Teorema (Limite segundo Heine)

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* $a \in \overline{D}$. *Temos* $\lim_{x \to a} f(x) = b$ *se e só se para qualquer sucessão* (x_m) *de elementos de* D *a convergir para* a, *a sucessão* $(f(x_m))$ *converge para* b.

Exemplo

Teorema (Propriedades de cálculo de limites)

Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *duas funções com limites finitos quando* x *tende para* $a \in \overline{D}$. *Então:*

- $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a}(f-g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x)$
- *Se* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ *então* $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

Teorema (Teorema das funções enquadradas)

Sejam $f, g, h : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *três funções e* $a \in \overline{D}$*. Se* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *numa vizinhança de* a *e* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = b$ *então* $\lim_{x \to a} h(x) = b$*.*

Teorema

Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *duas funções e* $a \in \overline{D}$*. Se* f *é limitada numa vizinhança de* a *e* $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ *então* $\lim_{x \to a} (f.g)(x) = 0$*.*

Definição (Limites relativos a conjuntos (Cauchy))

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* $A \subset D$ *com* $a \in \overline{A}$*. Diz-se que* f *tem limite* b *quando* x *tende para* a *segundo* A *ou que* b *é o limite de* f *relativo a* A *e escreve-se*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$$

se

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0, x \in A \wedge \|x - a\| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta$$

Nota: Segundo Heine, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$ se e só se para qualquer sucessão (x_m) de elementos de A a convergir para a, a sucessão $(f(x_m))$ converge para b.

Exemplo

Teorema

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tal que* $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_p$. *Se* $a \in \overline{D_i}$ *e*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in D_i}} f(x) = b, \forall i \in \{1, 2, \ldots, p\}$$

então

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$