

73. Mostre que a equação $x^2y + 3y^3x^4 = 4$ define $y = \phi(x)$ numa vizinhança de $(1, 1)$. Determine $\phi'(x)$ na vizinhança considerada.

74. Seja $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow x^2y^2 + e^x + z$. Mostre que a equação $f(x, y, z) = 0$ define implicitamente x como função de y e z numa vizinhança de $(0, 1, -1)$ ($x = \phi(y, z)$). Calcule $\frac{\partial \phi}{\partial y}(y, z)$ e $\frac{\partial \phi}{\partial z}(y, z)$ numa vizinhança do ponto $(1, -1)$.

75. Considere $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ e $z_0 \neq 0$ e seja (x_0, y_0, z_0) um ponto que satisfaz a equação

$$\frac{x}{z} = \phi\left(\frac{y}{z}\right), \text{ onde } \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1)$$

a. Indique que condições deve satisfazer ϕ por forma a que a equação (1) defina implicitamente z como função de x e y numa vizinhança de (x_0, y_0, z_0) .

b. Mostre que

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z,$$

onde $z = \varphi(x, y)$, na vizinhança considerada para (x_0, y_0) .

76.

a. Mostre que a equação $e^z \sin(xyz) + 2z + 2xy = \pi$ define implicitamente z como função de x e y numa vizinhança de $(1, \frac{\pi}{2}, 0)$.

b. Considerando $\vec{u} = (1, 1)$, calcule $z'_{\vec{u}}(1, \frac{\pi}{2})$.

77.

a. Mostre que a equação $x + \sin(y + z) = 0$ define implicitamente y como função de x e z numa vizinhança de $(0, 0, 0)$ ($y = \phi(x, z)$). Calcule $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(0, 0)$.

b. Explicite a função ϕ e calcule de novo $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(0, 0)$.

78. Prove que numa vizinhança de $(0, 1, 1)$ o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 1 \end{cases} \quad .$$

define implicitamente y e z como funções de x . Determine $y'(x)$ e $z'(x)$.

79. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} e^x \cos(yz) + x^2 = 0 \\ \sin(xyz) + x^2 + z^2 = 4 \end{cases} \quad .$$

define implicitamente y e z como funções de x numa vizinhança de $(0, \frac{\pi}{4}, 2)$. Calcule $y'(x)$ e $z'(x)$.

80. Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (xy, 2x^2 - 5y^2)$ é localmente invertível mas não é globalmente invertível.

81. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (e^x + e^y, e^x - e^y)$.

a. Prove que f é invertível numa vizinhança de qualquer ponto de \mathbb{R}^2 .

b. Determine $Jac f^{-1}$.

82. Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{cases} f_1(x, y) = \arcsin(x) + \sqrt{xy} \\ f_2(x, y) = \log(-x^2 - y + 2) \end{cases} \quad .$$

Analise a invertibilidade de f numa vizinhança de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.