uma velocidade angular de 1,75 rad/s. A seguir a corda é puxada por baixo, fazendo com que o raio do círculo se encurte para 0,150 m. O bloco pode ser considerado uma partícula. a) O momento angular é conservado? b) Qual é a nova velocidade angular? c) Calcule a variação da energia cinética do bloco. d) Qual foi o trabalho realizado ao puxar a corda?

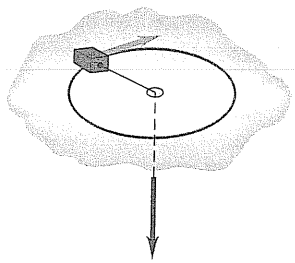


Figura 10.48 Exercício 10.40, problema 10.92 e problema desafiador 10.103.

10.41 Um patinador girando. Podemos considerar as mãos e os braços esticados para fora de um patinador que se prepara para girar como uma barra delgada cujo eixo de giro passa pelo seu centro de gravidade (Figura 10.49). Quando as mãos e os braços se aproximam do corpo e se cruzam em torno do corpo para executar o giro, eles podem ser considerados um cilindro oco com parede fina. A massa total das mãos e dos braços é igual a 8,0 kg. Quando esticadas para fora, a envergadura é de 1,8 m; quando torcidas, elas formam um cilindro de raio igual a 25 cm. O momento de inércia das partes restantes do corpo em relação ao eixo de rotação é constante e igual a 0,40 kg · m^2. Se sua velocidade angular inicial é de 0,40 rev/s, qual é sua velocidade angular final?

10.42 Uma mergulhadora pula de um trampolim com braços estendidos verticalmente para cima e pernas esticadas para baixo, fornecendo-lhe um momento de inércia em torno do eixo de rotação igual a 18 kg · m^2. Então, ela se agacha formando uma pequena bola, fazendo seu momento de inércia diminuir para 3,6 kg · m^2. Quando está agachada, ela realiza uma revolução completa em 1,0 s. Caso ela não se agachasse, quantas revoluções faria no intervalo de tempo de 1,5 s desde o trampolim até atingir a água?

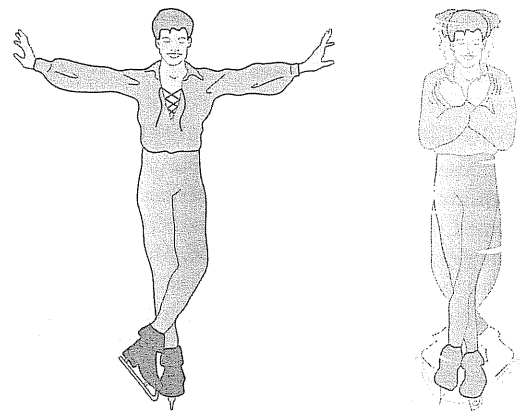


Figura 10.49 Exercício 10.41.

10.43 Uma mesa giratória grande possui forma de disco com raio de 2,0 m e massa igual a 120 kg. A mesa giratória está inicialmente a 3,0 rad/s em torno de um eixo vertical que passa em seu centro. Repentinamente, um pára-quedista de 70 kg pousa suavemente em um ponto próximo da periferia da mesa. a) Ache a velocidade angular da mesa giratória depois do pouso do pára-quedista. (Suponha que o pára-quedista possa ser considerado uma partícula.) b) Calcule a energia cinética do sistema antes e depois do pouso do pára-quedista. Por que essas energias cinéticas são diferentes?

10.44 Uma porta sólida de madeira com largura de 1,0 m e altura de 2,0 m é articulada em um de seus lados e possui massa total de 40,0 kg. Inicialmente aberta e em repouso, a porta é atingida por uma porção de lama pegajosa de massa igual a 0,500 kg, que se desloca perpendicularmente à porta com velocidade de 12,0 m/s e colide com o centro da porta. Calcule a velocidade angular final da porta. A lama contribui significativamente para o momento de inércia?

10.45 Um pequeno inseto de 10,0 g está pousado sobre uma das extremidades de uma barra delgada e uniforme, que está inicialmente em repouso sobre uma mesa horizontal lisa. A outra extremidade da barra pivoteia em torno de um prego martelado na mesa e pode girar livremente, com atrito desprezível. A barra possui massa de 50,0 g e tem 100 cm de comprimento. O inseto salta no sentido horizontal, perpendicular à barra, com uma velocidade escalar de 20,0 cm/s em relação à mesa. a) Qual é a velocidade escalar angular da barra logo após o vivaz inseto saltar? b) Qual é a energia cinética total do sistema logo após o inseto saltar? c) De onde vem essa energia?

10.46 Colisão de um asteróide! Suponha que um asteróide se desloque diretamente para o centro da Terra e venha a colidir com o nosso planeta na altura do Equador, penetrando na superfície terrestre. Qual teria de ser a massa desse asteróide em relação à massa M da Terrra, para que o dia ficasse 25% mais longo do que atualmente, em decorrência da colisão? Suponha que o asteróide seja muito pequeno em comparação com a Terra e que a Terra seja homogênea.

10.47 Uma barra de metal delgada e uniforme que tem 2,0 m de comprimento e pesa 90,0 N está suspensa verticalmente do teto por um pivô com atrito desprezível. De repente, ele é atingido num ponto que está 1,50 m abaixo do teto por uma pequena bola de 3,0 kg, movendo-se inicialmente, no sentido horizontal a 10,0 m/s. A bola rebate na direção contrária com uma velocidade escalar de

6,0 m/s. a) Calcule a velocidade escalar angular da barra logo após a colisão. b) Durante a colisão, por que o momento angular se conserva, mas o momento linear não?

Seção 10.7 Giroscópios e precessão

10.48 a) Desenhe uma vista de topo do giroscópio da Figura 10.32 indicando letras para $\vec{\omega}$, $\vec{L}$ e $\vec{\tau}$. Desenhe $d\vec{L}$ produzido por $\vec{\tau}$. Desenhe $\vec{L} + d\vec{L}$. Determine o sentido da precessão examinando as direções e sentidos de $\vec{L}$ e $\vec{L} + d\vec{L}$. b) Inverta o sentido da velocidade angular do rotor e repita todas as etapas do item (a). c) Mova o pivô para a outra extremidade do eixo, considerando a mesma direção e o mesmo sentido da velocidade angular de spin como na parte (b) e repita todas as etapas. d) Mantendo o pivô como na parte (c), inverta a velocidade angular de spin do rotor e repita todas as etapas.

10.49 O rotor (volante) de um giroscópio de brinquedo possui massa de 0,140 kg. Seu momento de inércia em relação ao seu eixo é igual a $1,20 \times 10^{-4}$ kg · m^2. A massa do suporte é de 0,0250 kg. O giroscópio é suportado em um único pivô (Figura 10.50) e seu centro de massa está situado a uma distância de 4,0 cm do pivô. O giroscópio possui movimento de precessão em um plano horizontal, completando uma revolução em 2,20 s. a) Ache a força de baixo para cima exercida pelo pivô. b) Ache a velocidade angular com a qual o rotor gira em torno de seu eixo, expressa em rev/min. c) Faça um diagrama, desenhando vetores para mostrar o momento angular do rotor e o torque que atua sobre ele.

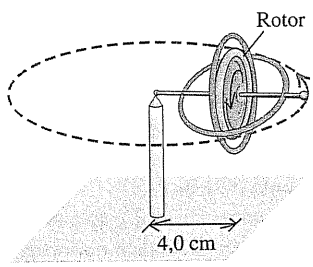


Figura 10.50 Exercício 10.49.

10.50 Um giroscópio na Lua. Certo giroscópio realiza precessão a uma taxa de 0,50 rad/s quando usado na Terra. Se fosse levado para uma base lunar, onde a aceleração da gravidade é 0,165 g, qual seria a sua taxa de precessão?

10.51 Um giroscópio possui movimento de precessão em torno de um eixo vertical. Descreva o que ocorre com a velocidade angular de precessão quando são feitas as seguintes mudanças nas variáveis, mantendo-se as outras grandezas constantes: a) a velocidade angular de spin do volante dobra; b) o peso total dobra; c) o momento de inércia em torno do eixo do volante dobra; d) a distância entre o pivô e o centro de gravidade dobra. e) O que ocorreria se todas as quatro variáveis indicadas nos itens de (a) até (d) dobrassem de valor?

10.52 O período do movimento de precessão da Terra é de 26000 anos, e o período de sua velocidade angular de spin é de um dia. Estime o módulo do torque que produz a precessão da Terra. Você pode usar dados do Apêndice F. Faça a estimativa supondo i) que a Terra seja uma esfera maciça e homogênea e ii) que a precessão da Terra seja semelhante ao movimento de precessão do giroscópio indicado na Figura 10.34. Nesse modelo, o eixo de precessão e o eixo de rotação de spin são perpendiculares. Na verdade, no caso da Terra, o ângulo entre esses dois eixos é de 23,5°; isso altera a estimativa do torque de um fator aproximadamente igual a 2.

Problemas

10.53 Um esmeril de 55,0 kg é um disco sólido de diâmetro igual a 0,520 m. Você comprime um machado sobre a periferia com uma força normal de 160 N (Figura 10.43). O coeficiente de atrito cinético entre a lâmina e a pedra do esmeril é igual a 0,60, e existe um torque do atrito constante igual a 6,50 N · m entre o eixo do esmeril e seus mancais. a) Ache a força que deve ser aplicada tangencialmente à extremidade do eixo da manivela de 0,500 m de comprimento para acelerar a roda do esmeril desde zero até 120 rev/min em 9,0 s. b) Depois que o esmeril atinge a velocidade de 120 rev/min, qual é a força tangencial que deve ser aplicada à extremidade da manivela para manter a velocidade angular constante de 120 rev/min? c) Quanto tempo o esmeril levaria para reduzir sua velocidade angular de 120 rev/min até zero quando a única força atuante for apenas a força de atrito nos mancais?

10.54 Uma roda de bicicleta experimental está sob teste, montada em um eixo de modo que ela possa girar livremente em torno desse seu eixo. Se um torque de 5,0 N · m for aplicado ao pneu durante 2,0 s, a velocidade angular cresce de zero a 100 rev/min. A seguir o torque externo é removido, e a roda atinge o repouso em 125 s pela ação do atrito em seus mancais. Calcule a) o momento de inércia da roda em torno do eixo de rotação; b) o torque do atrito; c) o número total de revoluções realizadas pela roda durante o intervalo de tempo de 125 s.

10.55 Velocímetro. O velocímetro do seu carro converte a velocidade escalar angular das rodas em velocidade escalar linear do carro, considerando-se pneus de tamanho padrão e nenhum deslizamento no piso. a) Se os pneus padrão do seu carro possuem 24 polegadas de diâmetro, qual é a taxa de rotação (em rpm) do carro quando você dirige a uma velocidade de 60 mi/h? b) Suponha que você coloque pneus grandes, de 30 polegadas de diâmetro, no seu carro. Qual é a sua velocidade real quando a leitura no velocímetro é de 60 mi/h? c) Se, por outro lado, você colocar pneus pequenos, de 20 polegadas de diâmetro, qual será a leitura do velocímetro quando você dirige a 50 mi/h?

10.56 Um disco oco uniforme possui dois pedaços de cabo leve e fino em torno da sua borda externa e está suspenso do teto (Figura 10.51). De repente um dos cabos se rompe, e o cabo restante não desliza enquanto o disco rola para baixo. Use a lei da conservação da energia para achar a velocidade escalar do centro desse disco, após ele ter caído por uma distância de 1,20 m.

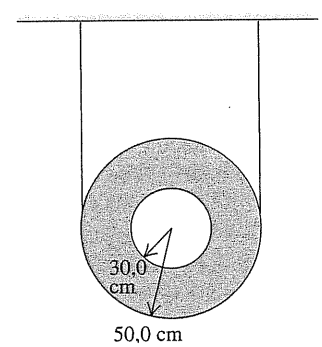


Figura 10.51 Problema 10.56.

10.57 Uma barra delgada e uniforme de 3,80 kg e 80,0 cm de comprimento possui uma bola muito pequena de 2,50 kg grudada em cada extremidade (Figura 10.52). Ela é sustentada horizontalmente por um eixo fino, horizontal e com atrito desprezível, que passa pelo seu centro e é perpendicular à barra. Subitamente, a bola do lado direito se descola e cai, mas a outra permanece grudada na barra. a) Ache a aceleração angular da barra logo após a bola cair. b) A aceleração angular permanecerá constante enquanto a barra continua a oscilar? Em caso negativo, ela vai aumentar ou diminuir? c) Ache a velocidade angular da barra logo após ela oscilar pela sua posição vertical.

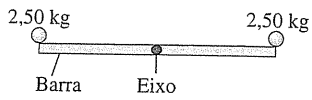


Figura 10.52 Problema 10.57.

10.58 Quando explora um castelo, Exena, a Exterminadora, é surpreendida por um dragão que a persegue pelo corredor. Exena corre para dentro de um quarto e tenta fechar uma porta pesada antes que o dragão entre. A porta está inicialmente perpendicular à parede, de modo que ela deve girar a 90° para fechar. A porta possui altura de 3,0 m e largura de 1,25 m, e pesa 750 N. O atrito das dobradiças pode ser desprezado. Se Exena aplica uma força de 220 N à extremidade da porta e ortogonal a ela, quanto tempo ela leva para fechar a porta?

10.59 Uma barra fina de comprimento l repousa sobre o eixo $+Ox$ com sua extremidade direita na origem. Um fio puxa a barra com uma força $\vec{F}$ dirigida a um ponto P situado a uma distância h acima da barra. Determine o ponto ao longo da barra onde você deve amarrar o fio para obter o torque máximo em torno da origem, se o ponto P estiver situado a) acima da extremidade direita da barra; b) acima da extremidade esquerda da barra; c) acima do centro da barra.

10.60 Ato de equilibrar. Uma pequena esfera de massa M está ligada à extremidade de uma barra longa, fina e uniforme de comprimento L e massa M. a) Localize a posição do centro de massa do sistema barra-esfera. Anote essa posição em um desenho da barra. b) Você equilibra cuidadosamente a barra no topo de uma mesa sem atrito, de modo que a extremidade sem a esfera fique apoiada verticalmente sobre a mesa. A seguir a barra é inclinada de um pequeno ângulo θ; calcule sua aceleração angular nesse instante. Suponha que a extremidade sem a esfera permaneça em contato com o topo da mesa. (*Sugestão:* Consulte a Tabela 9.2.) c) Você novamente equilibra a barra no topo da mesa, porém agora *com* a extremidade contendo a esfera tocando a mesa. A seguir a barra é novamente inclinada de um pequeno ângulo θ; determine sua aceleração angular nesse instante. Suponha que a extremidade com a esfera permaneça em contato com o topo da mesa. Como esse resultado se compara com o obtido no item (b)? d) Um taco de bilhar é uma barra de madeira cônica grossa em uma extremidade e fina na outra. Você pode equilibrar facilmente o taco na vertical sobre um dedo, quando a extremidade fina fica em contato com esse dedo; esse equilíbrio é muito mais difícil quando a extremidade grossa fica em contato com seu dedo. Explique por quê.

10.61 Você amarra um fio fino a um ponto na periferia de um disco uniforme vertical de raio R e massa M. O disco pode girar livremente sem atrito em um eixo horizontal fixo que passa pelo seu centro de massa. Inicialmente o disco está em repouso, com a conexão do fio no ponto mais elevado do disco. Você puxa o fio com uma força horizontal $\vec{F}$ até que a roda tenha feito exatamente um quarto de rotação em torno do eixo horizontal que passa em seu centro, e a seguir o sistema é libertado. a) Use a Equação (10.20) para achar o trabalho realizado pelo fio. b) Use a Equação (6.14) para achar o trabalho realizado pelo fio. Você obtém o mesmo resultado obtido no item (a)? c) Ache a velocidade angular final do disco. d) Calcule a aceleração radial (centrípeta) máxima de um ponto sobre o disco.

10.62 O mecanismo indicado na Figura 10.53 é usado para elevar um engradado de suprimentos do depósito de um navio. O engradado possui massa total de 50 kg. Uma corda é enrolada em um cilindro de madeira que gira em torno de um eixo de metal. O cilindro possui raio igual a 0,25 m e momento de inércia $I = 2{,}9\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$ em torno do eixo. O engradado é suspenso pela extremidade livre da corda. Uma extremidade do eixo está pivotada em mancais sem atrito; uma manivela está presa à outra extremidade. Quando a manivela gira, sua extremidade gira em torno de um círculo vertical de raio igual a 0,12 m, o cilindro gira e o engradado sobe. Calcule o módulo da força $\vec{F}$ aplicada tangencialmente à extremidade da manivela para elevar o engradado com uma aceleração de $0{,}80\ \text{m/s}^2$. (A massa da corda e o momento de inércia do eixo e da manivela podem ser desprezados.)

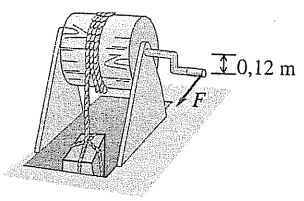


Figura 10.53 Problema 10.62.

10.63 Um grande rolo de papel de 16,0 kg com raio $R = 18{,}0$ cm está em repouso contra uma parede e é mantido no lugar por um suporte ligado a uma barra que passa em seu centro (Figura 10.54). A barra pode girar sem atrito no suporte, e o momento de inércia do papel e da barra em torno do disco é igual a $0{,}260\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. A outra extremidade da barra está presa à parede por uma articulação sem atrito de modo que a barra faz um ângulo de 30,0° com a parede. O peso da barra é desprezível. O coeficiente de atrito cinético entre o papel e a parede é $\mu c = 0{,}25$. Uma força constante vertical $F = 40{,}0$ N é aplicada ao papel, e o papel desenrola. a) Qual é o módulo da força que a barra exerce sobre o papel enquanto ele desenrola? b) Qual é a aceleração angular do rolo?

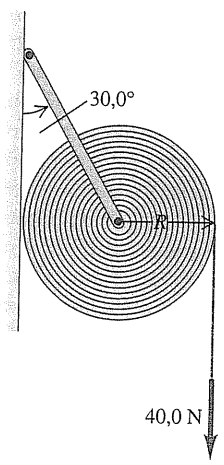


Figura 10.54 Problema 10.63.

10.64 Um bloco de massa $m = 5{,}0$ kg desliza para baixo de uma superfície horizontal inclinada a 36,9° com a horizontal (Figura 10.55). O coeficiente de atrito cinético é 0,25. Um fio amarrado ao bloco é enrolado em torno de um volante que gira em torno de um eixo passando em O. O volante possui massa de 25,0 kg e momento de inércia de $0{,}500\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$ em relação ao eixo de rotação. O fio puxa a roda sem deslizar a uma distância perpendicular ao eixo igual a

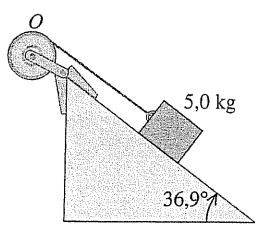


Figura 10.55 Problema 10.64.

0,200 m. a) Qual é a aceleração do bloco para baixo do plano? b) Qual é a tensão no fio?

10.65 Dois discos metálicos, um com raio $R_1 = 2{,}50$ cm e massa $M_1 = 0{,}80$ kg e outro com raio $R_2 = 5{,}0$ cm e massa $M_2 = 1{,}60$ kg, são unidos por uma solda e montados sobre um eixo sem atrito passando no centro comum dos discos, como no Problema 9.89. a) Um fio leve é enrolado em torno da periferia do disco menor, e um bloco de 1,50 kg é suspenso na extremidade livre do fio. Qual é o módulo da aceleração de cima para baixo do bloco depois que ele é libertado? b) Repita os cálculos da parte (a), agora supondo que o fio seja enrolado na periferia do disco maior. Em qual dos dois casos a aceleração é maior? Sua resposta faz sentido?

10.66 Um rolo de cortar grama com forma de uma casca cilíndrica de massa M é puxado horizontalmente com uma força constante horizontal F aplicada por um cabo ligado ao eixo. Sabendo que ele rola sem deslizar, calcule a aceleração e a força de atrito.

10.67 Dois pesos estão ligados por uma corda muito leve e flexível, que passa sobre uma polia de 50,0 m com atrito desprezível e raio de 0,300 m. A polia é um disco maciço e uniforme e está suspenso por um gancho preso ao teto (Figura 10.56). Qual força o teto exerce sobre o gancho?

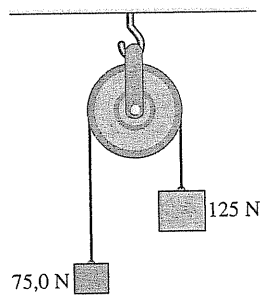


Figura 10.56 Problema 10.67.

10.68 Um disco sólido rola sem deslizar sobre uma superfície horizontal com velocidade constante de 2,50 m/s. a) Se o disco rola para cima de uma rampa inclinada a 30,0°, qual é a distância máxima que ele atinge ao longo da rampa antes de parar? b) Explique por que sua resposta do item (a) não depende nem da massa nem do raio do disco.

10.69 O ioiô. Um ioiô é feito usando-se dois discos uniformes, cada um com massa m e raio R ligados por um eixo leve de raio b. Um fio leve e fino é enrolado diversas vezes em torno do eixo e a seguir mantido fixo enquanto o ioiô é libertado do repouso, caindo verticalmente à medida que o fio desenrola. Calcule a aceleração linear e a aceleração angular do ioiô e a tensão no fio.

10.70 Uma casca esférica de paredes finas com massa m e raio r parte do repouso e rola sem deslizar para baixo da trilha indicada na Figura 10.57. O diâmetro da casca é muito pequeno, se comparado com h_0 e R, e o atrito de rolamento é desprezível. a) Qual é a altura mínima h_0 para que a casca esférica complete uma volta na parte circular da trajetória? b) Com que intensidade a trilha empurra a casca no ponto B, que está no mesmo nível do centro da circunferência? c) Suponha que a trilha possui atrito desprezível e que a casca foi libertada da mesma altura h_0 calculada no item (a). Nesse caso ela completaria uma volta? Como você sabe? d) No item (c), com que intensidade a trilha empurra a casca no ponto A, o topo da circunferência? Com que intensidade ela empurrou a casca no item (a)?

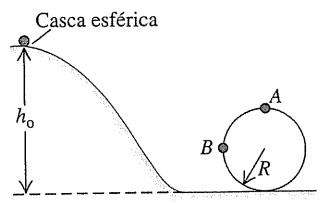


Figura 10.57 Problema 10.70.

10.71 A Figura 10.58 mostra três ioiôs idênticos que estão inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal. Para cada ioiô, o fio é puxado conforme indicado. Em cada caso existe atrito suficiente para cada ioiô rolar sem deslizar. Desenhe um diagrama do corpo livre para cada ioiô. Qual é o sentido da rotação de cada ioiô? (Tente fazer essa experiência!) Explique suas respostas.

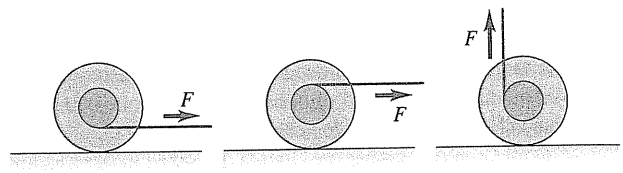


Figura 10.58 Problema 10.71.

10.72 Como indicado na Figura 10.46, um fio é enrolado diversas vezes em torno da periferia de um pequeno aro de raio 0,0800 m e massa igual a 0,180 kg. A extremidade livre do fio é puxada de baixo para cima de um modo exato tal que o aro não se move verticalmente quando o fio é desenrolado. a) Ache a tensão no fio enquanto ele se desenrola. b) Calcule a aceleração angular do aro enquanto o fio se desenrola. c) Ache a aceleração de baixo para cima da mão que puxa o fio. d) O que mudaria nas suas respostas, se o aro fosse substituído por um disco maciço com o mesmo raio e a mesma massa?

10.73 Partindo do repouso, uma força constante $F = 100$ N é aplicada à extremidade livre de um cabo de 50 m enrolado em volta da borda externa de um cilindro maciço e uniforme, semelhante ao da situação indicada na Figura 10.9a. O cilindro possui massa de 4,0 kg e diâmetro de 30,0 cm e está livre para girar em torno de um eixo fixo e livre de atrito que passa pelo seu centro. a) Quanto tempo leva para que todo o cabo se desenrole e com que velocidade o cabo está se movendo quando a última parte se liberta? b) Agora, suponha que o cilindro seja substituído por um aro uniforme, mas que todas as demais grandezas permaneçam inalteradas. Nesse caso, as respostas ao item (a) seriam maiores ou menores? Explique.

10.74 Uma bola de gude homogênea rola sem deslizar para baixo da trajetória indicada na Figura 10.59, partindo do repouso. a) Ache a altura mínima h necessária para que a bola de gude não caia na cova. b) O momento de inércia da bola de gude depende do seu raio. Explique por que a resposta ao item (a) não depende do raio da bola. c) Solucione o item (a) para um bloco que desliza com atrito desprezível em vez de uma bola de gude que rola. Como a altura mínima h nesse caso se compara com a resposta ao item (a)?

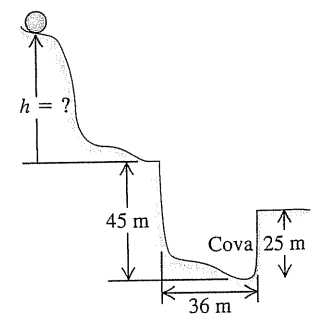


Figura 10.59 Problema 10.74.

10.75 Pedras que rolam. Uma pedra esférica, uniforme e maciça parte do repouso e rola para baixo de uma colina de 50,0 m de altura, como indica a Figura 10.60. A metade superior da colina é áspera o suficiente para fazer a pedra rolar sem deslizar, mas a

metade inferior está coberta de gelo e não há atrito. Qual é a velocidade escalar de translação da pedra, quando ela atinge a base da colina?

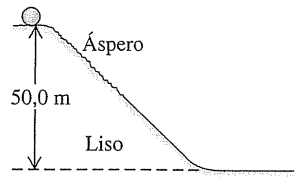


Figura 10.60 Problema 10.75.

10.76 Uma bola maciça e uniforme rola sem deslizar para cima de uma colina, como indica a Figura 10.61. No topo da colina, ela se move horizontalmente e cai pelo rochedo vertical. a) A que distância da base do rochedo a bola aterrissa e com que velocidade ela está se movendo assim que cai? b) Note que, quando a bola aterrissa, ela possui uma velocidade escalar de translação maior do que quando estava na base da colina. Isso significa que de alguma forma a bola ganhou energia? Explique!

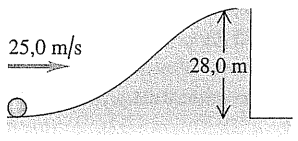


Figura 10.61 Problema 10.76.

10.77 Uma roda de 42,0 cm de diâmetro, que consiste de uma borda e seis raios, é feita de um material plástico rígido, porém fino, com densidade de massa linear de 25,0 g/cm. Essa roda é libertada do repouso no topo de uma colina de 58,0 m de altura. a) Com que velocidade ela está rolando quando atinge a base da colina? b) Em que a sua resposta mudaria, se a densidade de massa linear e o diâmetro da roda fossem duplicados?

10.78 Um modelo antigo de bicicleta possui uma roda dianteira grande com a manivela acionada pelo pé montada no seu eixo e uma roda traseira pequena que gira independentemente da roda dianteira; não há nenhuma corrente conectando as rodas. O raio da roda dianteira é de 65,5 cm, e o raio da roda traseira é de 22,0 cm. A sua bicicleta moderna possui um diâmetro de roda de 66,0 cm e rodas dentada dianteira e traseira com raios de 11,0 cm e 5,5 cm, respectivamente. A roda dentada traseira está firmemente presa ao eixo da roda traseira. Você começa a pedalar a sua bicicleta moderna e gira a roda dianteira a 1,0 rev/s. As rodas de ambas as bicicletas rolam pelo solo sem deslizar. a) Qual é a sua velocidade linear ao pedalar a bicicleta moderna? b) Qual é a taxa de rotação da manivela da bicicleta antiga para que ela se mova na mesma velocidade calculada no item (a)? c) Qual é a velocidade angular (em rev/s) da roda traseira pequena da bicicleta antiga?

10.79 Em uma experiência de laboratório você faz uma bola homogênea rolar para baixo de um trilho curvo. A bola parte do repouso e rola sem deslizar. Enquanto está sobre o trilho, a bola desce uma distância h. A extremidade inferior do trilho é horizontal e se estende para fora da extremidade da mesa do laboratório; a bola abandona o trilho deslocando-se horizontalmente. Durante a queda livre, após abandonar o trilho, a bola se move até uma distância horizontal x e uma distância vertical y. a) Determine x em termos de h e de y, desprezando o trabalho realizado pelo atrito. b) A resposta do item (a) seria diferente se a experiência fosse feita na Lua? c) Ao fazer a experiência com muito cuidado, o valor de x medido é menor do que o calculado no item (a). Por quê? d) Qual seria o valor de x para o mesmo h e y do item (a) se você fizesse uma moeda de um real rolar para baixo do trilho? Despreze o trabalho realizado pelo atrito.

10.80 Em uma catapulta de mola, a constante da mola é igual a 400 N/m e a mola sofre uma compressão de 0,15 m. Quando ela é disparada, 80% da energia potencial elástica armazenada na mola é convertida em energia cinética para uma bola uniforme de 0,0590 kg que estava rolando sem deslizar na base de uma rampa. A bola continua a rolar sem deslizar subindo a rampa com 90% da energia cinética que ela possuía na base convertida em energia potencial gravitacional no momento em que ela pára. a) Determine a velocidade do centro de massa da bola na base da rampa. b) Nessa posição, qual é a velocidade de um ponto no topo da bola? c) Nessa posição, qual é a velocidade de um ponto na base da bola? d) Qual é a altura vertical máxima acima da base da rampa atingida pela bola?

10.81 Quando uma roda rola ao longo de uma superfície horizontal com velocidade constante, as coordenadas de um ponto na periferia da roda são $x(t) = R[(2\pi t/T) - \text{sen}\,(2\pi t/T)]$ e $y(t) = R[1 - \cos(2\pi t/T)]$, onde R e T são constantes. a) Faça um desenho da trajetória do ponto de $t = 0$ a $t = 2T$. Uma curva com essa forma é denominada cicloide. b) Qual é o significado das constantes R e T? c) Ache os componentes x e y do vetor velocidade e da aceleração do ponto em qualquer instante. d) Ache os instantes em que o ponto fica instantaneamente em repouso. Quais são os componentes x e y da aceleração nesses instantes? e) Ache o módulo da aceleração do ponto. Ele depende do tempo? Compare com o módulo da aceleração de uma partícula em movimento circular uniforme, $a_{rad} = 4\pi^2R/T^2$. Explique seu resultado para o módulo da aceleração do ponto na roda que gira, usando o conceito de que a rolagem é um movimento combinado de rotação e translação.

10.82 Uma criança faz uma bola de basquete de 0,600 kg rolar para cima de uma rampa longa. A bola de basquete pode ser considerada uma casca esférica, de paredes finas. Quando a criança larga a bola na base da rampa, ela possui velocidade igual a 8,0 m/s. Quando a bola retorna para a base ela possui velocidade igual a 4,0 m/s. Suponha que o trabalho realizado pelo atrito na subida da bola seja igual ao trabalho realizado pelo atrito na descida e que a bola rola sem deslizar. Ache a altura máxima atingida pela bola quando ela sobe a rampa.

10.83 Um cilindro homogêneo de massa M e raio $2R$ está em repouso sobre o topo de uma mesa. Um fio é ligado por meio de um suporte duplo preso às extremidades de um eixo sem atrito passando através do centro do cilindro de modo que o cilindro pode girar em torno do eixo. O fio passa sobre uma polia em forma de disco de massa M e raio R montada em um eixo sem atrito que passa em seu centro. Um bloco de massa M é suspenso na extremidade livre do fio (Figura 10.62). O fio não desliza sobre a superfície da polia, e o cilindro rola sem deslizar sobre o topo da mesa. Calcule o módulo da aceleração do bloco quando o sistema é libertado a partir do repouso.

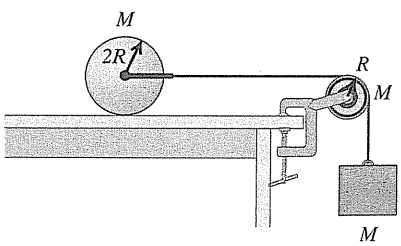


Figura 10.62 Problema 10.83.

10.84 Uma ponte levadiça homogênea de 8,0 m de comprimento está presa à estrada por uma dobradiça livre de atrito em uma das extremidades, e ela pode ser levantada por um cabo atado à outra extremidade. A ponte está em repouso, suspensa a um ângulo de

60,0° acima do plano horizontal, quando o cabo se rompe. a) Determine a aceleração angular da ponte no instante em que o cabo se rompe. (A gravidade atua como se tudo se passasse no centro da massa.) b) Você poderia usar a equação $\omega = \omega_0 + \alpha t$ para calcular a velocidade escalar angular da ponte levadiça em um instante posterior? Explique por quê. c) Qual é a velocidade angular da ponte quando ela fica horizontal?

10.85 Uma bola de 5,0 kg é abandonada de uma altura de 12,0 m acima de uma das extremidades de uma barra uniforme que está pivotada no seu centro. A barra possui massa de 8,0 kg e tem 4,0 m de comprimento. Na outra extremidade da barra há outra bola de 5,0 kg, que não está presa à barra. A bola largada adere à barra após a colisão. Qual altura a outra bola atingirá após a colisão?

10.86 Uma barra uniforme de 0,0300 kg e comprimento de 0,400 m gira em um plano horizontal em torno de um eixo fixo passando em seu centro e perpendicular à barra. Dois pequenos anéis, cada um com massa de 0,0200 kg, são montados de forma que eles possam deslizar ao longo da barra. Eles inicialmente estão presos por pregadores em distâncias afastadas de 0,0500 m do centro da barra, e o sistema começa a girar com 30,0 rev/min. Sem alterar nada no sistema, os pregadores são libertados e os anéis deslizam ao longo da barra e saem pelas suas extremidades. a) Qual é a velocidade angular da barra no instante em que os anéis atingem as extremidades dela? b) Qual é a velocidade angular da barra depois que os anéis saem pelas suas extremidades?

10.87 Uma barra uniforme de comprimento L repousa sobre uma superfície horizontal sem atrito. A barra possui um pivô, de modo que ela pode girar sem atrito em torno de um eixo passando por uma das suas extremidades. A barra está inicialmente em repouso. Uma bala se deslocando com velocidade v ortogonal à barra e paralela à superfície atinge o centro da barra e permanece retida em seu interior. A massa da bala é um quarto da massa da barra. a) Qual é a velocidade angular final da barra? b) Determine a razão entre a energia cinética do sistema depois da colisão e a energia cinética da bala antes da colisão.

10.88 A porta sólida de madeira de um ginásio tem largura de 1,0 m e altura de 2,0 m, sua massa total é igual a 35,0 kg e ela possui uma articulação em um dos seus lados. A porta está aberta e em repouso quando uma bola de basquete colide frontalmente no centro da porta, aplicando sobre ela uma força média igual a 1500 N durante 8,0 ms. Calcule a velocidade angular da porta depois da colisão. (*Sugestão:* integrando a Equação (10.29), obtemos $\Delta L_z = \int_{t_1}^{t_2} (\sum \tau_z)\, dt = (\sum \tau_z)_m \Delta t$. Denomina-se *impulso angular* $\int_{t_1}^{t_2} (\sum \tau_z)\, dt$.)

10.89 Um alvo é constituído por uma placa quadrada de madeira vertical com lado igual a 0,250 m e massa de 0,750 kg, pivotada em um eixo horizontal situado em seu topo. A placa é atingida frontalmente em seu centro por uma bala de massa igual a 1,90 g que se desloca a 360 m/s e que fica retida no interior da placa. a) Qual é a velocidade angular da placa logo após o impacto da bala? b) Qual é a altura máxima atingida pelo centro de massa da placa antes que ela comece a oscilar para baixo novamente? c) Qual deveria ser a velocidade mínima da bala para que a placa completasse a rotação passando a girar em torno do eixo depois do impacto?

10.90 Aceleração repentina de uma estrela de nêutrons. Ocasionalmente, uma estrela de nêutrons (Exercício 10.39) sofre uma aceleração repentina e inesperada conhecida como *glitch*. Uma explicação é que o *glitch* ocorre quando a crosta da estrela de nêutrons sofre uma pequena sedimentação, fazendo diminuir o momento de inércia em torno do eixo de rotação. Uma estrela de nêutrons com velocidade angular $\omega_0 = 70{,}4$ rad/s sofreu um *glitch* em outubro de 1975 que fez sua velocidade angular aumentar para $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, onde $\Delta\omega/\omega_0 = 2{,}01 \times 10^{-6}$. Se o raio da estrela de nêutrons era de 11 km, qual foi sua diminuição na sedimentação dessa estrela? Suponha que a estrela de nêutrons seja uma esfera maciça e homogênea.

10.91 Um pássaro de 500,0 g está voando horizontalmente a 2,25 m/s, quando inadvertidamente colide com uma barra vertical fixa, atingindo-a 25,0 cm abaixo do topo (Figura 10.63). A barra homogênea com 0,750 m de comprimento e massa de 1,50 kg está presa por uma dobradiça na sua base. A colisão atordoa o pássaro, que cai ao chão em seguida. Qual é a velocidade angular da barra a) logo após ser atingida pelo pássaro e b) assim que atinge o solo?

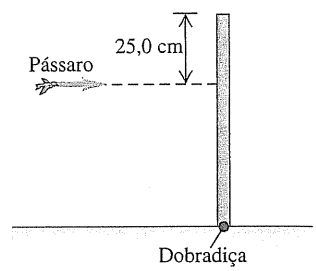


Figura 10.63 Problema 10.91.

10.92 Um pequeno bloco de massa 0,250 kg está amarrado por um fio que passa por um orifício em uma superfície horizontal (veja a Figura 10.48). O bloco está inicialmente em um círculo com raio igual a 0,800 m em torno do orifício com velocidade tangencial igual a 4,0 m/s. O fio a seguir é puxado por baixo lentamente, fazendo o raio do círculo se reduzir. A tensão de ruptura do fio é igual a 30,0 N. Qual é o raio do círculo quando o fio se rompe?

10.93 Um disco horizontal de madeira compensada de massa igual a 7,0 kg e diâmetro de 1,0 m é pivotado em mancais sem atrito em torno de um eixo vertical passando em seu centro. Você monta sobre o disco um modelo circular de trilhos com massa desprezível e diâmetro igual a 0,95 m. Um trem de brinquedo com 1,20 kg movido por uma bateria está em repouso sobre os trilhos. Para demonstrar a conservação do momento angular, você liga o motor do trem. O trem se move no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, atingindo logo uma velocidade constante de 0,600 m/s em relação aos trilhos. Ache o módulo, a direção e o sentido da velocidade angular do disco em relação à Terra.

10.94 Um cabo uniforme e rígido de massa M_0 e comprimento L_0 é cortado em várias partes que são encurvadas e soldadas de modo a forma uma roda circular com quatro raios idênticos que partem do centro. Nada do cabo é desperdiçado, e você pode desprezar a massa da solda. a) Qual é o momento de inércia dessa roda em torno de um eixo que passa pelo seu centro e é perpendicular ao plano da roda? b) Se a roda é inicialmente girada com velocidade angular ω_0, e pára uniformemente no instante T, qual é o torque de atrito no seu eixo?

10.95 Em um laboratório de física, você realiza a seguinte experiência de pêndulo balístico; usando uma espingarda de mola, você dispara uma bala com massa m e velocidade v na direção da horizontal. A bala fica imediatamente presa a uma distância r abaixo de um eixo sem atrito por um dispositivo de massa M que a retém e que pode girar sem atrito em torno do pivô. O momento de inércia desse dispositivo em torno do pivô é igual a I. A distância r é muito maior do que o raio da bala. a) Use a lei da conservação do momento angular para mostrar que a velocidade angular do sistema logo após o momento em que a bala é retida é dada por $\omega = mvr/(mr^2 + I)$. b) Depois que a bala fica retida, o

centro de massa do sistema bala-dispositivo retentor oscila para cima e atinge uma altura máxima h. Use a lei da conservação da energia para mostrar que $\omega = \sqrt{2(M+m)gh/(mr^2+I)}$. c) Sua amiga de laboratório diz que o momento linear é conservado na colisão e deduz a relação $mv = (m+M)V$, onde V é a velocidade da bala depois da colisão. A seguir, ela usa a lei da conservação da energia para mostrar que $V = \sqrt{2gh}$, logo $mv = (m+M)\sqrt{2gh}$. Use os resultados dos itens (a) e (b) para mostrar que esse resultado é satisfeito somente no caso particular em que r é obtido da relação $I = Mr^2$.

10.96 Um corredor de 55 kg corre na periferia de uma mesa giratória montada em um eixo vertical sem atrito passando em seu centro. A velocidade do corredor em relação à Terra possui módulo de 2,8 m/s. A mesa giratória gira em sentido contrário com velocidade angular de módulo igual a 0,20 rad/s em relação à Terra. O raio da mesa é de 3,0 m e seu momento de inércia em torno do eixo de rotação é igual a 80 kg · m^2. Calcule a velocidade angular do sistema quando o velocista fica em repouso em relação à mesa giratória. (O velocista pode ser considerado uma partícula.)

10.97 Recuo da Lua. Medidas cuidadosas da distância entre a Terra e a Lua indicam que o nosso satélite está atualmente se afastando de nós em aproximadamente 3,0 cm por ano. Despreze qualquer momento angular que possa ser transferido da Terra para a Lua. Calcule a taxa de variação (em rad/s ao ano) da velocidade angular lunar em torno da superfície terrestre (consulte o Apêndice E e os dados de astronomia do Apêndice F). A sua velocidade angular está aumentando ou diminuindo? (*Sugestão:* Se L é constante, então $dL/dt = 0$.)

10.98 Centro de percussão. Um bastão de bola de beisebol está em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. O bastão possui comprimento de 0,900 m, massa de 0,800 kg e seu centro de massa está situado a 0,600 m da extremidade do punho do bastão (Figura 10.64). O momento de inércia do bastão em relação ao centro de massa é igual a 0,0530 kg · m^2. O bastão é golpeado por uma bola de beisebol que se desloca ortogonalmente a ele. O impacto fornece um impulso $J = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt$ em um ponto situado a uma distância x do punho do bastão. Qual deve ser o valor de x para que a extremidade do punho do bastão permaneça em repouso à medida que o bastão se move? (*Sugestão:* Considere o movimento do centro de massa e a rotação em torno do centro de massa. Ache x de modo que a combinação dos dois movimentos forneça $v = 0$ para a extremidade do bastão logo após a colisão. Note também que a integração da Equação (10.29) fornece $\Delta L = \int_{t_1}^{t_2} (\sum \tau)\,dt$ (Problema 10.88).) O ponto que você localizou denomina-se *centro de percussão*. Quando uma bola de beisebol colide no centro de percussão, ocorre uma diminuição da força de "picada" que o batedor sente nas mãos.

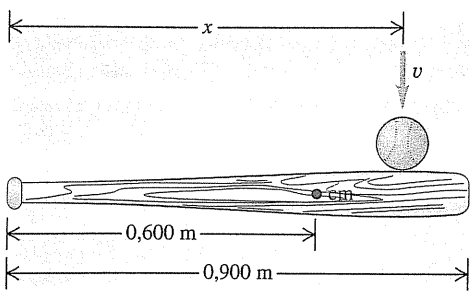


Figura 10.64 Problema 10.98.

10.99 Considere um giroscópio com um eixo que não está na direção horizontal, mas possui um ângulo de inclinação β em relação à horizontal. Mostre que a velocidade angular da precessão não depende do valor de β; mas é dada pela Equação (10.33).

Problemas desafiadores

10.100 Uma bola uniforme de raio R rola sem deslizar entre dois trilhos de tal modo que a distância horizontal entre os dois pontos de contato entre a bola e os trilhos seja igual a d. a) Faça um desenho e mostre que em qualquer instante $v_{cm} = \omega\sqrt{R^2 - d^2/4}$. Discuta essa expressão nos limites $d = 0$ e $d = 2R$. b) Para uma bola uniforme partindo do repouso e descendo uma distância vertical h enquanto rola sem deslizar para baixo de uma rampa, temos, $v_{cm} = \sqrt{10gh/7}$. Trocando a rampa pelos dois trilhos, mostre que

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{10gh}{5 + 2/(1 - d^2/4R^2)}}$$

Em cada um desses casos, o trabalho realizado pelo atrito foi desprezado. c) Qual das duas velocidades indicadas na parte (b) é a menor? Por quê? Raciocine em termos de como a energia potencial é dividida entre o ganho da energia cinética da translação e da energia cinética da rotação. d) Para qual valor da razão d/R as expressões das duas velocidades da parte (b) diferem de 5,0%? E quando diferem de 0,50%?

10.101 Quando um objeto rola sem deslizar, a força de atrito de rolamento é muito menor do que a força de atrito quando o objeto desliza sem rolar; uma moeda de um Real rola sobre sua periferia mais rapidamente do que quando ela desliza com sua face voltada para baixo. (Veja a Seção 5.3.) Quando um objeto rola sem deslizar ao longo de uma superfície horizontal, podemos desprezar a força de atrito, de modo que a_x e α_z são nulos e v_x e ω_z são constantes. Rolar sem deslizar implica $v_x = r\omega_z$ e $a_x = r\alpha_z$. Quando um objeto se desloca sobre uma superfície *sem* obedecer a essas igualdades, o atrito (cinético) de deslizamento está atuando sobre o objeto à medida que ele desliza, até que o rolamento sem deslizamento comece a ocorrer. Um cilindro homogêneo de massa M e raio R girando com velocidade angular ω_0 em torno de um eixo passando em seu centro é lançado sobre uma superfície horizontal sobre a qual o coeficiente de atrito cinético é μ_c. a) Faça um diagrama do corpo livre para o cilindro sobre a superfície. Pense com atenção no sentido da força de atrito sobre o cilindro. Calcule a aceleração α_x do centro de massa do cilindro e a aceleração angular α_z em torno do centro de massa do cilindro. b) No início o cilindro desliza sem rolar, então $\omega_z = \omega_0$, mas $v_x = 0$. O rolamento sem deslizamento começa quando $v_x = R\omega_z$. Calcule a *distância* que o cilindro percorre no momento em que termina o deslizamento. c) Calcule o trabalho realizado pela força de atrito sobre o cilindro desde o momento em que ele toca a superfície até o momento em que começa o rolamento sem deslizamento.

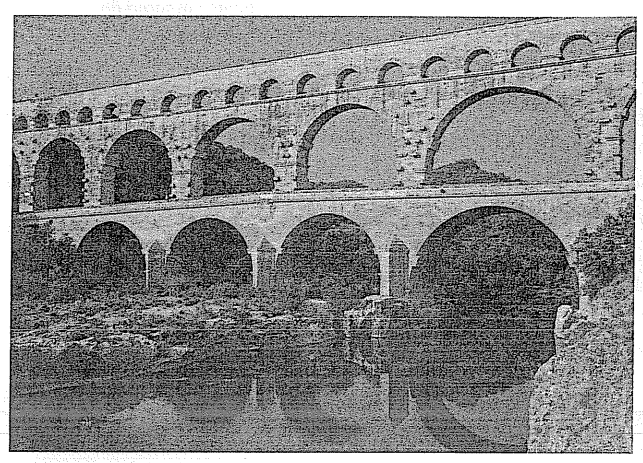
10.102 Um giroscópio de demonstração pode ser construído retirando-se o pneu de uma roda de bicicleta com diâmetro de 0,650 m, enrolando-se um fio de chumbo no aro e fixando-o nele. O eixo se projeta 0,200 m para cada lado da roda, e uma garota apóia as extremidades do eixo em suas mãos. A massa do sistema é igual a

8,0 kg; toda a sua massa pode ser considerada concentrada em sua periferia. O eixo é horizontal, e a roda gira em torno do eixo com 5,0 rev/s. Ache o módulo, a direção e o sentido da força que cada mão exerce sobre o eixo a) quando o eixo está em repouso; b) quando o eixo está girando em um plano horizontal em torno do seu centro com 0,050 rev/s; c) quando o eixo está girando em um plano horizontal em torno do seu centro com 0,300 rev/s. d) Com que taxa o eixo deve girar de modo que ele possa ser suportado apenas em uma das suas extremidades?

10.103 Um bloco de massa m está girando com velocidade linear v_1 em um círculo de raio r_1 sobre uma superfície horizontal sem atrito (veja a Figura 10.48). O fio é puxado por baixo até que o raio do círculo no qual o bloco se move é reduzido a um valor r_2. a) Calcule a tensão T no fio em função de r, a distância entre o bloco e o orifício. Dê sua resposta em função da velocidade inicial v_1 e do raio r_1. b) Use a relação $W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{T}(r) \cdot d\vec{r}$ para calcular o trabalho realizado pela tensão $\vec{T}$ quando r varia desde r_1 até r_2. c) Compare o resultado do item (b) com a variação da energia cinética do bloco.

EQUILÍBRIO E ELASTICIDADE

11



Este aqueduto romano usa o princípio do arco para sustentar o peso da estrutura e a água que ela transporta. Os blocos que compõem o arco estão sendo comprimidos, alongados ou uma combinação de ambos?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- As condições que devem ser atendidas para um corpo ou uma estrutura estarem em equilíbrio.
- O que significa o centro de gravidade de um corpo, e como ela se relaciona com a estabilidade do corpo.
- Como solucionar problemas que envolvem corpos rígidos em equilíbrio.
- Como analisar situações em que um corpo é deformado por tensão, compressão, pressão ou cisalhamento.
- O que ocorre quando um corpo é tão alongado que se deforma ou se rompe.

Dedicamos muito esforço para entender por que e como os corpos se aceleram em decorrência das forças que atuam sobre eles. Porém, muitas vezes estamos interessados em garantir que os corpos *não* se acelerem. Toda construção, desde um arranha-céu até o mais humilde barracão, deve ser projetada de modo que se evitem desabamentos. Preocupações semelhantes ocorrem com uma ponte pênsil, uma escada apoiada sobre uma parede ou um guindaste que suspende um recipiente cheio de concreto.

Um corpo modelado como uma *partícula* está em equilíbrio quando é nula a soma vetorial de todas as forças que atuam sobre ele. Porém, para as situações que acabamos de mencionar, essa condição não é suficiente. Quando as forças atuam em pontos diferentes sobre um corpo com massa distribuída, uma condição adicional deve ser satisfeita para garantir que o corpo não possa *girar:* a soma dos *torques* em relação a qualquer ponto deve ser igual a zero. Essa condição se pauta nos princípios da dinâmica das rotações desenvolvidos no Capítulo 10. Podemos calcular o torque em função do peso de um corpo usando o conceito de centro de gravidade, que será introduzido neste capítulo.

Um corpo rígido não se encurva, não se alonga, nem se deforma quando forças são aplicadas sobre ele. Entretanto, um corpo rígido é uma idealização; todos os materiais reais são *elásticos* e se deformam parcialmente. As propriedades elásticas dos materiais são extremamente importantes. Você espera que as asas de um avião possam se encurvar ligeiramente, mas elas não devem quebrar. A estrutura de aço de um edifício projetado para resistir a terremotos deve ser capaz de sofrer flexões, mas não pode ultrapassar certo limite. Muitos dos dispositivos encontrados em nosso cotidiano, desde fitas elásticas até uma ponte pênsil, dependem das propriedades elásticas dos materiais. Neste capítulo vamos introduzir os conceitos de *tensão*, *deformação* e *módulo de elasticidade*, bem como um princípio simples conhecido como *lei de Hooke*, que nos ajudam a prever as deformações que podem ocorrer quando se aplicam forças a corpos reais (não perfeitamente rígidos).

11.1 Condições de equilíbrio

Vimos nas seções 4.2 e 5.1 que uma partícula está em *equilíbrio*, ou seja, a partícula não se acelera em um sistema de referência inercial quando a soma vetorial de todas as forças que atuam sobre a partícula é igual a zero, $\sum \vec{F} = \mathbf{0}$. O enunciado equivalente para um corpo *com massa distribuída* é que o centro de massa do corpo possui aceleração nula, quando a soma vetorial de todas as

forças que atuam sobre o corpo é igual a zero, conforme discutido na Seção 8.5. Normalmente, esse enunciado é conhecido como a **primeira condição de equilíbrio**. Em termos de vetores e componentes,

$$\sum \vec{F} = 0$$
$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0 \qquad (11.1)$$

(primeira condição de equilíbrio)

onde a soma inclui somente forças *externas*.

Uma segunda condição para que o corpo com massa distribuída esteja em equilíbrio é que ele não possa ter nenhuma tendência a *girar*. Essa condição tem sua base na dinâmica do movimento de rotação, do mesmo modo que a primeira condição baseia-se na primeira lei de Newton. Um corpo rígido, que em um sistema de referência inercial não está girando em torno de um certo ponto, possui momento angular zero em torno desse ponto. Para que ele não gire em torno desse ponto, a taxa de variação do momento angular deve ser *também* igual a zero. Pela discussão da Seção 10.5, particularmente a Equação (10.29), isso significa que deve ser nula a soma dos torques produzidos por todas as forças externas que atuam sobre o corpo. Um corpo rígido em equilíbrio não pode ter nenhuma tendência a girar em torno de *nenhum* ponto, de modo que a soma dos torques externos deve ser igual a zero em relação a qualquer ponto. Esta é a **segunda condição de equilíbrio:**

$$\sum \vec{\tau} = 0 \qquad (11.2)$$

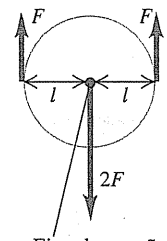
em torno de nenhum ponto (segunda condição de equilíbrio)

Deve ser nula a soma dos torques de todas as forças externas que atuam sobre um corpo em relação a qualquer ponto.

Neste capítulo, aplicaremos a primeira e a segunda condição de equilíbrio para situações em que o corpo rígido está em repouso (sem translação nem rotação). Diz-se que esse corpo está em **equilíbrio estático** (Figura 11.1). Porém, as mesmas condições também valem quando o corpo possui movimento de *translação* uniforme (sem rotação), tal como um avião que se desloca na mesma altitude com velocidade constante em módulo, direção e sentido. Esse corpo está em equilíbrio, mas esse equilíbrio não é estático.

Teste sua compreensão da Seção 11.1 Qual destas situações satisfaz tanto à primeira quanto à segunda condição de equilíbrio? i) Uma gaivota planando a um ângulo constante abaixo do plano horizontal e com velocidade escalar constante; ii) o virabrequim de um automóvel que gira a uma velocidade escalar angular crescente no motor de um carro estacionado; iii) Uma bola de beisebol que é lançada, mas não gira enquanto cruza o ar. ∎

(a) Este corpo está em equilíbrio estático.



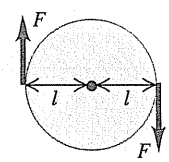
Eixo de rotação (perpendicular à figura)

Condições para o equilíbrio:

Primeira condição atendida: Força resultante = 0, portanto o corpo em repouso não possui nenhuma tendência a começar a se mover como um todo.

Segunda condição atendida: O torque resultante em torno do eixo = 0, portanto o corpo em repouso não tende a girar.

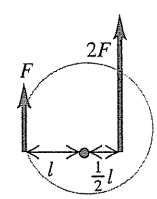
(b) Este corpo não possui nenhuma tendência a acelerar como um todo, mas tende a começar a girar.



Primeira condição atendida: Força resultante = 0, portanto o corpo em repouso não possui nenhuma tendência a começar a se mover como um todo.

Segunda condição NÃO atendida: Há um torque resultante no sentido horário em torno do eixo, portanto o corpo em repouso começará a girar no sentido horário.

(c) Este corpo possui uma tendência a acelerar como um todo, mas não a começar a girar.



Primeira condição NÃO atendida: Há uma força resultante de baixo para cima, portanto o corpo em repouso começará a se mover de baixo para cima.

Segunda condição atendida: O torque resultante em torno do eixo = 0, portanto o corpo em repouso não tende a girar.

Figura 11.1 Para estar em equilíbrio estático, um corpo em repouso deve satisfazer *ambas* as condições de equilíbrio: não pode apresentar nenhuma tendência a acelerar como um todo nem começar a girar.

11.2 Centro de gravidade

Em um grande número de problemas de equilíbrio, uma das forças que atuam sobre um corpo é o seu peso. Precisamos ser capazes de calcular o *torque* dessa força. O peso não atua sobre um único ponto; ele age de forma dispersa sobre todos os pontos do corpo. Entretanto, podemos sempre calcular o torque do peso de um corpo supondo que a força total da gravidade (o peso) esteja concentrada em um ponto chamado **centro de gravidade** (abreviado por 'cg'). A aceleração devida à gravidade diminui com a altitude; porém, se pudermos desprezar essa variação ao longo da vertical do corpo, o centro de gravidade coincidirá com seu *centro de massa* (abreviado por 'cm'), que foi definido na Seção 8.5. Esse resultado foi formulado na Seção 10.2 sem prova, e agora vamos demonstrá-lo.

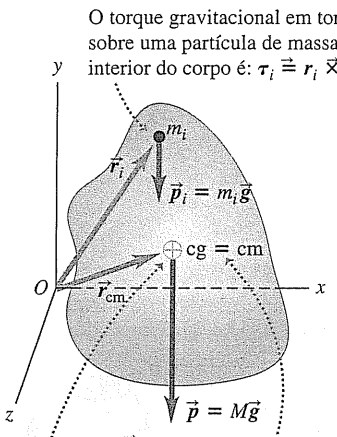


Figura 11.2 O centro de gravidade (cg) e o centro de massa (cm) de um corpo de massa distribuída.

Inicialmente, vamos fazer uma revisão da definição de centro de massa. Para uma coleção de partículas com massas m_1, m_2, ... e coordenadas (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ..., as coordenadas x_{cm}, y_{cm} e z_{cm} do centro de massa são dadas por

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_ix_i}{\sum_i m_i}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_iy_i}{\sum_i m_i} \qquad (11.3)$$

(centro de massa)

$$z_{cm} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_iz_i}{\sum_i m_i}$$

Também, x_{cm}, y_{cm} e z_{cm} são as coordenadas do vetor posição $\vec{r}_{cm}$ do centro de massa, de modo que as equações (11.3) são equivalentes à equação vetorial

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} \qquad (11.4)$$

Agora, vamos considerar o torque gravitacional sobre um corpo de forma arbitrária (Figura 11.2). Suponhamos que o módulo, a direção e o sentido da aceleração da gravidade $\vec{g}$ permaneçam constantes em todos os pontos do corpo. Cada partícula do corpo sofre a ação da força gravitacional, e o peso total do corpo é a soma vetorial de um grande número de forças paralelas. Uma partícula típica possui massa m_i e peso $\vec{p}_i = m_i\vec{g}$. Se $\vec{r}_i$ for o vetor posição dessa partícula em relação a uma origem arbitrária O, o vetor torque $\vec{\tau}_i$ do peso $\vec{p}_i$ em relação a O é, pela Equação (10.3),

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_i \times m_i\vec{g}$$

O torque *total* produzido pelas forças gravitacionais sobre todas as partículas é

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \sum_i \vec{\tau}_i = \vec{r}_1 \times m_1\vec{g} + \vec{r}_2 \times m_2\vec{g} + \cdots \\ &= (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots) \times \vec{g} \\ &= \left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right) \times \vec{g}\end{aligned}$$

Quando multiplicamos e dividimos isso pela massa total do corpo,

$$M = m_1 + m_2 + \cdots = \sum_i m_i$$

obtemos

$$\vec{\tau} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} \times M\vec{g} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} \times M\vec{g}$$

A fração indicada nessa equação nada mais é do que o vetor posição $\vec{r}_{cm}$ do centro de massa, cujas componentes são x_{cm}, y_{cm} e z_{cm}, conforme indicado na Equação (11.4), e $M\vec{g}$ é igual ao peso total $\vec{p}$ do corpo. Logo

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{cm} \times M\vec{g} = \vec{r}_{cm} \times \vec{p} \qquad (11.5)$$

O torque gravitacional total, dado pela Equação (11.5), é obtido como se o peso total $\vec{p}$ estivesse atuando no ponto dado pelo vetor posição $\vec{r}_{cm}$ do centro de massa, que também chamamos de *centro de gravidade*. **Se $\vec{g}$ possui um valor constante em todos os pontos de um corpo, seu centro de gravidade coincide com o seu centro de massa.** Note, contudo, que o centro de massa é definido independentemente da existência de qualquer efeito gravitacional.

Embora o valor de $\vec{g}$ varie em função da elevação, a variação é extremamente leve (Figura 11.3). Por isso, neste capítulo vamos supor que o centro de massa coincida com o centro de gravidade, a menos que se diga explicitamente o contrário.

Determinação e uso do centro de gravidade

Geralmente podemos usar considerações de simetria para determinar a posição do centro de gravidade de um corpo, do mesmo modo que fizemos no caso do centro de massa. O centro de gravidade de uma esfera homogênea, de um cubo, de um disco fino ou de uma placa retangular coincide com o centro geométrico de cada um desses corpos. O centro de gravidade de um cilindro ou de um cone se encontra sobre seus respectivos eixos de simetria.

Figura 11.3 A aceleração da gravidade na base do Petronas Towers na Malásia é somente 0,014% maior do que no topo dos seus 452 m de altura. O centro de gravidade das torres está somente cerca de 2 cm abaixo do centro de massa.

Para um corpo de forma mais complexa, algumas vezes podemos localizar o centro de gravidade imaginando o corpo constituído por pequenas partes simétricas. Por exemplo, podemos considerar o corpo humano como um conjunto de cilindros sólidos, sendo a cabeça considerada uma esfera. A seguir, podemos calcular o centro de gravidade da combinação usando as equações (11.3), tomando m_1, m_2, ... como as massas individuais e (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ... como as coordenadas do centro de gravidade.

Quando a gravidade atua sobre um corpo que é suportado ou suspenso em um único ponto, o centro de gravidade deve estar sempre diretamente abaixo, acima ou no próprio ponto de suspensão. Caso não fosse assim, o peso exerceria um torque em relação ao ponto de suspensão, e o corpo não estaria em equilíbrio de rotação. Esse fato pode ser usado para a determinação experimental do centro de gravidade de um corpo irregular, como indica a Figura 11.4.

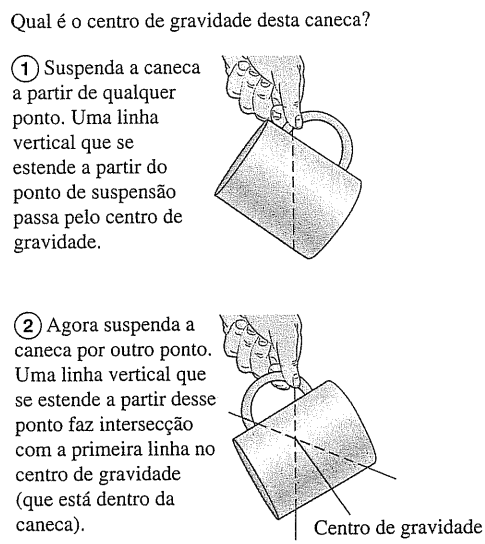


Figura 11.4 Cálculo do centro de gravidade de um corpo de forma irregular — neste caso, uma caneca.

Usando o mesmo raciocínio, podemos ver que um corpo apoiado em diferentes pontos deve possuir seu centro de gravidade em algum local entre as extremidades da área delimitada pelos pontos de apoio. Isso explica como um carro pode se deslocar em uma pista retilínea, mas inclinada, desde que o ângulo de inclinação seja pequeno (Figura. 11.5a), mas deve se virar quando o ângulo é grande demais (Figura 11.5b). O caminhão da Figura 11.5c possui um centro de gravidade mais elevado do que o do carro e deve virar em inclinações menores do que a do carro; quando um caminhão capota em uma auto-estrada e bloqueia o tráfego durante horas, a posição elevada de seu centro de gravidade é a responsável pelo acidente.

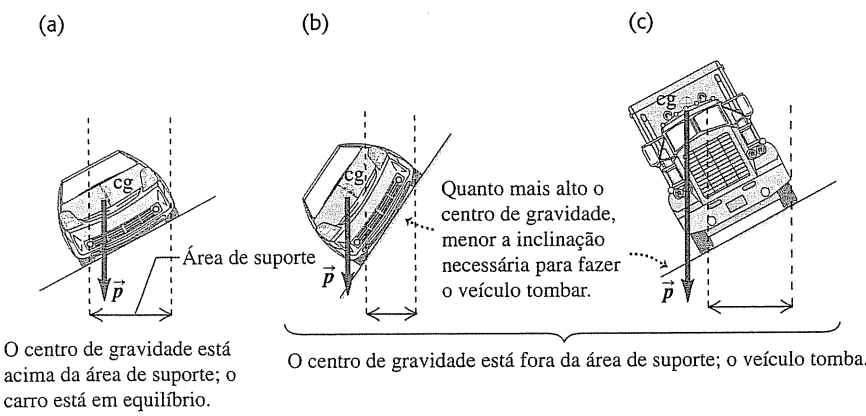


Figura 11.5 Em (a) o centro de gravidade está dentro da área limitada pelos pontos de apoio, e o carro está em equilíbrio. O carro em (b) e o caminhão em (c) devem virar porque seus respectivos centros de gravidade estão fora da área limitada pelos apoios.

Quanto mais baixo for o centro de gravidade e quanto maior for a área de suporte, menor se torna a possibilidade de o corpo virar. Animais de quatro patas, tais como um veado ou um cavalo, possuem uma grande área de suporte delimitada pelas suas pernas; portanto, eles são naturalmente estáveis e necessitam de patas pequenas. Os animais que andam eretos sobre duas pernas, como os pássaros e o homem, necessitam de pés relativamente grandes para aumentar a área de suporte. Quando um animal com duas pernas possui um corpo achatado e quase horizontal, como a galinha ou o dinossauro *Tyrannosaurus rex*, ele deve realizar uma delicada ação de equilíbrio para andar, mantendo seu centro de gravidade sobre um dos pés em contato com o solo. A galinha faz isso movendo a cabeça; o *Tyrannosaurus rex* provavelmente fazia isso movendo o rabo volumoso.

Exemplo 11.1

EQUILIBRADO EM UMA PRANCHA Uma prancha uniforme, volumosa, de comprimento $L = 6{,}0$ m e massa $M = 90$ kg repousa sobre dois cavaletes separados por uma distância $D = 1{,}5$ m, localizados em pontos eqüidistantes do centro de gravidade da prancha. Seu primo Tobias tenta ficar em pé na extremidade direita da prancha. Qual deve ser a massa de Tobias para que a prancha permaneça em repouso?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como o sistema formado pela prancha e Tobias está em equilíbrio, o centro de gravidade do sistema deve coincidir com a vertical do apoio do cavalete do lado direito (justamente dentro da área delimitada pelos dois suportes). A incógnita do problema é a massa de Tobias.

PREPARAR: a Figura 11.6 mostra a esquematização do problema. Consideramos a origem no ponto C, o centro geométrico e o centro de gravidade da prancha, e tomamos o eixo positivo x apontando horizontalmente para a direita. Assim as coordenadas x do centro de gravidade da prancha (massa M) e do centro de gravidade de Tobias (massa desconhecida m) são $x_P = 0$ e $x_T = L/2 = 3{,}0$ m, respectivamente. Usaremos as equações (11.3) para localizar o centro de gravidade do sistema prancha-Tobias.

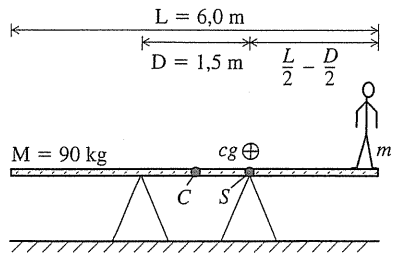


Figura 11.6 Nosso desenho para este problema.

EXECUTAR: pela primeira parte das equações (11.3), temos

$$x_{cg} = \frac{M(0) + m(L/2)}{M + m} = \frac{m}{M + m}\frac{L}{2}$$

Igualando o resultado anterior com $D/2$, a coordenada x do cavalete da direita, obtemos

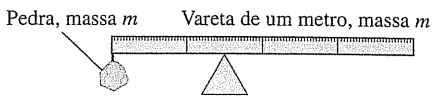


Figura 11.7 Em que ponto a vareta de um metro com a pedra estarão em equilíbrio?

$$\frac{m}{M + m}\frac{L}{2} = \frac{D}{2}$$

$$mL = (M + m)D$$

$$m = M\frac{D}{L - D} = (90\text{ kg})\frac{1{,}5\text{ m}}{6{,}0\text{ m} - 1{,}5\text{ m}}$$

$$= 30\text{ kg}$$

AVALIAR: para conferir o resultado, vamos repetir o cálculo com outra opção de origem. Consideramos a origem no ponto S, a posição de apoio do cavalete da direita, de modo que $x_{cg} = 0$. Os centros de gravidade da prancha e de Tobias são agora $x_P = -D/2$ e $x_T = (L/2) - (D/2)$, respectivamente, logo

$$x_{cg} = \frac{M(-D/2) + m[(L/2) - (D/2)]}{M + m} = 0$$

$$m = \frac{MD/2}{(L/2) - (D/2)} = M\frac{D}{L - D} = 30\text{ kg}$$

A massa não depende da escolha arbitrária da origem.
Um garoto de 60 kg manteria o equilíbrio ficando em pé no meio da distância entre a extremidade da prancha e o cavalete do lado direito. Você é capaz de explicar por quê?

Teste sua compreensão da Seção 11.2 Uma pedra está presa à extremidade esquerda de uma vareta uniforme de um metro que possui a mesma massa da pedra. Para que a combinação entre a pedra e a vareta fique em equilíbrio sobre o objeto triangular, conforme a Figura 11.7, a que distância da extremidade esquerda da vareta o triângulo deve ser colocado? i) menos de 0,25 m; ii) 0,25 m; iii) entre 0,25 m e 0,50 m; iv) 0,50 m; v) mais de 0,50 m. ▮

11.3 Soluções de problemas de equilíbrio de corpos rígidos

Existem apenas dois princípios básicos para o equilíbrio de corpos rígidos: a soma vetorial das forças que atuam sobre o corpo deve ser igual a zero, e a soma dos torques em torno de qualquer ponto deve ser zero. Para simplificarmos, restringiremos nossa atenção para situações em que todas as forças estejam sobre um único plano, o qual chamaremos de plano xy. Então, podemos ignorar a condição $\Sigma F_z = 0$ nas equações (11.1), e na Equação (11.2) basta considerar o componente z do torque (perpendicular ao plano xy). Desse modo, a primeira e a segunda condições de equilíbrio são dadas por

$$\sum F_x = 0 \quad \text{e} \quad \sum F_y = 0 \qquad (11.6)$$

(primeira condição de equilíbrio, forças no plano xy)

$$\sum \tau_z = 0$$

(segunda condição de equilíbrio, forças no plano xy).

ATENÇÃO Escolha do ponto de referência para o cálculo de torques Em problemas referentes ao equilíbrio, a escolha do ponto de referência para o cálculo de torques em $\Sigma\tau_z$ é totalmente arbitrária. Mas, uma vez feita a escolha, você deve usar o *mesmo* ponto para calcular *todos* os torques que atuam sobre um corpo. É útil escolher o ponto de modo a simplificar ao máximo os cálculos.

O desafio consiste em aplicar esses princípios simples em problemas específicos. A seguinte Estratégia é muito semelhante às sugestões dadas na Seção 5.2 para o equilíbrio de uma partícula. Você deve compará-la com a Estratégia sugerida para problemas de dinâmica das rotações apresentada na Seção 10.2.

Estratégia para a solução de problemas 11.1

EQUILÍBRIO DE UM CORPO RÍGIDO

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: a primeira e a segunda condição de equilíbrio são úteis sempre que há um corpo rígido que não está em rotação nem em aceleração no espaço.

PREPARAR *o problema* seguindo estas etapas:

1. Faça um desenho esboçando a situação física, incluindo as dimensões, e selecione o corpo em equilíbrio a ser analisado.
2. Desenhe um diagrama do corpo livre mostrando as forças que atuam *sobre* o corpo selecionado e nenhum outro. *Não* inclua forças exercidas *por* esse corpo sobre outros corpos. Seja cuidadoso e mostre corretamente o ponto no qual cada força atua; isso é crucial para os cálculos corretos dos torques. Você não pode representar um corpo rígido por um ponto.
3. Escolha eixos coordenados e especifique um sentido positivo de rotação para torques. Represente as forças em termos das componentes ao longo dos eixos que você escolheu; ao fazer isso, risque a força original para não considerá-la duas vezes.
4. Ao escolher um ponto para o cálculo dos torques, note que, se a linha suporte de uma força passar *através* de um dado ponto, o torque dessa força em relação a esse ponto será igual a zero. Geralmente você pode eliminar forças desconhecidas pela escolha inteligente do ponto para o cálculo dos torques. O corpo não precisa estar necessariamente preso a um eixo que passa pelo ponto escolhido.

EXECUTAR *a solução* como segue:

1. Escreva as equações que representam as condições de equilíbrio. Lembre-se de que $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ e $\Sigma t_z = 0$ são sempre equações independentes; *nunca* adicione um componente x e um componente y à mesma equação. Lembre-se também de que, quando uma força é representada em termos dos seus componentes, você pode calcular o torque dessa força achando o torque de cada componente separadamente, cada qual com seu braço da alavanca e sinal e, a seguir somando os resultados. Isso é geralmente mais fácil do que determinar o braço da alavanca da força original.
2. Você sempre precisa escrever um número de equações igual ao número de incógnitas. Dependendo do número de incógnitas, você precisará calcular torques em relação a dois ou mais eixos para obter um número suficiente de equações. Normalmente, existem muitos conjuntos de forças e torques igualmente bons para um determinado problema; não existe uma única combinação 'correta' de equações.

AVALIAR *sua resposta*: uma forma válida de conferir seus resultados é reescrever a segunda condição para o equilíbrio, $\Sigma\tau_z = 0$, usando outra opção de origem. Se você fez tudo corretamente, obterá as mesmas respostas com essa nova opção de origem do que obteve com a escolha original.

Exemplo 11.2

DISTRIBUIÇÃO DO PESO DE UM CARRO Uma revista de automóveis afirma que certo carro esportivo possui 53% do seu peso sobre as rodas dianteiras e 47% sobre as rodas traseiras, sendo a base de roda igual a 2,46 m. Isso significa que a força normal sobre as rodas dianteiras é $0{,}53p$ e sobre as rodas traseiras é $0{,}47p$, onde p é o peso total. A base de roda é a distância entre o eixo dianteiro das rodas e o eixo traseiro. Qual é a distância entre o eixo traseiro e o centro de gravidade do carro?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: podemos usar as duas condições de equilíbrio, supondo-se que o carro esteja em repouso. As condições também se aplicam quando o carro está se movendo em linha reta com velocidade escalar constante, já que a força resultante e o torque resultante que atuam sobre o carro também são iguais a zero nessa situação. A incógnita é a coordenada do centro de gravidade do carro.

PREPARAR: a Figura 11.8 mostra um diagrama do corpo livre para o carro, juntamente com os eixos x e y e nossa convenção de que os torques positivos produzem rotação contrária ao dos ponteiros do relógio. O peso p atua no centro de gravidade. A distância solicitada é L_{cg}; esse é o braço da alavanca do peso em relação ao eixo traseiro R, portanto é razoável obter torques em relação a R. O torque em função do peso é negativo porque ele tende a causar uma rotação no sentido horário em torno de R. O torque em função da força normal de baixo para cima no eixo dianteiro F é positivo porque ele tende a causar rotação no sentido anti-horário em torno de R.

EXECUTAR: pela Figura 11.8b, podemos ver que a primeira condição de equilíbrio é satisfeita, $\Sigma F_x = 0$, visto que não existe nenhum componente da força ao longo do eixo 0_x, e $\Sigma Fy = 0$, porque $0{,}47p + 0{,}53p + (-p) = 0$. A equação da força não envolve a incógnita L_{cg}, portanto devemos solucioná-la usando a equação dos torques para R

$$\sum \tau_R = 0{,}47p(0) - pL_{cg} + 0{,}53p(2{,}46\ \text{m}) = 0$$

$$L_{cg} = 1{,}30\ \text{m}$$

AVALIAR: note que cg está entre os dois suportes, como deveria (veja a Seção 11.2). Você pode conferir o resultado numérico para a posição de cg escrevendo a equação do torque em relação ao

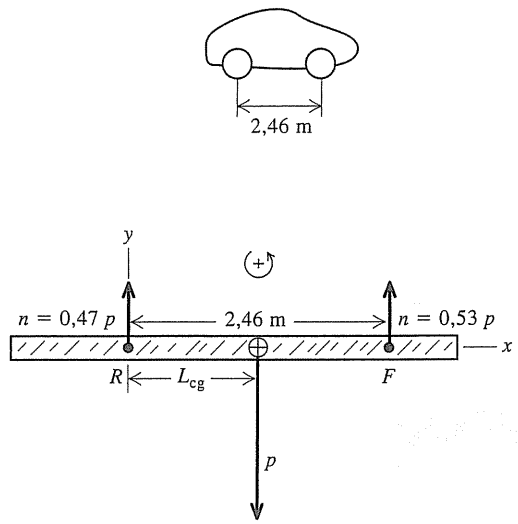


Figura 11.8 Nosso desenho para este problema.

eixo dianteiro *F*. Você encontrará que cg está 1,16 m atrás do eixo dianteiro, ou (2,46 m) − (1,16 m) = 1,30 m à frente do eixo traseiro.

Você pode mostrar que, se *f* for a fração do peso sobre as rodas dianteiras e *d* for a base da roda, o centro de gravidade está a uma distância *fd* diante das rodas traseiras. Quanto mais atrás estiver o centro de gravidade, menor será o valor de *fd* e menor a fração de peso nas rodas dianteiras. Por isso, os proprietários de veículos com tração traseira colocam sacos de areia no bagageiro para aumentar a tração quando se locomovem sobre neve ou gelo. Isso seria útil no caso de um veículo com tração dianteira?

Exemplo 11.3

UM RESGATE HERÓICO Sir Lancelot está tentando resgatar Lady Elayne do Castelo Von Doom subindo em uma escada uniforme de 5,0 m de comprimento e que pesa 180 N. Lancelot, que pesa 800 N, pára a um terço da distância entre a base e a extremidade da escada (Figura 11.9a). A base da escada está apoiada sobre a borda de uma pedra e a escada está sobre um fosso, em equilíbrio contra uma parede vertical sem atrito por causa da camada de lodo. A escada faz um ângulo de 53,1° com a horizontal, formando um triângulo retângulo com os números pitagóricos 3–4–5. a) Calcule a força normal e a força de atrito sobre a escada em sua base. b) Ache o coeficiente de atrito estático mínimo para impedir que a base da escada escorregue. c) Determine o módulo, a direção e o sentido da força de contato com a base da escada.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o sistema composto por Sir Lancelot e a escada está fixo, portanto podemos usar as duas condições do equilíbrio para solucionar o item (a). No item b), também necessitaremos da relação dada na Seção 5.3 entre a força de atrito estático, o coeficiente de atrito estático e a força normal. A força de contato requisitada no item (c) é a soma vetorial das forças normal e de atrito na base da escada, que calculamos no item (a).

PREPARAR: a Figura 11.9b mostra o diagrama do corpo livre para o sistema Sir Lancelot-escada. Tomamos as direções *x* e *y* conforme indicado e os torques no sentido anti-horário como positivos. A escada é descrita como 'uniforme', de modo que seu centro de gravidade está em seu centro geométrico. O peso de 800 N de Lancelot atua como um ponto na escada a um terço do caminho a partir da base em direção à parede.

A parede livre de atrito exerce somente uma força normal n_1 no topo da escada. As forças que atuam na base são a força normal de baixo para cima n_2 e a força de atrito estático f_s, que deve ser orientada para a direita para impedir o deslizamento; os módulos n_2 e f_s são as variáveis do item (a). Pela Equação (5.6), esses módulos estão relacionados por $f_s \leq \mu_s n_2$, onde μ_s é o coeficiente de atrito estático, a incógnita do item (b).

EXECUTAR: (a) pelas equações (11.6), a primeira condição de equilíbrio fornece

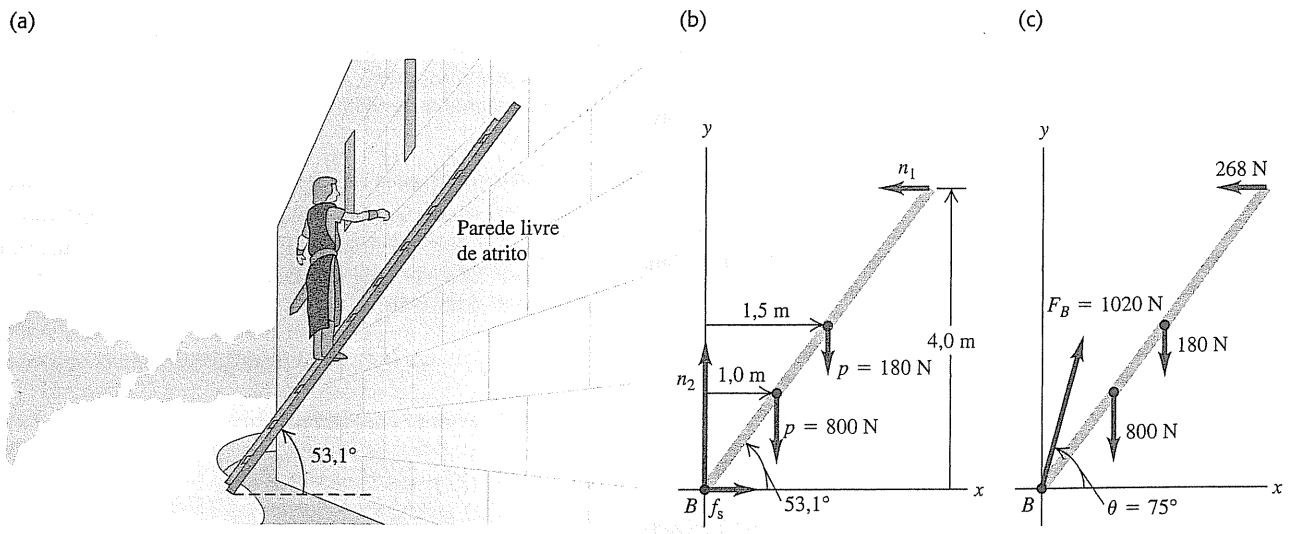


Figura 11.9 (a) Sir Lancelot pára a um terço do percurso para cima da escada, com receio de que ela deslize. (b) Diagrama do corpo livre para o sistema composto por Sir Lancelot e a escada. (c) A força de contato em B é a superposição entre a força normal e a força de atrito estático.

$$\sum F_x = f_s + (-n_1) = 0$$
$$\sum F_y = n_2 + (-800\,\text{N}) + (-180\,\text{N}) = 0$$

Essas são duas equações para as três incógnitas n_1, n_2 e f_s. A primeira equação informa que as duas forças horizontais devem ser iguais e contrárias, e a segunda fornece

$$n_2 = 980\,\text{N}$$

O solo empurra para cima com uma força de 980 N para equilibrar o peso total (para baixo) igual a (800 N + 180 N).

Não temos ainda um número suficiente de equações, porém agora podemos usar a segunda condição de equilíbrio. Podemos achar os torques em relação a qualquer ponto escolhido. A escolha mais inteligente é o ponto B, que fornece o menor número de termos e de incógnitas na equação dos torques. Isso ocorre porque as forças n_2 e f_s não possuem nenhum torque em relação a esse ponto. Pela Figura 11.9b, vemos que o braço da alavanca para o peso da escada é igual a 1,5 m, o braço da alavanca para o peso de Sir Lancelot é 1,0 m e o braço da alavanca para n_1 é 4,0 m. A equação do torque para o ponto B é

$$\sum \tau_B = n_1(4{,}0\,\text{m}) - (180\,\text{N})(1{,}5\,\text{m}) - (800\,\text{N})(1{,}0\,\text{m}) + n_2(0) + f_s(0) = 0$$

Explicitando n_1, obtemos $n_1 = 268$ N. Agora substituímos esse valor na equação $\Sigma F_x = 0$ e obtemos

$$f_s = 268\,\text{N}$$

b) a força de atrito estático f_s não pode ser maior do que $\mu_s n_2$, portanto o coeficiente de atrito *mínimo* para impedir o deslizamento é

$$(\mu_s)_{\text{mín}} = \frac{f_s}{n_2} = \frac{268\,\text{N}}{980\,\text{N}} = 0{,}27$$

c) os componentes da força de contato $\vec{F}_B$ na base da escada são a força de atrito f_s e força normal n_2, portanto,

$$\vec{F}_B = f_s\hat{\imath} + n_2\hat{\jmath} = (268\,\text{N})\hat{\imath} + (980\,\text{N})\hat{\jmath}$$

O módulo, a direção e o sentido de $\vec{F}_B$ (Figura 11.9c) são

$$F_B = \sqrt{(268\,\text{N})^2 + (980\,\text{N})^2} = 1020\,\text{N}$$
$$\theta = \text{arctg}\,\frac{980\,\text{N}}{268\,\text{N}} = 75°$$

AVALIAR: conforme indicado na Figura 11.9c a força de contato $\vec{F}_B$ *não* é dirigida ao longo da escada. Você poderá ficar surpreso, porém não existe nenhum motivo razoável para que essas duas direções devam coincidir. Você é capaz de mostrar que, se $\vec{F}_B$ fosse dirigida ao longo da escada, deveria existir um torque resultante no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio em relação ao topo da escada, impossibilitando o equilíbrio?

Faremos agora alguns comentários finais. Em primeiro lugar, à medida que Lancelot sobe a escada, o braço da alavanca e o torque de seu peso em relação ao ponto B aumentam; isso faz aumentar os valores de n_1, f_s e $(\mu_s)_{\text{mín}}$. Na extremidade superior, o braço da alavanca seria aproximadamente igual a 3 m, fornecendo um coeficiente de atrito estático mínimo aproximadamente igual a 0,7. O valor de μ_s não seria tão elevado para a escada medieval de Lancelot, e a possibilidade de a escada deslizar aumenta à medida que ele sobe. Para impedir isso, as escadas modernas são em geral equipadas com revestimento de borracha não deslizante.

Em segundo lugar, um ângulo maior da escada faria diminuir os braços das alavancas em relação ao ponto B dos pesos da escada e de Lancelot e faria aumentar o braço da alavanca de n_1; todos esses fatores contribuiriam para diminuir a força de atrito necessária. A empresa R. D. Werner Ladder Co. recomenda que suas escadas sejam usadas para um ângulo de 75°. (Por que não 90°?)

Finalmente, caso você considerasse atrito no solo e na parede, não seria possível resolver o problema apenas com as condições de equilíbrio. (Tente resolvê-lo!) Esse tipo de problema denomina-se *estaticamente indeterminado*. A dificuldade é que não podemos considerar o corpo completamente rígido. Outro exemplo simples desse tipo de problema é uma mesa com quatro pernas; não há como usarmos apenas as condições de equilíbrio para achar a força sobre cada perna separadamente.

Exemplo 11.4

EQUILÍBRIO E AÇÃO DE BOMBEAR A Figura 11.10a mostra um braço humano erguendo um haltere. O antebraço está em equilíbrio sob a ação do peso p do haltere, da tensão T no tendão conectado ao músculo bíceps e da força E exercida sobre o antebraço pelo braço na junta do cotovelo. Para maior clareza, o ponto A no qual o tendão está ligado foi desenhado mais afastado do cotovelo do que em sua posição real. O peso p e o ângulo θ são fornecidos; desejamos achar a tensão no tendão e os dois componentes da força no cotovelo (um total de três incógnitas escalares). Desprezamos o peso do antebraço em si.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o sistema está em repouso, portanto novamente usamos as condições do equilíbrio.

PREPARAR: como indica a Figura 11.10b, decompomos a força no tendão em termos dos componentes T_x e T_y, usando o ângulo θ dado e o módulo T desconhecido

$$T_x = T\cos\theta \qquad T_y = T\,\text{sen}\,\theta$$

Também decompomos a força no cotovelo em seus componentes E_x e E_y. Imaginaremos que os sentidos desses componentes são os indicados na Figura 11.10b; não há necessidade de preocupar-se com essa hipótese, visto que os resultados de E_x e E_y nos indicarão os sentidos corretos. As incógnitas do problema são o módulo T da tensão no tendão e os componentes E_x e E_y da força no cotovelo.

EXECUTAR: a forma mais simples de achar a tensão T é tomarmos os torques em relação à junta do cotovelo. A equação do torque resultante não conterá E_x, E_y nem T_x, porque as linhas de ação dessas forças passam através desse ponto. A equação do torque é então simplesmente

$$\sum \tau_E = Lp - DT_y = 0$$

Pela relação anterior encontramos

$$T_y = \frac{Lp}{D} \qquad \text{e} \qquad T = \frac{Lp}{D\,\text{sen}\,\theta}$$

Para achar E_x e E_y, usamos a primeira condição de equilíbrio, $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$:

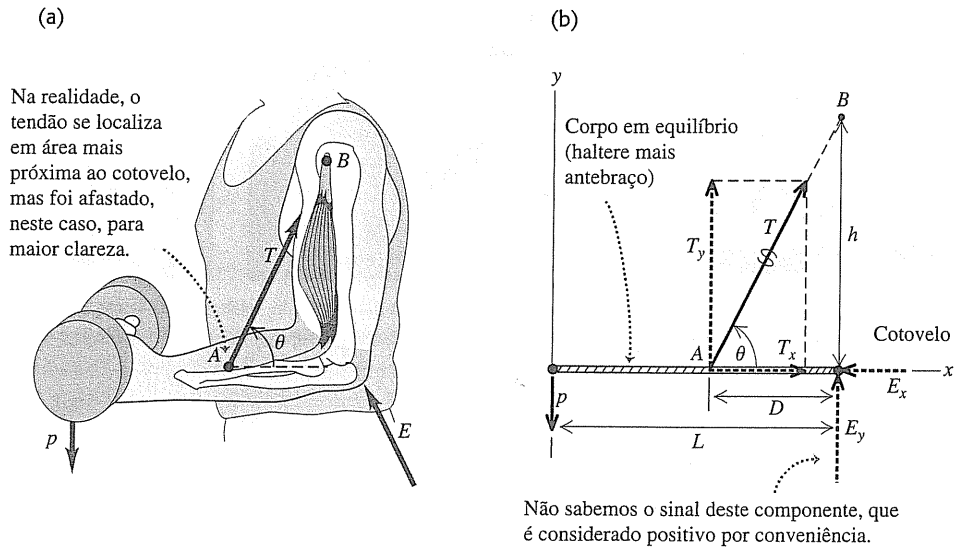


Figura 11.10 (a) A situação. (b) Diagrama do corpo livre do antebraço. O peso do antebraço é desprezado, e a distância D foi exagerada para maior clareza.

$$\sum F_x = T_x + (-E_x) = 0$$

$$E_x = T_x = T\cos\theta = \frac{Lp}{D\,\mathrm{sen}\,\theta}\cos\theta = \frac{Lp}{D}\,\mathrm{cotg}\,\theta$$

$$= \frac{Lp}{D}\frac{D}{h} = \frac{Lp}{h}$$

$$\sum F_y = T_y + E_y + (-p) = 0$$

$$E_y = p - \frac{Lp}{D} = -\frac{(L-D)p}{D}$$

O sinal negativo indica que nossa hipótese sobre o sentido de E_y, indicado na Figura 11.10b, estava errada; o sentido correto é verticalmente *para baixo*.

AVALIAR: podemos conferir os resultados calculando E_x e E_y de outro modo, que consiste em usar mais duas equações para o torque. Tomamos os torques em relação ao ponto A onde o tendão está ligado:

$$\sum \tau_A = (L-D)p + DE_y = 0 \qquad \text{e} \qquad E_y = -\frac{(L-D)p}{D}$$

Finalmente, tomamos os torques em relação ao ponto B na figura:

$$\sum \tau_B = Lp - hE_x = 0 \qquad \text{e} \qquad E_x = \frac{Lp}{h}$$

Escolhemos os pontos A e B porque a tensão do tendão T possui torque igual a zero em torno de qualquer desses pontos. (Você é capaz de ver por que pela Figura 11.10b?) Note como os cálculos foram bastante simplificados ao escolhermos o ponto em relação ao qual determinamos os torques de modo que eliminem uma ou mais incógnitas.

Em nossa determinação alternativa de E_x e de E_y não utilizamos explicitamente a primeira condição de equilíbrio (a soma vetorial das forças é igual a zero). Para conferir, calcule ΣF_x e ΣF_y para verificar se essas somas *são* realmente nulas. Os testes de consistência são sempre uma boa idéia!

Como um exemplo específico, suponha $p = 200$ N, $D = 0{,}050$ m, $L = 0{,}30$ m e $\theta = 80°$. Então, pela relação $\mathrm{tg}\,\theta = h/D$, encontramos

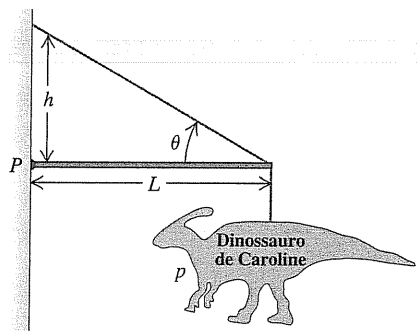


Figura 11.11 Quais são a tensão no cabo diagonal e a força exercida pela dobradiça em P?

$$h = D\,\mathrm{tg}\,\theta = (0{,}050\text{ m})(5{,}67) = 0{,}28\text{ m}$$

A partir dos resultados gerais anteriores, achamos

$$T = \frac{Lp}{D\,\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{(0{,}30\text{ m})(200\text{ N})}{(0{,}050\text{ m})(0{,}98)} = 1220\text{ N}$$

$$E_y = -\frac{(L-D)p}{D} = -\frac{(0{,}30\text{ m} - 0{,}050\text{ m})(200\text{ N})}{0{,}050\text{ m}}$$

$$= -1000\text{ N}$$

$$E_x = \frac{Lp}{h} = \frac{(0{,}30\text{ m})(200\text{ N})}{0{,}28\text{ m}} = 210\text{ N}$$

O módulo da força no cotovelo é dado por

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 1020\text{ N}$$

Levando em consideração nossos resultados, o fato de desprezarmos o peso do próprio antebraço, que pode ser da ordem de 20 N, produziria apenas erros relativamente pequenos.

Teste sua compreensão da Seção 11.3 Uma placa metálica de sinalização (peso p) de uma loja está suspensa pela extremidade de uma vara horizontal de comprimento L e massa desprezí-

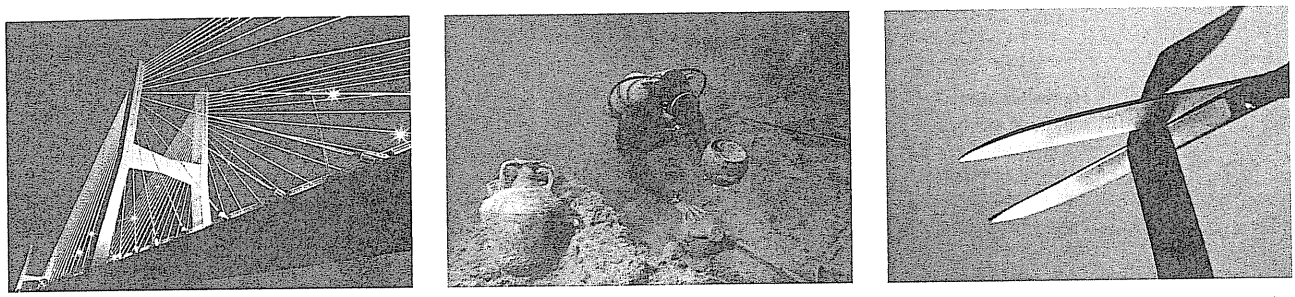


Figura 11.12 Três tipos de tensão. (a) os cabos de uma ponte submetidos a um *alongamento*, dilatados por forças que atuam sobre suas extremidades. (b) Um mergulhador sob *compressão*, comprimido de todos os lados pela força da pressão da água. (c) Uma fita sob *cisalhamento*, torcida e cortada por forças exercidas pela tesoura.

vel (Figura 11.11). A vara está suportada por um cabo que forma um ângulo θ com o plano horizontal e por uma dobradiça no ponto P. Classifique os seguintes módulos de força por ordem decrescente: i) o peso p da placa; ii) a tensão no cabo; iii) o componente vertical da força exercida sobre a vara pela dobradiça no ponto P. ■

11.4 Tensão, deformação e módulos de elasticidade

O corpo rígido é um modelo idealizado útil, porém a dilatação, a compressão e a torção de corpos rígidos quando aplicamos forças sobre um corpo real são muito importantes e não podem ser desprezadas. A Figura 11.12 mostra três exemplos. Desejamos estudar a relação entre as forças e as deformações para cada caso.

Para cada tipo de deformação, introduziremos uma grandeza chamada **tensão**, que caracteriza a intensidade das forças que produzem a dilatação, a compressão ou a torção, usualmente descritas com base em 'uma força por unidade de área'. Outra grandeza, a **deformação**, descreve a deformação resultante. Quando a tensão e a deformação são suficientemente pequenas, verificamos que elas são diretamente proporcionais e denominamos a constante de proporcionalidade de **módulo de elasticidade**. Quanto mais você estica algo, mais o objeto se dilata; quanto mais você o esmaga, mais ele se comprime. O comportamento geral que emerge pode ser formulado do seguinte modo:

$$\frac{\text{Tensão}}{\text{Deformação}} = \text{Módulo de elasticidade} \qquad (11.7)$$

(lei de Hooke)

A constante de proporcionalidade entre a tensão e a deformação (sob certas condições) denomina-se **lei de Hooke**, em homenagem a Robert Hooke (1635–1703), um contemporâneo de Newton. Já usamos uma forma da lei de Hooke nas seções 6.3 e 7.2: o alongamento da mola ideal é proporcional à força aplicada. Lembre-se de que a lei de Hooke não é realmente uma lei geral, mas sim um resultado experimental válido somente em um intervalo limitado. A última seção deste capítulo discute qual é o limite desse intervalo de validade.

Tensão e deformação na dilatação e na compressão

O comportamento elástico mais simples de se entender é a dilatação de uma barra, de um eixo ou de um fio, quando suas extremidades são puxadas (Figura 11.12a). A Figura 11.13 mostra um objeto cuja seção reta possui área A e comprimento l_0, submetido a forças iguais e contrárias $F_\perp$ em ambas as extremidades (garantindo que o objeto não tende a se mover nem para a esquerda nem para a direita). Dizemos que o objeto está submetido a uma **tensão de dilatação**. Já falamos muito sobre a tensão em cordas e em fios; aqui o conceito é o mesmo. O índice inferior $\perp$ serve para nos lembrar de que as forças atuam em uma direção perpendicular à seção reta.

Definimos tensão de dilatação na seção reta como a razão entre a força $F_\perp$ e a área A da seção reta:

$$\text{Tensão de dilatação} = \frac{F_\perp}{A} \qquad (11.8)$$

Essa grandeza é *escalar* porque $F_\perp$ é o *módulo* de uma força. A unidade SI de tensão é o **Pascal** (abreviada por Pa, cujo nome é uma homenagem ao cientista francês

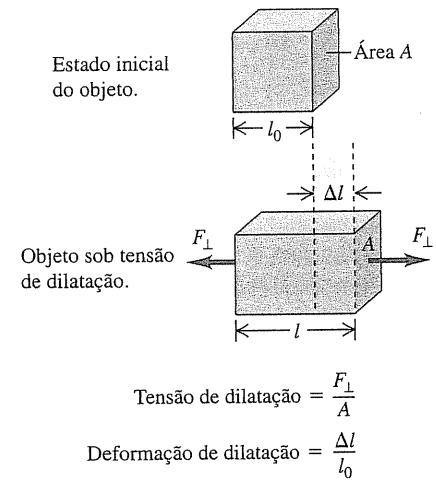
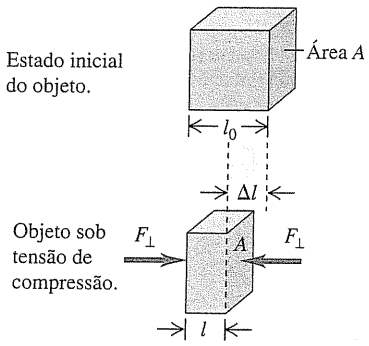


Figura 11.13 Um objeto sob tensão. A força resultante que atua sobre o objeto é nula, mas o objeto se deforma. A tensão de dilatação (razão entre a força e a área da seção reta) produz uma deformação de dilatação (a dilatação dividida pelo comprimento inicial). A dilatação Δl foi exagerada para maior clareza.



$$\text{Tensão de compressão} = \frac{F_\perp}{A}$$

$$\text{Deformação de compressão} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Figura 11.14 Um objeto em compressão. A tensão de compressão e a deformação de compressão são definidas da mesma forma que a tensão e a deformação de dilatação (Figura 11.13), exceto pelo fato de que neste caso Δl denota a distância pela qual o objeto se contrai.

do século XVII Blaise Pascal). A Equação (11.8) mostra que um Pascal é igual a um Newton por metro quadrado (N/m^2):

$$1 \text{ Pascal} = 1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

Embora o sistema de unidades inglesas não seja adotado neste livro, é conveniente informar que uma unidade de pressão ainda muito usada é a libra por polegada ao quadrado (lb/pol^2 ou psi) é muito mais comum. Os fatores de conversão dessas e de outras unidades inglesas podem ser encontrados no Apêndice E.

$$1 \text{ psi} = 6895 \text{ Pa} \quad \text{e} \quad 1 \text{ Pa} = 1{,}450 \times 10^{-4} \text{ psi}$$

As unidades de tensão são as mesmas que as da *pressão*, que encontraremos em capítulos posteriores. A pressão do ar em um pneu de automóvel pode atingir cerca de 3×10^5 Pa = 300 kPa, e um cabo de aço típico é projetado para suportar tensões da ordem de 10^8 Pa.

O objeto mostrado na Figura 11.13 se alonga a um comprimento $l = l_0 + \Delta l$ quando está sob tensão. A dilatação Δl não ocorre somente nas extremidades: todas as partes da barra sofrem dilatações na mesma proporção. A **deformação de dilatação** do objeto é a fração da variação do comprimento, definida como a razão entre a dilatação Δl e o comprimento original l_0:

$$\text{Deformação de dilatação} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \tag{11.9}$$

A deformação de dilatação é a dilatação por unidade de comprimento. É a razão entre dois comprimentos, sempre medidos com as mesmas unidades, portanto se trata de um número puro (adimensional) sem nenhuma unidade.

A experiência mostra que, para uma tensão de dilatação suficientemente pequena, a tensão e a deformação são proporcionais, como na Equação (11.7). O módulo de elasticidade correspondente denomina-se **módulo de Young**, representado por Y:

$$Y = \frac{\text{Tensão de dilatação}}{\text{Deformação de dilatação}} = \frac{F_\perp/A}{\Delta l/l_0} = \frac{F_\perp}{A}\frac{l_0}{\Delta l} \tag{11.10}$$

(módulo de Young)

Uma vez que a tensão é um número puro, as unidades do módulo de Young são as mesmas que a da tensão: força por unidade de área. Alguns valores típicos são indicados na Tabela 11.1. (Esta tabela também fornece valores de dois outros módulos elásticos que discutiremos mais tarde neste capítulo.) Um material com valor elevado de Y é relativamente não deformável: é necessário exercer uma tensão muito elevada para se obter uma dada deformação. Por exemplo, o valor de Y para o aço (2×10^{11} Pa) é muito maior do que o da borracha (5×10^8 Pa).

Quando as forças sobre as extremidades de um objeto são de empurrar em vez de puxar (Figura 11.14), a barra está submetida a uma **compressão**, e a tensão é uma **tensão de compressão**. A **deformação de compressão** de um objeto submetido a uma compressão é definida do mesmo modo que a deformação de dilatação, porém Δl possui sentido contrário. A lei de Hooke e a Equação (11.10) são válidas tanto para a compressão quanto para a dilatação, desde que a tensão de compressão não seja muito elevada.

Tabela 11.1 Módulos de elasticidade aproximados

Material	Módulo de Young, Y (Pa)	Módulo de compressão, B (Pa)	Módulo de cisalhamento, S (Pa)
Alumínio	$7{,}0 \times 10^{10}$	$7{,}5 \times 10^{10}$	$2{,}5 \times 10^{10}$
Bronze	$9{,}0 \times 10^{10}$	$6{,}0 \times 10^{10}$	$3{,}5 \times 10^{10}$
Cobre	11×10^{10}	14×10^{10}	$4{,}4 \times 10^{10}$
Vidro Crown	$6{,}0 \times 10^{10}$	$5{,}0 \times 10^{10}$	$2{,}5 \times 10^{10}$
Ferro	21×10^{10}	16×10^{10}	$7{,}7 \times 10^{10}$
Chumbo	$1{,}6 \times 10^{10}$	$4{,}1 \times 10^{10}$	$0{,}6 \times 10^{10}$
Níquel	21×10^{10}	17×10^{10}	$7{,}8 \times 10^{10}$
Aço	20×10^{10}	16×10^{10}	$7{,}5 \times 10^{10}$

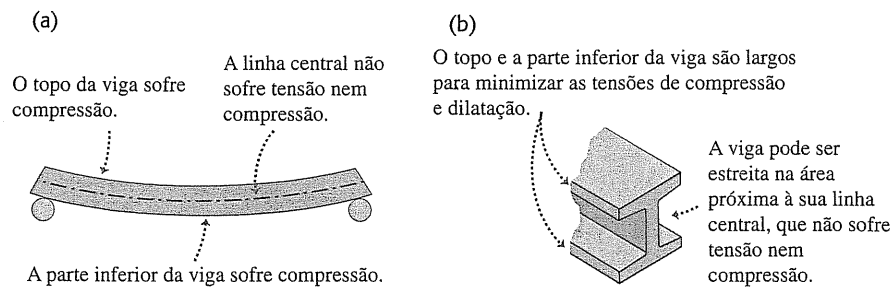


Figura 11.15 (a) Uma viga suportada em ambas as extremidades está submetida tanto à compressão quanto à tensão. (b) O formato em intersecção minimiza tanto a tensão quanto o peso.

Para muitos materiais, o módulo de Young possui o mesmo valor tanto para a tensão de dilatação quanto para a tensão de compressão. Os materiais compósitos, como, por exemplo, o concreto e a pedra, constituem uma exceção; eles podem suportar tensão de compressão, mas não suportam tensão de dilatação comparável. A pedra foi o material de construção primitivo, usado nas civilizações antigas, como a da Babilônia, Assíria e Roma, portanto suas estruturas destinavam-se a evitar tensões de dilatação. Isso explica por que essas civilizações fizeram uso extensivo de arcos em entradas e pontes, onde o peso do material sobreposto comprime as pedras do arco, unindo-as sem exercer nenhuma tensão sobre elas.

Em muitas situações, um corpo pode ser submetido simultaneamente a uma tensão de dilatação e a uma tensão de compressão. Como exemplo, uma viga horizontal suportada em cada extremidade que se encurva sob a ação do próprio peso. Como resultado, o topo da viga está submetido a uma compressão, enquanto a parte inferior está sob tensão de dilatação (Figura 11.15a). Para minimizar a tensão e, portanto, a tensão de encurvamento, a viga deve ser projetada de modo que sua seção reta seja grande no topo e na parte inferior. Não existe tensão de dilatação nem tensão de compressão ao longo da linha central da viga, de modo que essa parte pode possuir uma seção reta pequena: isso ajuda a minimizar o peso da barra e também a reduzir a tensão. O resultado é uma viga em forma de I, que é uma forma familiar usada na construção de edifícios (Figura 11.15b).

Exemplo 11.5

TENSÃO DE DILATAÇÃO E DEFORMAÇÃO DE DILATAÇÃO

Um eixo de aço de 2,0 m de comprimento possui seção reta com área de 0,30 cm^2. O eixo está suspenso por uma das extremidades em uma estrutura de suporte, e uma fresadora de 550 kg é suspensa na extremidade inferior do eixo. Determine a tensão, a deformação e a dilatação do eixo.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este exemplo usa as definições de tensão, deformação e módulo de Young, que é o módulo de elasticidade apropriado para um objeto sob tensão.

PREPARAR: usamos as equações (11.8), (11.9) e (11.10) para achar a tensão de dilatação, a deformação de dilatação e a dilatação Δl. Também usamos o valor de Y para o aço da Tabela 11.1.

EXECUTAR: obtemos

$$\text{Tensão} = \frac{F_\perp}{A} = \frac{(550\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)}{3{,}0 \times 10^{-5}\ \text{m}^2} = 1{,}8 \times 10^8\ \text{Pa}$$

$$\text{Deformação} = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\text{Tensão}}{Y} = \frac{1{,}8 \times 10^8\ \text{Pa}}{20 \times 10^{10}\ \text{Pa}} = 9{,}0 \times 10^{-4}$$

$$\text{Dilatação} = \Delta l = (\text{Deformação}) \times l_0 = (9{,}0 \times 10^{-4})(2{,}0\ \text{m})$$
$$= 0{,}0018\ \text{m} = 1{,}8\ \text{mm}$$

AVALIAR: o pequeno valor dessa dilatação, que resulta de uma carga igual a cerca de meia tonelada, é uma confirmação da rigidez do aço.

Tensão e deformação volumétrica

Quando um mergulhador submerge no oceano profundo, a água exerce uma pressão aproximadamente uniforme sobre sua superfície e o comprime, fazendo com que seu volume seja ligeiramente menor (Figura 11.12b). Essa situação é diferente da tensão de dilatação e da tensão de compressão que discutimos anteriormente. A tensão agora é uma pressão uniforme em todas as direções, e a deformação resultante é uma variação de volume. Usamos os termos **tensão volumétrica de compressão** (ou **tensão volumétrica**) e **deformação de compressão volumétrica** (ou **deformação volumétrica**) para descrever essas grandezas.

Se um objeto for imerso em um fluido (líquido ou gás) em repouso, o fluido exercerá uma força sobre todas as partes do objeto; essa força será *perpendicular* à superfície. (Se tentarmos exercer uma força paralela à superfície, o fluido escoará lateralmente em reação a esse esforço.) A força ortogonal $F_\perp$ por unidade de área que o fluido exerce sobre a superfície de um objeto imerso denomina-se **pressão** p do fluido:

$$p = \frac{F_\perp}{A} \qquad (11.11)$$

(pressão em um fluido)

A pressão em um fluido aumenta com a profundidade. Por exemplo, a pressão do ar é cerca de 21% maior no nível do mar do que em uma cidade localizada a 1,6 km de altura. Se um objeto imerso é relativamente pequeno, porém, podemos ignorar as diferenças de pressão em função da profundidade para fins de cálculo da tensão volumétrica. Portanto, trataremos a pressão como se tivesse o

mesmo valor em todos os pontos da superfície de um objeto imerso.

A pressão possui as mesmas unidades de tensão; as unidades usadas comumente são 1 Pa (= 1 N/m^2) e 1 lb/pol^2 (1 psi). A **atmosfera** é outra unidade de uso comum, sendo abreviada por atm. Uma atmosfera é aproximadamente igual à pressão média exercida pela atmosfera ao nível do mar:

$$1 \text{ atmosfera} = 1 \text{ atm} = 1{,}013 \times 10^5 \text{ Pa} = 14{,}7 \text{ lb/pol}^2$$

ATENÇÃO Pressão *versus* força Ao contrário da força, a pressão não possui nenhuma direção intrínseca. A pressão sobre a superfície de um objeto imerso é a mesma seja qual for a orientação da superfície. Portanto, a pressão é uma grandeza *escalar*, não uma grandeza vetorial.

A pressão desempenha o mesmo papel da tensão em uma deformação volumétrica. A deformação correspondente é a fração da variação do volume (Figura 11.16), ou seja, a razão entre a variação de volume ΔV e o volume inicial V_0:

$$\text{Deformação volumétrica} = \frac{\Delta V}{V_0} \qquad (11.12)$$

A deformação volumétrica é uma variação de volume por unidade de volume. Tal como a deformação de dilatação e a deformação de compressão, ela é dada por um número puro, sem unidades.

Quando a lei de Hooke é obedecida, um aumento da pressão (tensão volumétrica) produz uma deformação volumétrica *proporcional* (fração da variação do volume). O módulo de elasticidade correspondente (a razão entre a tensão e a deformação) denomina-se **módulo de compressão**, designado pela letra B. Quando a pressão sobre um corpo varia de uma quantidade pequena Δp, desde p_0 até $p_0 + \Delta p$, e a deformação volumétrica correspondente é $\Delta V/V_0$, a lei de Hooke assume a forma

$$B = \frac{\text{Tensão volumétrica}}{\text{Deformação volumétrica}} = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V_0} \qquad (11.13)$$

(módulo de compressão)

Incluímos um sinal negativo nessa equação, porque um *aumento* de pressão sempre produz uma *diminuição* de volume. Em outras palavras quando Δp é positivo, ΔV é negativo. O módulo de compressão B é uma grandeza positiva.

Para pequenas variações de pressão em um sólido ou em um líquido, consideramos B constante. O módulo de compressão de um *gás*, contudo, depende da pressão inicial p_0. A Tabela 11.1 inclui valores do módulo de compressão para diversos materiais. Sua unidade, força por unidade de área, é a mesma unidade da pressão (e da tensão de compressão ou da tensão de dilatação).

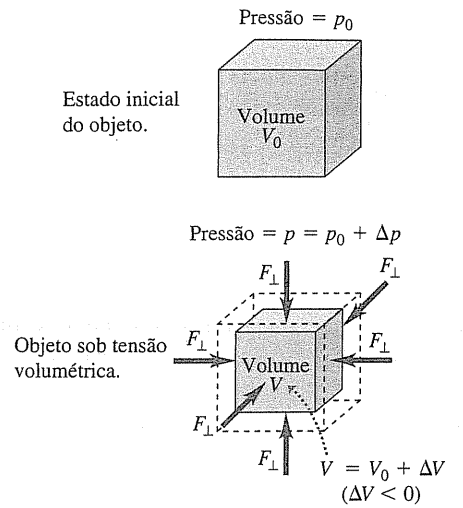


Figura 11.16 Um objeto sob tensão volumétrica. Sem a tensão, o cubo possui volume V_0; quando submetido à tensão, o cubo possui um volume menor V. A variação de volume ΔV está exagerada para maior clareza.

O inverso do módulo de compressão denomina-se **compressibilidade** que é designada pela letra k. Pela Equação (11.13),

$$k = \frac{1}{B} = -\frac{\Delta V/V_0}{\Delta p} = -\frac{1}{V_0}\frac{\Delta V}{\Delta p} \qquad (11.14)$$

(compressibilidade)

A compressibilidade é dada pela fração da diminuição do volume, $-\Delta V/V_0$, por unidade de de Δp da pressão. As unidades de compressibilidade são dadas pelo *inverso da unidade de pressão*, Pa^{-1} ou atm^{-1}.

Os valores da compressibilidade k para diversos líquidos são indicados na Tabela 11.2. Por exemplo, a compressibilidade da água é igual a $46{,}4 \times 10^{-6}$ atm^{-1}, o que significa que para cada aumento de pressão de uma atmosfera o volume de água diminui de 46,4 partes por milhão. Materiais com módulos de compressão pequenos ou compressibilidades elevadas podem ser comprimidos com facilidade.

Tabela 11.2 Compressibilidades de líquidos

	Compressibilidade, k	
Líquido	**Pa^{-1}**	**atm^{-1}**
Dissulfeto de carbono	93×10^{-11}	94×10^{-6}
Álcool etílico	110×10^{-11}	111×10^{-6}
Glicerina	21×10^{-11}	21×10^{-6}
Mercúrio	$3{,}7 \times 10^{-11}$	$3{,}8 \times 10^{-6}$
Água	$45{,}8 \times 10^{-11}$	$46{,}4 \times 10^{-6}$

Exemplo 11.6

TENSÃO E DEFORMAÇÃO VOLUMÉTRICA Uma prensa hidráulica contém 0,25 m^3 (250 L) de óleo. Calcule a diminuição de volume do óleo quando ele é submetido a um aumento de pressão $\Delta p = 1{,}6 \times 10^7$ Pa (cerca de 160 atm). O módulo de compressão do óleo é $B = 5{,}0 \times 10^9$ Pa (cerca de $5{,}0 \times 10^4$ atm) e sua compressibilidade é $k = 1/B = 20 \times 10^{-6}\ \text{atm}^{-1}$.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este exemplo usa os conceitos de tensão e deformação volumétrica. A incógnita do problema é a variação de volume ΔV.

PREPARAR: conhecemos o módulo de compressão e a compressibilidade, portanto podemos usar tanto a Equação (11.13) quanto a Equação (11.14) para calcular ΔV.

EXECUTAR: para acharmos ΔV, resolvemos a Equação (11.13)

$$\Delta V = -\frac{V_0\,\Delta p}{B} = -\frac{(0{,}25\ \text{m}^3)(1{,}6 \times 10^7\ \text{Pa})}{5{,}0 \times 10^9\ \text{Pa}}$$
$$= -8{,}0 \times 10^{-4}\ \text{m}^3 = -0{,}80\ \text{L}$$

Alternativamente, podemos usar a Equação (11.14). Explicitando ΔV e usando as conversões de unidade aproximadas dadas anteriormente, obtemos

$$\Delta V = -kV_0\,\Delta p = -(20 \times 10^{-6}\ \text{atm}^{-1})(0{,}25\ \text{m}^3)(160\ \text{atm})$$
$$= -8{,}0 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$$

AVALIAR: obtemos o mesmo resultado para ΔV com ambas as abordagens, conforme a expectativa. Note que ΔV é negativa, indicando que o volume diminui quando a pressão aumenta. Embora o aumento da pressão seja muito grande, a *fração* da variação de volume é muito pequena:

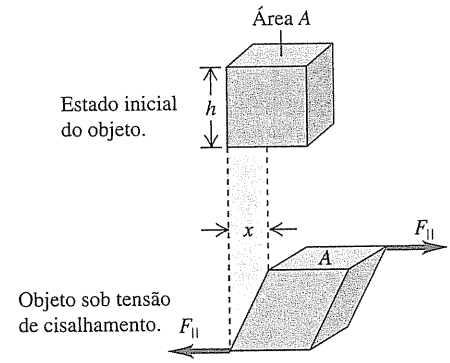
$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{-8{,}0 \times 10^{-4}\ \text{m}^3}{0{,}25\ \text{m}^3} = -0{,}0032 \qquad \text{ou} \qquad -0{,}32\%$$

Tensão e deformação de cisalhamento

A terceira situação envolvendo uma relação de tensão-deformação denomina-se *cisalhamento*. A fita indicada na Figura 11.12c está submetida a uma **tensão de cisalhamento:** uma parte da fita está sendo empurrada de baixo para cima enquanto outra parte adjacente está sendo empurrada de cima para baixo, produzindo uma deformação na fita. A Figura 11.17 mostra um corpo sendo deformado por uma tensão de cisalhamento. Na figura, forças de módulo igual, mas direção contrária, atuam *tangencialmente* às superfícies das extremidades opostas do objeto. Definimos a tensão de cisalhamento como a força $F_\parallel$ *tangente* à superfície de um material, dividida pela área A sobre a qual ela atua:

$$\text{Tensão de cisalhamento} = \frac{F_\parallel}{A} \qquad (11.15)$$

A tensão de cisalhamento, assim como os outros dois tipos de tensão, é uma força por unidade de área.



$$\text{Tensão de cisalhamento} = \frac{F_\parallel}{A}$$

$$\text{Deformação de cisalhamento} = \frac{x}{h}$$

Figura 11.17 Um corpo submetido a uma tensão de cisalhamento. São aplicadas forças tangentes às superfícies opostas do objeto (em contraste com a situação na Figura 11.13, na qual as forças atuam perpendicularmente às superfícies). A deformação x está exagerada para fins de clareza.

A Figura 11.17 mostra que uma face do objeto sob tensão de cisalhamento é deslocada por uma distância x em relação à face oposta. Definimos a **deformação de cisalhamento** como a razão entre o deslocamento x e a dimensão transversal h:

$$\text{Deformação de cisalhamento} = \frac{x}{h} \qquad (11.16)$$

Em uma situação real, x é quase sempre muito menor do que h. Assim como todos os tipos de deformação, a deformação de cisalhamento é um número sem dimensões; ela é uma razão entre dois comprimentos.

Quando as forças são suficientemente pequenas para que a lei de Hooke seja válida, a deformação de cisalhamento é *proporcional* à tensão de cisalhamento. O módulo de elasticidade correspondente (a razão entre a tensão de cisalhamento e a deformação de cisalhamento) denomina-se **módulo de cisalhamento**, designado pela letra S:

$$S = \frac{\text{Tensão de cisalhamento}}{\text{Deformação de cisalhamento}} = \frac{F_\parallel/A}{x/h} = \frac{F_\parallel}{A}\frac{h}{x} \qquad (11.17)$$

(módulo de cisalhamento)

onde x e h são definidos como na Figura 11.17.

Diversos valores do módulo são indicados na Tabela 11.1. Para um dado material, o valor de S é geralmente de 1/3 a 1/2 do valor do módulo de Young Y da tensão de dilatação. Lembre-se de que os conceitos de tensão de cisalhamento, deformação de cisalhamento e módulo de cisalhamento aplicam-se somente para um material *sólido*. A explicação é a seguinte: as forças de cisalhamento indicadas na Figura 11.17 são necessárias para deformar o bloco sólido, e o bloco tende a retornar para a forma original quando as forças de cisalhamento são removidas. Líquidos e gases, ao contrário, não possuem uma forma definida.

Exemplo 11.7

TENSÃO DE CISALHAMENTO E DEFORMAÇÃO Suponha que o corpo na Figura 11.17 seja a placa de bronze na base de uma escultura em uma praça; ela sofre a ação de forças de cisalhamento produzidas por um terremoto. A placa possui uma face quadrada com lado igual a 0,80 m e sua profundidade é igual a 0,50 cm. Qual é a força mínima que deve ser exercida sobre cada aresta para que o deslocamento x (veja a Figura 11.17) seja igual a 0,16 mm?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este exemplo usa a relação entre tensão de cisalhamento, deformação de cisalhamento e módulo de cisalhamento. A incógnita do problema é a força $F_\parallel$ exercida paralelamente a cada aresta, como indica a Figura 11.17.

PREPARAR: primeiramente calculamos a deformação de cisalhamento usando a Equação (11.16) e a seguir determinamos a tensão de cisalhamento pela Equação (11.17). Então poderemos resolver a incógnita $F_\parallel$ pela Equação (11.15). Os valores de todas as demais grandezas são dados, incluindo o módulo de cisalhamento do bronze (de acordo com a Tabela 11.1, $S = 3{,}5 \times 10^{10}$ Pa). Note que h na Figura 11.17 representa 0,80 m de comprimento de cada lado da placa quadrada, e a área A é o produto do comprimento de 0,80 m pela espessura de 0,50 cm.

EXECUTAR: a deformação de cisalhamento é

$$\text{Deformação de cisalhamento} = \frac{x}{h} = \frac{1{,}6 \times 10^{-4}\ \text{m}}{0{,}80\ \text{m}} = 2{,}0 \times 10^{-4}$$

Pela Equação (11.17) a tensão de cisalhamento é obtida multiplicando-se a deformação de cisalhamento pelo módulo de cisalhamento S,

$$\begin{aligned}\text{Tensão} &= (\text{Deformação de cisalhamento}) \times S \\ &= (2{,}0 \times 10^{-4})(3{,}5 \times 10^{10}\ \text{Pa}) = 7{,}0 \times 10^{6}\ \text{Pa}\end{aligned}$$

Pela Equação (11.15), a força em cada aresta é a tensão de cisalhamento multiplicada pela área da aresta:

$$\begin{aligned}F_\parallel &= (\text{Tensão de cisalhamento}) \times A \\ &= (7{,}0 \times 10^{6}\ \text{Pa})(0{,}80\ \text{m})(0{,}0050\ \text{m}) = 2{,}8 \times 10^{4}\ \text{N}\end{aligned}$$

AVALIAR: essa força é aproximadamente igual ao peso de um corpo de 3 toneladas! O bronze possui um grande módulo de cisalhamento, o que significa que ele é intrinsecamente difícil deformar. Além disso, a placa é relativamente espessa (0,50 cm), portanto a área A é relativamente grande e uma grande força $F_\parallel$ é necessária para fornecer a necessária tensão $F_\parallel/A$.

Teste sua compreensão da Seção 11.4 Uma barra de cobre com área de seção reta de 0,500 cm^2 e comprimento de 1,0 m é dilatada em $2{,}0 \times 10^{-2}$ mm, e uma barra de aço com a mesma área de seção reta, mas 0,100 m de comprimento é dilatada em $2{,}0 \times 10^{-3}$ mm. a) Qual das duas barras possui maior *deformação* de dilatação? i) a barra de cobre; ii) a barra de aço; iii) a deformação é a mesma em ambos os casos. b) Qual das duas barras possui *tensão* de dilatação maior? i) a barra de cobre; ii) a barra de aço; iii) a tensão é a mesma em ambos os casos. ∎

11.5 Elasticidade e plasticidade

A lei de Hooke – a proporcionalidade entre a tensão e a deformação em deformações elásticas – possui um limite de validade. Nas seções anteriores usamos frases como 'desde que as forças sejam suficientemente pequenas para que a lei de Hooke seja válida'. Quais *são* os limites efetivos para a aplicação da lei de Hooke? Sabemos que se puxamos, comprimimos ou torcemos *qualquer objeto* com força suficiente, ele pode se encurvar ou quebrar. Como podemos precisar melhor esse conceito?

Vamos examinar novamente a tensão de dilatação e deformação de dilatação. Suponha que você faça um gráfico da tensão em função da deformação. Quando a lei de Hooke é obedecida, o gráfico consiste em uma linha reta com inclinação igual ao módulo de Young. A Figura 11.18 mostra um gráfico típico de tensão *versus* deformação para um metal como o cobre e o ferro doce. A deformação é indicada como uma *porcentagem* do alongamento; a escala horizontal não é uniforme depois da primeira porção de curva, que vai até uma deformação inferior a 1%. O primeiro trecho é uma linha reta, indicando que a lei de Hooke é válida com a tensão diretamente proporcional à deformação. Essa porção linear termina no ponto a; a tensão nesse ponto denomina-se *limite de proporcionalidade*.

De a até b, a tensão e a deformação não são mais proporcionais, e a lei de Hooke *não* é obedecida. Caso a carga da tensão seja removida gradualmente, começando em qualquer ponto entre O e b, a curva é retraçada e o material retorna ao seu comprimento inicial. A deformação é *reversível*, e as forças são conservativas; a energia fornecida ao material para produzir a deformação é recuperada quando removemos a tensão. Na região Ob dizemos que o material possui um *comportamento elástico*. O ponto b, ponto final dessa região, denomina-se *ponto de ruptura*; a tensão nesse ponto atingiu o chamado *limite elástico*.

Quando aumentamos a tensão acima do ponto b, a deformação continua a crescer. Porém, agora, quando removemos a carga em algum ponto posterior a b, digamos c,

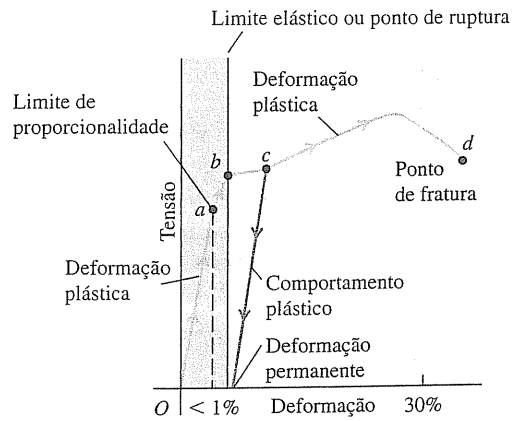


Figura 11.18 Diagrama típico de tensão *versus* deformação para um metal dúctil submetido à tensão.

o material não mais retorna ao seu comprimento original. Em vez disso, ele segue a linha indicada pelas setas na Figura 11.18. O comprimento correspondente a uma tensão nula é agora maior que o comprimento original; o material sofreu uma deformação irreversível e adquiriu agora uma *deformação permanente*. Um aumento da tensão acima do ponto *c* produz um grande aumento da deformação para um aumento relativamente pequeno da tensão, até atingir o ponto *d*, no qual ocorre a *fratura* do material. O comportamento do material no intervalo entre *b* e *d* denomina-se *escoamento plástico* ou *deformação plástica*. Uma deformação plástica é irreversível; quando a tensão é removida, o material não volta ao seu estado inicial.

Para alguns materiais, como aqueles cujas propriedades estão indicadas na Figura 11.18, uma grande deformação plástica pode ocorrer entre o limite de elasticidade e o ponto de fratura. Esse tipo de material denomina-se *dúctil*. Porém, quando a fratura ocorre imediatamente depois de ultrapassar o limite de elasticidade, o material denomina-se *quebradiço*. Um fio de ferro doce que pode possuir uma grande deformação de dilatação permanente sem quebrar é dúctil, enquanto é quebradiço o fio de aço da corda de um piano que se rompe logo depois que é ultrapassado o limite de elasticidade.

Algo muito curioso pode ocorrer quando um objeto é dilatado e a seguir pode voltar a relaxar. A Figura 11.19 mostra uma curva tensão *versus* deformação para uma borracha vulcanizada que foi esticada até cerca de sete vezes seu comprimento inicial. A tensão não é proporcional à deformação, mas o comportamento é elástico porque quando a tensão é removida o material retorna ao seu comprimento original. Contudo, quando se aumenta a tensão, o material segue uma curva *diferente* da curva que é seguida quando se diminui a tensão. Esse caso denomina-se *histerese elástica*. O trabalho realizado pelo material quando ele retorna ao seu estado inicial é menor do que o trabalho realizado sobre o material para deformá-lo; nesse caso existem forças não conservativas associadas com o atrito interno. A borracha que possui uma histerese elástica elevada é muito útil para absorver vibrações, como em montagem de máquinas e nas buchas dos amortecedores dos carros.

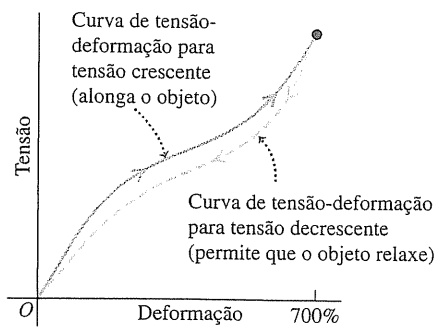


Figura 11.19 Diagrama típico da tensão contra deformação para a borracha vulcanizada. As curvas são diferentes para tensão crescente ou decrescente, um fenômeno denominado histerese elástica.

Tabela 11.3 Tensão de ruptura aproximada de alguns materiais

Material	Tensão de ruptura (Pa ou N/m²)
Alumínio	$2{,}2 \times 10^8$
Bronze	$4{,}7 \times 10^8$
Vidro	10×10^8
Ferro	$3{,}0 \times 10^8$
Bronze fosforoso	$5{,}6 \times 10^8$
Aço	$5 - 20 \times 10^8$

A tensão necessária para produzir a fratura real de um material denomina-se *tensão de fratura* ou *limite de rigidez* ou (no caso da tensão de dilatação) *rigidez de tensão*. Dois materiais, como dois tipos de aço, podem possuir constantes elásticas muito semelhantes, porém tensões de fratura muito diferentes. A Tabela 11.3 fornece alguns valores típicos da tensão de fratura para diversos materiais submetidos a tensões.

Teste sua compreensão da seção 11.5 Ao estacionar o carro em uma rua movimentada, você acidentalmente bate a traseira do veículo em um poste de aço. Você puxa o carro para a frente até não mais tocar o poste e sai para verificar o dano. Como estará o pára-choque traseiro se a deformação causada pelo impacto for a) menor do que o limite proporcional; b) maior do que o limite proporcional, mas menor do que o ponto de ruptura; c) maior que o ponto de ruptura, mas menor do que o ponto de fratura; e d) maior do que o ponto de fratura? ▮

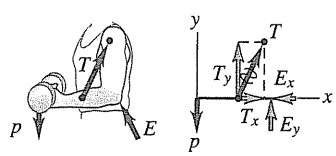
Resumo

Condições de equilíbrio: para um corpo rígido estar em equilíbrio, duas condições devem ser obedecidas. A primeira, a soma vetorial das forças deve ser igual a zero. A segunda, a soma dos torques em relação a qualquer ponto deve ser igual a zero. O torque devido ao peso de um corpo pode ser obtido supondo-se que o peso do corpo esteja concentrado no centro de gravidade, que é o mesmo ponto do centro de massa se $\vec{g}$ possuir o mesmo valor em todos os pontos (Exemplos 11.1 a 11.4).

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0 \tag{11.1}$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 \quad \text{em torno de } \textit{nenhum} \text{ ponto} \tag{11.2}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} \tag{11.4}$$

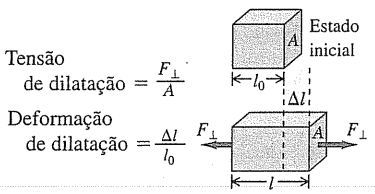


Tensão, deformação e lei de Hooke: a lei de Hooke afirma que em deformações elásticas, a tensão (força por unidade de área) é proporcional à deformação (fração da deformação). A constante de proporcionalidade é denominada módulo de elasticidade.

$$\frac{\text{Tensão}}{\text{Deformação}} = \text{Módulo de elasticidade} \qquad (11.7)$$

Tensão de dilatação e de compressão: A tensão de dilatação é a força de dilatação por unidade de área, $F_\perp/A$. A deformação de dilatação é a fração da variação de comprimento, $\Delta l/l_0$. O módulo de elasticidade é denominado módulo Y de Young. A tensão e a deformação de compressão são definidos por analogia (Exemplo 11.5).

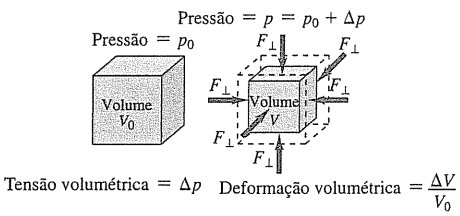
$$Y = \frac{\text{Tensão de dilatação}}{\text{Deformação de dilatação}} = \frac{F_\perp/A}{\Delta l/l_0} = \frac{F_\perp}{A} \qquad (11.10)$$



Tensão volumétrica: A pressão de um fluido é a força por unidade de área. A tensão volumétrica é a variação de pressão Δp, e a deformação volumétrica é a fração da variação de volume $\Delta V/V_0$. O módulo de elasticidade é denominado módulo de compressão, B. A compressibilidade k é o inverso do módulo de compressão: $k = 1/B$ (Exemplo 11.6).

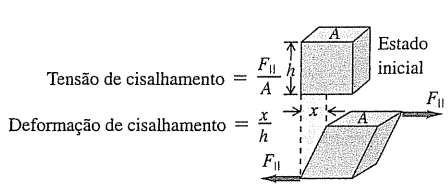
$$p = \frac{F_\perp}{A} \qquad (11.11)$$

$$B = \frac{\text{Tensão volumétrica}}{\text{Deformação volumétrica}} = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V_0} \qquad (11.13)$$



Tensão de cisalhamento: A tensão de cisalhamento é a força por unidade de área, $F_\parallel/A$, no caso de uma força aplicada paralelamente a uma superfície. A deformação de cisalhamento é o deslocamento x de um lado dividido pela dimensão transversal h. O módulo de elasticidade é denominado módulo de cisalhamento, S (Exemplo 11.7).

$$S = \frac{\text{Tensão de cisalhamento}}{\text{Deformação de cisalhamento}} = \frac{F_\parallel/A}{x/h} = \frac{F_\parallel}{A}\frac{h}{x} \qquad (11.17)$$



Os limites da lei de Hooke: O limite de proporcionalidade corresponde à tensão máxima para a qual a tensão e a deformação são proporcionais. Além do limite de proporcionalidade, a lei de Hooke não é mais válida. O limite de elasticidade é a tensão acima da qual ocorre deformação irreversível. A tensão de fratura ou limite de rigidez é a tensão acima da qual ocorre a fratura do material.

Principais termos

atmosfera, 367
centro de gravidade, 356
compressão, 365
compressibilidade, 367
deformação de cisalhamento, 368
deformação de compressão, 365
deformação de dilatação, 365
deformação volumétrica, 366
deformação, 364
equilíbrio estático, 356
lei de Hooke, 364
módulo de cisalhamento, 368
módulo de compressão, 367
módulo de elasticidade, 364
módulo de Young, 365
pascal, 364
pressão, 366
primeira condição de equilíbrio, 356
segunda condição de equilíbrio, 356
tensão de cisalhamento, 368
tensão de compressão, 365
tensão de dilatação, 364
tensão volumétrica, 366
tensão, 364

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Cada pedra no arco está sob compressão, não tensão. Isso se dá porque as forças sobre as pedras tendem a empurrá-las para o interior, em direção ao centro do arco, e assim comprimem umas contra as outras. Em comparação com uma parede de sustentação maciça, uma parede com arcos é tão forte quanto, porém sua construção é muito mais econômica.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

11.1 Resposta: (i) A situação (i) atende a ambas as condições de equilíbrio porque a gaivota possui aceleração nula (portanto $\sum\vec{F} = \mathbf{0}$) e não tende à rotação (portanto $\sum\vec{\tau} = \mathbf{0}$). A situação (ii) satisfaz a primeira condição porque o virabrequim como um todo não acelera pelo espaço, mas não satisfaz a segunda condição; o virabrequim possui aceleração angular, portanto $\sum\vec{\tau}$ é diferente de zero. A situação (iii) satisfaz a segunda condição (não há tendência à rotação), mas não a primeira; a bola de beisebol acelera quando arremessada (em função da gravidade), portanto $\sum\vec{F}$ é diferente de zero.

11.2 Resposta (ii) Em equilíbrio, o centro de gravidade deve estar no ponto de suporte. Como a pedra e a vareta possuem a mesma massa e, portanto, o mesmo peso, o centro de gravidade do sistema está no meio do caminho entre os seus respectivos centros. O cg da vareta é de 0,50 m a partir da extremidade esquerda (ou seja, no meio da vareta), portanto o cg do sistema rocha-vareta é de 0,25 a partir da extremidade esquerda.

11.3 Resposta (ii), (i), (iii) Trata-se da mesma situação descrita no Exemplo 11.4, com a barra substituindo o antebraço, a dobradiça substituindo o cotovelo e o cabo substituindo o tendão. A única diferença é que o ponto de ligação do cabo se situa na extremidade da barra e, portanto, as distâncias D e L são idênticas. Pelo Exemplo 11.4, a tensão é

$$T = \frac{Lp}{L\,\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{p}{\mathrm{sen}\,\theta}$$

Como sen θ é menor do que 1, a tensão T é maior do que o peso p. O componente vertical da força exercida pela dobradiça é

$$E_y = -\frac{(L - L)p}{L} = 0$$

Nessa situação, a dobradiça não exerce *nenhuma* força vertical. É fácil verificar isso se você calcular os torques em torno da extremidade direita da barra horizontal: a única força que exerce um torque em torno desse ponto é o componente vertical da força da dobradiça, portanto, esse componente de força deve ser igual a zero.

11.4 Respostas (a) (iii), (b) (ii) No item (a), a barra de cobre possui 10 vezes a dilatação Δl da barra de aço, mas também possui 10 vezes o comprimento original l_0. Portanto, a deformação de dilatação $\Delta l/l_0$ é a mesma para ambas as barras. No item (b), a tensão é igual ao módulo Y de Young multiplicado pela deformação. Pela Tabela 11.1, o aço possui maior valor de Y, portanto uma tensão maior é exigida para se produzir a mesma deformação.

11.5 Em (a) e (b), o pára-choque retoma o formato original (embora a pintura possa estar arranhada). Em (c), o pára-choque terá uma deformação permanente. Em (d), o pára-choque será cortado ou quebrado.

Questões para discussão

Q11.1 Um corpo rígido girando com movimento de rotação uniforme em torno de um eixo fixo satisfaz à primeira e à segunda condição de equilíbrio? Explique sua resposta. Isso significa que cada parte do corpo está em equilíbrio? Explique.

Q11.2 (a) É possível que um corpo esteja em equilíbrio translacional (a primeira condição), mas *não* em equilíbrio rotacional (a segunda condição)? Ilustre sua resposta com um exemplo simples. (b) Um objeto pode estar em equilíbrio rotacional, mas *não* em equilíbrio translacional? Justifique sua resposta com um exemplo simples.

Q11.3 Os pneus de um carro algumas vezes são 'balanceados' sobre uma máquina que usa um pivô que faz a roda girar em torno do centro. Pesos são colocados na periferia da roda até que ela não se incline mais do plano horizontal. Discuta esse procedimento em termos do centro de gravidade.

Q11.4 O centro de gravidade de um corpo sólido está sempre situado no interior do material que constitui o corpo? Caso sua resposta seja negativa, forneça um contra-exemplo.

Q11.5 Na Seção 11.2 sempre admitimos que o valor de g é sempre o mesmo ao longo de todos os pontos do corpo. Essa aproximação *não* é boa quando as dimensões do corpo são suficientemente grandes, visto que o valor de g diminui com a altura. Caso isso seja levado em consideração, verifique se o centro de gravidade de um eixo vertical longo está acima, abaixo ou coincide com o centro de massa do eixo. Explique como esse resultado pode ser usado para manter apontando para a Terra um eixo longo de uma espaçonave em órbita. (Isso seria útil no caso de um satélite usado na meteorologia para que ele possa apontar a lente de sua câmara para a Terra.) A Lua não é exatamente esférica, mas ligeiramente alongada. Explique como esse mesmo efeito pode ser responsável pelo fato de a Lua manter sempre a mesma face apontando para a Terra.

Q11.6 Você deseja equilibrar uma chave de boca suspendendo-a em um único ponto. O equilíbrio é estável, instável ou indiferente quando você suspende a chave em um único ponto acima, abaixo ou sobre o centro de gravidade? Para cada caso forneça o raciocínio que você seguiu para obter a resposta. (Dizemos que um corpo rígido está em equilíbrio *estável* quando uma pequena rotação do corpo produz um torque que tende a fazer o corpo voltar ao equilíbrio; está em equilíbrio *instável* quando uma pequena rotação produz um torque que tende a afastar o corpo de sua posição de equilíbrio; e está em equilíbrio *indiferente* quando uma pequena rotação do corpo não produz nenhum torque.)

Q11.7 Você pode permanecer em pé sobre um assoalho e a seguir erguer o seu corpo apoiando-o sobre as pontas do pé. Por que você não consegue fazer isso quando os dedos de seu pé tocam a parede de sua sala? (Tente fazer isso!).

Q11.8 Você usa um prego horizontal como pivô para suspender livremente uma ferradura de cavalo passando o prego através de um dos buracos da ferradura. A seguir, você suspende pelo mesmo prego um fio longo com um peso em sua extremidade, de modo que o fio fique suspenso verticalmente em frente da ferradura, sem tocá-la. Como você sabe que o centro de gravidade da ferradura está situado ao longo da linha por trás do fio? Como você poderia localizar o centro de gravidade da ferradura repetindo esse procedimento usando outro buraco da ferradura? O centro de gravidade está situado no interior do material da ferradura?

Q11.9 Um objeto consiste de uma bola com peso p colada à extremidade de uma barra uniforme também de peso p. Se você libertar a bola do repouso, com a barra horizontal, qual será seu comportamento enquanto ela cai, se a resistência do ar for desprezível? Ela vai a) permanecer horizontal; b) girar em torno do seu centro de gravidade; c) girar em torno da bola; ou d) girar de modo que a bola oscile de cima para baixo? Explique seu raciocínio.

Q11.10 Suponha que o objeto da Questão 11.9 seja libertada do repouso com a barra inclinada a 60° acima do plano horizontal, com a bola na extremidade superior. Durante a queda, a bola vai a) girar em torno do seu centro de gravidade até ficar horizontal; b) girar em torno do seu centro de gravidade até ficar vertical com a bola na parte inferior; c) girar em torno da bola até ficar vertical com a bola na parte inferior; ou d) permanecer a 60° do plano horizontal?

Q11.11 Por que uma esquiadora aquática que se move com velocidade constante se inclina para trás? Qual é o fator que determina o ângulo de sua inclinação? Desenhe o diagrama do corpo livre para a esquiadora para justificar suas respostas.

Q11.12 Nos tempos pioneiros das carroças, quando uma carroça atolava na lama, as pessoas seguravam firmemente os raios das rodas e tentavam girar as rodas em vez de simplesmente empurrar a carroça. Por quê?

Q11.13 O poderoso Zimbo alega que os músculos das suas pernas são tão fortes que ele pode ficar em pé e inclinar o corpo para a frente para apanhar com os dentes uma maçã sobre o chão. Você pagaria para ver o desempenho dele ou desconfiaria da alegação? Por quê?

Q11.14 Por que é mais fácil manter um haltere de 10 kg em suas mãos com o braço estendido verticalmente para baixo do que mantê-lo com seu braço estendido horizontalmente?

Q11.15 Algumas características de uma pessoa, tais como altura e massa, são fixas (ao menos por períodos relativamente longos de tempo). As seguintes características também são fixas? a) a localização do centro de gravidade do corpo; b) o momento de inércia do corpo em torno de um eixo que passa pelo centro de massa da pessoa. Explique seu raciocínio.

Q11.16 Durante a gravidez, a maioria das mulheres desenvolve dores nas costas por inclinar o corpo para trás ao caminhar. Por que elas têm que andar assim?

Q11.17 Por que um copo de vidro de forma cônica com uma base pequena tomba com mais facilidade do que um copo de vidro cilíndrico? O fato de o copo estar cheio ou vazio é importante?

Q11.18 Quando uma geladeira alta e pesada é empurrada por um assoalho rugoso, o que determina se ela escorrega ou tomba?

Q11.19 Se um cabo de metal tem o seu comprimento duplicado e seu diâmetro triplicado, qual o fator da variação do seu módulo de Young?

Q11.20 Por que o concreto reforçado com barras de aço em seu interior é mais resistente do que o concreto puro?

Q11.21 Um cabo de metal de diâmetro D se alonga em 0,100 mm ao sustentar um peso p. Se um cabo com o mesmo comprimento for usado para sustentar um peso três vezes maior, qual teria de ser o seu diâmetro (em termos de D) de modo que ele ainda se alongue por somente 0,100 mm?

Q11.22 Compare as propriedades mecânicas de um cabo de aço, feito com muitos fios entrelaçados, com as propriedades de um cabo de aço maciço com o mesmo diâmetro. Quais as desvantagens de cada cabo?

Q11.23 O material em um osso humano é essencialmente igual ao existente no osso de um elefante, porém o elefante possui pernas mais grossas. Explique o por quê, em termos da tensão de ruptura.

Q11.24 Existe uma pequena, mas apreciável quantidade de histerese elástica no tendão largo da parte traseira da perna de um cavalo. Explique como isso pode produzir dano ao tendão, quando o cavalo corre com alta velocidade ou durante um tempo demasiado longo.

Q11.25 Quando um bloco de borracha é usado para absorver vibrações em uma máquina por meio de histerese elástica, conforme visto na Seção 11.5, o que acontece com a energia associada com as vibrações?

Exercícios

Seção 11.2 Centro de gravidade

11.1 Uma barra uniforme de 2,40 kg e 50,0 cm de comprimento possui uma pequena massa de 1,10 kg colada na sua extremidade de esquerda e uma pequena massa de 2,20 kg colada na outra extremidade. Você deseja equilibrar esse sistema horizontalmente sobre um sustentáculo colocado bem abaixo do seu centro de gravidade. A que distância da extremidade esquerda o sustentáculo deve ser colocado?

11.2 A Figura 11.20 indica o centro de gravidade de um objeto irregular. Você necessita mover o centro de gravidade por 2,20 cm para a esquerda, colando uma pequenina massa de 1,50 kg, que passará a ser considerada como parte do objeto. Onde você deve colar essa massa adicional?

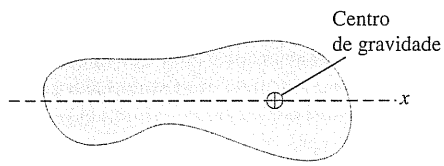


Figura 11.20 Exercício 11.2.

11.3 Uma caixa de massa desprezível está em repouso na extremidade esquerda de uma prancha de 2,0 m e 25,0 kg (Figura 11.21). A largura da caixa é de 75,0 cm, e areia deve ser uniformemente distribuída dentro dela. O centro de gravidade da prancha irregular está a 50,0 cm da extremidade direita. Qual massa de areia deve ser colocada dentro da caixa de modo que a prancha se equilibre horizontalmente sobre o sustentáculo colocado bem abaixo do seu ponto médio?

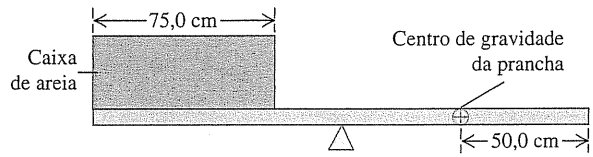


Figura 11.21 Exercício 11.3.

Seção 11.3 Soluções de problemas de equilíbrio de corpos rígidos

11.4 Um alçapão uniforme de 300 N existente em um pavimento está articulado em um dos seus lados. Encontre a força resultante orientada de baixo para cima necessária para começar a abri-lo e a força total exercida sobre essa porta pelas articulações, a) supondo que a força de baixo para cima seja aplicada em seu centro, b) que a força de baixo para cima seja aplicada no centro da aresta oposta à aresta da articulação.

11.5 Levantando uma escada. Uma escada transportada em um caminhão de bombeiro possui 20,0 m de comprimento. A escada pesa 2800 N, e o centro de gravidade está situado no seu centro. A escada é articulada em uma extremidade (A) com um eixo de apoio (Figura 11.22); o torque devido ao atrito no eixo pode ser desprezado. A escada é levantada para sua posição mediante uma força aplicada em C por um pistão hidráulico. O ponto C está a 8,0 m do ponto A, e a força $\vec{F}$ exercida pelo pistão faz um ângulo de 40° com a escada. Qual deve ser o módulo de $\vec{F}$ para que a escada esteja na iminência de ser levantada do seu apoio no ponto B? Comece com um diagrama do corpo livre para a escada.

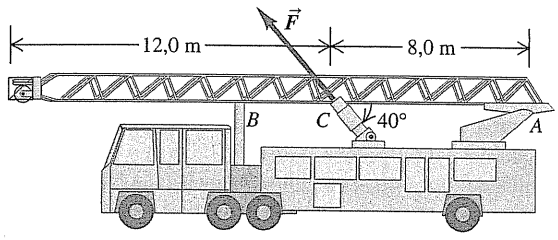


Figura 11.22 Exercício 11.5.

11.6 Duas pessoas transportam uma prancha de madeira uniforme com 3,0 m de comprimento e peso de 160 N. Se uma das pessoas aplica em uma extremidade uma força de baixo para cima de 60 N, em qual ponto a outra pessoa deve suspender a prancha? Comece com um diagrama do corpo livre para a prancha.

11.7 Duas pessoas transportam um motor elétrico pesado, colocando-o sobre uma prancha leve com 2,0 m de comprimento. Uma das pessoas suspende uma das extremidades com uma força de 400 N e a outra suspende a outra extremidade com uma força de 600 N.a) Qual é o peso do motor e em que ponto ao longo da tábua está localizado o seu centro de gravidade? b) Suponha que a prancha não seja leve, mas pese 200 N, com o centro de gravidade localizado no seu centro, e as duas pessoas exerçam as mesmas forças de antes. Qual é o peso do motor nesse caso, e onde está localizado o seu centro de gravidade?

11.8 Uma prateleira uniforme de 60,0 cm e 50,0 N é horizontalmente sustentada por dois cabos verticais presos ao teto inclinado (Figura 11.23). Uma ferramenta muito pequena de 25,0 N é colocada sobre a prateleira no meio do caminho entre os pontos em que os cabos estão presos. Ache a tensão em cada cabo. Comece com um diagrama do corpo livre para a prateleira.

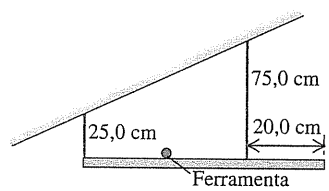


Figura 11.23 Exercício 11.8.

11.9 Uma barra uniforme de 350 N e 1,50 m é suspensa horizontalmente por dois cabos verticais presos em cada extremidade. O cabo A pode suportar uma tensão máxima de 500,0 N e o cabo B pode suportar até 400,0 N. Você deseja colocar um pequeno peso sobre essa barra. a) Qual é o peso máximo que você pode colocar sem romper qualquer dos dois cabos e b) em que ponto você deve colocar esse peso?

11.10 Uma escada uniforme de 5,0 m de comprimento repousa contra uma parede vertical sem atrito e sua extremidade inferior está situada a 3,0 m da parede. A escada pesa 160 N. O coeficiente de atrito estático entre o solo e a base da escada é igual a 0,40. Um homem pesando 740 N sobe lentamente a escada. Comece desenhando um diagrama do corpo livre para a escada. a) Qual é a força de atrito máxima que o solo pode exercer sobre a escada em sua extremidade inferior? b) Qual é a força de atrito efetiva quando o homem sobe 1,0 m ao longo da escada? c) Até que distância ao longo da escada ele pode subir antes que a escada comece a escorregar?

11.11 Uma prancha de trampolim com 3,0 m de comprimento é suportada em um ponto situado a 1,0 m de uma de suas extremidades, e uma mergulhadora pesando 500 N está em pé na outra extremidade (Figura 11.24). A prancha possui seção reta uniforme e pesa 280 N. Calcule a) a força exercida sobre o ponto de suporte; b) a força na extremidade da esquerda.

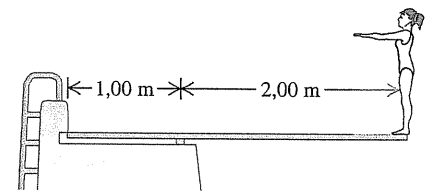


Figura 11.24 Exercício 11.11.

11.12 Uma viga de alumínio uniforme com 9,0 m de comprimento e peso de 300 N repousa simetricamente sobre dois suportes separados por uma distância de 5,0 m (Figura 11.25). Um adolescente pesando 600 N parte do ponto A e caminha para a direita. a) Em um mesmo diagrama, construa dois gráficos mostrando as forças de baixo para cima F_A e F_B exercidas sobre a viga nos pontos A e B, em função da coordenada x do adolescente. Seja 1 cm = 100 N na escala vertical e 1 cm = 1,0 m na escala horizontal. b) Pelo seu diagrama, até que distância à direita do ponto B ele pode caminhar sem que a viga tombe? c) Qual será a distância máxima até a extremidade direita da viga em que o ponto de suporte B pode ser colocado para que o adolescente possa atingir essa extremidade sem que comece a tombar?

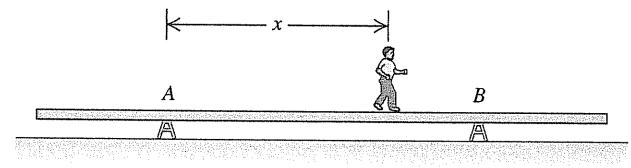


Figura 11.25 Exercício 11.12.

11.13 Determine a tensão T em cada cabo e o módulo, a direção e o sentido da força exercida sobre a viga pelo pivô em cada um dos arranjos indicados na Figura 11.26. Em cada caso, seja p o peso da caixa suspensa que está cheia de objetos de arte. A viga de suporte é uniforme e também possui peso p. Comece cada caso com um diagrama do corpo livre para a viga.

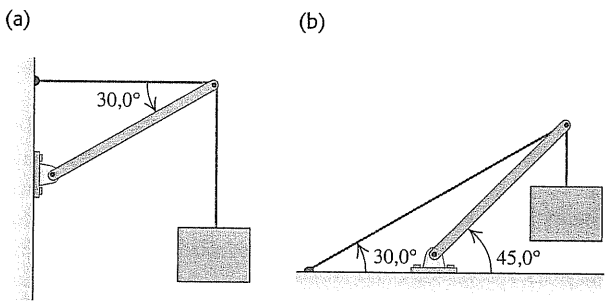


Figura 11.26 Exercício 11.13.

11.14 A viga horizontal da Figura 11.27 pesa 150 N e seu centro de gravidade está localizado em seu centro. Ache a) a tensão no cabo; b) os componentes horizontal e vertical da força exercida sobre a viga na parede.

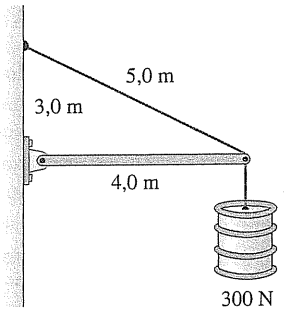


Figura 11.27 Exercício 11.14.

11.15 Uma porta de 1,0 m de largura e 2,0 m de altura pesa 280 N e é suportada por duas dobradiças, uma situada a 0,50 m a partir do topo e a outra a 0,50 m a partir do ponto inferior. Cada dobradiça suporta metade do peso total da porta. Supondo que o centro de gravidade da porta esteja localizado em seu centro, ache o componente horizontal da força que cada dobradiça exerce sobre a porta.

11.16 Suponha que você não consegue levantar mais de 650 N sem ajuda. a) Quanto você pode levantar, usando um carrinho de mão que pesa 80,0 N e cujo centro de gravidade está a 0,50 m do centro da roda (Figura 11.28)? O centro de gravidade da carga transportada no carrinho de mão também está a 0,50 m do centro da roda. b) De onde vem a força que o capacita a levantar mais de 650 N usando o carrinho de mão?

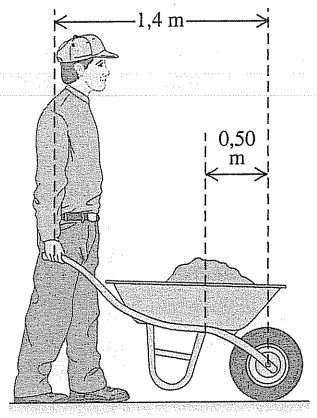


Figura 11.28 Exercício 11.16.

11.17 Você leva sua cadela Cléo ao veterinário, que decide ser necessário localizar o centro de gravidade do animal. Como seria desajeitado pendurar a cadela pelo teto, o veterinário pensa em outro método. Ele coloca as patas dianteiras do animal sobre uma balança e as patas traseiras em outra. A leitura da balança dianteira é de 157 N, enquanto a da balança traseira é 89 N. O veterinário mede Cléo e descobre que as patas traseiras estão 0,95 m atrás das patas dianteiras. Quanto pesa Cléo e onde está localizado o seu centro de gravidade?

11.18 Um guindaste de 15000 N gira em torno de um eixo livre de atrito na sua base e está suportado por um cabo que forma um ângulo de 25° com o guindaste (Figura 11.29). O guindaste tem 16 m de comprimento e não é homogêneo; seu centro de gravidade está a 7,0 m do eixo, medido ao longo do guindaste. O cabo está preso a 3,0 m da extremidade superior do guindaste. Quando o guindaste é erguido a 55° acima do plano horizontal sustentando um palete de tijolos pesando 11000 N por uma corda leve de 2,2 m, ache a) a tensão no cabo e b) os componentes horizontal e vertical da força que o eixo exerce sobre o guindaste. Comece com um diagrama do corpo livre para o guindaste.

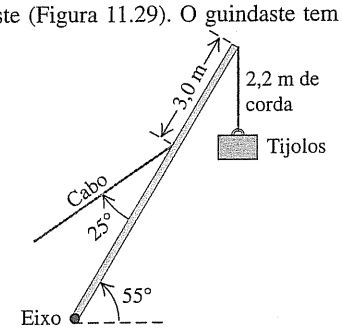


Figura 11.29 Exercício 11.18.

11.19 Em um jardim zoológico, uma barra uniforme de 3,0 m de comprimento e 240 N é mantida em posição horizontal por meio de duas cordas amarradas em suas extremidades (Figura 11.30). A corda da esquerda faz um ângulo de 150° com a barra e a corda da direita faz um ângulo θ com a horizontal. Um mico de 90 N está pendurado em equilíbrio a 0,50 m da extremidade direita da barra, olhando atentamente para você. Calcule o módulo da tensão em cada corda e o valor do ângulo θ. Comece com um diagrama do corpo livre para a barra.

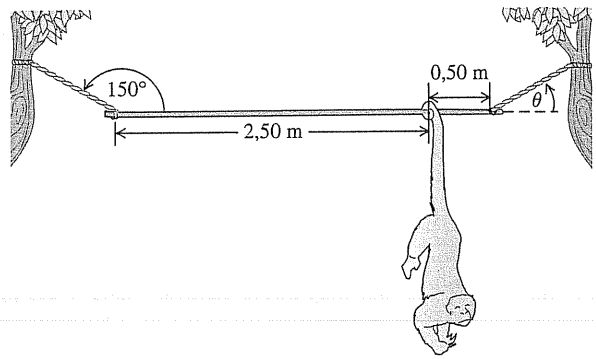


Figura 11.30 Exercício 11.19.

11.20 Uma viga não uniforme com 4,50 m de comprimento e pesando 1,0 kN faz um ângulo de 25,0° com a horizontal. Ela é mantida na horizontal com auxílio de um pivô sem atrito em sua extremidade direita superior e por um cabo ortogonal à viga situado a 3,0 m abaixo da sua extremidade (Figura 11.31). O centro de gravidade da viga está a 2,0 m ao longo da viga e do pivô. Um equipamento leve exerce uma força de 5,0 kN de cima para baixo na extremidade inferior esquerda da viga. Calcule a tensão T no cabo e os componentes horizontal e vertical da força exercida sobre a viga pelo pivô. Comece desenhando um diagrama do corpo livre para a viga.

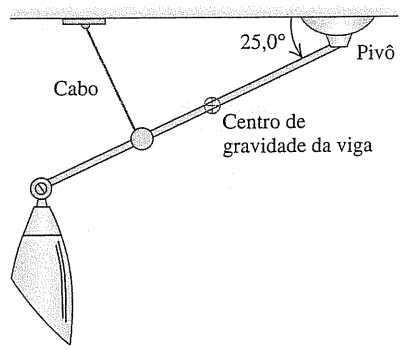


Figura 11.31 Exercício 11.20.

11.21 Um binário. Denomina-se conjugado ou *binário* duas forças de mesmo módulo, mesma direção e sentidos contrários aplicadas a dois pontos diferentes de um corpo. Duas forças antiparalelas de mesmo módulo $F_1 = F_2 = 8{,}0$ N são aplicadas sobre um eixo conforme indicado na Figura 11.32. a) Qual deve ser a distância l entre as forças sabendo-se que elas devem produzir um torque efetivo de 6,40 N · m em torno da extremidade esquerda

do eixo? b) O sentido do torque é igual ou contrário ao sentido da rotação dos ponteiros do relógio? c) Repita os itens (a) e (b) considerando um pivô situado no ponto do eixo onde a força $\vec{F}_2$ é aplicada.

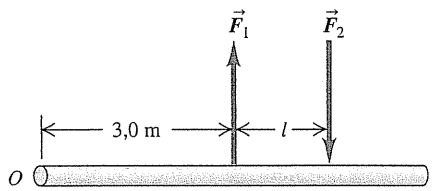


Figura 11.32 Exercício 11.21.

Seção 11.4 Tensão, deformação e módulos de elasticidade

11.22 Músculo do bíceps Um bíceps relaxado necessita de uma força de 25,0 N para uma dilatação de 3,0 cm; o mesmo músculo sob tensão máxima necessita de uma força de 500 N para produzir a mesma dilatação. Calcule o módulo de Young do tecido muscular em cada um desses casos, supondo que o músculo seja um cilindro uniforme com uma área de seção reta igual a 50,0 cm^2 e comprimento igual a 0,200 m.

11.23 Um arame circular de aço de comprimento igual a 2,0 m não pode se dilatar mais do que 0,25 cm quando uma tensão de 400 N é aplicada a cada uma de suas extremidades. Qual é o diâmetro mínimo necessário para esse arame?

11.24 Dois eixos redondos, um de aço e outro de cobre, são ligados pelas suas extremidades. Cada eixo possui comprimento de 0,750 m e diâmetro igual a 1,50 cm. A combinação é submetida a uma tensão de dilatação com módulo igual a 4000 N. Para cada eixo, qual é a) a deformação? b) a dilatação?

11.25 Um eixo metálico possui uma área de seção reta igual a 0,50 cm^2 e 4,0 m de comprimento e se dilata 0,20 cm sob ação de uma força de tensão com módulo igual a 5000 N. Qual é o módulo de Young desse metal?

11.26 Tensão na corda de um alpinista. Uma corda de náilon usada em alpinismo dilata-se 1,10 m sob o peso de um alpinista de 65,0 kg. Sabendo que a corda possui comprimento igual a 45,0 m e diâmetro igual a 7,0 mm, qual é o módulo de Young desse material?

11.27 Para construir uma escultura móvel, um artista pendura uma esfera de alumínio de 6,0 kg de massa presa a um fio de aço da 0,50 m de comprimento com área da seção reta igual a $2,5 \times 10^{-3}$ cm. À parte inferior da esfera ele prende outro fio de aço semelhante, na extremidade do qual ele pendura um cubo de bronze de massa igual a 10,0 kg. Para cada fio, calcule a) a tensão de dilatação; b) o alongamento.

11.28 Um poste vertical de aço com diâmetro de 25 cm e 2,50 m de comprimento deve suportar uma carga de 8000 kg. O peso do poste deve ser desprezado. Calcule: a) a tensão no poste; b) a deformação do poste; c) a variação do comprimento do poste quando a carga é aplicada.

11.29 Na parte externa de uma casa a 1,0 km do centro da explosão de uma bomba atômica de 100 quilotons, a pressão cresce até 2,8 atm enquanto a pressão no interior da casa permanece igual a 1,0 atm. Sabendo que a área frontal da casa é igual a 50 m^2, qual é a força efetiva resultante exercida pela força do ar sobre essa área?

11.30 Uma barra de ouro maciça é puxada verticalmente para cima a partir do casco do *Titanic* submerso. a) O que ocorre com seu volume quando ela passa da pressão do local onde se encontra o navio até a pressão menor existente na superfície do oceano? b) A diferença de pressão é proporcional à profundidade. Quantas vezes maior seria a variação de volume, se o navio estivesse em uma profundidade duas vezes maior? c) O módulo de compressão do chumbo é igual a um quarto do módulo de compressão do ouro. Calcule a razão entre a variação volumétrica de uma barra sólida de chumbo e a variação volumétrica de uma barra de ouro com o mesmo volume inicial, considerando a mesma variação de pressão.

11.31 Uma jovem pequena distribui seu peso de 500 N sobre os calcanhares em seus sapatos de salto alto. Cada calcanhar possui área de 0,750 cm^2. a) Qual é a pressão de cada calcanhar exercida sobre o chão? b) Considerando a mesma pressão, qual seria o peso suportado por duas sandálias largas na parte inferior, sendo cada área igual a 200 cm^2?

11.32 Na profundeza *Challenger* no Estreito das Marianas, a profundidade do mar é de 10,9 km e a pressão é igual a $1,16 \times 10^8$ Pa (cerca de $1,15 \times 10^3$ atm). a) Caso 1 m^3 de água seja transportado da superfície até essa profundidade, qual seria sua variação de volume? (A pressão atmosférica normal é aproximadamente igual a $1,0 \times 10^5$ Pa. Suponha que k para a água do mar seja igual ao valor da água doce indicado na Tabela 11.2.) b) Qual é a densidade da água do mar nessa profundidade? (Na superfície, a densidade da água do mar é $1,03 \times 10^3$ kg/m^3.)

11.33 Uma amostra de óleo com volume inicial de 600 cm^3 é submetida a um aumento de pressão de $3,6 \times 10^6$ Pa, e o volume diminui de 0,45 cm^3. Qual é o módulo de compressão do material? Qual é a sua compressibilidade?

11.34 Uma placa quadrada de aço possui 10,0 cm de lado e 0,500 cm de espessura. a) Ache a tensão de cisalhamento resultante quando uma força de módulo $9,0 \times 10^5$ N é aplicada a cada um dos quatro lados, paralelamente ao lado. b) Ache o deslocamento x em centímetros.

11.35 Um cubo de cobre mede 6,0 cm em cada lado. A face inferior é mantida presa por uma cola muito potente a uma superfície horizontal plana, enquanto uma força horizontal F é aplicada à face superior paralela a uma das arestas. (Consulte a Tabela 11.1.) a) Mostre que a cola exerce uma força F sobre a face inferior que é igual, mas contrária à força na face superior. b) Quando deve ser F para provocar uma deformação de 0,250 mm no cubo? c) Se a mesma experiência fosse conduzida com um cubo de chumbo do mesmo tamanho que o de cobre, qual seria a deformação causada pela mesma força calculada no item (b)?

11.36 Forças de cisalhamento são aplicadas a um sólido retangular. As mesmas forças são aplicadas a outro sólido com o mesmo material, porém as arestas possuem comprimentos três vezes maiores. Em cada caso as forças são suficientemente pequenas para que a lei de Hooke seja válida. Qual é a razão entre a deformação de cisalhamento do objeto maior e a deformação de cisalhamento do objeto menor?

Seção 11.5 Elasticidade e plasticidade

11.37 Em um laboratório de teste de materiais, um fio metálico fabricado com uma liga nova se rompe quando uma força de tensão de dilatação de 90,8 N é aplicada perpendicularmente a cada uma das suas extremidades. Sabendo que o diâmetro do fio é igual a 1,84 mm, qual é a tensão de ruptura da liga?

11.38 Um fio de aço de comprimento igual a 4,0 m possui uma seção reta com área de 0,050 cm^2. Seu limite de proporcionalidade possui um valor 0,0016 vezes seu módulo de Young (Tabela 11.1). Sua tensão de ruptura é 0,0065 vezes seu módulo de Young. O fio é amarrado em sua extremidade superior e fica pendurado verticalmente. a) Qual é o peso máximo que pode ser suspenso pelo fio sem que o limite de proporcionalidade seja superado? b) Qual seria a dilatação do fio submetido a essa tensão? c) Qual é o peso máximo que o fio pode suportar?

11.39 Um cabo de aço, cuja área da seção reta é igual a 3,0 cm^2, possui limite elástico igual a $2{,}40 \times 10^8$ Pa. Calcule a aceleração máxima de baixo para cima que este cabo pode suportar, quando ele for usado para sustentar um elevador de 1200 kg, para que a tensão no cabo não ultrapasse a um terço do seu limite de elasticidade.

11.40 Um fio de bronze deve sustentar uma força de tensão de 350 N sem se romper. Qual deveria ser seu diâmetro mínimo?

Problemas

11.41 Escalada de montanha Escaladores de montanhas geralmente usam uma corda para descerem pela encosta de um penhasco (essa manobra é denominada rapel). Eles descem pela encosta com o corpo praticamente horizontal e os pés apoiados contra o penhasco (Figura 11.33). Suponha que um escalador de 82,0 kg e 1,90 m de altura, com o centro de gravidade localizado a 1,1 m dos pés, desça fazendo rapel por uma encosta vertical com o corpo erguido a 35,0° acima do plano horizontal. Ele segura a corda a 1,40 m dos pés, e ela forma um ângulo de 25,0° com a face da encosta. a) Qual tensão essa corda deve suportar? b) Ache os componentes horizontal e vertical da força que a face da encosta exerce sobre os pés do escalador. c) Qual é o coeficiente de atrito mínimo para impedir que os pés do escalar escorreguem pela face da encosta, se ele apoiar um pé de cada vez contra a encosta?

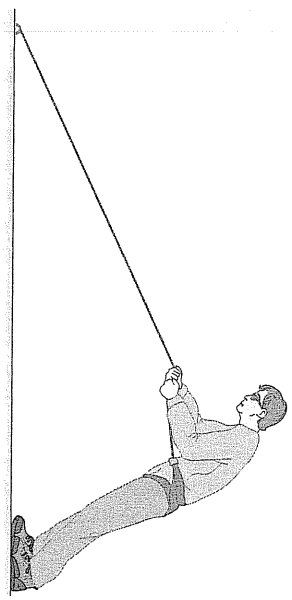


Figura 11.33 Problema 11.41.

11.42 Sir Lancelot cavalga lentamente para fora do castelo em *Camelot* atravessando a ponte levadiça de 12,0 m de comprimento que passa sobre o fosso (Figura 11.34). Ele não sabe que seus inimigos enfraqueceram parcialmente o cabo que sustenta a extremidade frontal da ponte, de modo que ele deve romper sob uma tensão de $5{,}80 \times 10^3$ N. A ponte possui massa igual a 200 kg e seu centro de gravidade está localizado em seu centro. Lancelot, sua lança, sua armadura e seu cavalo possuem massa igual a 600 kg. Verifique se o cabo se romperá antes que Lancelot atinja a extremidade da ponte. Caso ele se rompa, qual é a distância entre o centro de gravidade do cavalo e do cavaleiro no momento em que o cabo se rompe?

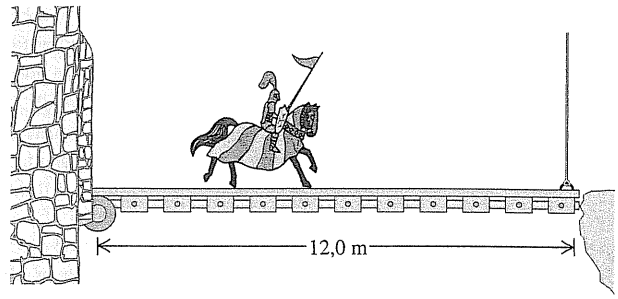


Figura 11.34 Problema 11.42.

11.43 Três forças verticais atuam sobre um avião quando ele está voando a uma altura constante com velocidade uniforme. Essas forças são o peso do avião, uma força aerodinâmica sobre a asa do avião e uma força aerodinâmica sobre a cauda do avião. (As forças aerodinâmicas são realizadas pelo ar que circunda o avião e são forças de reação da força que a asa e a cauda exercem sobre o ar quando o avião voa através do ar.) Para um dado avião leve pesando 6700 N, o centro de gravidade está situado a 0,30 m em frente do ponto no qual a força aerodinâmica vertical atua sobre a asa e a 3,66 m em frente do ponto no qual a força aerodinâmica atua sobre a cauda do avião. Determine o módulo, a direção e o sentido (se para cima ou para baixo) de cada uma das duas forças aerodinâmicas verticais.

11.44 Um caminhão picape possui uma base de roda ou distância entre os eixos igual a 3,0 m. Em geral, 10780 N se apóiam sobre as rodas dianteiras e 8820 N sobre as rodas traseiras quando o caminhão está estacionado em uma estrada horizontal. a) Uma caixa pesando 3600 N é colocada sobre um ponto na porta traseira do caminhão, a 1,0 m atrás do eixo traseiro. Qual é agora o peso total sustentado pelas rodas dianteiras? E sobre as rodas traseiras? b) Qual será o peso mínimo necessário que deve ser colocado sobre um ponto na porta traseira do caminhão para que as rodas dianteiras se elevem do solo?

11.45 Uma barra uniforme de 255 N e 2,0 m de comprimento carrega um peso de 225 N na extremidade direita e um peso desconhecido p em direção à extremidade esquerda (Figura 11.35). Se P é colocado a 50,0 cm da extremidade esquerda da barra, o sistema se equilibra horizontalmente quando o sustentáculo está localizado a 75,0 cm da extremidade direita. a) Ache P. b) Se P for movido 25,0 cm para a direita, qual distância e em que direção o sustentáculo deve ser deslocado para restabelecer o equilíbrio?

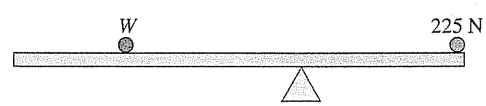


Figura 11.35 Problema 11.45.

11.46 Uma barra de metal delgada e uniforme é dobrada em três segmentos perpendiculares, dois dos quais possuem comprimento L. Você deseja determinar qual deve ser o comprimento do terceiro segmento para que a unidade fique suspensa com dois segmentos horizontais, quando for sustentada por um gancho, como indica a Figura 11.36. Ache x e termos de L.

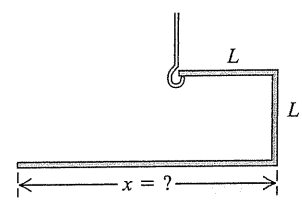


Figura 11.36 Problema 11.46.

11.47 Você abre um restaurante e deseja atrair clientes pendurando uma placa externa (Figura 11.37). A viga horizontal homogênea que sustenta a placa tem 1,50 m de comprimento, massa de 18,0 kg e está presa à parede por uma dobradiça. A placa em si é uniforme e possui massa de 28,0 kg e comprimento total de 1,20 m. Os dois cabos que sustentam a placa têm cada qual 32,0 cm de comprimento e estão a 90,0 cm de distância um do outro e eqüidistantes do meio da placa. O cabo que sustenta a viga tem 2,0 m de comprimento. a) Qual é a tensão mínima a ser suportada pelo cabo para evitar que a placa desabe? b) Qual força vertical mínima a dobradiça deve ser capaz de suportar sem ser arrancada da parede?

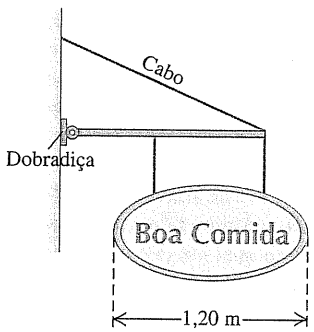


Figura 11.37 Problema 11.47.

11.48 A garra de um martelo é usada para arrancar um prego de uma tábua (Figura 11.38). O martelo faz um ângulo de 60° com a tábua, e a força $\vec{F}_1$ necessária para arrancar o prego possui módulo igual a 500 N. O contato entre a cabeça do martelo e a tábua ocorre no ponto A, situado a uma distância de 0,080 m do ponto onde o prego está cravado na madeira. Uma força horizontal $\vec{F}_2$ é aplicada ao cabo do martelo a uma distância de 0,300 m acima da tábua. Qual é o módulo de força $\vec{F}_2$ que deve ser aplicada para produzir a força de 500 N (F_1) necessária para arrancar o prego? (Despreze o peso do martelo.)

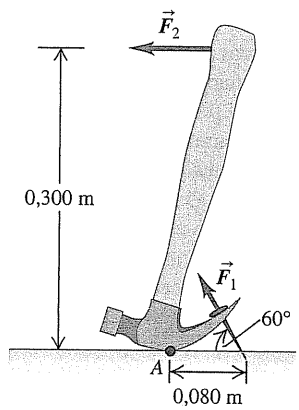


Figura 11.38 Problema 11.48.

11.49 A extremidade A da barra AB da Figura 11.39 repousa sobre uma superfície horizontal sem atrito, e a extremidade B está articulada. Uma força horizontal $\vec{F}$ de módulo igual a 120 N é aplicada à extremidade A. Despreze o peso da barra. Determine os componentes vertical e horizontal da força exercida pela barra sobre a articulação no ponto B.

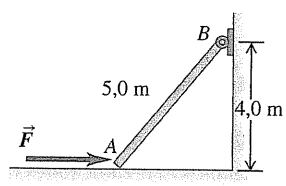


Figura 11.39 Problema 11.49.

11.50 Um museu de arte moderna expõe uma escultura irregular de 358 N pendurando-a por dois cabos delgados verticais, A e B, que estão 1,25 m afastados um do outro (Figura 11.40). O centro de gravidade dessa peça de arte está localizado a 48,0 cm da sua ponta direita extrema. Ache a tensão em cada cabo.

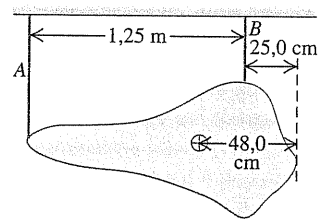


Figura 11.40 Problema 11.50.

11.51 Uma viga de massa M e comprimento L é horizontalmente sustentada nas suas extremidades por dois cabos que formam ângulos θ e ϕ com o teto horizontal (Figura 11.41). a) Mostre que, se a viga for homogênea, esses dois ângulos devem ser iguais e as tensões nos cabos também devem ser iguais. b) Suponha que o centro de gravidade está a $3L/4$ da extremidade esquerda da viga. Mostre que os ângulos não são completamente independentes, mas que devem obedecer à equação $\text{tg}\,\theta = 3\,\text{tg}\,\phi$.

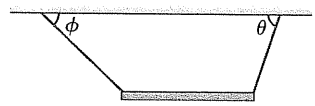


Figura 11.41 Problema 11.51.

11.52 Um caminhão em uma ponte levadiça. Uma betoneira carregada com cimento se desloca sobre uma ponte levadiça, onde ele enguiça em um ponto com seu centro de gravidade a três quartos a partir do início do vão elevado da ponte. O motorista do caminhão pede socorro pelo rádio, aplica o freio de mão e aguarda. A seguir, um barco se aproxima, e a ponte é elevada por meio de um cabo ligado ao extremo oposto ao do ponto onde a ponte é articulada (Figura 11.42). O vão da ponte levadiça possui comprimento igual a 40,0 m e possui massa de 12000 kg; seu centro de gravidade está localizado no meio da ponte. O caminhão e a máquina de misturar cimento, juntamente com o motorista, possuem massa total de 30000 kg. Quando a ponte é elevada até um ângulo de 30° acima da horizontal, o cabo faz um ângulo de 70° com o plano da ponte. a) Qual é a tensão T no cabo quando a ponte levadiça é mantida nessa posição? b) Ache os componentes horizontal e vertical da força que a articulação exerce sobre o vão da ponte.

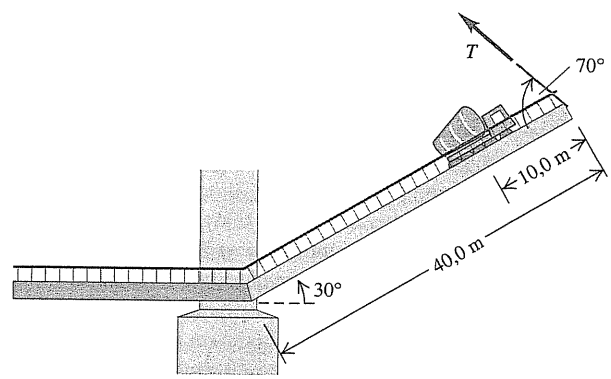


Figura 11.42 Problema 11.52.

11.53 Um cilindro maciço e uniforme com massa M é sustentado sobre uma rampa com inclinação que forma um ângulo θ acima da horizontal, por um cabo que está enrolado em torno da sua

periferia e o puxa tangencialmente paralelo à rampa (Figura 11.43). a) Mostre que *deve* haver atrito sobre a superfície para que o cilindro se equilibre dessa forma. b) Mostre que a tensão no cabo deve ser igual à força de atrito, e ache essa tensão.

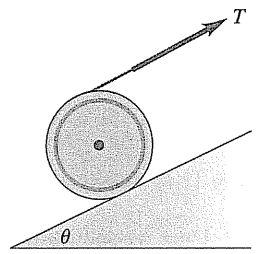


Figura 11.43 Problema 11.53.

11.54 Uma escada para fuga de incêndio tem 6,0 m de comprimento e sua extremidade está apoiada em uma rua gelada abaixo. O topo da escada é mantido preso a um pivô sem atrito, e o atrito da parte inferior da escada com a superfície do gelo é desprezível. A escada pesa 250 N, e seu centro de gravidade está a 2,0 m a partir do ponto inferior da escada. Uma mãe e seu filho possuem peso total de 750 N e se encontram a 1,5 m do pivô. A escada faz um ângulo θ com a horizontal. Determine o módulo, a direção e o sentido a) da força exercida pela superfície gelada sobre a escada e b) da força exercida pela escada sobre o pivô. c) As suas respostas nas partes a) e b) dependem do ângulo θ?

11.55 Uma viga uniforme de massa m faz um ângulo θ com a horizontal. Ela é suportada por um pivô horizontal localizado a um terço do seu comprimento a partir da extremidade inferior da esquerda e por uma corda horizontal ligada à sua extremidade superior da direita. Um cabo preso a um pacote com peso total p está pendurado em sua extremidade direita superior. a) Ache os componentes vertical V e horizontal H da força do pivô sobre a viga, assim como a tensão T na corda. b) Sabendo que a tensão de segurança máxima na corda é de 700 N e a massa da viga é igual a 20,0 kg, ache o peso de segurança máxima permitido para o cabo e o pacote quando a viga faz um ângulo de 55,0° com a horizontal. c) Determine o ângulo θ para que nenhum peso possa ser suspenso com segurança pela extremidade direita do suporte.

11.56 Você é solicitado a projetar o móbile decorativo indicado na Figura 11.44. Os fios e as barras possuem peso desprezível, e as barras devem ficar horizontalmente suspensas. a) Desenhe um diagrama do corpo livre para cada barra. b) Ache os pesos das bolas A, B, e C. Ache as tensões nos fios S_1, S_2 e S_3. c) O que você pode dizer sobre a localização horizontal do centro de gravidade do móbile? Explique.

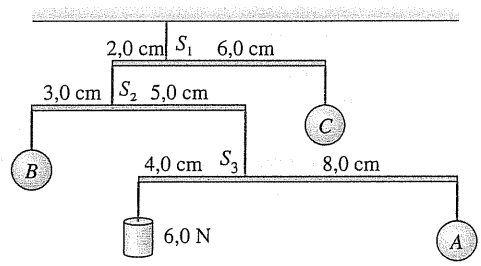


Figura 11.44 Problema 11.56.

11.57 Uma viga uniforme de 7,5 m e peso de 9000 N está presa por uma dobradiça a uma parede e sustentada por um cabo delgado preso a 1,5 m da extremidade livre da viga. O cabo fica entre a viga e a parede, formando um ângulo de 40° com a viga. Qual é a tensão no cabo, quando a viga está a um ângulo de 30,0° acima da horizontal?

11.58 Uma ponte levadiça homogênea deve ser mantida suspensa a um ângulo de 30° acima da horizontal, para permitir que os navios passem por baixo dela. A ponte pesa 45000 N e tem 1,40 m de comprimento. Um cabo é conectado a 3,5 m da dobradiça em torno da qual a ponte gira (conforme medido ao longo da dobradiça) e puxa horizontalmente a ponte para mantê-la fixa. a) Qual é a tensão no cabo? b) Ache o módulo, a direção e o sentido da força que a dobradiça exerce sobra a ponte.

11.59 Uma viga uniforme de 250 kg está suspensa por um cabo conectado ao teto, como indica a Figura 11.45. A extremidade inferior da viga está em repouso sobre o solo, a) Qual é a tensão no cabo? b) Qual é o coeficiente mínimo de atrito estático entre a viga e o solo necessário para que a viga permaneça nessa posição?

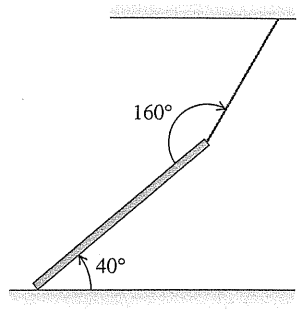


Figura 11.45 Problema 11.59.

11.60 a) A Figura 11.46 mostra uma viga uniforme com 6,0 m de comprimento sendo suspensa em ponto situado a 1,0 m à direita do seu centro. A viga pesa 140 N e faz um ângulo de 30,0° com a vertical. Na extremidade direita da viga está suspenso um peso de 100 N; um peso desconhecido p está suspenso em sua outra extremidade. Sabendo que o sistema está em equilíbrio, qual é o valor de p? Despreze a espessura da viga. b) Suponha que a viga faça outro ângulo de 45,0° com a vertical. Qual seria o valor de p nesse caso?

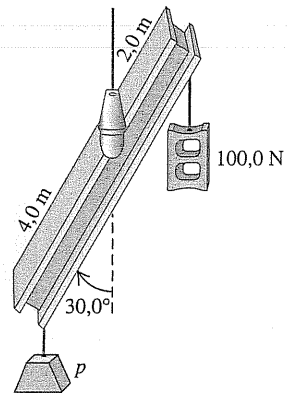


Figura 11.46 Problema 11.60.

11.61 Um mastro de sustentação uniforme horizontal com comprimento de 5,0 m e pesando 200 N está articulado numa parede vertical a uma de suas extremidades. Uma dublê de cinema pesando 600 N está suspensa em sua outra extremidade. O mastro está suportado por um cabo que liga sua extremidade livre a um ponto da parede diretamente acima do contato com o mastro. a) Sabendo que a tensão no cabo não deve exceder 1000 N, qual é a altura mínima acima do mastro em que o cabo deve ser ligado à parede? b) Supondo que o cabo está ligado a um ponto da parede situado a 0,50 m abaixo desse ponto, qual deve ser o aumento da tensão em newtons para que o mastro permaneça na direção horizontal?

11.62 Uma decoração natalina consiste em duas esferas brilhantes de vidro com massas de 0,0240 kg e 0,0360 kg suspensas a um eixo uniforme de massa 0,120 kg e comprimento igual a 1,0 m, conforme indicado na Figura 11.47. O eixo está preso ao teto por meio das cordas E e F, de modo que ele permanece na horizontal. Calcule a tensão em cada uma das cordas, desde a corda A até a corda F.

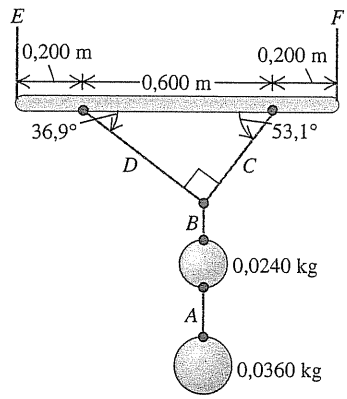


Figura 11.47 Problema 11.62.

11.63 Uma placa retangular uniforme com largura d, altura h e peso p está suspensa com seus lados superior e inferior na horizontal (figura 11.48). No canto inferior esquerdo, há uma dobradiça, e no canto superior direito há um cabo. a) Para qual ângulo θ com a vertical a tensão no cabo será mínima, e qual é essa tensão? b) Sob as condições do item (a), ache os componentes horizontal e vertical da força que a dobradiça exerce sobre a placa.

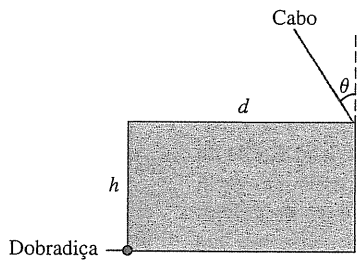


Figura 11.48 Problema 11.63.

11.64 Quando você estica um fio, uma corda ou uma fita elástica, o objeto se torna mais fino e ao mesmo tempo mais comprido. Quando a lei de Hooke é válida, a diminuição percentual da largura é proporcional à deformação de dilatação. Seja w_0 a largura inicial do objeto e Δw sua variação de largura, então $\Delta w/w_0 = -\sigma \Delta l/l_0$, onde o sinal negativo é usado para indicar que, quando o comprimento aumenta, a largura diminui. A constante adimensional Σ, que possui valores diferentes para diferentes materiais, denomina-se *razão de Poisson*. a) Supondo que o cabo de aço do Exemplo 11.5 (Seção 11.4) possua uma seção reta circular e uma razão de Poisson igual a 0,23, qual é sua variação de diâmetro quando a máquina permanece suspensa pelo cabo? b) Um cilindro de níquel (razão de Poisson = 0,42) possui raio igual a 2,0 cm. Determine a força de tensão de dilatação $F_\perp$ que deve ser aplicada perpendicularmente a cada extremidade do cilindro para fazer o raio do cilindro diminuir de 0,10 mm. Suponha que o limite de proporcionalidade e a tensão de ruptura sejam extremamente grandes e que eles não sejam superados.

11.65 Um operário deve virar um engradado retangular homogêneo de 1250 N, puxando um dos seus lados verticais a 53,0° (Figura 11.49). O piso é áspero o suficiente para impedir o engradado de deslizar. a) Qual força de puxar é necessária para fazer com que o engradado comece a tombar? b) Com que força o piso empurra o engradado? c) Ache a força de atrito sobre o engradado. d) Qual é o coeficiente mínimo de atrito estático necessário para impedir que o engradado deslize sobre o piso?

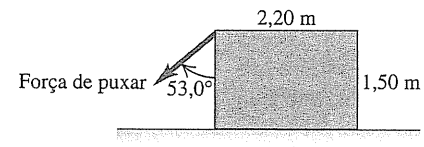


Figura 11.49 Problema 11.65.

11.66 Uma extremidade de uma régua milimetrada é colocada contra uma parede vertical (Figura 11.50). A outra extremidade é mantida por uma corda de peso desprezível que faz um ângulo θ com a régua. O coeficiente de atrito estático entre a extremidade da régua e a parede é igual a 0,40.

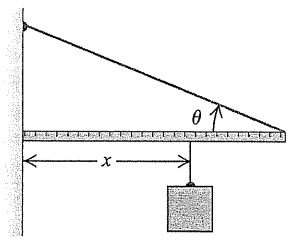


Figura 11.50 Problema 11.66.

a) Qual é o valor do ângulo máximo θ para que a régua se mantenha em equilíbrio? b) Considere $\theta = 15°$. Um bloco com a mesma massa da régua é suspenso da régua a uma distância x da parede, conforme indicado. Qual deve ser o valor mínimo de x para o qual a régua permaneça em equilíbrio? c) Quando $\theta = 15°$, qual deve ser o coeficiente de atrito estático, de modo que o bloco possa ser amarrado a 10 cm da parede sem que a régua escorregue?

11.67 Dois amigos transportam uma caixa de 200 kg subindo os degraus de uma escada. A caixa possui 1,25 m de comprimento e altura de 0,50 m, com centro de gravidade localizado em seu centro. Os degraus da escada possuem uma inclinação de 45,0° com a horizontal, de modo que sua aresta inferior é paralela à inclinação da escada (Figura 11.51). Supondo que a força aplicada pelos amigos sobre a caixa possua direção vertical, qual é o módulo de cada uma dessas forças? Quem realiza mais esforço, o que está na parte de cima ou aquele que está na parte de baixo da escada?

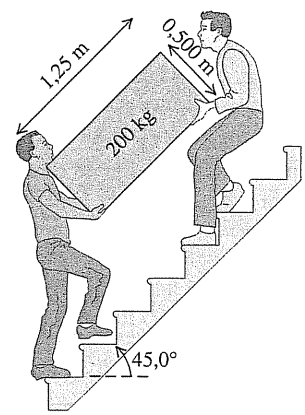


Figura 11.51 Problema 11.67.

11.68 Antebraço. No braço humano, o antebraço e a mão giram em torno da articulação do cotovelo. Considere um modelo simplificado em que o músculo do bíceps está preso ao antebraço a uma distância de 3,80 cm da articulação do cotovelo. Suponha que, juntos, a mão e o antebraço de uma pessoa pesem 15,0 N e que o centro de gravidade esteja a 15,0 cm do cotovelo (não chega a meio caminho para a mão). O antebraço é mantido na posição horizontal formando um ângulo retângulo com o braço superior, e o músculo do bíceps exerce uma força perpendicular ao antebraço. a) Desenhe um diagrama do corpo livre para o antebraço, e ache a força exercida pelo bíceps quando a mão está vazia. b) Agora, a pessoa segura um peso de 80,0 N na mão, com o antebraço ainda na posição horizontal. Suponha que o centro de gravidade desse peso esteja a 33,0 cm do cotovelo. Construa um diagrama do corpo livre para o antebraço, e ache a força agora exercida pelo bíceps. Explique por que o músculo do bíceps precisa ser muito forte. c) Sob as condições estabelecidas no item

(b), ache o módulo, a direção e o sentido da força que a junta do cotovelo exerce sobre o antebraço. d) Enquanto segura o peso de 80,0 N, a pessoa levanta o antebraço até ele formar um ângulo de 53° acima do plano horizontal. Se o músculo do bíceps continua a exercer sua força perpendicularmente ao antebraço, qual é essa força quando o antebraço está nessa posição? A força aumentou ou diminuiu em relação ao seu valor no item (b)? Explique por que isso ocorre, e teste sua resposta fazendo esse movimento com o próprio braço.

11.69 Retome a situação no Exemplo 11.4 (Seção 11.3) em que se segura um haltere. O peso máximo que pode ser sustentado daquela forma está limitado à tensão T máxima permitida para o tendão (determinada pela força dos tendões) e pela distância D a partir do cotovelo até onde o tendão se prende ao antebraço. a) Seja $T_{máx}$ o valor máximo da tensão no tendão. Use os resultados do Exemplo 11.4 para expressar $p_{máx}$ (o peso máximo que pode ser sustentado) em termos de $T_{máx}$, L, D e h. Sua equação *não* deve incluir o ângulo θ. b) Os tendões de diferentes primatas se prendem ao antebraço com diferentes valores de D. Calcule a derivada de $p_{máx}$ em relação a D e determine se a derivada é positiva ou negativa. c) O tendão de um chimpanzé está preso ao antebraço em um ponto mais afastado do cotovelo do que no caso dos humanos. Use isso para explicar por que os chimpanzés possuem braços mais fortes do que os humanos. (A desvantagem é que os chimpanzés possuem braços menos flexíveis do que os humanos.)

11.70 Uma mesa uniforme de 90,0 N possui 3,6 m de comprimento, 1,0 m de altura e 1,2 m de largura. Um peso de 1500 N é colocado a 0,50 m de uma das extremidades da mesa, a uma distância de 0,60 m de cada uma das duas pernas nessa extremidade. Desenhe um diagrama do corpo livre para a mesa e ache a força que cada uma das quatro pernas exerce sobre o piso.

11.71 Arcobotante. a) Um edifício simétrico possui um telhado com inclinação de baixo para cima formando um ângulo de 35,0° acima da horizontal em cada lado. Se cada lado do telhado uniforme pesa 10000 N, ache a força horizontal que esse telhado exerce no topo da parede, que tende a empurrar as paredes para fora. Que tipo de prédio correria maior risco de desabamento: um com paredes altas ou outro com paredes baixas? Explique. b) Como você verificou no item (a), as paredes altas correm o risco de desabar com o peso do telhado. Esse problema preocupou os construtores de grandes estruturas no passado. Uma solução usada nas grandes catedrais góticas nos anos de 1200 foi o arcobotante, um suporte de pedra entre as paredes e o solo que ajudava a conter as paredes. Uma igreja gótica possui um telhado uniforme que pesa um total de 20000 N e se ergue a 40° do plano horizontal em cada parede. As paredes têm 40 m de altura e um arcobotante encontra cada parede 10 m abaixo da base do telhado. Que força horizontal essa estrutura deve aplicar à parede?

11.72 Você deseja fazer uma roda de bicicleta de massa m e raio R subir um desnível de altura h. Para fazer isso você aplica uma força horizontal $\vec{F}$ (Figura 11.52). Qual é o menor módulo dessa força para fazer a roda subir o desnível, quando a força é aplicada a) no centro de gravidade da roda e b) no topo da roda? c) Em qual dos dois casos você precisa realizar uma força menor?

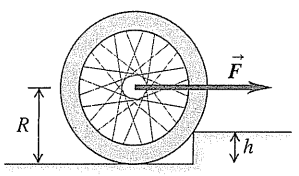


Figura 11.52 Problema 11.72.

11.73 O portão de uma fazenda. Um portão de 4,0 m de largura e 2,0 m de altura pesa 500 N. Seu centro de gravidade está localizado em seu centro, e ele está articulado nos pontos A e B. Para avaliar a tensão na dobradiça superior, um fio CD é ligado conforme indicado na Figura 11.53. A tensão no ponto CD é aumentada até que a força horizontal na dobradiça A seja igual a zero. a) Qual é a tensão no fio CD? b) Qual é o módulo do componente horizontal da força na dobradiça B? c) Qual é a soma dos componentes verticais das forças que atuam em A e em B?

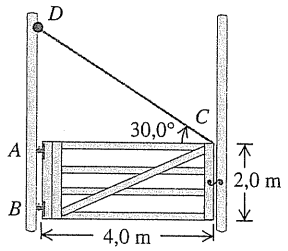


Figura 11.53 Problema 11.73.

11.74 Quando você coloca um bloco uniforme na extremidade de uma mesa, o centro de gravidade do bloco deve ficar sobre a mesa para que o bloco não caia. a) Para que você possa empilhar dois blocos idênticos na extremidade da mesa, o centro de gravidade do bloco superior deve estar sobre o bloco inferior e o centro de gravidade do conjunto dos dois blocos deve permanecer sobre a mesa. Determine, em função do comprimento L, qual deve ser a distância máxima D entre a extremidade da mesa e a extremidade do bloco superior para que o sistema permaneça em equilíbrio (Figura 11.54). b) Repita a parte (a) para três blocos idênticos e para quatro blocos. c) É possível colocar uma pilha de blocos de tal modo que o bloco superior não fique diretamente sobre a mesa, ou seja, é possível obter D maior do que L? Quantos blocos seriam necessários para isso? (Tente fazer isso com seus amigos usando livros ou tijolos iguais.)

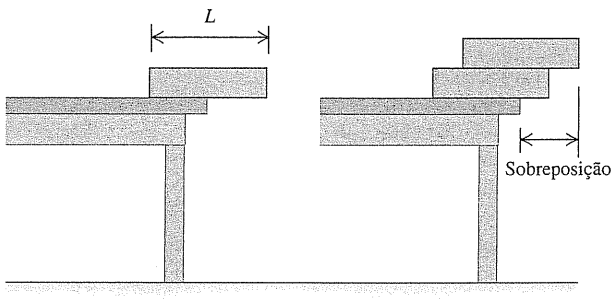


Figura 11.54 Problema 11.74.

11.75 Duas bolas de gude homogêneas de 75,0 g e 2,0 cm de diâmetro são empilhadas, como indica a Figura 11.55, dentro de um recipiente com 3,0 cm de largura. a) Ache a força que o recipiente exerce sobre as bolas de gude nos pontos de contato A, B e C. b) Qual força cada bola exerce sobre a outra?

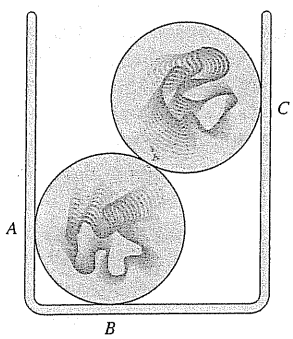


Figura 11.55 Problema 11.75.

11.76 Duas vigas idênticas e uniformes, pesando 260 N cada, estão ligadas em uma extremidade por uma dobradiça de atrito desprezível. Uma barra transversal leve presa no meio das vigas mantém um ângulo de 53,0° entre as vigas. As vigas estão sus-

pensas por cabos verticais de modo a formar um 'V', como indica a Figura 11.56. a) Qual força a barra transversal exerce sobre cada viga? b) A barra está sujeita à tensão ou à compressão? c) Qual força (módulo, direção e sentido) a dobradiça no ponto A exerce sobre cada viga?

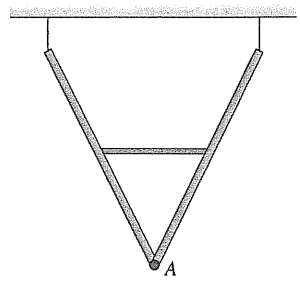


Figura 11.56 Problema 11.76.

11.77 Um engenheiro está projetando um sistema de esteira para transportar fardos de feno para dentro de um vagão (Figura 11.57). Cada fardo possui largura de 0,25 m, altura de 0,50 m, profundidade de 0,80 m (dimensão perpendicular ao plano da figura) e massa de 30,0 kg. O centro de gravidade de cada fardo está em seu centro geométrico. O coeficiente de atrito estático entre o fardo de feno e a esteira é igual a 0,60, e a esteira se move com velocidade uniforme. a) O ângulo β da esteira é lentamente aumentado. Para um dado ângulo crítico, o fardo pode tombar (caso não escorregue antes), e para outro ângulo crítico ele poderá escorregar (caso não tombe antes). Encontre esses dois ângulos críticos e diga o que ocorre para o menor ângulo. b) Seria o resultado da parte (a) diferente, se o coeficiente de atrito fosse 0,40?

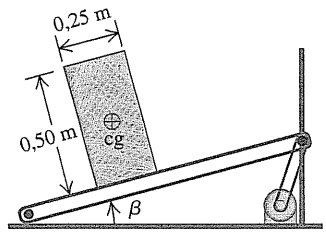


Figura 11.57 Problema 11.77.

11.78 O fardo de feno do Problema 11.77 é arrastado ao longo de uma superfície horizontal com velocidade constante sob a ação de uma força $\vec{F}$ (Figura 11.58). O coeficiente de atrito cinético é igual a 0,35. a) Calcule o módulo da força $\vec{F}$. b) Calcule o valor de h para o qual o fardo está na iminência de tombar.

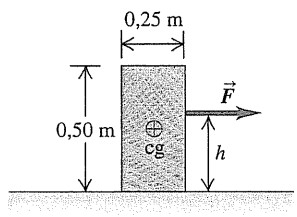


Figura 11.58 Problema 11.78.

11.79 A porta de uma garagem é apoiada sobre um trilho superior (Figura 11.59). As rodas A e B enferrujaram, portanto não giram mais, podendo apenas deslizar ao longo do trilho. O coeficiente de atrito estático é igual a 0,52. A distância entre as rodas é igual a 2,0 m e cada uma delas está a 0,50 m da aresta vertical adjacente da porta. A porta é uniforme e pesa 950 N. Ela é empurrada para a esquerda por uma força horizontal $\vec{F}$. a) Sabendo que h é igual a 1,60 m, qual deve ser o componente vertical da força exercida sobre cada roda pelo trilho?

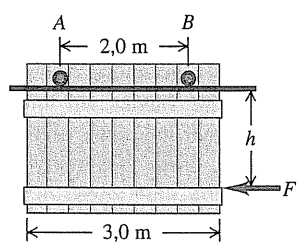


Figura 11.59 Problema 11.79.

b) Calcule o valor máximo de h sem que uma das rodas abandone o trilho.

11.80 Uma baliza horizontal é sustentada por um pivô sem atrito em sua extremidade esquerda. Ela é mantida na horizontal por um cabo ligado à sua extremidade direita. Em algum ponto da baliza, suspende-se uma cadeia presa a uma caixa com peso total p. O peso da baliza p_b não pode ser desprezado e a baliza pode ou não ser uniforme. a) Mostre que a tensão no cabo é a mesma quando o cabo faz um ângulo θ com a horizontal ou quando esse ângulo é $180° - \theta$, e que o componente horizontal das forças exercidas pela baliza sobre o pivô possui módulos iguais, mas sentidos opostos para esses dois ângulos. b) Mostre que o cabo não pode ser horizontal. c) Mostre que a tensão na corda atinge seu valor mínimo quando o cabo é vertical, puxando verticalmente para cima a extremidade direita da baliza. d) Mostre que quando o cabo é vertical a força exercida pelo pivô sobre a baliza é vertical.

11.81 Um poste uniforme de uma linha de transmissão possui 9,0 m de comprimento e pesa 5700 N. Antes de ser instalado em seu buraco, ele faz um ângulo diferente de zero com a vertical. Um cabo vertical ligado a 2,0 m abaixo de sua extremidade superior mantém o poste em posição, enquanto sua extremidade inferior está apoiada no solo. a) Calcule a tensão no cabo e o módulo, a direção e o sentido da força exercida pelo solo sobre o poste. b) Por que não precisamos do ângulo que o poste faz com a vertical, embora esse ângulo não seja igual a zero?

11.82 Um peso P é suspenso quando preso a um poste de metal vertical e uniforme, por uma corda delgada que passa por uma polia com massa e atrito desprezíveis. A corda é presa ao poste em um ponto localizado a 40,0 cm abaixo do topo e puxa no sentido horizontal em relação ao poste (Figura 11.60). O poste gira em torno de uma dobradiça na sua base, possui 1,75 m de altura e pesa 55,0 N. Um cabo delgado conecta o topo do poste a uma parede vertical. O prego que prende esse cabo à parede vai saltar, se uma força *para fora* maior do que 22,0 N atuar sobre ele. a) Qual é o maior peso p que pode ser suportado dessa forma sem que o prego seja arrancado da parede? b) Qual é o *módulo* da força que a dobradiça exerce sobre o poste?

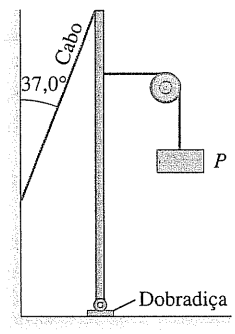


Figura 11.60 Problema 11.82.

11.83 Construtores de pirâmides. Construtores de pirâmides da antiguidade estão equilibrando uma laje de pedra homogênea e retangular, que está tombada a um ângulo θ acima do plano horizontal, usando uma corda (Figura 11.61). A corda é segurada por cinco trabalhadores que dividem igualmente a força. a) Se θ = 20,0°, qual força cada trabalhador exerce sobre a corda? b) À medida que θ aumenta, cada trabalhador tem que exercer mais ou menos força do que no item (a), supondo que eles não mudem o

ângulo da corda? Por quê? c) Qual o ângulo em que os trabalhadores não precisarão mais exercer *nenhuma força* para equilibrar a laje? O que ocorre, se θ exceder esse valor?

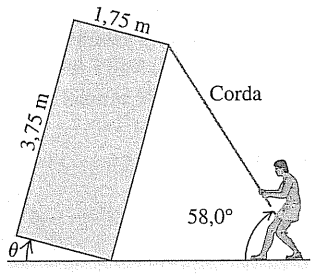


Figura 11.61 Problema 11.83.

11.84 Lei de Hooke para um cabo. Um cabo de comprimento l_0 e área de seção reta A suspende um peso W. a) Mostre que, se o cabo obedecer à Equação (11.7), ela se comportará como uma mola de força constante AY/l_0, onde Y é o módulo de Young para o material do qual o cabo é feito. b) Qual seria a força constante para um cabo de cobre de 75,0 cm de comprimento e calibre 16 (diâmetro = 1,291 mm)? Consulte a Tabela 11.1. c) Qual teria de ser W para alongar o cabo no item (b) por 1,25 mm?

11.85 Um corpo de massa 12,0 kg, amarrado à extremidade de um fio de alumínio que possui comprimento inicial de 0,50 m, é enrolado em um círculo vertical que gira com velocidade constante de 120 rev/min. A seção reta do fio possui área igual a 0,014 cm^2. Calcule a dilatação do fio quando o corpo está a) no ponto inferior da trajetória; b) no ponto superior da trajetória.

11.86 Um fio metálico, que possui comprimento de 3,50 m e diâmetro igual a 0,70 mm, foi submetido ao seguinte teste. Uma carga pesando 20 N foi inicialmente presa ao fio para mantê-lo esticado. A posição da extremidade inferior do fio foi medida com uma régua enquanto a carga aumentava.

Carga adicionada (N)	Leitura (cm)
0	3,02
10	3,07
20	3,12
30	3,17
40	3,22
50	3,27
60	3,32
70	4,27

a) Faça um gráfico desses valores, plotando o aumento do comprimento no eixo horizontal e o aumento da carga no eixo vertical. b) Calcule o valor do módulo de Young. c) O limite de proporcionalidade é atingido quando a leitura da régua indica 3,34 cm. Qual era a tensão nesse ponto?

11.87 Um eixo de 1,05 m de comprimento e peso desprezível é suportado em suas extremidades por fios A e B de comprimentos iguais (Figura 11.62). A área da seção reta de A é igual a 2,0 mm^2 e a de B é igual a 4,0 mm^2. O módulo de Young de A é igual a $1{,}80 \times 10^{11}$ Pa; o de B é igual a $1{,}20 \times 10^{11}$ Pa. Para qual ponto ao longo do eixo deve o peso p ser suspenso para produzir a) tensões iguais em A e em B? b) deformações iguais em A e em B?

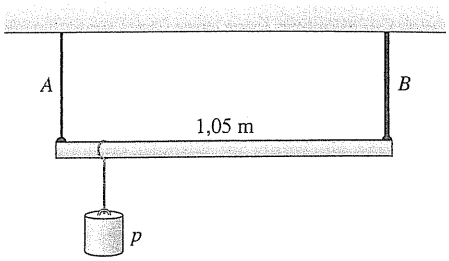


Figura 11.62 Problema 11.87.

11.88 Um brinquedo em um parque de diversões consiste em carrinhos em forma de avião ligados por cabos de aço (Figura 11.63). Cada cabo possui um comprimento igual a 15,0 m e área da sua seção reta igual a 8,0 cm^2. a) Ache a dilatação do cabo quando o carrinho está em repouso. (Suponha que o peso total de cada carrinho juntamente com dois passageiros seja igual a 1900 N.) b) Quando o brinquedo está em movimento, o carrinho gira com velocidade angular máxima de 8,0 rev/min. Qual é a dilatação do cabo nesse caso?

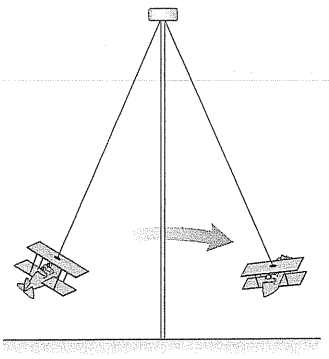


Figura 11.63 Problema 11.88.

11.89 Um eixo de bronze possui comprimento de 1,40 m e a área de sua seção reta é igual a 2,0 cm^2. Ele é ligado à extremidade de um eixo de níquel de comprimento L e área da seção reta igual a 1,0 cm^2. O eixo composto é submetido em suas extremidades a tensões de dilatação iguais e opostas com módulo de $4{,}0 \times 10^4$ N. a) Ache o comprimento L do eixo de níquel para que a dilatação dos dois eixos sejam iguais. b) Qual é a deformação de cada eixo?

11.90 Tensão no osso da canela. As tensões de compressão em nossos ossos são importantes na vida cotidiana. O módulo de Young para um osso é aproximadamente igual a $1{,}4 \times 10^{10}$ Pa. Um osso só pode suportar uma variação de comprimento de cerca de 1,0% para não se fraturar. a) Calcule a força máxima que pode ser aplicada a um osso que possua seção reta com área mínima de 3,0 cm^2. (Essa área é aproximadamente igual à área de uma tíbia, ou osso da canela, em sua região mais estreita.) b) Estime a altura máxima da qual um homem de 70 kg pode pular sem fraturar a tíbia. Considere igual a 0,030 s o intervalo de tempo entre o momento em que ele toca o solo e o instante em que ele entra em repouso, e suponha que a tensão seja igualmente distribuída entre as duas pernas.

11.91 Você pendura um refletor pela extremidade de um fio de aço vertical. O refletor produz uma dilatação de 0,18 mm no fio, e a tensão é proporcional à deformação. Qual seria a dilatação a) se fio

tivesse o dobro do comprimento? b) se o fio tivesse o mesmo comprimento, mas seu diâmetro fosse duas vezes maior? c) para um fio de cobre com o mesmo comprimento e o mesmo diâmetro?

11.92 Um fabricante de álcool clandestino produz etanol puro (álcool etílico) durante a madrugada e o acumula em um tanque de aço inoxidável em forma de cilindro com diâmetro igual a 0,300 m tampado na parte superior por um pistão. O volume total do tanque é 250 L (0,250 m^3). Tentando injetar sob pressão um pouco mais de álcool no cilindro, o fabricante empilha blocos de chumbo com 1420 kg sobre o topo do pistão. Calcule o volume adicional de etanol que o fabricante clandestino pode armazenar sob pressão no interior do tanque. (Suponha que a parede do tanque seja perfeitamente rígida.)

11.93 Uma barra com área da seção reta A é submetida a forças de dilatação $\vec{F}$ iguais e opostas em suas extremidades. Considere um plano ao longo da barra formando um ângulo θ com o plano da barra (Figura 11.64). a) Ache a tensão de dilatação (normal) nesse plano em termos de A, de F e de θ. b) Qual é a tensão de cisalhamento (tangencial) no plano em função de A, de F e de θ? c) Para qual valor de θ a tensão de cisalhamento é máxima?

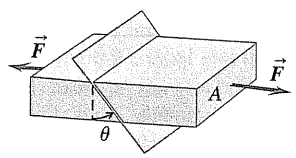


Figura 11.64 Problema 11.93.

11.94 Uma barra de cobre horizontal e uniforme possui comprimento inicial l_0, área da seção reta A, módulo de Young Y e massa m. Ela é suportada por um pivô sem atrito em sua extremidade direita e por um cabo em sua extremidade esquerda. Tanto o pivô como o cabo são ligados de modo que exerçam forças distribuídas uniformemente sobre a seção reta da barra. O cabo faz um ângulo θ com a barra e a comprime. a) Ache a tensão exercida pelo cabo e pelo pivô sobre a barra. b) Calcule a variação de comprimento da barra provocada por essa tensão. c) A massa da barra é ρAl, onde ρ é a densidade. Mostre que as respostas de (a) e de (b) são independentes da seção reta da barra. d) A densidade do cobre é igual a 8900 kg/m^3. Considere o valor de Y dado na Tabela 11.1. Ache a tensão e a variação de comprimento para um comprimento original de 1,8 m e um ângulo de 30°. e) Qual é o fator pelo qual você deveria multiplicar as respostas do item (d), se a barra tivesse o dobro do comprimento?

Problemas desafiadores

11.95 Uma estante pesando 1500 N repousa sobre uma superfície horizontal para a qual o coeficiente de atrito estático é $\mu_s = 0.40$. A estante possui 1,80 m de altura e 2,0 m de largura; seu centro de gravidade está localizado em seu centro geométrico. A estante está apoiada em quatro pernas curtas, cada uma delas situadas a 0,10 m da extremidade da estante. Uma pessoa puxa a estante por uma corda amarrada no canto superior esquerdo com uma força $\vec{F}$ que atua formando um ângulo θ com a estante (Figura 11.65). a) Supondo $\theta = 90°$, de modo que $\vec{F}$ é horizontal, mostre que quando $\vec{F}$ aumenta a partir de zero a estante começa a deslizar antes de tombar, e calcule o módulo de $\vec{F}$ que produz o início do deslizamento da estante. b) Se $\theta = 0°$, de modo que $\vec{F}$ é vertical, mostre que a estante tomba antes de deslizar, e calcule o módulo de $\vec{F}$ que produz o início do tombamento da estante. c) Calcule em função de θ o módulo de $\vec{F}$ mínimo necessário para fazer a estante deslizar e para fazer a estante tombar. Qual deve ser o valor mínimo de θ para que a estante comece a deslizar antes de tombar?

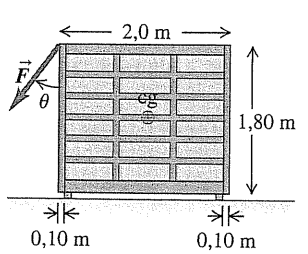


Figura 11.65 Problema 11.95.

11.96 Golpeando um poste. A extremidade de um poste que pesa 400 N e tem altura h está apoiada sobre uma superfície horizontal com $\mu_s = 0,30$. A extremidade superior do poste está sustentada por uma corda amarrada à superfície horizontal e fazendo um ângulo de 36,9° com o poste (Figura 11.66). Uma força horizontal $\vec{F}$ é aplicada sobre o poste conforme indicado. a) Quando a força $\vec{F}$ é aplicada em seu centro, qual deve ser seu módulo máximo para que o poste não comece a deslizar? b) Se o ponto de aplicação da força está situado a seis décimos da altura do poste a partir de sua base, qual deve ser o módulo máximo da força para que o poste não comece a deslizar? c) Mostre que, se o ponto de aplicação da força estiver situado em um ponto muito elevado, o poste não poderá deslizar, por maior que seja o módulo da força. Ache a altura crítica para o ponto de aplicação dessa força.

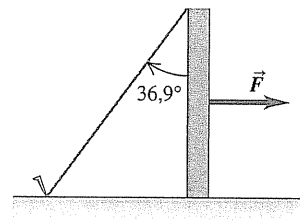


Figura 11.66 Problema desafiador 11.96.

11.97 Minimização da tensão. Um travessão pesado horizontal, de comprimento L, sustenta diversos objetos suspensos nele. Ele é suportado por um pivô sem atrito, situado em sua extremidade da esquerda, e por um cabo com peso desprezível, ligado a uma viga em forma de I em um ponto situado a uma altura h diretamente acima do centro do travessão. Determine o ponto no qual a outra extremidade do cabo deve ser ligada ao travessão de modo que a tensão no cabo seja mínima. (*Sugestão:* Para calcular e apresentar sua resposta, não esqueça que a distância máxima entre o ponto e o pivô é o comprimento L do travessão.)

11.98 Duas escadas, uma de 4,0 m e outra de 3,0 m de comprimento, estão articuladas em um ponto A e ligadas entre si por uma corda horizontal situada a 0,90 m acima do solo (Figura 11.67). As escadas pesam 480 N e 360 N, respectivamente, e o centro de gravidade de cada uma se localiza em seu respectivo centro. Suponha que o piso esteja encerado e sem atrito. a) Ache a força de baixo para cima na parte inferior de cada escada. b) Ache a tensão na corda. c) Ache o módulo da força que uma escada exerce sobre a outra no ponto A. d) Supondo que um pintor com 800 N esteja em pé sobre o ponto A, calcule a tensão na corda horizontal.

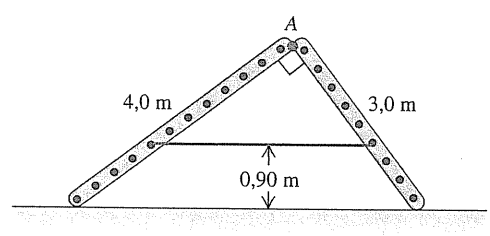


Figura 11.67 Problema desafiador 11.98.

11.99 Um equipamento para medir a compressibilidade consiste em um cilindro cheio de óleo, com um pistão acoplado em uma extremidade. Um bloco de sódio é imerso no óleo, e uma força é aplicada ao pistão. Suponha que o pistão e as paredes do cilindro sejam perfeitamente rígidos e que não exista atrito nem perda de óleo. Determine a compressibilidade do sódio em termos da força aplicada $\vec{F}$, do deslocamento do pistão x, da área do pistão A, do volume inicial do óleo V_0, do volume inicial do sódio V_s e da compressibilidade do óleo k_0.

11.100 Módulo de compressão de um gás ideal. A equação de estado (a equação que relaciona pressão, volume e temperatura) de um gás ideal é dada por $pV = nRT$, onde n e R são constantes. a) Mostre que quando um gás ideal é comprimido, mantendo-se constante sua temperatura T, o módulo de compressão é igual à pressão. b) Quando um gás ideal é comprimido sem que haja troca de calor entre ele e o ambiente, a pressão e o volume são relacionados pela equação pV^γ = constante, onde γ é uma constante que possui valores diferentes para diferentes gases. Mostre que nesse caso o módulo de compressão é dado por $B = \gamma p$.

11.101 Um molinete está pendurando um peixe de 4,50 kg por meio de um fio de aço com 1,50 m de comprimento e cuja seção reta possui área de $5{,}0 \times 10^{-3}$ cm^2 . A extremidade superior do fio está firmemente presa a um suporte. a) Calcule o valor da dilatação do fio provocada pelo peixe que está suspenso. O molinete a seguir aplica uma força $\vec{F}$ sobre o peixe puxando-o lentamente para baixo 0,500 mm da sua posição de equilíbrio inicial. Para esse movimento para baixo, calcule b) o trabalho realizado pela gravidade; c) o trabalho realizado pela força $\vec{F}$; d) o trabalho realizado pela força que o fio exerce sobre o peixe; e) a variação de energia potencial elástica (a energia potencial associada com a tensão de dilatação do fio). Compare as respostas dos itens (d) e (e).

APÊNDICE A

O SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

O Sistema Internacional de Unidades, abreviado por SI, é o sistema desenvolvido por um congresso internacional e adotado por quase todos os países industrializados do mundo. Ele é baseado nas unidades do Sistema MKSA (metro-quilograma-segundo-ampère). O material apresentado a seguir foi adaptado de B. N. Taylor, ed., *National Institute of Standards and Technology Spec. Pub.* 811 (U. S. Govt. Printing Office, Washington, DC, 1995).

Grandeza	Nome da unidade	Símbolo	
	Unidades básicas do SI		
comprimento	metro	m	
massa	quilograma	kg	
tempo	segundo	s	
corrente elétrica	ampère	A	
temperatura termodinâmica	kelvin	K	
quantidade de substância	mol	mol	
intensidade luminosa	candela	cd	
	Unidades derivadas do SI		**Unidades equivalentes**
área	metro quadrado	m^2	
volume	metro cúbico	m^3	
freqüência	hertz	Hz	s^{-1}
massa específica (densidade)	quilograma por metro cúbico	kg/m^3	
velocidade	metro por segundo	m/s	
velocidade angular	radiano por segundo	rad/s	
aceleração	metro por segundo ao quadrado	m/s^2	
aceleração angular	radiano por segundo ao quadrado	rad/s^2	
força	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
pressão (tensão mecânica)	pascal	Pa	N/m^2
viscosidade cinemática	metro quadrado por segundo	m^2/s	
viscosidade dinâmica	newton-segundo por metro quadrado	$N \cdot s/m^2$	
trabalho, energia, calor	joule	J	$N \cdot m$
potência	watt	W	J/s
carga elétrica	coulomb	C	$A \cdot s$
diferença de potencial, força eletromotriz	volt	V	J/C, W/A
intensidade do campo elétrico	volt por metro	V/m	N/C
resistência elétrica	ohm	Ω	V/A
capacitância	farad	F	$A \cdot s/V$
fluxo magnético	weber	Wb	$V \cdot s$
indutância	henry	H	$V \cdot s/A$
densidade de fluxo magnético	tesla	T	Wb/m^2
intensidade do campo magnético	ampère por metro	A/m	
força magnetomotriz	ampère	A	
fluxo luminoso	lúmen	lm	$cd \cdot sr$
luminância	candela por metro quadrado	cd/m^2	
iluminamento	lux	lx	lm/m^2
número de onda	um por metro	m^{-1}	
entropia	joule por kelvin	J/K	
calor específico	joule por quilograma-kelvin	$J/kg \cdot K$	
condutividade térmica	watt por metro-kelvin	$W/m \cdot K$	

Grandeza	Nome da unidade	Símbolo	Unidades equivalentes
intensidade da radiação	watt por estereorradiano	W/sr	
atividade (de uma fonte radioativa)	becquerel	Bq	s^{-1}
dose de radiação	gray	Gy	J/kg
equivalente da dose de radiação	sievert	Sv	J/kg
	Unidades suplementares do SI		
ângulo plano	radiano	rad	
ângulo sólido	estereorradiano	sr	

Definições das unidades do SI

metro (m) O *metro* é um comprimento igual à distância percorrida pela luz no vácuo em um intervalo de tempo igual à fração (1/299.792.458) do segundo.

quilograma (kg) O *quilograma* é uma unidade de massa igual à massa de um protótipo internacional do quilograma. (O protótipo internacional do quilograma é um cilindro de uma liga de platina-irídio preservado em uma galeria da Agência Internacional de Pesos e Medidas em Sèvres, na França.)

segundo (s) O *segundo* é o intervalo de tempo correspondente a 9.192.631.770 ciclos da radiação emitida durante a transição entre dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio 133.

ampère (A) O *ampère* é uma corrente constante que, ao ser mantida em dois fios retilíneos e paralelos de comprimentos infinitos de seções retas desprezíveis e separados por uma distância de 1 m no vácuo, produz entre os fios uma força igual a 2×10^{-7} N para cada metro de comprimento dos fios.

kelvin (K) O *kelvin*, unidade de temperatura termodinâmica, é a fração igual a 1/273,16 da temperatura termodinâmica correspondente ao ponto triplo da água.

ohm (OHM) O *ohm* é a resistência elétrica entre dois pontos de um condutor que transporta uma corrente de 1 A quando uma diferença de potencial constante de 1 volt é aplicada entre esses dois pontos, esse trecho do condutor não pode ser fonte de nenhuma força eletromotriz.

coulomb (C) O *coulomb* é a carga elétrica transportada em um segundo por uma corrente de 1 A.

candela (cd) A *candela* é a intensidade luminosa, em dada direção, de uma fonte que emite uma radiação monocromática com freqüência igual a 540×10^{12} hertz e cuja intensidade da radiação nessa direção equivale a 1/683 watt por estereorradiano.

molécula-grama (mol) O *mol* é a quantidade de uma substância que contém um número de unidades elementares equivalente ao número de átomos existentes em 0,012 kg de carbono 12. Essas unidades elementares devem ser especificadas e podem ser átomos, moléculas, íons, elétrons, outras partículas ou grupos de tais partículas especificadas.

newton (N) O *newton* é a força que fornece para uma massa de 1 quilograma uma aceleração de um metro por segundo por segundo.

joule (J) O *joule* é o trabalho realizado quando o ponto de aplicação de uma força constante de 1 N é deslocado até uma distância de 1 metro na direção da força.

watt (W) O *watt* é a potência que dá origem a uma produção de energia com uma taxa igual a 1 joule por segundo.

volt (V) O *volt* é a diferença de potencial elétrico entre dois pontos de um condutor que transporta uma corrente constante igual a 1 ampère, quando a potência entre esses dois pontos é igual a 1 W.

weber (Wb) O *weber* é o fluxo magnético que, ao atravessar um circuito com uma espira, produz nela uma força eletromotriz igual a 1 V quando o fluxo é reduzido a zero com uma taxa uniforme em um segundo.

lúmen (lm) O *lúmen* é o fluxo luminoso emitido em um ângulo sólido igual a 1 estereorradiano por uma fonte pontual uniforme cuja intensidade é igual a 1 candela.

farad (F) O *farad* é a capacitância de um capacitor que possui uma diferença de potencial de 1 V entre suas placas quando ele é carregado por uma carga elétrica igual a 1 coulomb.

henry (H) O *henry* é a indutância de um circuito fechado no qual uma força eletromotriz de 1 V é produzida quando a corrente elétrica no circuito varia com uma taxa uniforme de 1 A por segundo.

radiano (rad) O *radiano* é o ângulo plano entre dois raios do círculo que cortam a circunferência formando um arco de comprimento igual ao raio.

estereorradiano (sr) O *estereorradiano* é um ângulo sólido que, possuindo seu vértice no centro de uma esfera, corta a superfície da esfera formando uma calota cuja área superficial é equivalente à área de um quadrado de lado igual ao raio da esfera.

Prefixos do SI Os nomes dos múltiplos e submúltiplos das unidades do SI podem ser formados usando-se a lista dos prefixos apresentados no Apêndice F.

APÊNDICE B

RELAÇÕES MATEMÁTICAS ÚTEIS

Álgebra

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^{(x+y)} = a^x a^y \qquad a^{(x-y)} = \frac{a^x}{a^y}$$

Logaritmos: Se $\log a = x$, então $a = 10^x$. $\log a + \log b = \log(ab)$ $\log a - \log b = \log(a/b)$ $\log(a^n) = n\log a$
Se $\ln a = x$, então $a = e^x$. $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$ $\ln(a^n) = n\ln a$

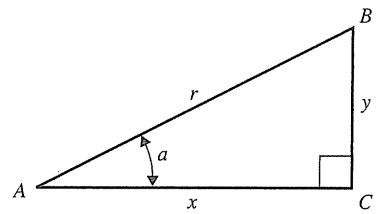
Equação do segundo grau: Se $ax^2 + bx + c = 0$, $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Série binomial

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + \cdots$$

Trigonometria

No triângulo retângulo ABC, $x^2 + y^2 = r^2$.



Definições das funções trigonométricas: $\operatorname{sen} a = y/r$ $\quad \cos a = x/r$ $\quad \operatorname{tg} a = y/x$

Identidades: $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$ $\qquad \operatorname{tg} a = \dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$

$\operatorname{sen} 2a = 2\operatorname{sen} a \cos a$ $\qquad \cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$

$\operatorname{sen} \frac{1}{2}a = \sqrt{\dfrac{1 - \cos a}{2}}$ $\qquad \cos \frac{1}{2}a = \sqrt{\dfrac{1 + \cos a}{2}}$

$\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a$ $\qquad \operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$

$\cos(-a) = \cos a$ $\qquad \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{sen}(a \pm \pi/2) = \pm \cos a$ $\qquad \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$

$\cos(a \pm \pi/2) = \mp \operatorname{sen} a$ $\qquad \cos a + \cos b = 2\cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$

Geometria

Comprimento de uma circunferência de raio r: $C = 2\pi r$
Área de um círculo de raio r: $A = \pi r^2$
Volume de uma esfera de raio r: $V = 4\pi r^3/3$
Área da superfície de uma esfera de raio r: $A = 4\pi r^2$
Volume de um cilindro de raio r e altura h: $V = \pi r^2 h$

Derivadas:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} ax = a\cos ax$$

$$\frac{d}{dx}\cos ax = -a\operatorname{sen} ax$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{x}$$

Integrais:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}$$

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Séries de potências (convergentes para os valores de x indicados):

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (\text{todo } x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (\text{todo } x)$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \quad (|x| < \pi/2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (\text{todo } x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (|x| < 1)$$

APÊNDICE C

ALFABETO GREGO

Nome	Maiúscula	Minúscula	Nome	Maiúscula	Minúscula
Alfa	A	α	Nu	N	ν
Beta	B	β	Xi	Ξ	ξ
Gama	Γ	γ	Ômicron	O	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Épsilon	E	ϵ	Rô	P	ρ
Zeta	Z	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	H	η	Tau	T	τ
Teta	Θ	θ	Úpsilon	Y	υ
Iota	I	ι	Fi	Φ	ϕ
Capa	K	κ	Qui	X	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mu	M	μ	Ômega	Ω	ω

APÊNDICE D

TABELA PERIÓDICA DOS ELEMENTOS

Grupo Periódico	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1 **H** 1.008																	2 **He** 4.003
2	3 **Li** 6.941	4 **Be** 9.012											5 **B** 10.811	6 **C** 12.011	7 **N** 14.007	8 **O** 15.999	9 **F** 18.998	10 **Ne** 20.180
3	11 **Na** 22.990	12 **Mg** 24.305											13 **Al** 26.982	14 **Si** 28.086	15 **P** 30.974	16 **S** 32.065	17 **Cl** 35.453	18 **Ar** 39.948
4	19 **K** 39.098	20 **Ca** 40.078	21 **Sc** 44.956	22 **Ti** 47.867	23 **V** 50.942	24 **Cr** 51.996	25 **Mn** 54.938	26 **Fe** 55.845	27 **Co** 58.933	28 **Ni** 58.693	29 **Cu** 63.546	30 **Zn** 65.409	31 **Ga** 69.723	32 **Ge** 72.64	33 **As** 74.922	34 **Se** 78.96	35 **Br** 79.904	36 **Kr** 83.798
5	37 **Rb** 85.468	38 **Sr** 87.62	39 **Y** 88.906	40 **Zr** 91.224	41 **Nb** 92.906	42 **Mo** 95.94	43 **Tc** (98)	44 **Ru** 101.07	45 **Rh** 102.906	46 **Pd** 106.42	47 **Ag** 107.868	48 **Cd** 112.411	49 **In** 114.818	50 **Sn** 118.710	51 **Sb** 121.760	52 **Te** 127.60	53 **I** 126.904	54 **Xe** 131.293
6	55 **Cs** 132.905	56 **Ba** 137.327	71 **Lu** 174.967	72 **Hf** 178.49	73 **Ta** 180.948	74 **W** 183.84	75 **Re** 186.207	76 **Os** 190.23	77 **Ir** 192.217	78 **Pt** 195.078	79 **Au** 196.967	80 **Hg** 200.59	81 **Tl** 204.383	82 **Pb** 207.2	83 **Bi** 208.980	84 **Po** (209)	85 **At** (210)	86 **Rn** (222)
7	87 **Fr** (223)	88 **Ra** (226)	103 **Lr** (262)	104 **Rf** (261)	105 **Db** (262)	106 **Sg** (266)	107 **Bh** (264)	108 **Hs** (269)	109 **Mt** (268)	110 **Ds** (271)	111 **Rg** (272)	112 **Uub** (285)	113 **Uut** (284)	114 **Uuq** (289)	115 **Uup** (288)	116 **Uuh** (292)	117 **Uus**	118 **Uuo**

Lantanídeos	57 **La** 138.905	58 **Ce** 140.116	59 **Pr** 140.908	60 **Nd** 144.24	61 **Pm** (145)	62 **Sm** 150.36	63 **Eu** 151.964	64 **Gd** 157.25	65 **Tb** 158.925	66 **Dy** 162.500	67 **Ho** 164.930	68 **Er** 167.259	69 **Tm** 168.934	70 **Yb** 173.04
Actinídeos	89 **Ac** (227)	90 **Th** (232)	91 **Pa** (231)	92 **U** (238)	93 **Np** (237)	94 **Pu** (244)	95 **Am** (243)	96 **Cm** (247)	97 **Bk** (247)	98 **Cf** (251)	99 **Es** (252)	100 **Fm** (257)	101 **Md** (258)	102 **No** (259)

Para cada elemento indica-se a massa atômica média da mistura dos isótopos do elemento que se encontram na natureza. Para os elementos que não possuem isótopos estáveis, indica-se entre parênteses a massa atômica média aproximada do elemento de maior duração. Para um elemento previsto, mas ainda não detectado, nenhuma massa atômica é indicada. As massas atômicas são expressas usando-se a unidade de massa atômica (1 u = 1,66053886(28) $\times$ 10^{-27} kg), que equivale a grama por mol (g/mol).

APÊNDICE E

FATORES DE CONVERSÃO DAS UNIDADES

Comprimento
1 m = 100 cm = 1000 mm = 10^6 μm = 10^9 nm
1 km = 1000 m = 0,6214 mi
1 m = 3,281 pol = 39,37 pol
1 cm = 0,3937 pol
1 pol = 2,540 cm
1 pol = 30,48 cm
1 yd = 91,44 cm
1 mi = 5280 pés = 1,609 km
1 Å = 10^{-10} m = 10^{-8} cm = 10^{-1} nm
1 milha náutica = 6080 pés
1 ano-luz = 9,461 × 10^{15} m

Área
1 cm^2 = 0,155 pol^2
1 m^2 = 10^4 cm^2 = 10,76 $pés^2$
1 pol^2 = 6,452 cm^2
1 pol = 144 pol^2 = 0,0929 m^2

Volume
1 litro = 1000 cm^3 = 10^{-3} m^3 = 0,03531 $pé^3$ = 61,02 pol^3
1 $pé^3$ = 0,02832 m^3 = 28,32 litros = 7,477 galões
1 galão = 3,788 litros

Tempo
1 min = 60 s
1 h = 3600 s
1 d = 86,400 s
1 a = 365,24 d = 3,156 × 10^7 s

Ângulo
1 rad = 57,30° = 180°/π
1° = 0,01745 rad = π/180 rad
1 revolução = 360° = 2π rad
1 rev/min (rpm) = 0,1047 rad/s

Velocidade
1 m/s = 3,281 pés/s
1 pé/s = 0,3048 m/s
1 mi/min = 60 mi/h = 88 pés/s
1 km/h = 0,2778 m/s = 0,6214 mi/h
1 mi/h = 1,466 pés/s = 0,4470 m/s = 1,609 km/h

Aceleração
1 m/s^2 = 100 cm/s^2 = 3,281 $pés/s^2$
1 cm/s^2 = 0,01 m/s^2 = 0,03281 $pé/s^2$
1 $pé/s^2$ = 0,3048 m/s^2 = 30,48 cm/s^2
1 mi/h · s = 1,467 $pés/s^2$

Massa
1 kg = 10^3 g = 0,0685 slug
1 g = 6,85 × 10^{-5} slug
1 slug = 14,59 kg
1 u = 1,661 × 10^{-27} kg
1 kg possui uma massa de 2,205 lb quando g = 9,80 m/s^2

Força
1 N = 10^5 dina = 0,2248 lb
1 lb = 4,448 N = 4,448 × 10^5 dina

Pressão
1 Pa = 1 N/m^2 = 1,450 × 10^{-4} lb/pol^2 = 0,209 $lb/pé^2$
1 bar = 10^5 Pa
1 lb/pol^2 = 6895 Pa
1 $lb/pé^2$ = 47,88 Pa
1 atm = 1,013 × 10^5 Pa = 1,013 bar
= 14,7 lb/pol^2 = 2117 $lb/pés^2$
1 mm Hg = 1 torr = 133,3 Pa

Energia
1 J = 10^7ergs = 0,239 cal
1 cal = 4,186 J (com base em temperatura de 15°)
1 pé · lb = 1,356 J
1 Btu = 1055 J = 252 cal = 778 pés · lb
1 eV = 1,602 × 10^{-19} J
1 kWh = 3,600 × 10^6 J

Equivalência entre massa e energia
1 kg ↔ 8,988 × 10^{16} J
1 u ↔ 931,5 MeV
1 eV ↔ 1,074 × 10^{-9} u

Potência
1 W = 1 J/s
1 hp = 746 W = 550 pés · lb/s
1 Btu/h = 0,293 W

APÊNDICE F

CONSTANTES NUMÉRICAS

Constantes físicas fundamentais*

Nome	Símbolo	Valor
Velocidade da luz	c	$2{,}99792458 \times 10^{8}$ m/s
Módulo da carga do elétron	e	$1{,}60217653(14) \times 10^{-19}$ C
Constante gravitacional	G	$6{,}6742(10) \times 10^{-11}$ N · m^2/kg^2
Constante de Planck	h	$6{,}6260693(11) \times 10^{-34}$ J · s
Constante de Boltzmann	k	$1{,}3806505(24) \times 10^{-23}$ J/K
Número de Avogadro	N_A	$6{,}0221415(10) \times 10^{23}$ moléculas/mol
Constante dos gases	R	8,314472(15) J/mol · K
Massa do elétron	m_e	$9{,}1093826(16) \times 10^{-31}$ kg
Massa do próton	m_p	$1{,}67262171(29) \times 10^{-27}$ kg
Massa do nêutron	m_n	$1{,}67492728(29) \times 10^{-27}$ kg
Permeabilidade do vácuo	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ Wb/A · m
Permissividade do vácuo	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8{,}854187817\ldots \times 10^{-12}$ C^2/N · m^2
	$1/4\pi\epsilon_0$	$8{,}987551787\ldots \times 10^{9}$ N · m^2/C^2

Outras constantes úteis*

Equivalente mecânico do calor		4,186 J/cal (15° calorias)
Pressão da atmosfera padrão	1 atm	$1{,}01325 \times 10^{5}$ Pa
Zero absoluto	0 K	−273,15°C
Elétron-volt	1 eV	$1{,}60217653(14) \times 10^{-19}$ J
Unidade de massa atômica	1 u	$1{,}66053886(28) \times 10^{-27}$ kg
Energia de repouso do elétron	$m_e c^2$	0,510998918(44) MeV
Volume de um gás ideal (0°C e 1 atm)		22,413996(39) litro/mol
Aceleração da gravidade (padrão)	g	9,80665 m/s^2

Fonte: National Institute of Standards and Technology* (http://physics.nist.gov/cuu**). Os números entre parênteses indicam as incertezas dos dígitos finais dos números principais; por exemplo, o número 1,6454(21) significa 1,6454 ± 0,0021. Os valores que não possuem incertezas são exatos.

Dados astronômicos[†]

Corpo	Massa (kg)	Raio (m)	Raio da órbita (m)	Período da órbita
Sol	$1{,}99 \times 10^{30}$	$6{,}96 \times 10^{8}$	—	—
Lua	$7{,}35 \times 10^{22}$	$1{,}74 \times 10^{6}$	$3{,}84 \times 10^{8}$	27,3 d
Mercúrio	$3{,}30 \times 10^{23}$	$2{,}44 \times 10^{6}$	$5{,}79 \times 10^{10}$	88,0 d
Vênus	$4{,}87 \times 10^{24}$	$6{,}05 \times 10^{6}$	$1{,}08 \times 10^{11}$	224,7 d
Terra	$5{,}97 \times 10^{24}$	$6{,}38 \times 10^{6}$	$1{,}50 \times 10^{11}$	365,3 d
Marte	$6{,}42 \times 10^{23}$	$3{,}40 \times 10^{6}$	$2{,}28 \times 10^{11}$	687,0 d
Júpiter	$1{,}90 \times 10^{27}$	$6{,}91 \times 10^{7}$	$7{,}78 \times 10^{11}$	11,86 a
Saturno	$5{,}68 \times 10^{26}$	$6{,}03 \times 10^{7}$	$1{,}43 \times 10^{12}$	29,45 a
Urano	$8{,}68 \times 10^{25}$	$2{,}56 \times 10^{7}$	$2{,}87 \times 10^{12}$	84,02 a
Netuno	$1{,}02 \times 10^{26}$	$2{,}48 \times 10^{7}$	$4{,}50 \times 10^{12}$	164,8 a
Plutão[‡]	$1{,}31 \times 10^{22}$	$1{,}15 \times 10^{6}$	$5{,}91 \times 10^{12}$	247,9 a

[†]*Fonte: NASA Jet Propulsion Laboratory Solar System Dynamics Group* (http://ssd.jpl.nasa.gov) e KENNETH SEIDELMANN, P. ed., *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac* (University Science Books, Mill Valley, CA, 1992), p. 704-706. Para cada corpo, o 'raio' é o seu respectivo raio no equador e o 'raio da órbita' é a distância média entre o corpo e o Sol (para os planetas) ou medida a partir da Terra (no caso da Lua).

[‡]Em agosto de 2006, o International Astronomical Union reclassificou Plutão e outros pequenos corpos na órbita do Sol como 'planetas anões'.

Prefixos para as potências de dez

Potência de dez	Prefixos	Abreviaturas
10^{-24}	locto-	y
10^{-21}	zepto-	z
10^{-18}	atto-	a
10^{-15}	femto-	f
10^{-12}	pico-	p
10^{-9}	nano-	n
10^{-6}	micro-	μ
10^{-3}	mili-	m
10^{-2}	centi-	c
10^{3}	quilo-	k
10^{6}	mega-	M
10^{9}	giga-	G
10^{12}	tera-	T
10^{15}	peta-	P
10^{18}	exa-	E
10^{21}	zeta-	Z
10^{24}	iota-	Y

Exemplos:

1 femtômetro = 1 fm = 10^{-15} m

1 picossegundo = 1 ps = 10^{-12} s

1 nanocoulomb = 1 nC = 10^{-9} C

1 microkelvin = 1 μK = 10^{-6} K

1 milivolt = 1 mV = 10^{-3} V

1 quilopascal = 1 kPa = 10^{3} Pa

1 megawatt = 1 MW = 10^{6} W

1 gigahertz = 1 GHz = 10^{9} Hz

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS ÍMPARES

Capítulo 1

1.1 8,05 km
1.3 3333 ns
1.5 $5,3 \times 10^{-6}$ dam^3
1.7 31,7 anos mais velho
1.9 1,5 dam/cm^3
1.11 9,0 cm
1.13 a) $1,1 \times 10^{-3}$% b) não
1.15 a) 0,1% b) 0.008% c) 0,03%
1.17 a) 28 ± 0.3 cm^3 b) 170 ± 20
1.19 a) não b) não c) não d) não e) não
1.21 10^6
1.23 10^9
1.25 $70 milhões
1.29 \$9 × 10^{14}; aproximadamente \$3 × 10^6
1.31 7,8 km, 38° nordeste
1.33 144 m, 41° sudoeste
1.35 $A_x = 0$, $A_y = -8{,}00$ m; $B_x = 7{,}50$ m, $B_y = 13{,}0$ m; $C_x = -10{,}9$ m, $C_y = -5{,}07$ m; $D_x = -7{,}99$ m, $D_y = 6{,}02$ m
1.37 1190 N; 13,4° acima da direção para frente
1.39 a) 9,01 m, 33,7° b) 9,01 m, 33,7° c) 22,3 m, 250,3° d) 22,3 m, 70,3°
1.41 5,06 km, 20.2° nordeste
1.43 a) 2,48 cm, 18,3° b) 4,10 cm, 83,7° c) 4,10 cm, 263,7°
1.45 781 N, 166°
1.47 $\vec{A} = -(8{,}00\text{ m})\hat{j}$; $\vec{B} = (7{,}50\text{ m})\hat{i} + (13{,}0\text{ m})\hat{j}$; $\vec{C} = -(10{,}9\text{ m})\hat{i} + (-5{,}07\text{ m})\hat{j}$; $\vec{D} = (-7{,}99\text{ m})\hat{i} + (6{,}02\text{ m})\hat{j}$
1.49 a) $\vec{A} = (1{,}23\text{ m})\hat{i} + (3{,}38\text{ m})\hat{j}$; $\vec{B} = (-2{,}08\text{ m})\hat{i} + (-1{,}20\text{ m})\hat{j}$ b) $\vec{C} = (12{,}01\text{ m})\hat{i} + (14{,}94\text{ m})\hat{j}$ c) 19,17 m; 51,2°
1.51 a) não b) não; sim c) ±0,20
1.53 a) -104 m^2 b) -148 m^2 c) 40,6 m^2
1.55 a) 165° b) 28° c) 90°
1.57 a) 63,9 m; $-\hat{k}$ b) 63,9 m; $+\hat{k}$
1.59 a) 4,61 cm^2; $-z$ b) 4,61 cm^2; $+z$
1.61 a) $1,65 \times 10^4$ km b) 2,6 raios da Terra
1.63 10^{28}
1.65 a) 2,94 cm b) 1,82 cm
1.67 a) 10^{50} b) 10^{57} c) 10^{79}
1.69 149 N; 32,2° nordeste
1.71 b) $A_x = 3{,}03$ cm, $A_y = 8{,}10$ cm c) 8,65 cm; 69,5° do eixo $+x$ em direção ao eixo $+y$
1.73 144 m, 41° sudoeste
1.75 a) 46 N, 139°
1.77 a) (87, 258) b) 136 pixels, 25° abaixo à esquerda
1.79 380 km, 28.8° sudeste
1.81 160 N, 13° abaixo da horizontal
1.83 a) 911 m; 8,9° do oeste para o sul
1.87 b) 90°
1.89 a) $A = 5{,}39$, $B = 4{,}36$ b) $-5.00\hat{i} + 2.00\hat{j} + 7.00\hat{k}$ c) 8,83; sim
1.93 a) 54,7° b) 35,3°
1.95 $C_x = 8.0$, $C_y = 6.1$
1.97 b) 72,2
1.99 38,5 yd (Jardas), 24,6° à direita para baixo do campo
1.101 a) 76 ly b) 129°

Capítulo 2

2.1 a) 197 m/s b) 169 m/s
2.3 1 h 10 min
2.5 a) 17.1 s b) mais rápido: 106 m; mais lento: 94 m
2.7 250 km
2.9 a) 12,0 m/s b) 0 m/s, 15,0 m/s, 12,0 m/s c) 13,3 s
2.11 a) 2,3 m/s, 2.3 m/s b) 2,3 m/s, 0,33 m/s
2.13 a) não b) (i) 12,8 m/s^2 (ii) 3,5 m/s^2 (iii) 0,72 m/s^2; sim
2.15 a) 2,00 cm/s, 50,0 cm, $-0{,}125$ cm/s^2 b) 16,0 s c) 32,0 s d) 6,20 s, 1,22 cm/s; 25,8 s, $-1{,}22$ cm/s; 36,4 s, $-2{,}55$ cm/s
2.17 a) 3 m/s^2 b) 10 m/s^2 c) depende da direção positiva da coordenada
2.21 a) 5,0 m/s b) 1,43 m/s^2
2.23 a) 675 m/s^2 b) 0,067 s
2.25 1,70
2.27 a) (i) 5,59 m/s^2 (ii) 7,74 m/s^2 b) (i) 179 m (ii) 12800 m
2.29 a) +2,7 cm/s, $-1{,}3$ cm/s b) $-1{,}3$ cm/s^2 c) 22,5 cm; 25,5 cm
2.31 a) 0, 6,3 m/s^2, $-11{,}2$ m/s^2 b) 100 m, 230 m, 320 m
2.33 a) $1,80 \times 10^4$ m/s b) 0,957 c) 6 h 11 min
2.35 b) 1 s, 3 s d) 2 s e) 3 s f) 1 s
2.37 a) *A:* 20,5 m/s^2; *B:* 3,8 m/s^2; *C:* 53 m/s^2 b) 721 km
2.39 a) 2,94 m/s b) 0,599 s
2.41 a) $t = \sqrt{2d/g}$ b) 0,190 s
2.43 a) 646 m b) 16,4 s, 112 m/s
2.45 a) 25,6 m/s b) 31,6 m c) 15,2 m/s
2.47 a) 249 m/s^2 b) 25,4 c) 101 m d) não
2.49 0,0868 m/s^2
2.51 a) $x(t) = (0{,}250\text{ m/s}^3)t^3 - (0{,}0100\text{ m/s}^4)t^4$; $v_x(t) = (0{,}750\text{ m/s}^3)t^2 - (0{,}0400\text{ m/s}^4)t^3$ b) 39,1 m/s
2.53 a) 30,0 cm/s
2.55 b) 0,627 s, 1,60 s c) negativo em 0,627 s, positivo em 1,60 s d) 1,11 s e) 2,45 m f) 2,00 s, 0 s
2.57 a) 82 km/h b) 31 km/h
2.59 a) 3,5 m/s^2 b) 0 c) 1,5 m/s^2
2.61 a) 92,0 m b) 92,0 m
2.63 a) 464 m/s b) $2,99 \times 10^4$ m/s c) 7,48
2.65 50,0 m
2.67 4,6 m/s^2
2.69 a) 6,17 s b) 24,8 m c) $v_{\text{caminhão}} = 13{,}0$ m/s, $v_{\text{automóvel}} = 21{,}0$ m/s
2.71 a) 7,85 cm/s b) 5,00 cm/s, horizontal da posição inicial à final
2.73 a) 15,9 s b) 393 m c) 29,5 m/s
2.75 a) $-4{,}00$ m/s b) 12,0 m/s
2.77 a) $2{,}64H$ b) $2{,}64T$
2.79 a) não b) sim; 14.4 m/s; não atingível fisicamente
2.81 a) $6{,}79 \times 10^4 g$ b) 1,45 m/s c) $H/4$
2.83 a) 7,59 m/s b) 5,14 m c) 1,60 s
2.85 a) 7,7 m/s b) 0,78 s c) 0,59 s d) 1,3 m
2.87 270 m
2.89 a) 20,5 m/s b) sim
2.91 a) 947 m b) 393 m
2.93 a) *A* b) 2,27 s, 5,73 s c) 1,00 s, 4,33 s d) 2,67 s
2.95 a) 9,55 s, 4,78 m b) 1,62 m/s d) 8,38 m/s e) não f) 3,69 m/s, 21.7 s, 80,0 m
2.97 a) 8,18 m/s b) (i) 0,411 m (ii) 1,15 km c) 9,80 m/s d) 4,90 m/s

Capítulo 3

3.1 a) $v_{\text{av-}x} = 1{,}4$ m/s, $v_{\text{av-}y} = -1{,}3$ m/s b) 1,9 m/s, $-43°$
3.3 a) 7,1 cm/s, 45° b) 5.0 cm/s, 90°; 7.1 cm/s; 45°; 11 cm/s, 27°
3.5 b) $a_{\text{av-}x} = -8{,}67$ m/s^2, $a_{\text{av-}y} = -2{,}33$ m/s^2 c) 8,98 m/s^2, 195°
3.7 b) $\vec{v} = \alpha\hat{i} + (-2\beta)\hat{j}$; $\vec{a} = -2\beta\hat{j}$ c) $v = 5{,}4$ m/s, $-63°$; $a = 2{,}4$ m/s^2, $-90°$ d) velocidade aumentando e sentido da direita
3.9 b) 0,600 m b) 0,385 m c) $v_x = 1{,}10$ m/s, $v_y = -3{,}43$ m/s; $v = 3{,}60$ m/s, 72.2° abaixo da horizontal
3.11 3,32 m
3.13 a) 30,6 m/s b) 36,3 m/s
3.15 1,29 m/s^2
3.17 a) 40,0 m/s, 69,3 m/s b) 7,07 s c) 245 m d) 565 m e) $a_x = 0$, $a_y = -9{,}80$ m/s^2; $v_x = 40{,}0$ m/s, $v_y = 0$
3.19 a) 0,682 s, 2,99 s b) 24,0 m/s, 11,3 m/s; 24,0 m/s, $-11{,}3$ m/s c) 30,0 m/s, $-36{,}9°$
3.21 a) 1,5 m b) $-0{,}89$ m/s
3.23 a) 13,6 m b) 34,6 m/s c) 103 m
3.25 a) 296 m b) 176 m c) 198 m d) horizontal: 15 m/s; vertical: 58,8 m/s e) horizontal: 15 m/s; vertical: 78,8 m/s
3.27 795 m
3.29 a) 0,034 m/s^2, $0{,}0034g$ b) $1{,}4h$
3.31 a) 3,07 s b) 1,68 s
3.33 a) 3,50 m/s^2, para cima b) 3,50 m/s^2, para baixo c) 12,6 s
3.35 a) 32,9 m/s b) 27,7 m/s^2 c) 35,5 rpm
3.37 a) 14 s b) 70 s
3.39 0,36 m/s, 38° do oeste para o sul
3.41 a) 4,7 m/s, 25° sudeste b) 190 s c) 380 m
3.43 b) $-7{,}1$ m/s, -42 m/s c) 43 m/s, 9,5° do oeste para o sul
3.45 a) $A = 0$, $B = 2{,}00$ m/s^2, $C = 50{,}0$ m, $D = 0{,}50$ m/s^3 b) $\vec{a} = (4{,}00\text{ m/s}^2)\hat{i}$, $v = 0$ c) $v_x = 40{,}0$ m/s, $v_y = 150$ m/s, $v = 155$ m/s c) $\vec{r} = (200\text{ m})\hat{i} + (550\text{ m})\hat{j}$
3.47 a) 124 m b) 280 m
3.49 22 m/s
3.51 40 m/s
3.53 274 m
3.55 a) 42,8 m/s b) 42,0 m
3.57 a) $\sqrt{2gh}$ b) 30,0° c) $6{,}93h$
3.59 c) menos de 45°
3.61 b) 15°, 75°
3.63 a) 17,8 m/s b) no rio, 28,4 m da margem próxima
3.65 a) 81,6 m b) na carreta c) 245 m d) 53,1°
3.67 a) 49 m/s b) 50 m
3.69 a) 2000 m b) 2180 m
3.71 a) 38,5 m/s b) (i) 25,0 m/s, 0 (ii) 25,0 m/s, 38,5 m/s c) (i) 0° (ii) 57,0° d) 499 m
3.73 ±25.4°
3.77 b) $v_x = R\omega(1 - \cos\omega t)$, $v_y = R\omega\,\text{sen}\,\omega t$, $a_x = R\omega^2\,\text{sen}\,\omega t$, $a_y = R\omega^2\cos\omega t$ c) $t = 0, 2\pi/\omega, 4\pi/\omega, \ldots$; $x = 0, 2\pi R, 4\pi R, \ldots$; $y = 0$; $a = R\omega^2$ na direção + d) não
3.79 a) $2{,}50g$ b) $0{,}614n$
3.81 a) 44,7 km/h, 26,6° do oeste para o sul b) 10,5° noroeste
3.83 a) 0,659 s b) (i) 9,10 m/s (ii) 6,46 m/s c) 3,00 m, 2,13 m
3.85 7,39 m/s, 12,4° nordeste
3.87 a) 80 m b) $1{,}6 \times 10^{-3}$ c) efeito global é reduzir o raio
3.89 a) $\left(\frac{2v_0^2}{g}\right)[\text{tg}(\theta + \phi) - \text{tg}\,\theta]\frac{\cos^2(\theta + \phi)}{\cos\theta}$ b) $\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$
3.91 $\Delta t = 0{,}5$ s: 9,589 m/s^2, 118,6°; $\Delta t = 0{,}1$ s: 9.983 m/s^2, 95,73°; $\Delta t = 0{,}05$ s: 9,996 m/s^2, 92,86°
3.93 a) 1,5 km/h b) 3,5 km/h

Capítulo 4

4.1 a) 0° b) 90° c) 180°
4.3 7.1 N para a direita, 7.1 N para baixo

4.5 494 N, 31,7°
4.7 2,2 m/s²
4.9 16,0 kg
4.11 a) 3,13 m, 3,13 m/s b) 21,9 m, 6,25 m/s
4.13 a) 45,0 N; t = 2 s a 4 s b) 2 s a 4 s c) 0, 6 s
4.15 a) A = 100 N, B = 12,5 N/s² b) (i) 21,6 N, 2,70 m/s² (ii) 134 N, 16,8 m/s² c) 26,6 m/s²
4.17 2,94 × 10³ N
4.19 a) 4,49 kg b) 4,49 kg, 8,13 N
4.21 825 N, blocos
4.23 a) gravidade exercida pela Terra sobre a garrafa; força do ar sobre a garrafa b) gravidade exercida pela garrafa sobre a Terra; força da garrafa sobre o ar
4.25 7,4 × 10⁻²³ m/s²
4.27 b) sim
4.29 sim, no item (a)
4.31 b) 142 N
4.33 c) força exercida pelo solo sobre o caminhão
4.35 1840 N, 135°
4.37 a) 17 N, 90° no sentido horário a partir da direção +x b) 840 N
4.39 a) 4,8 m/s b) 16 m/s² c) 2360 N
4.41 b) 5,83 m/s²
4.43 a) 2,50 m/s² b) 10,0 N c) para a direita; F d) 25,0 N
4.45 a) 2,93 m/s² b) 11,1 m/s²
4.47 b) 79,6 N
4.49 a) mg b) mg c) $m(g + |\vec{a}|)$ d) $m(g - |\vec{a}|)$
4.51 a) 7,80 m/s b) 50,6 m/s² c) 4532 N, 6,16mg
4.53 a) p b) 0 c) $p/2$
4.55 b) 1390 N
4.57 b) (i) 3,5 m/s² (ii) 8,0 N
4.59 $-6mBt$

Capítulo 5

5.1 a) 25,0 N b) 50,0 N
5.3 a) 990 N, 735 N b) 926 N
5.5 48°
5.7 4,10 × 10³ N
5.9 a) A: 0,732p; B: 0,897p; C: p b) A: 2,73p; B: 3,35p; C: p
5.11 a) 337 N b) 343 N
5.13 a) 470 N b) 163 N
5.15 b) 1,22mg c) 0,70mg
5.17 a) 4610 m/s², 470g b) 9,70 × 10⁵ N, 471p c) 18,7 ms
5.19 b) 2,96 m/s² c) 191 N; mais que os tijolos, menos que o contrapeso
5.21 b) 2,50 m/s² c) 1,37 kg d) T = 0,745p
5.23 a) 0,832 m/s² b) 17,3 s
5.25 1,38°
5.29 a) 22 N b) 3,1 m
5.31 a) 0,710, 0,472 b) 258 N c) (i) 51,8 N (ii) 4,97 m/s²
5.33 a) 57,1 N b) 146 N, rampa acima
5.35 11 vezes mais distante
5.37 a) $\mu_c(m_A + m_B)g$ b) $\mu_c m_A g$
5.39 3,82 m/s²
5.41 a) 0,218 m/s b) 11,7 N
5.43 a) $\mu_c mg/(\cos\theta - \mu_c \operatorname{sen}\theta)$ b) $1/\operatorname{tg}\theta = \mu_c$
5.45 b) 8,75 N c) 30,8 N d) 1,54 m/s²
5.47 a) 0,44 kg/m b) 42 m/s
5.49 a) 3,61 m/s b) na base c) 3,33 m/s
5.51 a) 21,0°; não b) carro: 1,18 × 10⁴ N; caminhão: 2,36 × 10⁴ N
5.53 cabo superior: 1410 N; cabo horizontal: 8360 N
5.55 a) 1,49 rev/min b) 0,918 rev/min
5.57 a) 138 km/h b) 3580 N
5.59 2,43 m/s
5.61 a) corda formando ângulo de 60° b) 6400 N
5.63 a) $Mg/(2\operatorname{sen}\theta)$ b) $Mg/(2\operatorname{tg}\theta)$ c) $T \to \infty$
5.65 a) $m_1(\operatorname{sen}\alpha + \mu_c\cos\alpha)$ b) $m_1(\operatorname{sen}\alpha - \mu_c\cos\alpha)$ c) $m_1(\operatorname{sen}\alpha - \mu_s\cos\alpha) < m_2 < m_1(\operatorname{sen}\alpha + \mu_s\cos\alpha)$
5.67 a) 1,44 N b) 1,80 N
5.69 a) 1,3 × 10⁻⁴ N; 62.5p b) 2,9 × 10⁻⁴ N at 1,2 ms c) 1,2 m/s
5.71 1040 N
5.73 a) 11 m/s b) 7,5 m/s
5.75 0,40
5.77 a) $g\left(\dfrac{m_B + m_{\text{corda}}d/L}{m_A + m_B + m_{\text{corda}}}\right)$; aumenta b) 0,63 m c) não se aplicará a nenhum valor de d
5.79 a) 66 N, em direção ao norte b) 59 N, em direção ao sul
5.81 a) 294 N, 152 N, 152 N b) 40,0 N
5.83 2,52 N
5.85 a) 12,9 kg b) 47,2 N na corda esquerda, 101 N na corda direita
5.87 $a_1 = 2m_2g/(4m_1 + m_2)$; $a_2 = 2m_2g/(4m_1 + m_2)$
5.89 1,46 m acima do solo
5.91 g/μ_s
5.93 b) 0,450
5.95 0,34
5.97 a) 170 m b) 18 m/s, 41 mi/h c) 25 m/s, 56 mi/h
5.99 a) sobe b) permanece constante c) permanece constante d) pára
5.101 a) 6,00 m/s² b) 0,380 m/s² c) 7,36 m/s d) 8,18 m/s e) 7,78 m, 6,29 m/s, 1,38 m/s² f) 3,14 s
5.103 1/3
5.105 a) $v_y(t) = v_t + (v_0 - v_t)e^{-kt/m}$ b) $v_y(t) = v_t(\operatorname{sen}\beta - 0{,}015\cos\beta)^{1/2}$
5.107 a) 0,015; 0,036 N · s²/m² b) 29 m/s c) a razão é $(\operatorname{sen}\beta - 0{,}015\cos\beta)^{1/2}$
5.109 a) 120 N b) 3,79 m/s
5.111 b) 0,28 c) não
5.113 a) direito b) 120 m
5.115 a) 81.1° b) não c) conta desliza na base do aro ($\beta = 0$)
5.119 $T_{\text{máx}} = 2\pi\sqrt{\left(\dfrac{h\operatorname{tg}\beta}{g}\right)\left(\dfrac{\operatorname{sen}\beta + \mu_s\cos\beta}{\cos\beta - \mu_s\operatorname{sen}\beta}\right)}$; $T_{\text{mín}} = 2\pi\sqrt{\left(\dfrac{h\operatorname{tg}\beta}{g}\right)\left(\dfrac{\operatorname{sen}\beta - \mu_s\cos\beta}{\cos\beta + \mu_s\operatorname{sen}\beta}\right)}$
5.121 $(M + m)g\operatorname{tg}\alpha$
5.123 a) $F = \dfrac{\mu_c p}{\cos\theta + \mu_c\operatorname{sen}\theta}$ b) $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(\mu_c) = 14{,}0°$
5.125 a) $a_3 = g\left(\dfrac{-4m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1}{4m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1}\right)$ b) $a_B = -a_3$ c) $a_1 = g\left(\dfrac{4m_1m_2 - 3m_2m_3 + m_3m_1}{4m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1}\right)$ d) $a_2 = g\left(\dfrac{4m_1m_2 + m_2m_3 - 3m_3m_1}{4m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1}\right)$ e) $T_A = \frac{1}{2}T_C$ f) $T_C = \dfrac{8gm_1m_2m_3}{4m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1}$ g) $a_1 = a_2 = a_3 = a_B = 0$, $T_C = 2m_2g$, $T_A = m_2g$; sim
5.127 $\cos^2\beta$

Capítulo 6

6.1 a) 3,60 J b) −0,900 J c) 2.70 J
6.3 a) 74 N b) 330 J c) −330 J d) zero; zero e) zero
6.5 a) −1750 J b) não
6.7 a) (i) 9,00 J (ii) −9,00 J b) (i) 0 (ii) 9,00 J (iii) −9,00 J (iv) 0 c) zero para cada bloco
6.9 a) (i) zero (ii) zero b) (i) zero (ii) −25,1 J
6.11 a) 1,0 × 10¹⁶ J b) aproximadamente 2 vezes maior
6.13 a) 42,85V b) 1836K
6.15 a) 43,2 m/s b) 101 m/s c) 5,80 m d) 3,53 m/s e) 7,35 m
6.17 $(2gh[1 + \mu_c/\operatorname{tg}\alpha])^{1/2}$
6.19 a) 9D b) $D/3$
6.21 32,0 N
6.23 a) 4,48 m/s b) 3,61 m/s
6.25 a) 4,96 m/s b) a = 1,43 m/s² v = 4,96 m/s o mesmo
6.27 a) $v_0^2/2\mu_c g$ b) 1/2 c) 4 d) 2
6.29 a) 48,0 N, 64,0 N b) 0,360 J, 0,640 J
6.31 a) 2.8 m/s b) 3,5 m/s
6.33 8.5 cm
6.35 a) 1,76 b) 0,67 m/s
6.37 a) 4,0 J b) zero c) −1,0 J d) 3,0 J e) −1,0 J
6.39 a) 2,83 m/s b) 2,40 m/s
6.41 a) 5,65 cm b) não; 0,57 J
6.43 3,6 × 10⁵ J; 100 m/s
6.45 4,0 × 10¹³ P
6.47 743 W, 0,995 hp
6.49 a) 1,4 b) 0,38
6.51 a) 5,4 × 10⁹ J b) 0,72 MW
6.53 2,96 × 10⁴ W
6.55 877 J
6.57 a) 532 J b) −315 J c) zero d) −203 J e) 14,7 J f) 1,21 m/s
6.59 a) $1/\operatorname{sen}\alpha$ b) $W_{\text{entrada}} = W_{\text{saída}}$
6.61 a) 2,59 × 10¹² J b) 4800 J
6.63 b) $k_{\text{efe}} = k_1 + k_2 + \cdots + k_N$
6.65 a) $k\left(\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}\right)$; negativo b) $k\left(\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}\right)$; módulo igual e sinal contrário, porque trabalho resultante é igual a zero
6.67 a) 5,11 m b) 0,304 c) 10,3 m
6.69 a) 0,15 N b) 9,4 N c) 0,44 J
6.71 a) 2,56 m/s b) 5,28 N c) 19,7 J
6.73 a) −910 J b) 3,17 × 10³ J
6.75 1,0 × 10⁵ N/m
6.77 1,1 m do ponto onde a mola é libertada
6.79 a) 1,02 × 10⁴ N/m, 8,16 m
6.81 a) 0,600 m b) 1,50 m/s
6.83 0,786
6.85 1,5 m
6.87 a) 1,10 × 10⁵ J b) 1,30 × 10⁵ J c) 3,99 kW
6.89 3,6 h
6.91 1,30 × 10³ m³/s
6.93 a) 1,26 × 10⁵ J b) 1,46 W
6.95 a) 2,4 MW b) 61 MW c) 6,0 MW
6.97 a) 513 W b) 355 W c) 52,1 W
6.99 a) 358 N b) 47,2 hp c) 4,06 hp d) 2,03%
6.101 a) $\frac{1}{2}MV^2$ b) 6,1 m/s c) 3,9 m/s d) K_{bola} = 0,40 J, K_{mola} = 0,60 J
6.103 a) 2,0 × 10⁵ J b) 2,8 × 10⁵ J c) 2,8 × 10⁵ J d) 5 km/h

Capítulo 7

7.1 a) 6,6 × 10⁵ J b) −7,7 × 10⁵ J
7.3 a) 820 N b) (i) zero (ii) 740 J
7.5 a) 24,0 m/s b) 24,0 m/s c) item (b)
7.7 2,5 m/s
7.9 a) (i) zero (ii) 0,98 J b) 2,8 m/s c) constante: gravidade; não constante: normal, atrito d) 5,0 N
7.11 −5400 J
7.13 a) 880 J b) −157 J c) 471 J d) 253 J e) a = 3,16 m/s²; v = 7,11 m/s; ΔK = 253 J; o mesmo
7.15 a) 80,0 J b) 5,00 J
7.17 a) (i) 4U_0 (ii) $U_0/4$ b (i) $x_0\sqrt{2}$ (ii) $x_0/\sqrt{2}$
7.19 a) 6,32 cm b) 12 cm
7.21 ±0,092 m
7.23 a) 3,03 m/s; quando a massa deixa a mola b) 95,9 m/s²; logo após a massa ser libertada
7.25 a) 4,46 × 10⁵ N/m b) 0,128 m
7.27 a) −308 J b) −616 J c) não conservativa
7.29 a) −3,6 J b) −3,6 J c) −7,2 J d) não conservativa

7.31 a) $\frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$ b) $-\frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$; zero c) $-\frac{1}{2}k(x_3^2 - x_1^2)$; $-\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_3^2)$; $-\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$; a mesma
7.33 2,46 N, na direção $+x$
7.35 c) atrai
7.37 a) $F(r) = (12a/r^{13}) - (6b/r^7)$ b) $(2a/b)^{1/6}$; estável c) $b^2/4a$ d) $a = 6{,}68 \times 10^{-138}$ J · m^{12}, $b = 6{,}41 \times 10^{-78}$ J · m^6
7.39 a) zero, 637 N b) 2,99 m/s
7.41 a) não b) sim, \$150
7.43 0,41
7.45 a) 15,9 J b) 4,0 J c) 3,0 J
7.47 a) 20,0 m da lateral esquerda da seção horizontal b) −78,4 J
7.49 a) 22,2 m/s b) 16,4 m c) não
7.51 0,602 m
7.53 15,5 m/s
7.55 4,4 m/s
7.57 a) $x_0\sqrt{k/m}$ b) kx_0/m c) $x = 0$, $x = -x_0$ d) x_0 e) o sistema oscila e nunca pára
7.59 a) 7,00 m/s b) 2,94 N
7.61 a) $mg(1 - h/d)$ b) 440 N c) $\sqrt{2gh(1 - y/d)}$
7.63 48,2°
7.65 a) 0,392 b) −0,832 J
7.67 a) $U(x) = (30{,}0\ \text{N/m})x^2 + (6{,}0\ \text{N/m}^2)x^3$ b) 7,85 m/s
7.69 7,01 m/s
7.71 a) $m(g + a)^2/2gh$ b) $2gh/(g + a)$
7.73 119 J
7.75 a) 3,87 m/s b) 0,10 m
7.77 a) $F_x = -m\omega_0^2 x$, $F_y = -m\omega_0^2 x$, b) $\frac{1}{2}m\omega_0^2(x^2 + y^2)$ c) (i) $\frac{1}{2}m\omega_0^2(x_0^2 + y_0^2)$ (ii) $\frac{1}{2}m\omega_0^2(x_0^2 + y_0^2)$
7.79 a) $4{,}4 \times 10^{12}$ J b) $2{,}7 \times 10^3$ m^3; 0,90 mm
7.81 c) atrai
7.83 a) −50,6 J b) −67,5 J c) não conservativa
7.85 a) não b) $x_0 = F/k$ d) não e) $3F/k$, $-F/k$ f) $v_{máx} = 2F/\sqrt{mk}$ at $x = x_0 = F/k$
7.87 b) $v(x) = \left[\frac{2\alpha}{mx_0^2}\left(\frac{x_0}{x} - \left[\frac{x_0}{x}\right]^2\right)\right]^{1/2}$ c) $x = 2x_0$, $v = \sqrt{\alpha/2mx_0^2}$ d) zero e) $v(x) = \left[\frac{2\alpha}{mx_0^2}\left(\frac{x_0}{x} - \left[\frac{x_0}{x}\right]^2 - \frac{2}{9}\right)\right]^{1/2}$ f) primeiro caso: x_0, ∞; segundo caso: $3x_0/2$, $3x_0$

Capítulo 8

8.1 a) $1{,}20 \times 10^5$ kg · m/s b) (i) 60,0 m/s (ii) 26,8 m/s
8.3 b) bola de beisebol, 0.525 c) mulher, 0.643
8.5 a) 22,5 kg · m/s, para a esquerda b) 838 J
8.7 562 N, não
8.9 a) 10,8 m/s, para a direita b) 0.75 m/s, para a esquerda
8.11 a) 500 N/s^2 b) 5810 kg · m/s c) 2,70 m/s
8.13 a) 2,50 N · s b) i) +6,25 m/s, para a direita b) ii) 3,75 m/s, para a direita
8.15 a) 6,79 m/s b) 55,2 J
8.17 a) 0,790 m/s b) −0,0023 J
8.19 0,866 kg · m/s
8.21 a) 0,0559 m/s b) 0,0313 m/s
8.23 $3{,}65 \times 10^5$ m/s
8.25 a) 7,20 m/s b) −680 J
8.27 3,56 m/s
8.29 a) 0,846 m/s b) 2,10 J
8.31 a) $1{,}4 \times 10^{-6}$ km/h, que não é perceptível. b) $6{,}7 \times 10^{-8}$ km/h, que não é perceptível.
8.33 5,9 m/s a 32° do leste para o norte
8.35 a) Ambos os carros possuem a mesma variação no momento linear, mas o carro menor possui maior variação na velocidade. b) 2,5 Δv c) Aqueles no carro menor
8.37 19,5 m/s (carro), 21,9 m/s (caminhão)
8.39 a) 2,93 cm b) 866 J c) 1,73 J
8.41 a) 0,333 m/s, 3,33 J b) −1,33 m/s (A), +0,67 m/s (B)
8.43 a) −0,100 m/s (A), 0,500 m/s (B) b) 0,009 kg · m/s para ambas c) -4.5×10^{-4} J (A), 4.5×10^{-4} J (B), módulos iguais porque a colisão é elástica
8.45 a) 1/3 b) 1/9 c) 10
8.47 $x_{cm} = 0{,}044$ m, $y_{cm} = 0{,}056$ m
8.49 2520 km do centro de Plutão
8.51 0,700 m para cima e 0,700 m para a direita
8.53 0,47 m/s
8.55 $F_x = (-1{,}50\ \text{N/s})t$, $F_y = 0{,}25$ N, $F_z = 0$
8.57 a) 53 g b) 5,22 N
8.59 2,4 km/s
8.61 45,1
8.63 a) 0,47 N · s b) 237 N
8.65 a) $J_x = -1{,}14$ N · s, $J_y = 0{,}33$ N · s b) $v_{2x} = 0{,}0500$ m/s, $v_{2y} = 1{,}78$ m/s
8.67 2,67 m/s (conversível), 3,46 m/s (utilitário)
8.69 a) $v_{Cx} = 1{,}75$ m/s, $v_{Cy} = 0{,}26$ m/s b) −0,092 J
8.71 15,0 m/s
8.73 36,4 N
8.75 a) 2,60 m/s b) 325 m/s
8.77 a) 5,28 m/s b) 5,7 m
8.79 68,8°
8.81 102 N
8.83 a) 0,222 b) −291 J c) 0,784 J
8.85 b) $M = m$ c) zero
8.87 a) 9,35 m/s b) 3,29 m/s
8.89 b) $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$
8.91 a) 3,56 m/s b) 5,22 m/s c) 4,67 m/s
8.93 0,00544%
8.95 $1{,}61 \times 10^{-22}$ kg · m/s, para a esquerda
8.97 A: 13,6 m/s; B: 6,34 m/s, 65,0°
8.99 a) $(L/2)\cos(\alpha/2)$, ao longo do eixo, a partir do vértice b) $(L/3)$, ao longo da bissetriz, a partir da base c) $L/\sqrt{8}$ ao longo da bissetriz d) $L/\sqrt{12}$ de cada lado
8.101 0,400 m/s
8.103 a) 1,40 kg: 14,3 m/s; 0,28 kg: 71,6 m/s b) 347 m
8.105 222 m/s, $1{,}01 \times 10^3$ m/s; $v_{Kr} = 1{,}5v_{Ba}$
8.107 a) zero b) 1 d) 0,87 m f) 0,089 m
8.109 a) sim b) não; a energia cinética diminui em $4{,}8 \times 10^3$ J
8.111 a) $1{,}37v_{ex}$ b) $1{,}18v_{ex}$ c) $2{,}38v_{ex}$ d) 2,94 km/s
8.113 b) $2L/3$
8.115 a) $l^2\lambda g/32$ b) $l^2\lambda g/32$

Capítulo 9

9.1 a) 34,4° b) 6,27 cm c) 1,05 m
9.3 a) A: rad/s; B: rad/s^3 b) (i) 0 (ii) 15,0 rad/s^2 c) 9,50 rad
9.5 a) $\omega_z(t) = (0{,}400\ \text{rad/s}) + (0{,}0360\ \text{rad/s}^3)t^2$ b) 0,400 rad/s c) $\omega_z = 1{,}30$ rad/s; $\omega_{mz} = 0{,}70$ rad/s
9.7 a) $a = \pi/4$ rad, $b = 2{,}00$ rad/s, $c = -0{,}139$ rad/s^3 b) zero c) 19,5 rad; 9,35 rad/s
9.9 a) 2,25 rad/s b) 4,69 rad
9.11 a) 24,0 s b) 68,8 rev
9.13 10,5 rad/s
9.15 a) 300 rpm b) 75,0 s; 312 rev
9.17 9,00 rev
9.19 a) 540 rad b) 12,3 s c) −8,17 rad/s^2
9.21 a) $1{,}99 \times 10^{-7}$ rad/s b) $7{,}27 \times 10^{-5}$ rad/s c) $2{,}99 \times 10^4$ m/s d) 464 m/s e) 0,0337 m/s^2; zero
9.23 a) 15,1 m/s^2 b) 15,1 m/s^2
9.25 a) 0,180 m/s^2; 0; 0,180 m/s^2 b) 0,180 m/s^2; 0,377 m/s^2; 0,418 m/s^2 c) 0,180 m/s^2; 0,754 m/s^2; 0,775 m/s^2
9.27 10,7 cm; não
9.29 a) 0,831 m/s b) 109 m/s^2
9.31 a) 2,29 b) 1.51 c) 15,7 m/s, $108g$
9.33 2,99 cm
9.35 a) (i) 0,469 kg · m^2 (ii) 0,117 kg · m^2 (iii) zero b) (i) 0,0433 kg · m^2 (ii) 0,0722 kg · m^2 c) (i) 0,0288 kg · m^2 (ii) 0,0144 kg · m^2
9.37 a) 0,0640 kg · m^2 b) 0,0320 kg · m^2 c) 0,0320 kg · m^2
9.39 0,193 kg · m^2
9.41 8,52 kg · m^2
9.43 a) $3{,}15 \times 10^{23}$ J b) 158 y; não
9.45 0,600 kg · m^2
9.47 $7{,}35 \times 10^4$ J
9.49 a) 67,3 cm b) 45,5%
9.51 a) f^5 b) $6{,}37 \times 10^8$ J
9.53 −88,2 J
9.55 sobre um eixo paralelo a um diâmetro e a partir do centro da esfera e $(2/\sqrt{15})R$ a partir do centro da esfera
9.57 $\frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$
9.59 a) $ML^2/12$ b) $ML^2/12$
9.61 $MR^2/2$
9.63 a) $\gamma L^2/2$ b) $ML^2/2$; maior c) $ML^2/6$; um terço do resultado do item(b)
9.65 em 128 d
9.67 a) 0,600 m/s^3 b) $\alpha = (2{,}40\ \text{rad/s}^3)t$ c) 3,54 s d) 17,7 rad
9.69 a) 0,050 rad/s^2 b) 0,300 rad/s c) 5,40 m/s^2 e) 6,18 m/s^2; $7{,}66 \times 10^3$ N f) 60,9°
9.71 a) 1,70 m/s b) 84,8 rad/s
9.73 b) 2,00 m/s^2 d) 0,208 kg · m^2
9.77 a) 7,36 m b) 327 m/s^2
9.79 a) $2{,}14 \times 10^{29}$ J b) $2{,}66 \times 10^{33}$ J
9.81 a) $Mb^2/6$ b) 182 J
9.83 a) −0,784 J b) 5,42 rad/s c) 5,42 rad/s d) velocidade escalar da partícula = 4,43 m/s
9.85 $\sqrt{(2gd)(m_B - \mu_c m_A)/(m_A + m_B + I/R^2)}$
9.87 $\sqrt{(g/R)(1 - \cos\beta)}$
9.89 a) $2{,}25 \times 10^{-3}$ kg · m^2 b) 3,40 m/s c) 4,95 m/s
9.91 7,23 m
9.93 a) $(247/512)MR^2$ b) $(383/512)MR^2$
9.95 b) $\frac{1}{4}M(R_1^2 + R_2^2)$
9.97 a) $\frac{3}{5}MR^2$ b) maior
9.99 b) $5{,}97 \times 10^{24}$ kg c) $0{,}334MR^2$
9.101 a) $s = r_0\theta + \beta\theta^2/2$ b) $\theta = (1/\beta)[\sqrt{r_0^2 + 2\beta vt} - r_0]$ c) $\omega_z = \frac{v}{\sqrt{r_0^2 + 2\beta vt}}$, $\alpha_z = \frac{\beta v^2}{(r_0^2 + 2\beta vt)^{3/2}}$; não d) $r_0 = 2{,}50$ cm, $\beta = 0{,}247$ μm/rad; $2{,}13 \times 10^4$ rev

Capítulo 10

10.1 a) 40,0 N · m, fora da página b) 34,6 N, fora da página c) 20,0 N · m, fora da página d) 17,3 N · m, dentro da página e) zero f) zero
10.3 2,50 N · m, no sentido anti-horário
10.5 b) para dentro da página c) $(-1{,}05\ \text{N} \cdot \text{m})\hat{k}$
10.7 13,1 N · m
10.9 a) 14,8 rad/s^2 b) 1,52 s
10.11 7,47 N
10.13 0,482
10.15 a) 7,5 N na parte horizontal, 18,2 N na parte suspensa b) 0,0160 kg · m^2
10.17 a) 2,65 rad/s^2 b) não c) 3,31 m/s^2; não
10.19 a) 1,80 m/s b) 7,13 J c) (i) 3,60 m/s, para a direita (ii) 0 (iii) 2,55 m/s, 45° abaixo da horizontal d) (i) 1,80 m/s, para a direita (ii) 1,80 m/s, para a esquerda (iii) 1,80 m/s, para baixo

10.21 a) $1/3$ b) $2/7$ c) $2/5$ d) $5/13$
10.23 a) 0,613 b) não, requer $\mu_s = 0{,}858$ c) não desliza
10.25 11,7 m
10.27 a) 0,309 rad/s b) 100 J c) 6,67 W
10.29 a) 0,38 N · m b) 160 rad c) 59 J d) 59 J
10.31 b) 65,6 N
10.33 a) 358 N · m b) $1{,}79 \times 10^3$ N c) 83,8 m/s
10.35 a) 115 kg · m²/s, para dentro da página b) 125 kg · m²/s², para fora da página
10.37 $4{,}71 \times 10^{-6}$ kg · m²/s
10.39 $4{,}6 \times 10^3$ rad/s
10.41 1,14 rev/s
10.43 0,60 rev
10.45 a) 0,120 rad/s b) $3{,}20 \times 10^{-4}$ J; trabalho realizado pelo inseto
10.47 a) 5,88 rad/s
10.49 a) 1,62 N b) $1{,}80 \times 10^3$ rev/min
10.51 a) diminui pela metade b) dobra c) diminui pela metade d) dobra e) não varia
10.53 a) 67,6 N b) 62,9 N c) 3,27 s
10.55 a) 840 rpm b) 75 mph c) 60 mph
10.57 a) 16,3 rad/s² b) não; diminui c) 5,70 rad/s
10.59 a) em $x = l$ b) em $x = l$ c) em $x = (l/2)(1 + [2h/l]^2)$ para $l > 2h$; em $x = l$ para $l < 2h$
10.61 a) FR b) FR; sim c) $\sqrt{4F/MR}$ d) $2F/M$ e) $4F/M$
10.63 a) 266 N b) 4,71 rad/s²
10.65 a) 2,88 m/s² b) 6,13 m/s²; maior no caso (b)
10.67 239 N
10.69 $a = \dfrac{2g}{2 + (R/b)^2}$; $\alpha = \dfrac{2g}{2b + R^2/b}$; $T = \dfrac{2mg}{2(b/R)^2 + 1}$
10.71 sentido horário; sentido horário; sentido horário
10.73 a) 1,41 s; 70,5 m/s b) t maior, v menor
10.75 29,0 m/s
10.77 a) 26,0 m/s b) não varia
10.79 a) $\sqrt{20hy/7}$ b) não c) atrito de rolamento d) $\sqrt{8hy/3}$
10.81 b) R = raio da roda, T = período da rotação da roda

c) $v_x = \dfrac{2\pi R}{T}\left[1 - \cos\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right)\right]$,
$v_y = \dfrac{2\pi R}{T}\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right)$;

$a_x = \left(\dfrac{2\pi R}{T}\right)^2 R\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right)$,
$a_y = \left(\dfrac{2\pi R}{T}\right)^2 R\cos\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right)$

d) $t = 0, T, 2T, \ldots$; $a_x = 0$, $a_y = \dfrac{4\pi^2 R}{T^2}$

e) $\dfrac{4\pi^2 R}{T^2}$, independentemente do tempo

10.83 $g/3$
10.85 1,87 m
10.87 a) $6v/19L$ b) $3/19$
10.89 a) 5,46 rad/s b) 3,17 cm c) $1{,}01 \times 10^3$ m/s
10.91 a) 2,00 rad/s b) 6,57 rad/s
10.93 0,30 rad/s, no sentido horário
10.97 $-4{,}2 \times 10^{-16}$ rad/s por ano; diminuindo
10.101 a) $a = +\mu_c g$, $\alpha = -2\mu_c g/R$ b) $\omega_0^2 R^2/18\mu_c g$ c) $-M\omega_0^2 R^2/6$
10.103 a) $mv_1^2 r_1^2/r^3$ b) $(mv_1^2/2)[(r_1/r_2)^2 - 1]$ c) o mesmo

Capítulo 11

11.1 29,8 cm
11.3 20,0 kg
11.5 5450 N
11.7 a) 1000 N, 1,20 m da extremidade onde a força de 400-N é aplicada b) 800 N, 1,25 m da extremidade onde a força de 400-N é aplicada
11.9 a) 550 N b) 0,614 m a partir A
11.11 a) 1920 N b) 1140 N
11.13 a) $T = 2{,}60p$; $F_{\text{pivô}} = 3{,}28p$ em 37,6° b) $T = 4{,}10p$; $F_{\text{pivô}} = 5{,}38p$ em 48,8°
11.15 140 N por dobradiça
11.17 246 N; 0,34 m atrás das patas dianteiras
11.19 $T_{\text{esquerda}} = 270$ N, $T_{\text{direita}} = 304$ N, $\theta = 40°$
11.21 a) 0,800 m b) no sentido horário c) 0,800 m, no sentido horário
11.23 1,4 mm
11.25 $2{,}00 \times 10^{11}$ Pa
11.27 a) superior: $3{,}1 \times 10^{-3}$; inferior: $2{,}0 \times 10^{-3}$ b) superior: 1,6 mm; inferior: 0,98 mm
11.29 $9{,}1 \times 10^6$ N
11.31 a) $3{,}33 \times 10^6$ Pa b) $1{,}33 \times 10^5$ Pa
11.33 a) $4{,}8 \times 10^9$ Pa; $2{,}1 \times 10^{-10}$ Pa^{-1}
11.35 b) $6{,}60 \times 10^5$ N c) 1,8 mm
11.37 $3{,}41 \times 10^7$ Pa
11.39 10,2 m/s²
11.41 a) 525 N b) 222 N, 328 N c) 1,48
11.43 força da asa: 7300 N para cima; força da cauda: 600 N para baixo
11.45 a) 140 N b) 6 cm para a direita
11.47 a) 424 N b) 170 N
11.49 120 N para a direita, 160 N para cima
11.53 b) $(Mg/2)\operatorname{sen}\theta$
11.55 a) $V = mg + p, H = T = (p + mg/4)\operatorname{cotg}\theta$ b) 950 N c) 4,00°
11.57 7600 N
11.59 a) 2700 N b) 19
11.61 a) 4,90 m b) 60 N
11.63 a) $\theta = \operatorname{arctg}(h/d)$; $T = (Wd/2)\sqrt{h^2 + d^2}$ b) $\dfrac{Whd}{2(h^2 + d^2)}$; $W\dfrac{2h^2 + d^2}{2(h^2 + d^2)}$
11.65 a) 1150 N b) 1940 N c) 918 N d) 0,473
11.67 pessoa acima: 590 N; pessoa abaixo: 1370 N; acima
11.69 a) $p_{\text{máx}} = T_{\text{máx}} hD/(L\sqrt{h^2 + D^2})$
11.71 a) 7140 N; paredes altas b) 7900 N
11.73 a) 268 N b) 232 N c) 366 N
11.75 a) A: 0,424 N; B: 1,47 N; C 0,424 N b) 0,848 N
11.77 a) tomba a 27°, desliza a 31°; o fardo tomba antes de deslizar b) tomba a 27°, desliza a 22°, o fardo desliza antes de tombar
11.79 a) $F_A = 80$ N, $F_B = 870$ N b) 1,92 m
11.81 a) 3,7 kN, 2,0 kN verticalmente de baixo para cima
11.83 a) $0{,}012w$ b) menos c) 25,0°; tomba
11.85 a) 5,4 mm b) 4,2 mm
11.87 a) a) 0,70 m do cabo A b) 0,45 m do cabo B
11.89 a) 1,63 m b) bronze: 2.00×10^8 Pa; níquel: $4{,}00 \times 10^8$ Pa c) bronze: $2{,}2 \times 10^{-3}$; níquel: 1.9×10^{-3}
11.91 a) 0,36 mm b) 0,045 mm c) 0,33 mm
11.93 a) $(F\cos^2\theta)/A$ b) $(F\operatorname{sen}2\theta)/2A$ c) 0 d) 45°
11.95 a) 600 N b) 13,5 kN c) desliza: $\mu_s p/(\operatorname{sen}\theta - \mu_s\cos\theta)$; tomba: $w/[(\frac{1}{9})\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta]$; 66°
11.97 menor de $h^2/L + L/2$ e L
11.99 $[(A^2 x/F) - k_O V_O]/V_S$
11.101 a) 0,662 mm b) $2{,}20 \times 10^{-2}$ J c) $8{,}33 \times 10^{-3}$ J d) $-3{,}04 \times 10^{-2}$ J e) $3{,}04 \times 10^{-2}$ J

ÍNDICE REMISSIVO

A

ação e reação, 121, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 131, 137, 164, 253, 254, 320
aceleração
  angular, 286, 289-293, 299, 316, 318, 319-323, 328, 330, 331, 333
  constante, 291-292, 330
    centrípeta, 87, 88, 157, 158, 160, 293, 294, 296
    da gravidade, 51, 57, 77, 85, 88, 119, 120, 127, 137, 294, 300, 357, 358
    definição de, 48, 289
    instantânea, 289, 290
    média, 289, 290
    torque e, 319
  instantânea, 35, 41-45, 48, 57, 73 74, 75, 86
  média, 35, 41-45, 48, 55, 72, 73, 74, 86, 291
    linear, 286, 290, 291, 292, 293, 294, 316, 321, 322
    massa e, 118
    radial, 88, 157, 158, 160, 293
  sinal da, 44, 45
  velocidade e, 44, 87
acurácia, 8, 9, 10, 14, 15
algarismos significativos, 8-10, 16, 19, 51, 150, 272
arraste do ar, 148, 154, 156
atmosfera, 1, 2, 367
atrito
  cinético, 135, 148-151, 152, 153, 154, 157, 195, 196, 229, 326, 328
  estático, 135, 148-151, 152, 156, 159, 328, 361, 362

B

bola
  de bilhar, 267, 304
  de boliche, 234, 263, 327, 328
  de futebol, 77, 79, 121, 249, 252
braço da alavanca, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 331, 360, 362

C

centro de
  gravidade, 267, 355, 356-359, 360, 361
  massa, 247, 266-270, 298, 300, 301, 302, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 332, 334, 338, 339, 355, 356, 357, 358
cinemática, 69, 105, 286, 290-296, 322, 328, 331
cisalhamento, 355, 364, 365, 368, 369, 371
coeficiente de atrito
    cinético, 149, 151, 152, 153, 195, 229
    de rolamento, 153, 154
    estático, 150, 151, 159, 196, 328, 361, 362
coerência dimensional, 6
colisões
  completamente inelásticas, 259
  elásticas, 235-240
  em um plano horizontal, 257
  inelásticas, 258, 259
    classificação de, 262
    conservação do momento linear e, 258-262
colisões elásticas, 235-240
  com um corpo inicialmente em repouso, 263
    inelásticas e, 258
    velocidade relativa e, 264
colisões inelásticas, 258, 259
    completamente, 259
    conservação do momento linear e, 258-262
componentes de vetores, 15, 19
compressão, 194, 223, 224, 226, 227, 355, 364, 365, 366, 367, 368
compressibilidade, 367, 368
condições de equilíbrio, 140, 152, 355-356, 359, 360, 362
conservação
  do momento angular, 316, 334-337
  da energia, 181, 213-246, 247, 255 260, 261, 262, 263, 264, 266, 299, 300, 325, 334, 336, 337

D

definição operacional, 4
  momento de, 286, 296, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 319, 320, 322, 323, 324, 325, 327, 328, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 337, 338, 339
deformação, 106, 193, 194, 222, 223, 225, 329, 355, 364-369, 370
  volumétrica, 336, 367, 368
deslocamento angular, 287, 288, 289, 329, 330
diagrama do corpo livre, 125, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 151, 152, 153, 154, 155, 158, 159, 160, 161, 185, 186, 188, 190, 195, 197, 198, 217, 218, 220, 221, 319, 321, 322, 327, 328, 360, 361, 363
dimensionalmente coerente, 6, 115
dina, 118
dinâmica, 35, 105, 286, 326, 327
  da translação, 322
  das partículas, 141-148
  das rotações, 321, 334, 355, 360
  do movimento circular, 157-162
  do movimento de rotação, 316-354
  rotacional, 322
  segunda lei de Newton e, 142
direção e sentido de aceleração, 147

E

Eixo
  instantâneo, 235
  de rotação, 286, 287, 288, 289, 290, 293, 294, 296, 297, 298, 301, 302, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 327, 329, 330, 332, 335, 336, 337, 338, 356
  de simetria, 267, 268, 303, 304, 326, 327, 332, 333, 338, 339
elasticidade, 355-385
  plasticidade e, 369-370
  módulos de, 364-369
energia
  cinética na rotação, 286, 297, 299, 301, 326
  potencial
    elástica, 213, 222-227, 229, 258, 260, 262
    gravitacional, 13, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 223, 224, 225, 226, 227, 229, 231, 232, 233, 300, 325, 327
      definição, 213
      energia potencial elástica e, 224
equilíbrio
  condições de, 140, 152, 355-356, 359, 360, 362
  estável, 234, 235
  instável, 234, 235
erro
  fracionário, 8
  percentual, 8
estimativas de ordem de grandeza, 10

F

força conservativa, 213, 228, 231, 232, 233, 234, 260
  definição de, 228
  energia potencial e, 231-233
  trabalho realizado por uma, 228, 231
força de atrito
  definição, 148
  força normal e, 152
força dissipativa, 229

força gravitacional, 3, 51, 78, 109, 119, 122, 123, 124, 125, 145, 185, 213, 214, 215, 219, 220, 224, 225, 228, 231, 232, 233, 252, 253, 254, 270, 357
força normal, 106, 110, 113, 117, 124, 125, 136, 139, 140, 142, 143, 144, 145, 146, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 158, 160, 161, 162, 163, 184, 185, 186, 187, 189, 196, 219, 220, 221, 229, 254, 321, 322, 328, 329, 338, 339, 360, 361, 362
força resultante
  aceleração e, 113, 119
  constante, 114, 187, 195, 249, 250
forças externas
  e segunda lei de Newton, 116
  movimento do centro de massa e, 268
  torque de, 332
forças fundamentais da natureza, 135, 162-164
forças internas
  torque de, 332
forças
  de contato, 106, 122, 135, 148, 163, 329
  definição, 106
  externas, 116, 126, 138, 147, 186, 191, 192, 254, 255, 258, 259, 260, 261, 262, 265, 268, 269, 270, 320, 321, 330, 332, 356
  internas, 125, 138, 253, 254, 255, 262, 269, 320, 332, 334, 335, 336
  resultante, 14, 30, 105, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 124, 135, 137, 139, 141, 143, 144, 152, 157, 158, 162, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 195, 197, 217, 227, 234, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 255, 256, 262, 264, 268, 270, 271, 316, 319, 320, 322, 331, 332, 356, 360, 364
  soma vetorial de todas as, 107, 135, 185, 186, 188, 248, 269, 355

G

giroscópio, 316, 337-340
grandezas vetoriais, 11, 12, 18, 20, 37, 69, 183, 250, 252, 337
gravidade
  aceleração da, 51, 77, 85, 88, 119, 120, 294, 300, 357, 358
  centro de, 267, 355, 356-359, 360, 361

I

inércia
  definição, 110
  lei da, 112
  primeira lei de Newton e, 110
  rotacional, 297
ioiô, 323, 325, 327, 329

L

lei de Hooke, 193, 194, 233, 355, 364, 365, 367, 368, 369
limite de elasticidade, 370
linha de ação, 317, 318, 319, 320, 328, 332

M

massa inercial, 115, 120
massa
  aceleração e, 118
  centro de, 247, 266-270, 298, 300, 301, 302, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 332, 334, 338, 339, 355, 356, 357, 358
  peso e, 119-121
mecânica clássica, 105, 135
módulos de elasticidade, 364, 365
momento angular, 23, 316, 331-333, 334, 335, 336, 337, 338, 339,356. *Ver também* momento linear
  conservação do, 316, 334, 335, 336, 337
  definição, 331
  do giroscópio, 316
momento de inércia, 286, 296, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 319, 320, 322, 323, 324, 325, 327, 328, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 337, 338, 339
  cálculos do, 302-304
  definição, 296
momento linear total, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 261, 266, 267, 268, 270
momento linear, 116, 247-285, 331, 333, 334, 336, 338, 339. *Ver também* momento angular
  conservação do, 247, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 266, 270, 271, 334
  definição, 247
  teorema do impulso-momento linear, 248-250, 251
movimento circular
  dinâmica do, 157-162
  não uniforme, 88-89, 162
  uniforme, 85-88, 114, 135, 157, 158, 161, 164, 184, 337, 339
movimento combinado de rotação e translação, 323-324, 326-328
movimento de um projétil, 77-85, 87, 219, 286
movimento do centro de massa, 267-268, 332

P

Pascal, 364, 365
pêndulo balístico, 260
pêndulo cônico, 159, 160, 198
peso
  aparente, 144, 145, 161, 162, 220
  definição de, 119
  massa e, 119-121
ponte, 135, 355, 364, 366
posição angular, 288, 290, 291
potência
  instantânea, 198, 199, 201, 331
  média, 198, 199, 200, 330, 331
precessão, 316, 337-340
prensa hidráulica, 368
primeira lei de Newton, 109-133, 117, 123, 124, 125, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 151, 152, 154, 157, 356
produto
  escalar, 24, 183, 197, 198, 199, 219
  vetorial, 20, 23-25, 289, 318, 331
produtos de vetores, 20, 31
propulsão de um foguete, 247, 270-272

Q

quilowatt, 5, 198, 199, 200
quilowatt-hora, 199

R

radianos, 197, 287, 288, 289, 293, 294, 297, 329, 335, 337
regra da mão direita, 23, 24, 25, 289, 318, 331, 332, 333, 339

S

segunda lei de Newton, 105, 113-119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 135, 141-148, 153, 154, 155, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 181, 186, 187, 220, 221, 247, 248, 249, 250, 254, 257, 270, 319, 320, 321, 322, 326, 330, 333
Sistema
  Internacional (SI), 4
  métrico, 4, 5, 118
soma
  de vetores, 18, 19
  vetorial, 10-14, 15, 17, 18, 19, 20, 73, 88, 91, 107, 109, 110, 111, 116, 119, 122, 135, 157, 185, 186, 188, 214, 233, 248, 253, 254, 269, 294, 295, 320, 323, 325, 332, 355, 357, 359, 361, 363

T

tensão, 143, 148, 355, 364-369
  volumétrica, 336, 367
teorema
  do trabalho-energia, 186-192, 195, 196, 197, 198, 213, 214, 215, 223, 224, 250, 330,
  dos eixos paralelos, 301-302, 325
terceira lei de Newton, 121-124, 125, 136, 137, 144, 146, 154, 181, 184, 189, 223, 231, 253, 254, 257, 269, 320, 335
torque
  conservação do momento angular e, 337

de forças externas, 320
definição, 316
trabalho realizado pelo, 331
trabalho
definição, 181
e energia cinética, 181-212, 213
total, 181, 182, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 199, 213, 215, 217, 219, 222, 224, 228, 230, 250, 251, 300, 329, 330

V

variável-alvo, 3, 9, 22, 118, 121, 138, 142, 143, 144, 145, 146, 152, 154, 158, 159, 160, 161, 183, 195
velocidade angular, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 296, 297, 299, 300, 318, 324, 325, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 339, 340
definição de, 287-289
instantânea, 287, 288, 289, 290, 293
velocidade constante, 6, 49, 50, 69, 73, 77, 78, 85, 86, 87, 90, 110, 111, 112, 113, 114, 122, 124, 135, 136, 140, 144, 151, 152, 153, 157, 161, 186, 198, 200, 264, 356
velocidade relativa, 69, 85, 89-93, 112, 113, 213, 255, 264, 271, 272
velocidade
aceleração e, 44, 87
instantânea, 35, 38-41, 42, 43, 44, 70, 71, 72, 73, 74, 86, 88, 157, 199, 293
linear, 286, 288, 290, 292, 293, 299
média, 4, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 46, 51, 55, 70, 71, 72, 161, 200
terminal, 154, 155, 156
vetor
aceleração instantânea, 43, 73, 74
aceleração média, 42, 72, 73, 74
posição, 69-72, 79, 91, 233, 266, 317, 318, 319, 331, 332, 357
torque, 318, 357
velocidade instantânea, 39, 70, 71, 72, 86
velocidade média, 39, 70, 71, 72
vetores
antiparalelos, 12
componentes, 15, 19, 107, 108
paralelos, 11, 12, 23, 333
unitários, 1, 19, 20, 22, 24, 25, 70, 71,74, 81, 219, 233
volante, 248, 250, 288, 289, 290, 335, 336, 337, 338, 339, 340

W

watt, 198, 199, 200
Watt, James, 199

CRÉDITOS DAS FOTOS

Capítulo 1 Abertura: NASA; Figura 1.1a: G. Ross/Photo Researchers, Inc.; Figura 1.1b: NASA; Figura 1.4: National Institute of Standards and Technology (NIST); Figura 1.5a: R. Williams (STScI), The HDF-S Team, e NASA; Figura 1.5b: SOHO (ESA & NASA); Figura 1.5c: cortesia da NASA/JPL/Caltech; Figura 1.5d: Photodisc Green/Getty Images; Figura 1.5e: Chad Baker/PhotoDisc/Getty Images; Figura 1.5f: Purdue University. Veeco Instruments, Inc.; Figura 1.5g: SPL/Photo Researchers; Figura 1.6: Pearson Addison Wesley, San Francisco, California; Figura 1.7: ND-Viollet/Roger Viollet/Liaison Agency, Inc.

Capítulo 2 Abertura: Mike Hewitt/Getty Images; Figura 2.4: Pete Saloutos/Corbis; Figura 2.5: DiMaggio/Kalish/Corbis; Figura 2.22: Richard Megna/Fundamental Photographs; Figura 2.26: Corbis.

Capítulo 3 Abertura: Schlegelmilch/Corbis; Figura 3.8: PhotoAlto/Getty Images; Figura 3.16: Richard Megna/Fundamental Photographs; Figura 3.19a: Richard Megna/
Fundamental Photographs; Figura 3.19b: Stuart Westmorland/Getty Images; Figura 3.31: AFP/Getty Images.

Capítulo 4 Abertura: Balfour Studios/Alamy; Figura 4.12: Wayne Eastep/Getty Images; Figura 4.17: AFP/Getty Images; Figura 4.20: James H. Robinson/Animals Animals; Figura 4.29: E. Klaswitter/Corbis.

Capítulo 5 Abertura: Kevin Schafer/Peter Arnold; Figura 5.11: NASA/Photo Researchers; Figura 5.16: AFP/Getty Images; Figura 5.26b: Jump Run Productions/Getty Images; Figura 5.38b: Helen Hansma, University of California, Santa Barbara; Figura 5.38d: fotografia de David Malin, Anglo-Australian Observatory.

Capítulo 6 Abertura: Stephen Dalton/Photo Researchers; Figura 6.1: Christina Hoehn/Getty Images; Figura 6.13: Corbis; Figura 6.26: Hulton Archive/Getty Images; Figura 6.27a: Jeffrey H. Whitesell, Airliners of America; Figura 6.27b: Jeffrey H. Whitesell, Airliners of America.

Capítulo 7 Abertura: Mark A. Johnson/Corbis; Figura 7.1: Purestock/Alamy; Figura 7.3a: Dennis O'Clair/Getty Images; Figura 7.5: Joe McBride/Corbis; Figura 7.12: Phil Mislinski/Omni-Photo Communications; Figura 7.15: Arco Images/Alamy; Figura 7.21: The Picture House/Alamy.

Capítulo 8 Abertura: Getty Images; Figura 8.2: David Woods/Corbis; Figura 8.4: Jim Cummins/Getty Images; Figura 8.6a: Andrew Davidhazy; Figura 8.16: Getty Images; Figura 8.21: David Leah/Getty Images; Figura 8.29: Richard Megna/Fundamental Photographs; Figura 8.33: NASA.

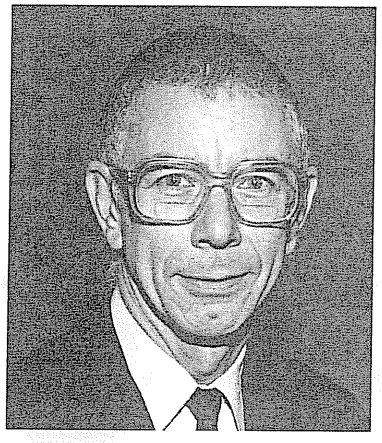
Capítulo 9 Abertura: George Hall/Corbis; Figura 9.19: Jose Azel/Aurora Photos; Figura 9.38: Nasa.

Capítulo 10 Abertura: Reuters/Corbis; Figura 10.7: Corbis; Figura 10.14: picturesbyrob/Alamy; Figura 10.17: Pete Saloutos/Corbis; Figura 10.22: Lester Lefkowitz/Getty Images; Figura 10.28: Gerard Lacz/Natural History Photographic Agency.

Capítulo 11 Abertura: Ruth Tomlinson/Getty Images; Figura 11.3: Jeremy Woodhouse/Getty Images; Figura 11.12a: Walter Bibikow/Getty Images; Figura 11.12b: Jonathan Blair/Corbis; Figura 11.12c: Photodisc Green/Getty Images.

Sobre os autores Hugh D. Young; John P. Surey.

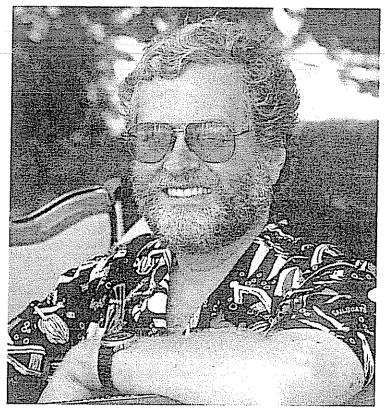
SOBRE OS AUTORES



Hugh D. Young é professor emérito de física na Universidade Carnegie-Mellon em Pittsburgh, PA. Ele estudou na Carnegie-Mellon tanto na graduação quanto na pós-graduação, obtendo o título de Ph.D. na teoria de partículas fundamentais, sob a orientação do professor Richard Cutkosky. Young começou a trabalhar na Faculdade Carnegie-Mellon em 1956 e atuou durante um ano como professor visitante na Universidade da Califórnia, em Berkeley.

A carreira do professor Young foi centralizada inteiramente no ensino de graduação. Ele escreveu diversos livros de física em nível de graduação e, em 1973, tornou-se co-autor, com Francis Sears e Mark Zemansky, dos famosos livros de introdução à Física. Depois que Sears e Zemansky faleceram, ele assumiu toda a responsabilidade das edições consecutivas desses livros, sendo que a oitava edição do livro *University Physics* é uma das mais recentes.

O professor Young é um entusiasta esquiador, alpinista e excursionista. Ele também foi organista associado durante diversos anos na Catedral de St. Paul, em Pittsburgh, e nessa cidade fez inúmeros recitais de órgão. O professor Young e sua mulher, Alice, normalmente viajam no verão para a Europa e para o deserto do Canyon no sul de Utah.

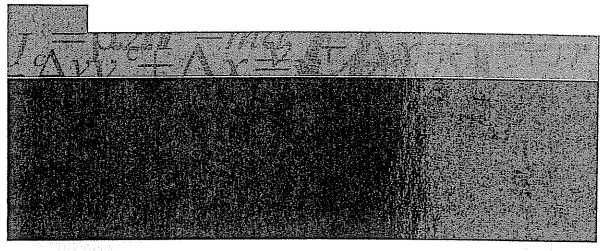


Roger A. Freedman é conferencista de física na Universidade da Califórnia, Santa Bárbara. Ele fez a graduação no campus da Universidade da Califórnia em San Diego e Los Angeles, e suas pesquisas para a tese de doutorado versaram sobre teoria nuclear, na Universidade de Stanford, sob a orientação do professor J. Dirk Walecka. O dr. Freedman ingressou na UCSB em 1981 depois de ter trabalhado em pesquisa e ensino de física na Universidade de Washington.

Na UCSB, lecionou no Departamento de Física, bem como na College of Creative Studies, um setor da universidade destinado a alunos de graduação altamente motivados e competentes. Ele publicou trabalhos de pesquisa em teoria nuclear, física das partículas elementares e física do laser. Também ajudou a desenvolver métodos computacionais para o ensino da física e da astronomia.

O dr. Freedman obteve licença de piloto comercial e, quando não está ensinando nem escrevendo, está voando com sua mulher, Caroline.

A. Lewis Ford é professor de física na Universidade A&M do Texas. Ele recebeu o grau de B.A. da graduação na Universidade Rice em 1968 e o título de Ph.D. em físico-química na Universidade do Texas, em Austin, em 1972. Depois de um pós-doutorado de um ano na Universidade de Harvard, ele começou a trabalhar na faculdade de física da Universidade A&M do Texas, em 1973, e ali permanece até hoje. Suas pesquisas versam sobre física atômica teórica, com especialização em colisões atômicas. Na Universidade A&M do Texas, lecionou diversos cursos de graduação e de pós-graduação, porém se dedicou mais à física básica.



O site de apoio do livro traz recursos para professores e estudantes que complementam seu conteúdo:

- Exercícios de múltipla escolha.
- Animações (em inglês) que simulam os principais conceitos.
- Manual de soluções em inglês (somente para professores).
- Apresentações em PowerPoint (somente para professores).

www.aw.com/young_b

Outros volumes da coleção

Física II
Termodinâmica e onda

Física III
Eletromagnetismo

Física IV
Ótica e física moderna

SEARS & ZEMANSKY

FÍSICA I

MECÂNICA

YOUNG & FREEDMAN

12ª EDIÇÃO

Física

Definitivamente o mais completo conteúdo para o estudo de física, esta 12ª edição do "Sears" é uma obra de didática inovadora. Com excelente abordagem educacional, este livro proporciona estratégias para a solução de problemas e exemplos resolvidos, com ferramentas visuais e conceituais pioneiras e didaticamente comprovadas, além de recursos eficazes para o aprendizado, como ilustrações com comentários, testes de compreensão, questões para discussão e uma biblioteca de problemas com mais de 800 novos exercícios.

O que há de novo nesta edição

Estratégias para a solução de problemas e Exemplos resolvidos. Todas as seções de estratégia para a solução de problemas seguem a abordagem ISEE (do inglês *Identify, Set Up, Execute and Evaluate* — Identificar, Preparar, Executar e Avaliar). Essa abordagem ajuda o estudante a saber como começar a tratar uma situação aparentemente complexa, identificar os conceitos relevantes de física, decidir quais recursos são necessários para solucionar o problema, executar a solução e depois avaliar se o resultado faz sentido.

O poder didático das figuras. O poder instrutivo das figuras é potencializado por meio da comprovada técnica de anotação (comentários no estilo quadro-negro integrados às figuras, para orientar o estudante em sua interpretação) e do uso eficiente de detalhes.

Questões e exercícios. Ao final de cada capítulo há um conjunto de questões para discussão destinadas a aprofundar e ampliar a assimilação conceitual pelo aluno. Logo após vêm os exercícios e os problemas desafiadores, desenvolvidos para estimular os melhores estudantes.

www.aw.com/young_br

O site de apoio oferece: para professores, manual de soluções em inglês e apresentações em PowerPoint com figuras e os principais conceitos do livro (protegidos por senha); para estudantes, exercícios de múltipla escolha, para ajudar na fixação de conceitos, e animações (em inglês) com os principais temas das lições.

Companion Website

PEARSON
Addison Wesley

www.pearson.com.br

ISBN 978-85-88639-30-0