

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Resolução de exercícios sobre
Produto Interno, Externo e Misto

Departamento de Matemática
FCT/UNL

7.1 - No referencial ortonormado $(O; e_1, e_2, e_3)$ considere os seguintes vectores:

$$a = 2e_1 + \alpha e_2 + e_3 \quad \text{e} \quad b = 4e_1 - 2e_2 - 2e_3.$$

Determine para que valor de α os vectores são perpendiculares.

R: Como a e b são vectores não nulos, então a e b são perpendiculares se, e só se, a e b são ortogonais (i.e., $a|b = 0$).

Como o referencial é ortonormado temos

$$a|b = 2 \cdot 4 + \alpha \cdot (-2) + 1 \cdot (-2) = -2\alpha + 6.$$

Assim, a e b são perpendiculares se, e só se, $\alpha = 3$.

7.2 - No referencial ortonormado $(O; e_1, e_2, e_3)$ considere os seguintes vectores:

$$a = 2e_1 + e_2 - e_3 \quad \text{e} \quad b = 6e_1 - 3e_2 + e_3.$$

Determine o ângulo formado pelos vectores a e b .

R: Como a e b são vectores não nulos, o ângulo θ entre a e b é dado por:

$$\theta = \arccos \frac{a | b}{\sqrt{a | a} \sqrt{b | b}}.$$

Como o referencial é ortonormado temos

$$a|b = 2 \cdot 6 + 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 = 8, \quad a|a = 2^2 + 1^2 + (-1)^2 = 6 \quad \text{e} \\ b|b = 6^2 + (-3)^2 + 1^2 = 46, \quad \text{donde } \theta = \arccos \left(\frac{4}{\sqrt{69}} \right).$$

7.4 - Considere, no referencial ortonormado e directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ os seguintes vectores:

$$u = e_1 - e_2 + e_3, \quad v = e_2 + 2e_3 \quad \text{e} \quad w = e_1 + e_2.$$

Determine

(a) $u \times v$;

(e) Um vector perpendicular a u e a v de norma igual a $\sqrt{15}$.

R: (a) Como o referencial é ortonormado directo tem-se

$$\begin{aligned} u \times v &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e_3 \\ &= -3e_1 - 2e_2 + e_3. \end{aligned}$$

(e) Dado que $u \times v \neq 0$, o vector $u \times v$ é perpendicular a u e a v . Como $\|u \times v\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$, então o vector $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}} u \times v$ (e também o vector $-\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}} u \times v$) satisfaz as condições pedidas.

7.8 - No referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ em que $O = (0, 0, 0)$, considere os seguintes vectores:

$$\overrightarrow{OP} = 2e_1 - e_2 + e_3 \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OQ} = e_1 + e_2 + e_3.$$

Determine:

- (a) A expressão do vector $\overrightarrow{PQ}$ utilizando as suas componentes e os seus co-senos directores.

R: Como O é a origem do referencial, os pontos P e Q têm coordenadas $(2, -1, 1)$ e $(1, 1, 1)$, respectivamente. Assim,

$$\overrightarrow{PQ} = (1 - 2)e_1 + (1 - (-1))e_2 + (1 - 1)e_3 = -e_1 + 2e_2 + 0e_3$$

(As componentes de $\overrightarrow{PQ}$ são $-e_1, 2e_2, 0e_3$.) O versor de $\overrightarrow{PQ}$, denotado vers $\overrightarrow{PQ}$, é dado por $\frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{PQ}$, donde os co-senos directores de $\overrightarrow{PQ}$ são $-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}$ e 0.

- (b) Um vector do plano OXY , com norma 4, que faz com os eixos OX e OY , respectivamente, os ângulos de 30° e 60° .

R: Seja u o vector que satisfaz as condições do enunciado. Então, o seu versor, $\text{vers } u$ é

$$\cos(30^\circ)e_1 + \cos(60^\circ)e_2 + 0e_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2.$$

Note-se que $\text{vers } u$ é um vector unitário e u tem norma 4. Logo,

$$u = 2\sqrt{3}e_1 + 2e_2.$$

(c) A área do triângulo $[OPQ]$.

R: A área do triângulo $[OPQ]$ será

$$\frac{\|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}\|}{2}.$$

Como o referencial é ortonormado directo tem-se

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} e_3 \\ &= -2e_1 - e_2 + 3e_3.\end{aligned}$$

Deste modo, teremos $\|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

Portanto, a área do triângulo $[OPQ]$ é $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

7.9 - Considere o referencial ortonormado e directo $(O; e_1, e_2, e_3)$.

(b) Considere os vectores $a(3, -1, 0)$ e $b(1, 1, 1)$.

(ii) Determine a expressão geral dos vectores perpendiculares ao vector b .

R: (b)(ii) Como b é não nulo, então um qualquer vector u não nulo de coordenadas $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é perpendicular a b se, e só se, b e u são ortogonais (i.e., $u|b = 0$). Sendo o referencial ortonormado, temos

$$u|b = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2.$$

Assim, um qualquer vector u perpendicular a b tem coordenadas $(\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2)$, com $\alpha_1 \neq 0$ ou $\alpha_2 \neq 0$.

7.9 - Considere o referencial ortonormado e directo $(O; e_1, e_2, e_3)$.

(c) Dados os pontos $A(6, 0, 0)$, $B(2, 3, 0)$ e $C(1, 5, k)$, determine k de modo a que os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ formem um ângulo de 60° .

R: (c) Ora $\overrightarrow{AB} = -4e_1 + 3e_2$ e $\overrightarrow{AC} = -5e_1 + 5e_2 + ke_3$. Sendo θ o ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, teremos

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{AB} | \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|}.$$

Num referencial ortonormado temos $\overrightarrow{AB} | \overrightarrow{AC} = (-4)(-5) + 3 \cdot 5 = 35$,
 $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$ e $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2 + k^2} = \sqrt{50 + k^2}$.

Assim, de modo a que $\theta = 60^\circ$ teremos de ter

$$\frac{1}{2} = \frac{35}{5\sqrt{50 + k^2}} \Leftrightarrow \sqrt{50 + k^2} = 14 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{146}.$$

7.10 - Considere o referencial ortonormado e directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ e os pontos

$$A(0, k, -3), B(-1, 2, 2) \quad \text{e} \quad C(2, -3, 0).$$

Determine k de modo que:

- (a) O volume do paralelepípedo de arestas $[OA]$, $[OB]$ e $[OC]$ seja igual a 10.
- (b) Os pontos O, A, B e C sejam coplanares.

R: Note-se que $(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \mid \overrightarrow{OC}$ é dado por

$$\begin{vmatrix} 0 & k & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{I_3 + (2)I_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & k & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} k & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4k + 3.$$

- (a) Teremos de ter $|(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \mid \overrightarrow{OC}| = 10 \Leftrightarrow k = \frac{7}{4} \vee k = -\frac{13}{4}.$
- (b) Teremos de ter $(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \mid \overrightarrow{OC} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{4}.$