Introdução à Investigação Operacional

8ª aula T - Resumo

Ruy Costa

Resumo – IIO – T8

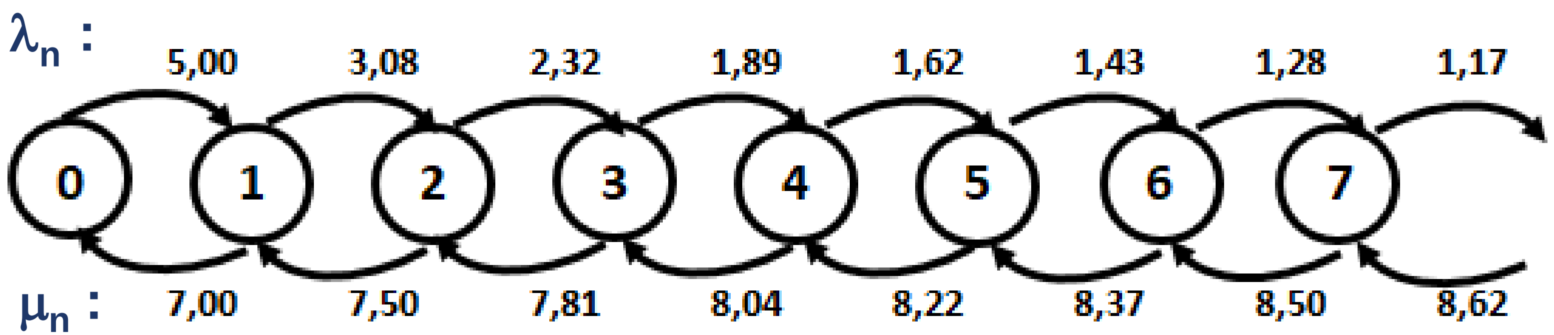
Introdução aos Modelos com pressão (tx chegada e/ou tx serviço dependente do estado)

Assumamos, então, que ***S* = 1** e que

$$\mu_n = n^{0,1} \cdot 7 , \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\lambda_n = (n+1)^{-0,7} \cdot 5 , \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Diagrama de Transição:



Resumo – IIO – T8

Modelos M/G/1, M/D/1 e M/E_k/1(*)

O modelo M/E_k/1 pode ser encarado como um caso particular do modelo M/G/1, fazendo $\boldsymbol{\sigma^2 = 1 / (k\,\mu^2)}$

Fórmula de Pollaczek-Khintchine:

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2\,(1-\rho)}$$

$\sigma^2 = 0$

M/D/1

$$L_q = \frac{\rho^2}{2\,(1-\rho)}$$

$\sigma^2 = 1 / (k\,\mu^2)$

M/E_k/1

$$Lq = \frac{1+k}{2k}\,\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$\sigma^2 = (1/\mu)^2$

M/M/1

$$L_q = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

(*) Pandemia: Suprime-se
O Método dos Estádios
Modelos com Prioridades

Resumo – IIO – T8
Filas Ilimitadas em Série

O importantíssimo **Teorema de Jackson**, garante-nos que:

Se

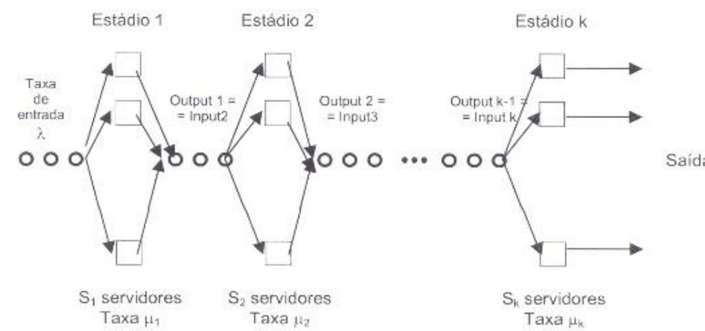
1) o **processo de chegadas** dos clientes a um sistema de espera for **Poissoniano com taxa** λ,

2) as **durações dos atendimentos** dos servidores em cada estádio forem **exponenciais, com parâmetro** μ_i,

e

3) **cada estádio** permitir a formação de uma fila ilimitada (**modelo M/M/s**), com $s.\mu > \lambda$,

então o **processo de saídas** dos clientes de cada estádio do sistema de espera é **Poissoniano com taxa** λ.



A possibilidade de se utilizar um modelo M/M/S para cada estádio, independentemente dos outros, é uma enorme simplificação.

Passa a ser válida a chamada **forma de produto** (*product form*):

$$\boxed{P(N_1 = n_1 \wedge N_2 = n_2 \wedge \ldots \wedge N_k = n_k) = P_{n1} \,.\, P_{n2} \,.\, \ldots \,.\, P_{nk}}$$

Os sistemas com filas com capacidade limitada **<u>não</u>** apresentam soluções na forma de produto!

Resumo – IIO – T8
Redes de Jackson

Uma Rede de Jackson é um sistema de k estádios onde o estádio i (i = 1, 2, …, k) tem:

1) uma fila ilimitada;

2) os clientes chegam do exterior do sistema de acordo com um processo Poissoniano com parâmetro $\mathbf{a_i}$ e

3) $\boldsymbol{s_i}$ servidores, que asseguram uma distribuição de atendimento exponencial, com parâmetro μ_i.

Um cliente que deixe o estádio i segue para outro estádio j (j = 1, 2, …, k e $j \neq i$) com probabilidade p_{ij}, ou partirá do sistema com probabilidade $q_i = 1 - \sum_{j=1\ j\neq i}^{k} p_{ij}$.

Em **situação de equilíbrio**, cada estádio j de uma Rede de Jackson (j = 1, 2, …, k) comporta-se como se fosse um **sistema M/M/S independente**, com taxa de chegadas $\lambda_\mathbf{i}$:

$$\lambda_j = a_j + \sum_{j=1\ j\neq i}^{k} \lambda_i . p_{ij} , \qquad \text{com } s_j.\mu_i > \lambda_j$$

♦ Número esperado de clientes na RJ : $\mathbf{L} = L_1 + L_2 + \ldots + L_k$

♦ $\mathbf{P (N_1 = n_1 \wedge N_2 = n_2 \wedge \ldots \wedge N_k = n_k) = P_{n1} . P_{n2} . \ldots . P_{nk}}$

♦ Como nem todos os clientes são obrigados a ir a todos os estádios, poderemos recorrer à Fórmula de Little, $\mathbf{W = L / \lambda}$ **MAS** com $\lambda = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$.

Resumo – IIO – T8

Leitura adicional

Leituras de apoio:

Elementos de apoio às aulas de IIO – Teoria das Filas de Espera – ficheiro pdf pp. 204 a 219.

Disponível atividade semanal de apoio à aprendizagem no moodle!