

1. Determine as soluções das equações diferenciais:

- [1.5] (a) $xy' = x^2 + 5xy$;
[1.0] (b) $\frac{y'}{x^2} = \frac{x}{y}$ com a condição inicial $y(1) = 0$.

2. Considere o problema de valor inicial $y' - 2x = 1$ e $y(0) = 1$.

- [1.5] (a) Utilizando o método de Euler com passo $\Delta x = 0,1$ determine um valor aproximado da solução do problema no ponto $x = 0,3$;
[1.0] (b) Sem resolver a equação verifique se $y = x^2 + x + 1$ é solução do problema.
[1.0] (c) Determine o erro do valor aproximado que obteve na alínea a).

3. Considere S_1, S_2 e S_3 as superfícies definidas respectivamente pelas equações

$$5x^2 + 4y^2 - 8y + 4 = z^2, \quad x + z = 4 \quad \text{e} \quad 4y^2 + 8y + x^2 - 4z^2 = 0.$$

- [1.5] (a) Identifique as superfícies S_1, S_2 e S_3 ;
[1.5] (b) Parametrize a curva que resulta da intersecção das superfícies S_1 e S_2 ;
[1.0] (c) Determine e esboce a secção da superfície S_3 pelo plano $z = 0$.

4. Determine:

- [1.5] (a) o sólido $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, \quad z \leq x^2 + y^2, x \geq 0 \text{ e } z \geq -1\}$ em coordenadas cilíndricas;
[1.5] (b) o sólido $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \quad \text{e} \quad z^2 \leq x^2 + y^2\}$ em coordenadas esféricas.

5. Considere no espaço \mathbb{R}^3 a curva \mathcal{C} definida pela função vectorial $r(t) = (3\cos(t), t^2 + 4t, 3\sin(t))$ e a superfície S definida pela equação $x^2 + z^2 = 9$

- [1.0] (a) Identifique e esboce a superfície S ;
[1.5] (b) Determine para que valores de t a curva \mathcal{C} intersecta a superfície S ;
[1.5] (c) Suponha que $r(t)$, com $0 \leq t \leq 10$, representa a trajectória de uma partícula P em função do tempo. Averigue se a velocidade da partícula é estritamente crescente. Justifique.

6. Considere a curva \mathcal{L} em \mathbb{R}^3 definida por $r(t) = (\sin(2t), \cos(2t), 0)$ com $t \in [0, 2\pi]$.

- [1.5] (a) Indique uma representação cartesiana da curva \mathcal{L} .
[1.5] (b) Indique uma parametrização da curva \mathcal{L} com $s \in [0, 1]$, que tenha o sentido dos ponteiros do relógio.