Lógica Computacional

Axiomas do Mundo dos Blocos

Algumas Inferências Analíticas

Consistência e completude do sistema DN

Axiomas do Mundo dos Blocos

- A linguagem do mundo dos blocos que temos utilizado, chamemos-lhe Tarski, foi definida com os seguintes símbolos funcionais e predicativos:

Tarski = <SF, SP>

- **SF = SF_0**

- Constantes: nomes que se podem dar a blocos
  - SF_0 = {a,b,c,d, ...}

- **SP = $SP_1 \cup SP_2 \cup SP_3$**

Predicados Unários: Propriedades de tamanho e tipo dos blocos.
  - SP_1 = { Cube, Tet, Dodec, Small, Medium, Large}

- Predicados Binários: Igualdade e Relações de tamanho, tipo, posição entre blocos
  - SP_2 = { =, Larger, Smaller, SameSize, SameShape,
    FrontOf, BackOf, SameRow, LeftOf, RightOf, SameCol, Adjoins}

- Predicados Ternários: Bloco entre 2 blocos (os 3 blocos alinhados)
  - SP_3 = { Between},

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Se a semântica associada aos predicados for axiomatizada, as inferências correspondentes a consequências analíticas passam a ser consequências lógicas das premissas e dos axiomas de Tarski.

Axiomas de Forma

- Exclusividade: Não pode haver um bloco com duas formas diferentes

$$\neg\exists x(\mathrm{Cube}(x) \land \mathrm{Tet}(x))$$
$$\neg\exists x(\mathrm{Tet}(x) \land \mathrm{Dodec}(x))$$
$$\neg\exists x(\mathrm{Dodec}(x) \land \mathrm{Cube}(x))$$

- Exaustividade : Apenas existem os três tipos de blocos

$$\forall x(\mathrm{Tet}(x) \lor \mathrm{Dodec}(x) \lor \mathrm{Cube}(x))$$

- Na linguagem Traski, existe um outro predicado, **SameShape/2**, que tem de ser relacionado com este predicados unários.

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Introdução de **SameShape/2**

$$\forall x \forall y((Tet(x) \land Tet(y)) \rightarrow SameShape(x,y))$$
$$\forall x \forall y((Cube(x) \land Cube(y)) \rightarrow SameShape(x,y))$$
$$\forall x \forall y((Dodec(x) \land Dodec(y)) \rightarrow SameShape(x,y))$$

- Eliminação de **SameShape/2**

$$\forall x \forall y\ ((SameShape(x,y) \land Tet(x)) \rightarrow Tet(y)\ )$$
$$\forall x \forall y\ ((SameShape(x,y) \land Cube(x)) \rightarrow Cube(y)\ )$$
$$\forall x \forall y\ ((SameShape(x,y) \land Dodec(x)) \rightarrow Dodec(y))$$

- O predicado **SameShape/2** corresponde a uma relação de equivalência, gozando das propriedades ***reflexivas, simétrica e transitiva***

$$\forall x \quad SameShape(x,x)$$
$$\forall x \forall y\ (\ SameShape(x,y) \rightarrow SameShape(y,x))$$
$$\forall x\ \forall y\ \forall z((SameShape(x,y) \land SameShape(y,z)) \rightarrow SameShape(x,z))$$

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Axiomas semelhantes podem ser definidos para os tamanhos dos cubos.

Axiomas de Tamanho

- Exclusividade: Não pode haver um bloco com duas tamanhos diferentes

$$\neg\exists x\ (\mathrm{Small}(x) \land \mathrm{Medium}(x))$$
$$\neg\exists x\ (\mathrm{Small}(x) \land \mathrm{Large}(x))$$
$$\neg\exists x\ (\mathrm{Medium}(x) \land \mathrm{Large}(x))$$

- Exaustividade : Apenas existem os três tipos de tamanhos

$$\forall x\ (\mathrm{Small}(x) \lor \mathrm{Medium}(x) \lor \mathrm{Large}(x))$$

- Na linguagem Tarski, existe um outro predicado, **SameSize/2**, que tem de ser relacionado com este predicados unários.

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Introdução de **SameSize/2**

```
∀x∀y((Small(x) ∧ Small (y)) → SameSize(x,y))
∀x∀y((Medium(x)∧ Medium(y)) → SameSize(x,y))
∀x∀y((Large(x) ∧ Large (y)) → SameSize(x,y))
```

- Eliminação de **SameSize/2**

```
∀x∀y ((SameSize(x,y) ∧ Small (x)) → Small(y)  )
∀x∀y ((SameSize(x,y) ∧ Medium(x)) → Medium(y) )
∀x∀y ((SameSize(x,y) ∧ Large(x) ) → Large(y))
```

- Tal como o predicado SameShape/2, também o predicado **SameShape/2** corresponde a uma relação de equivalência, gozando das propriedades ***reflexivas, simétrica e transitiva***

```
∀x    SameSize(x,x)
∀x∀y ( SameSize(x,y) → SameSize(y,x))
∀x ∀y ∀z ((SameSize(x,y) ∧ SameSize(y,z)) → SameSize(x,z))
```

Axiomas do Mundo dos Blocos

- No caso dos tamanhos há que considerar igualmente a ordenação dos tamanhos expressa na relação Larger/2 (e Smaller/2).

- Introdução de **Larger/2**

$$\forall x \forall y ((Medium(x) \land Small(y)) \rightarrow Larger(x,y))$$
$$\forall x \forall y ((Large(x) \land Small(y)) \rightarrow Larger(x,y))$$
$$\forall x \forall y ((Large(x) \land Medium(y)) \rightarrow Larger(x,y))$$

- Eliminação de **Larger/2**

$$\begin{aligned} \forall x \forall y\ ((Larger(x,y) \rightarrow (\ & (Large(x) \land Medium(y)) \\ & \lor (Large(x) \land Small(y)) \\ & \lor (Medium(x) \land Small(y)))) \end{aligned}$$

- Equivalência de Larger/2 e Smaller/2

$$\forall x \forall y\ (\ (Larger(x,y) \leftrightarrow Smaller(y,x)\ )$$

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Para os predicados de posição há que considerar as relações de equivalência estabelecidas pelos predicados **SameRow/2** e **SameCol/2**, com as suas propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

```
∀x     SameRow(x,x)
∀x∀y  (SameRow(x,y) → SameRow(y,x))
∀x∀y  ((SameRow(x,y) ∧ SameRow(y,z)) → SameRow(x,z))
```

```
∀x     SameCol(x,x)
∀x∀y  (SameCol(x,y) → SameCol(y,x))
∀x∀y  ((SameCol(x,y) ∧ SameCol(y,z)) → SameCol(x,z))
```

- Adicionalmente há que estabelecer que dois objectos diferentes não podem ocupar a mesma posição

```
∀x∀y  ((SameCol(x,y) ∧ SameRow(x,y) ) ↔ x = y) )
```

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Os predicados **FrontOf/2**, **BackOf/2** e **SameRow/2** gozam das seguintes propriedades:
- Exclusividade

$$\neg\exists x \exists y\ (BackOf(x,y) \land SameRow(x,y))$$
$$\neg\exists x \exists y\ (BackOf(x,y) \land FrontOf(x,y))$$
$$\neg\exists x \exists y\ (SameRow(x,y) \land FrontOf(x,y))$$

- Exaustividade:

$$\forall x \forall y\ (BackOf(x,y) \lor SameRow(x,y) \lor FrontOf(x,y))$$

- O predicados **BackOf/2** goza da propriedade ***transitiva.***

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((BackOf(x,y) \land BackOf(y,z)) \rightarrow BackOf(x,z))$$

- O predicado **FrontOf/2** é equivalente ao predicado **BackOf/2** com os argumentos trocados.

$$\forall x \forall y\ (FrontOf(x,y) \leftrightarrow BackOf(y,x))$$

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Os predicados **RightOf/2**, **LeftOf/2** e **SameCol/2** têm propriedades semelhantes.
- Exclusividade

$$\neg\exists x\exists y\ (\mathrm{LeftOf}(x,y) \land \mathrm{SameCol}(x,y))$$
$$\neg\exists x\exists y\ (\mathrm{LeftOf}(x,y) \land \mathrm{RightOf}(x,y))$$
$$\neg\exists x\exists y\ (\mathrm{SameCol}\ (x,y) \land \mathrm{RightOf}(x,y))$$

- Exaustividade:

$$\forall x\forall y\ (\mathrm{LeftOf}(x,y) \lor \mathrm{SameCol}(x,y) \lor \mathrm{RightOf}(x,y))$$

- O predicados **LeftOf/2** goza da propriedade ***transitiva.***

$$\forall x\ \forall y\ \forall z((\mathrm{LeftOf}(x,y) \land \mathrm{LeftOf}(y,z)) \rightarrow \mathrm{LeftOf}(x,z))$$

- O predicado **RightOf/2** é equivalente ao predicado **LeftOf/2** com os argumentos trocados.

$$\forall x\forall y\ (\mathrm{RightOf}(x,y) \leftrightarrow \mathrm{LeftOf}(y,x))$$

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Os predicados **Adjoins/2** e **Between/3** requerem uma representação mais completa sobre o número da linha e da coluna em que se encontra cada objecto.

- Apenas se apresenta abaixo um axioma definidor do predicado **Adjoins/2**

```
∀x∀y (Adjoins(x,y)) ↔
        ((row(x) = row(y) ∧ col(x) = col(y)+1 ) ∨
         (row(x) = row(y) ∧ col(x)+1 = col(y) ) ∨
         (row(x) = row(y)+1 ∧ col(x) = col(y) ) ∨
         (row(x)+1 = row(y) ∧ col(x) = col(y) ) ))
```

- Esta definição pressupõe que a linguagem Tarski seja estendida, nomeadamente com símbolos funcionais
  - SF_0 - A constante 1
  - SF_1 - Os símbolos funcionais **row/1** e **col/1**.
  - SF_2 – O símbolo funcional +/2

para além de alguma axiomatização da aritmética (propriedades da soma)

Demonstrações "Analíticas"

- A partir dos axiomas do Mundo de Blocos podem deduzir-se logicamente algumas propriedades que anteriormente apenas se poderiam obter analiticamente.

- Por exemplo:

```
{    Larger(a,b), Medium(b)    } |-DN Large(a)
{      Tet(a)   ,  Cube(b)     } |-DN a ≠ b
{   Larger(a,b) , Larger(b,c) } |-DN Large(a)
{ Larger(a,b)   , Larger(b,c) } |-DN Medium(b)
{  Adjoins(a,b) , LeftOf(a,b)} |-DN SameRow(a,b)
{Between(a,b,c) , LeftOf(a,b)} |-DN RightOf(a,c)
```

No entanto estas demonstrações são bastante "entediantes" como se pode ver no primeiro caso (os outros ficam para exercício)

Demonstrações "Analíticas"

Exemplo: {Larger(a,b) , Medium(b)} $|=_{DN}$ Large(a)

(Larger(a,b) ∧ Medium(b)) → Large(a)

1.	Larger(a,b) ∧ Medium(b)	
2.	Larger(a,b)	Elim ∀: Axioma & Elim → : 2, Axioma'
3.	(Large(a)∧ Medium(b))∨(Medium(a)∧Small(b)) ∨(Large(a)∧ Small(b))	
4.	Large(a)∧ Medium(b)	
5.	Large(a)	
6.	Medium(a)∧ Small(b)	
7.	Small(b)	
8.	Medium(b)	
9.	∃x (Small(x) ∧ Medium(x))	Intr ∃ : " 7 & 8 "
10.	⊥	Intr ⊥ : 9, Axioma
11.	Large(a)	Elim ⊥ : 10
12.	Large(a)∧ Small(b)	
13.	Large(a)	
14.	Large(a)	Elim ∨ : 3, 4-5, 6-11, 12-13

Métodos de Demonstração com Quantificadores

Exemplo: Ordem de Quantificadores 1

$$\exists y\ \forall x\ \varphi(x,y) \rightarrow \forall x\ \exists y\ \varphi(x,y)$$

Se existe um bloco junto a todos os blocos, então todos os blocos têm um bloco junto deles!

```
1. | ∃x ∀y Adjoins(x,y)
   |----------------------
2. |  | a: ∀y Adjoins(a,y)
   |  |-------------------
3. |  |   | b:
   |  |   |---------------
4: |  |   | Adjoins(a,b)          Elim ∀: 2
5. |  |   | ∃y Adjoins(x,b)       Intr ∃: 4
6. |  | ∀x ∃y Adjoins(x,y)        Intr ∀: 3 - 5
7. | ∀x ∃y Adjoins(x,y)           Elim ∃: 1, 2 - 6
```

- Mas será que existe um bloco “junto a todos os blocos” ?
- Será que esse bloco está junto a si próprio?

Exemplo: Ordem de Quantificadores 2

$$\exists y\ \forall x\ \varphi(x,y) \rightarrow\ \forall x\ \exists y\ \varphi(x,y)$$

- O problema não está na demonstração mas sim na premissa que viola os axiomas de posição. A mesma demonstração será válida com um predicado reflexivo, como por exemplo para o predicado **NearOf/2** definido como:

$$\forall x \forall y\ (\mathrm{NearOf}(x,y) \leftrightarrow (\mathrm{Adjoins}(x,y) \vee x = y))$$

```
1.  | ∃x ∀y NearOf(x,y)
    |--------------------
2.  |  | a: ∀y NearOf(a,y)
    |  |--------------------
3.  |  |  | b:
    |  |  |-----------------
4:  |  |  | NearOf(a,b)          Elim ∀: 2
5.  |  |  | ∃x NearOf(x,b)       Intr ∃: 4
6.  |  | ∀y ∃x NearOf(x,y)       Intr ∀: 3 - 5
7.  | ∀y ∃x NearOf(x,y)          Elim ∃: 1, 2 - 6
```

Métodos de Demonstração com Quantificadores

Exemplo: Ordem de Quantificadores 3

$$\forall x\ \exists y\ \varphi(x,y) \rightarrow \exists y\ \forall x\ \varphi(x,y) \qquad ???$$

Se todos os blocos têm um bloco ao pé de si, será que existe um bloco ao pé de todos os blocos?

- Claramente a resposta é não! E no entanto uma demonstração "errada" consegue provar este resultado.

1.	∀x ∃y NearOf(x,y)	
2.	a: ∀x NearOf(x,a)	
3.	∃y ∀x NearOf(x,y)	Intr ∃: 3
4.	∃y ∀x NearOf(x,y)	Elim ∃: 1, 2 - 3

- O erro está na hipótese utilizada, que atribui um nome a uma variável que está quantificada existencialmente, mas em que o quantificador não é o primeiro da fórmula utilizada!

Métodos de Demonstração com Quantificadores

Exemplo: Paradoxo do Barbeiro

> Numa aldeia existe um barbeiro que barbeia todas as pessoas que não se barbeiam a si próprios, e apenas essas pessoas.

- Na realidade não pode existir tal situação como se prova na demonstração seguinte:

1.	$\exists x\ (B(x) \land \forall y\ (\neg B(y,y) \leftrightarrow B(x,y)))$	
2.	b: $B(b) \land \forall y\ (\neg B(y,y) \leftrightarrow B(b,y))$	
3.	$\forall y\ (\neg B(y,y) \leftrightarrow B(b,y))$	Elim $\land$: 2
4.	$\neg B(b,b) \leftrightarrow B(b,b)$	Elim $\forall$: 3
5.	$B(b,b)$	
6.	$\neg B(b,b)$	Elim $\leftrightarrow$: 4,5
7.	$\bot$	Intr $\bot$: 4,5
8.	$\neg B(b,b)$	Intr $\neg$: 4,5
9.	$B(b,b)$	Elim $\leftrightarrow$: 4,8
10.	$\bot$	Intr $\bot$: 8,9
11.	$\bot$	Elim $\exists$: 1, 2 – 10
12.	$\neg\exists x\ (B(x) \land \forall y\ (\neg B(y,y) \leftrightarrow B(x,y)))$	Intr $\neg$: 1 – 11

Sistema de Dedução Natural: Coerência e Completude

- O sistema de Dedução Natural **DN** apresentado contem regras de inferência de introdução e eliminação de operadores e quantificadores nomeadamente

$\wedge$ **Conjunção**	$\neg$ **Negação**	$\rightarrow$ **Implicação**	**= Igualdade**
$\vee$ **Disjunção**	$\perp$ **Contradição**	$\leftrightarrow$ **Equivalência**	**$\forall$ Q. Universal**
			$\exists$ Q. Existencial

- Adicionalmente verificamos que o sistema **T**, correspondendo ao sistema **DN** restrito aos 6 operadores iniciais $\{\wedge, \vee, \neg, \perp, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ é coerente e completo isto é, qualquer fórmula bem formada escrita com esses operadores pode ser demonstrada através das regras do sistema se e apenas se for uma consequência **tautológica** das premissas.

- **Coerência do sistema T**:
  - O sistema restrito de dedução natural T, é *tautologicamente* coerente.

$$\Phi \vdash_T \varphi \quad \Longrightarrow \quad \Phi \models_T \varphi$$

- **Completude do sistema T:**
  - O sistema restrito de dedução natural T, é *tautologicamente* completo.

$$\Phi \models_T \varphi \quad \Longrightarrow \quad \Phi \vdash_T \varphi$$

Sistema de Dedução Natural: Coerência e Completude

- As limitações de representação e de regras de demonstração do sistema T garantiam que apenas se poderiam considerar universos (domínios de discurso) finitos.

- Neste contexto, e assumindo que as fórmulas atómicas têm apenas dois valores de verdade possíveis {Verdade, Falso} existem um número finito de valorações para um conjunto de premissas envolvendo n fórmulas atómicas, mais exactamente $\mathbf{2^n}$.

- Apesar de este número crescer muito rapidamente com n, $\mathbf{2^n}$ é um número finito, e portanto é possível avaliar **em tempo finito** se uma fórmula φ é uma consequência tautológica de um conjunto de premissas Φ.

- No caso do sistema de Dedução Natural DN os pressupostos acima já não são válidos. Em particular, fórmulas quantificadas, mesmo que de tamanho finito, podem referir-se a um conjunto infinito de objectos.

- Por exemplo, as fórmulas abaixo definem o conjunto (infinito) de números inteiros
  - **`Integer(0)`**
  - **`∀x (Integer(x) → ∃y (Integer(y) ∧ suc(y,x)))`**

Sistema de Dedução Natural: Coerência e Completude

- No caso do sistema de Dedução Natural DN os pressupostos acima já não são válidos. Em particular um problema que se coloca é o de saber se será possível verificar em tempo finito se uma fórmula é ou não uma consequência lógica de um conjunto de premissas. “Infelizmente”, tal não é em geral possível.

Teorema da Incompletude (de Gödel)

Qualquer sistema com um poder de expressão pelo menos igual ao necessário para axiomatizar a aritmética **não é decidível**, isto é, existem fórmulas Φ e φ para as quais não é possível determinar, em tempo finito ou infinito, se $\Phi \models \varphi$.

- No entanto, em muitos casos de interesse, esta questão pode ser resolvida em tempo finito (caso contrário, a aritmética não podia ter sido desenvolvida !).

- Nestes casos coloca-se a questão de saber se será possível obter demonstrações finitas de uma fórmula φ a partir de um conjunto de premissas Φ, sendo estas fórmulas todas FBFs de uma linguagem de primeira ordem.

Sistema de Dedução Natural: Coerência e Completude

- De facto as propriedades de Coerência e Completude podem ser obtidas para o sistema DN de Dedução Natural, contendo as regras de introdução e de eliminação dos operadores

$\wedge$ **Conjunção**	$\neg$ **Negação**	$\rightarrow$ **Implicação**	= **Igualdade**
$\vee$ **Disjunção**	$\perp$ **Contradição**	$\leftrightarrow$ **Equivalência**	$\forall$ **Q. Universal**
			$\exists$ **Q. Existencial**

O sistema **DN** é **coerente** e **completo** isto é, qualquer fórmula bem formada escrita com esses operadores pode ser demonstrada através das regras do sistema se e apenas se for uma consequência **lógica** (FO) das premissas.

Coerência do sistema DN:

- O sistema restrito de dedução natural DN, é coerente logicamente (FO).

$$\Phi \vdash_{DN} \varphi \quad \Rightarrow \quad \Phi \models_{FO} \varphi$$

Completude do sistema DN:

- O sistema restrito de dedução natural DN, é completo logicamente (FO).

$$\Phi \models_{FO} \varphi \quad \Rightarrow \quad \Phi \vdash_{DN} \varphi$$