Capítulo XI

Emparelhamento Máximo

(num grafo não orientado e bipartido)

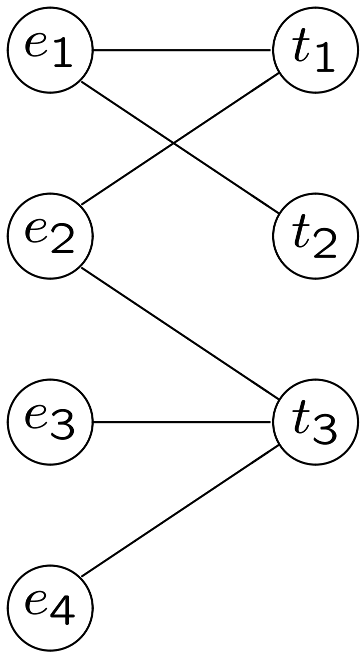
—

Transformação e Conquista

Problema

Cada empregado pode executar, no máximo, uma tarefa e cada tarefa só pode ser atribuída a um empregado.

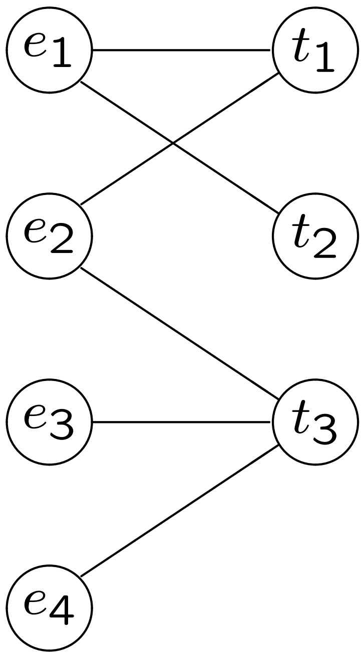
Como distribuir as tarefas pelos empregados, maximizando o número de tarefas atribuídas (i.e., maximizando o número de empregados com trabalho)?

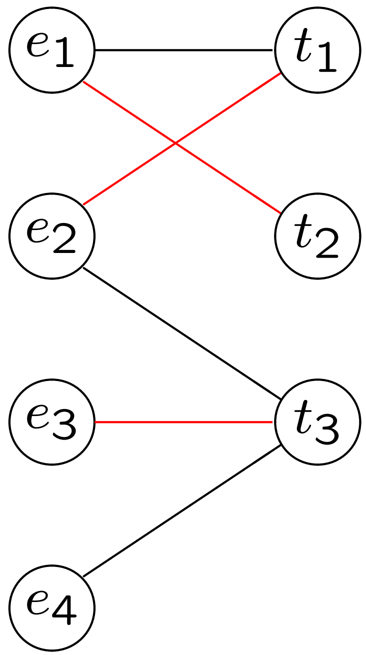


Problema

Cada empregado pode executar, no máximo, uma tarefa e cada tarefa só pode ser atribuída a um empregado.

Como distribuir as tarefas pelos empregados, maximizando o número de tarefas atribuídas (i.e., maximizando o número de empregados com trabalho)?

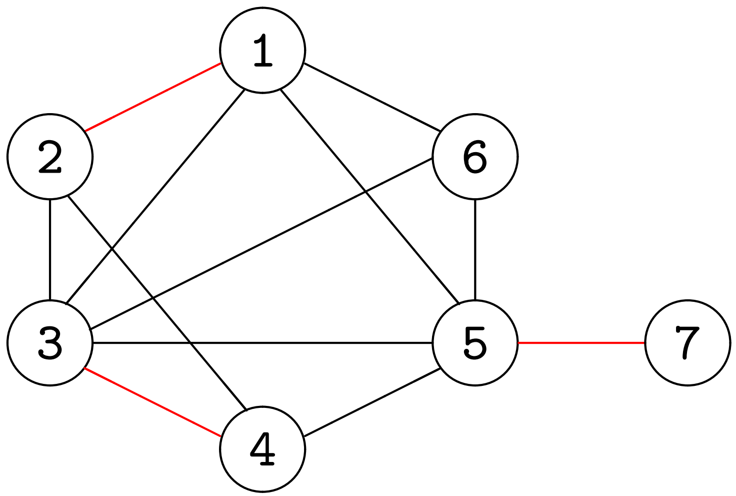




Emparelhamento (*Matching*)

Seja $G = (V, A)$ um grafo **não orientado**. Um **emparelhamento** E em G é um subconjunto de arcos de G não adjacentes entre si. Ou seja,

- $E \subseteq A$ e
- para todo o vértice $v \in V$, existe no máximo um arco em E que tem uma extremidade em v.



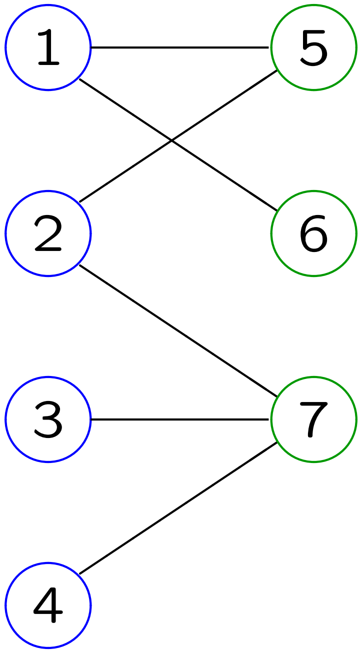
Um **emparelhamento máximo** é um emparelhamento de cardinalidade máxima.

Grafo Bipartido (*Bipartite Graph*)

Um grafo **não orientado** $G = (V, A)$ diz-se **bipartido** se existir uma partição $\{X, Y\}$ do conjunto V

(ou seja, $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $X \cup Y = V$ e $X \cap Y = \emptyset$)

tal que todos os arcos de G têm uma extremidade em X e outra em Y.

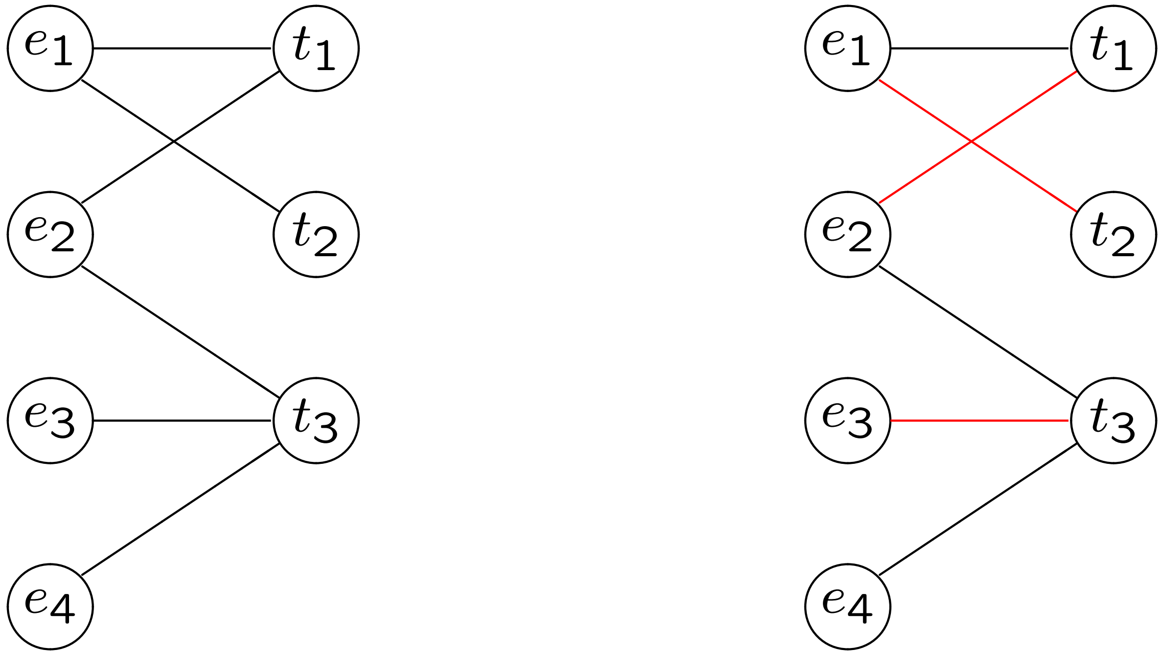


$X = \{1, 2, 3, 4\}$

$Y = \{5, 6, 7\}$

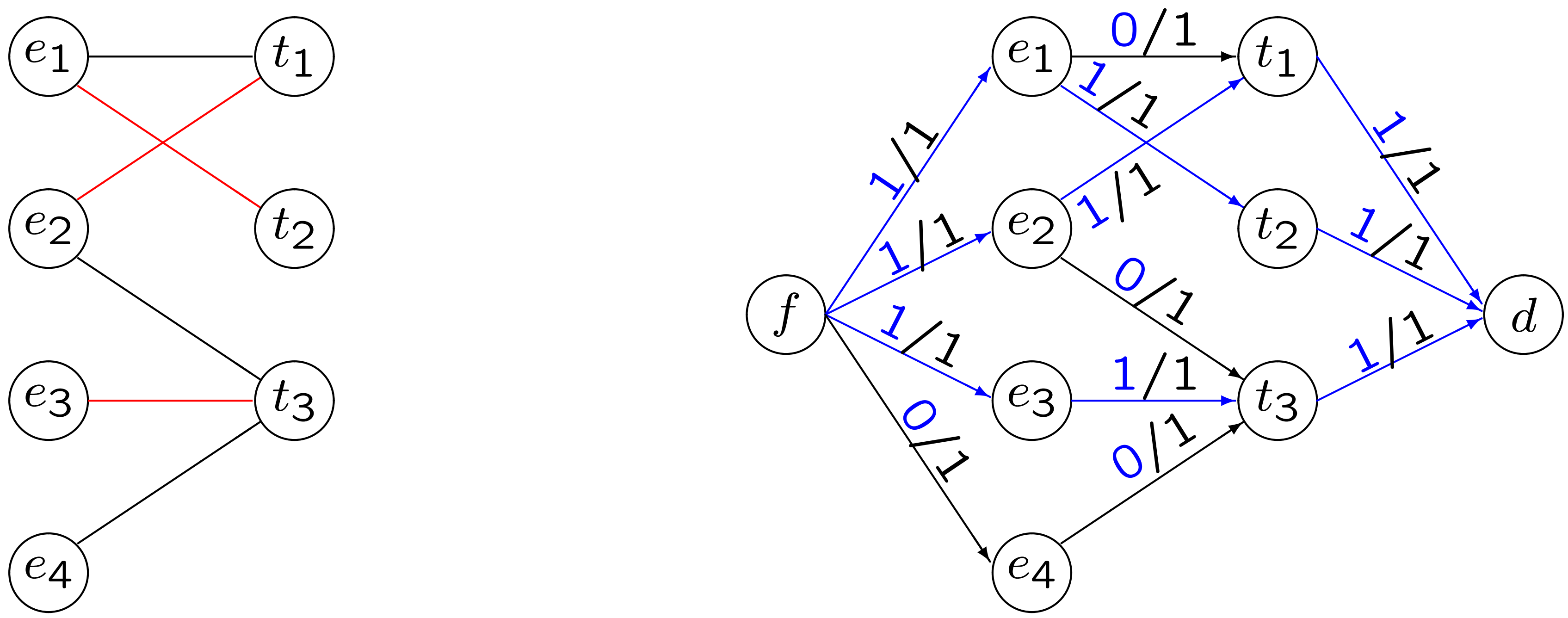
Problema

Como distribuir as tarefas pelos empregados, maximizando o número de tarefas atribuídas (i.e., maximizando o número de empregados com trabalho)?



Como obter um emparelhamento máximo num grafo não orientado e bipartido?

Fluxo Máximo num Grafo Orientado e Pesado



Há uma correspondência "perfeita" entre o emparelhamento máximo E e o fluxo máximo ϕ de f para d:

- o número de arcos de E é o valor de ϕ;
- para todos os arcos da forma (e, t), $(e, t) \in E \Leftrightarrow \phi(e, t) = 1$.

Emparelhamento Máximo num Grafo Bipartido

Sejam $G = (V, A)$ um grafo não orientado e bipartido, e $\{X, Y\}$ uma partição de V. Seja $G' = (V', A')$ o grafo orientado e pesado tal que:

$V' = V \cup \{f, d\}$, onde f e d são dois novos vértices ($f, d \notin V$);

$A' = \{(f, x) \mid x \in X\} \cup \{(x, y) \mid (x, y) \in A, x \in X, y \in Y\} \cup \{(y, d) \mid y \in Y\}$;

e todos os arcos de A' têm peso 1.

Proposição

Há uma correspondência biunívoca entre cada emparelhamento máximo E em G e cada fluxo máximo ϕ de f para d em G':

- o número de arcos de E é o valor de ϕ;
- para todos os arcos $(x, y) \in A$, com $x \in X$ e $y \in Y$,

$$(x, y) \in E \Leftrightarrow \phi(x, y) = 1.$$

Complexidade do Emparelhamento Máximo com o Algoritmo de Edmonds-Karp

Grafo $G = (V, A)$ em Vetor de Listas de Incidências cuja partição de vértices $\{X, Y\}$ verifica

$$X = \{0, 1, \ldots, n-1\} \text{ e } Y = \{n, n+1, \ldots, |V|-1\}$$

construir a rede de fluxos	$\Theta(\vert V\vert + \vert A\vert)$
inicializar o fluxo	$\Theta(\vert V\vert + \vert A\vert)$
k $\times$ descobrir um caminho	$O(k \times (\vert V\vert + \vert A\vert))$
k $\times$ atualizar o fluxo	$O(k \times \vert V\vert)$
TOTAL	$O(k \times (\vert V\vert + \vert A\vert))$

Como o número de iterações (k) não excede ......,

a complexidade do algoritmo é ....

Complexidade do Emparelhamento Máximo com o Algoritmo de Edmonds-Karp

Grafo $G = (V, A)$ em Vetor de Listas de Incidências cuja partição de vértices $\{X, Y\}$ verifica

$X = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ e $Y = \{n, n+1, \ldots, |V|-1\}$

construir a rede de fluxos	$\Theta(\|V\| + \|A\|)$
inicializar o fluxo	$\Theta(\|V\| + \|A\|)$
k $\times$ descobrir um caminho	$O(k \times (\|V\| + \|A\|))$
k $\times$ atualizar o fluxo	$O(k \times \|V\|)$
TOTAL	$O(k \times (\|V\| + \|A\|))$

Como o número de iterações (k) não excede $\frac{|V|}{2}$,

a complexidade do algoritmo é $O(|V| \times (|V| + |A|))$.