

# Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Análise Matemática II E



FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

# Modelos de Crescimento e Decaimento Exponencial

Quando a taxa de variação de uma certa quantidade é proporcional ao total dessa quantidade:

$$\frac{dy}{dx} = k y,$$

com  $k$  constante não nula.

$k > 0$  - modelo de crescimento

$k < 0$  - modelo de decaimento

**Solução:**  $y = c e^{kx}$ , com  $c \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}$

## Exemplo 1

Suponha que num acidente nuclear foram libertados 10 gr do isótopo de plutónio Pu-239. Sabendo que a meia-vida deste material radioactivo é igual a 24100 anos, quanto tempo será necessário para os 10 gr decaírem para 1 gr?

## Exemplo 2 - Datação por Carbono-14

Um pedaço de carvão vegetal antigo tem 15% do carbono radioactivo de um pedaço de carvão vegetal actual. Sabendo que a meia-vida do Carbono-14 é 5730 anos, há quantos anos foi a árvore queimada para fazer o carvão vegetal?

# Lei da Variação da Temperatura de Newton

A taxa de variação da temperatura de um objecto num ambiente com temperatura constante é proporcional à diferença de temperatura entre a temperatura do objecto e a temperatura do ambiente.

## Exemplo 3

Um copo de água a uma temperatura de  $95^{\circ}$  é colocado numa sala com uma temperatura constante de  $21^{\circ}$ . Sabendo que ao fim de um minuto a temperatura do copo é de  $85^{\circ}$ , quanto tempo demorará a atingir os  $51^{\circ}$ ?

# Método de Euler

Método numérico para aproximar a solução de um problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

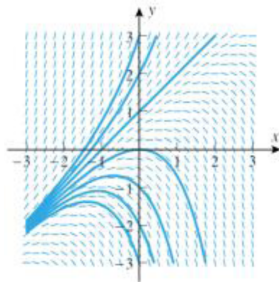
# Campo de Direcções

Mostra as direcções ou inclinações das curvas integrais nos pontos da malha.

## Exemplo

$$y' = y - x$$

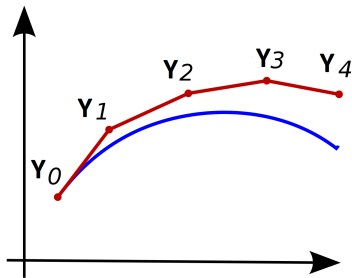
	$y = -3$	$y = -2$	$y = -1$	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
$x = -3$	0	1	2	3	4	5	6
$x = -2$	-1	0	1	2	3	4	5
$x = -1$	-2	-1	0	1	2	3	4
$x = 0$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x = 1$	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$x = 2$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$x = 3$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0



<http://www.bluffton.edu/homepages/facstaff/nesterd/java/slopecfields.html>

# Método de Euler

O campo de direcções é usado para aproximar a solução de um problema de valor inicial nalguns pontos, distanciados entre si uma certa quantidade fixa  $h$ .



$$x_0 \quad y_0 = y(x_0)$$

$$x_1 = x_0 + h \quad y_1 \simeq y(x_1)$$

$$x_2 = x_1 + h \quad y_2 \simeq y(x_2)$$

$$x_3 = x_2 + h \quad y_3 \simeq y(x_3)$$

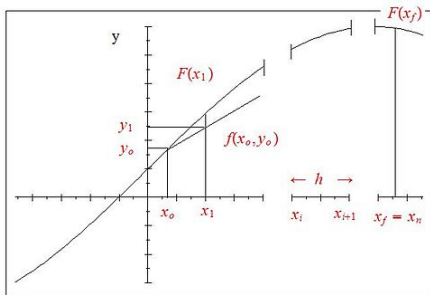
$$x_4 = x_3 + h \quad y_4 \simeq y(x_4)$$

...



# Método de Euler

O campo de direcções é usado para aproximar a solução de um problema de valor inicial nalguns pontos, distanciados entre si uma certa quantidade fixa  $h$ .



$$\begin{aligned}x_0 & \quad y_0 = y(x_0) \\x_1 & = x_0 + h \quad y_1 \simeq y(x_1) \\x_2 & = x_1 + h \quad y_2 \simeq y(x_2) \\x_3 & = x_2 + h \quad y_3 \simeq y(x_3) \\x_4 & = x_3 + h \quad y_4 \simeq y(x_4) \\& \dots\end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Nota: A qualidade da aproximação é melhorada com a redução de  $h$ .

## Exemplo

$$\frac{dy}{dx} = -xy$$

$$y(0) = 1$$

$$y(1) = \text{????}$$

Considere  $h = 0.2$ ,  $h = 0.1$  e  $h = 0.05$ .

Solução analítica:  $y = e^{-x^2/2}$  logo  $y(1) = e^{-1/2} \simeq 0.606531$