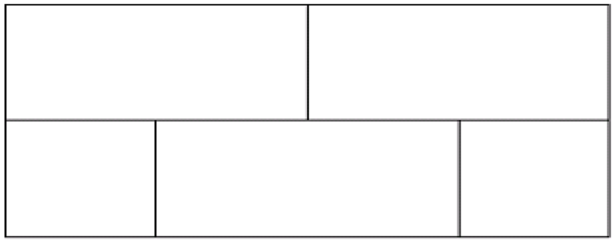
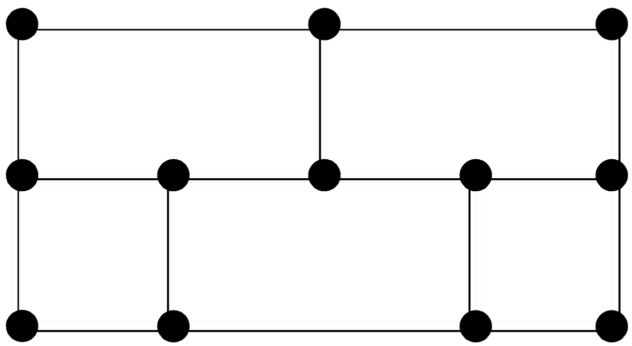
2.4 Grafos Eulerianos

A figura



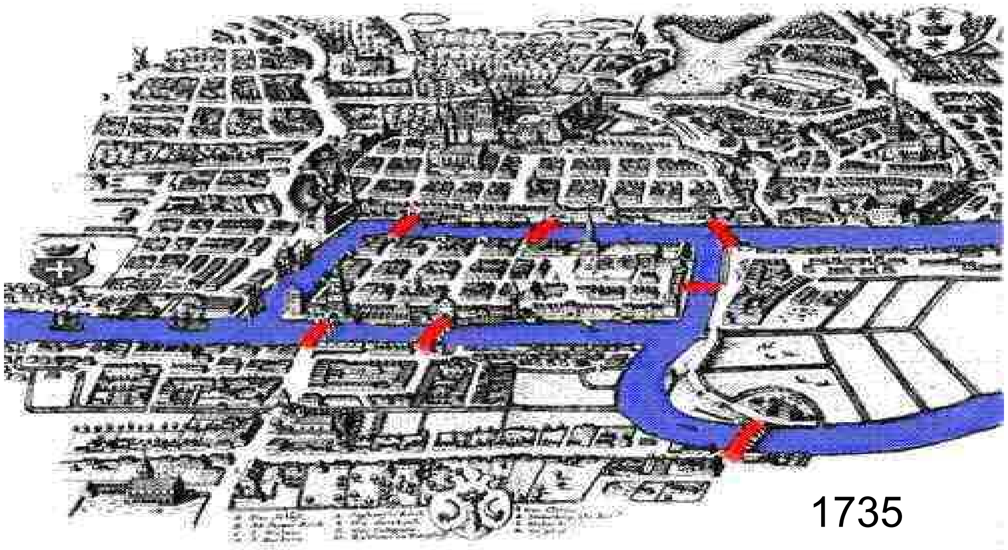
pode ser desenhada através de traços contínuos sem nunca passar por cima de um traço já feito?



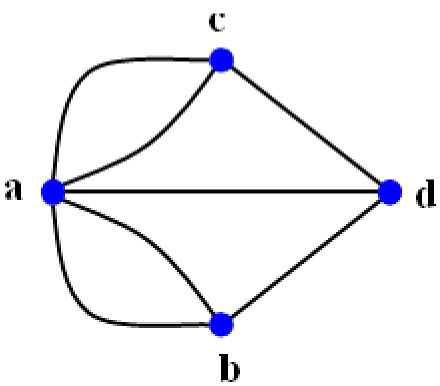
Será possível percorrer todos os arcos do grafo sem os repetir**?**

Problema da cadeia ou do ciclo de Euler

Leonhard Paul Euler (1707- 1783)



1735



Definição 2.4.1:

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo. Chamamos cadeia euleriana a uma cadeia simples contendo todos os arcos de G e ciclo euleriano a um ciclo contendo todos os arcos de G.

Se G é um multigrafo orientado, substituindo na definição "cadeia" por "caminho" obtêm-se as correspondentes definições de caminho euleriano e de circuito euleriano.

Definição 2.4.2:

Um multigrafo diz-se euleriano se admite um ciclo euleriano e semi-euleriano se admite uma cadeia euleriana aberta.

Observação:

1. Não existem multigrafos simultaneamente eulerianos e semi-eulerianos.

Teorema 2.4.3:

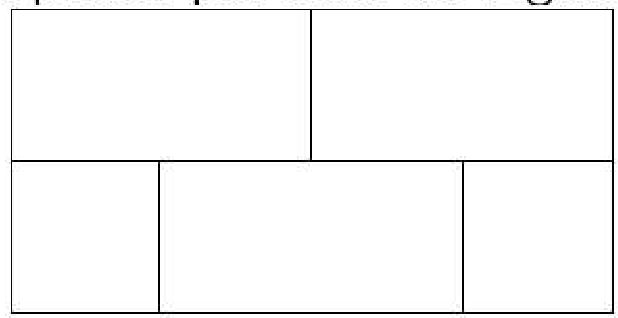
(i) *Um multigrafo conexo G, com $n \geq 2$ vértices, tem um ciclo euleriano se, e só se, todo o vértice de G tem grau par.*

(ii) *Um multigrafo conexo G, com $n \geq 2$ vértices, tem uma cadeia $x - y$ euleriana, com $x \neq y$ se, e só se, x e y são os únicos vértices de G com grau ímpar.*

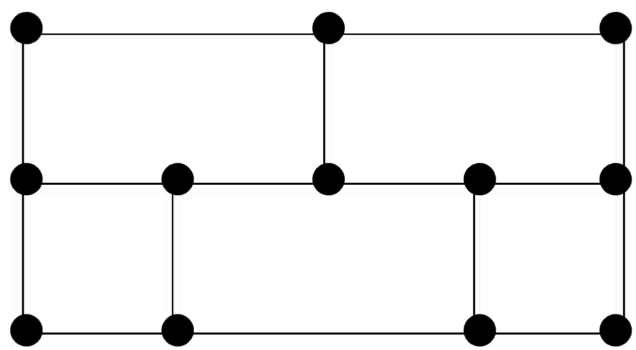
Teorema de Euler

Dem…

- Regressando à pergunta que foi feita no inicio deste capítulo: Será possível desenhar a seguinte figura sem passar por cima de segmentos?



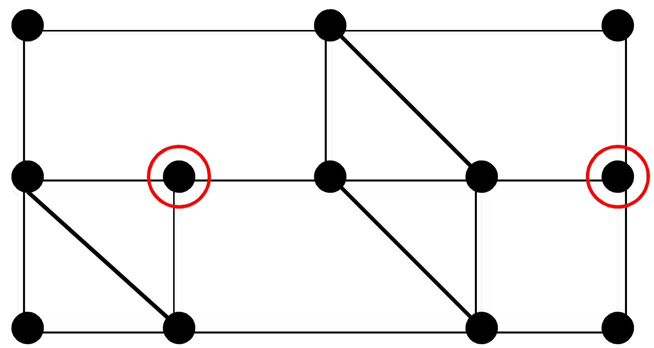
Considere o grafo associado em baixo:



Grafo não euleriano
não semi-euleriano

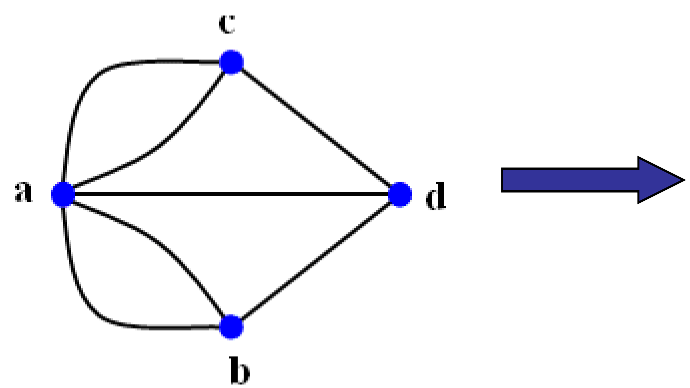
Grafo de ordem 12. Possui 8 vértices de grau ímpar e 4 de grau par.

Adicionando ao grafo anterior os três arcos em baixo,



obtemos um grafo onde todos os vértices têm grau par excepto dois de grau ímpar. Assim, admite uma cadeia euleriana cujos extremos são os vértices de grau ímpar.

- Quanto ao grafo associado às pontes de Konigsberg…



Grafo não euleriano
não semi-euleriano

Questão: Dado um multigrafo euleriano como determinar um ciclo euleriano?

Algoritmo de Fleury

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo euleriano.

1^o Escolha um vértice x_1 de G.

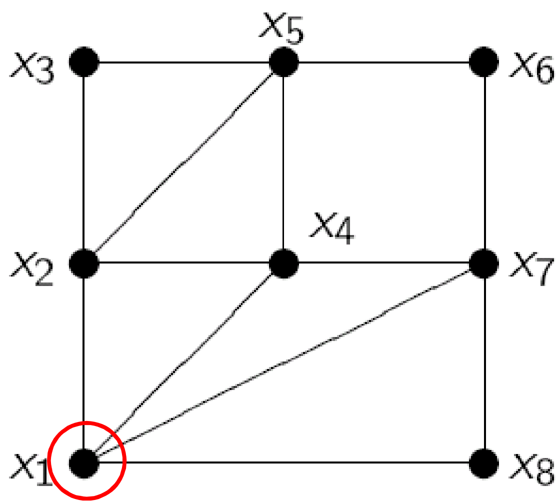
2^o Sendo $L:\quad x_1,\ u_1,\ x_2, \ldots,\ u_p,\ x_k$ a cadeia simples, obtida pelo processo, seja $u_{k+1} = \{x_k, x_{k+1}\} \in \mathcal{U} \setminus \{u_1, \ldots, u_k\}$ um arco incidente em x_k que não pertence a L e que, caso seja possível, não seja ponte de $G' = (X,\ \mathcal{U} \setminus \{u_1, \ldots,\ u_k\})$.

3^o Se $d_{G'}(x_{k+1}) = 1$, o algoritmo termina, caso contrário repita-se 2^o.

Exemplo 1: Consideremos o grafo

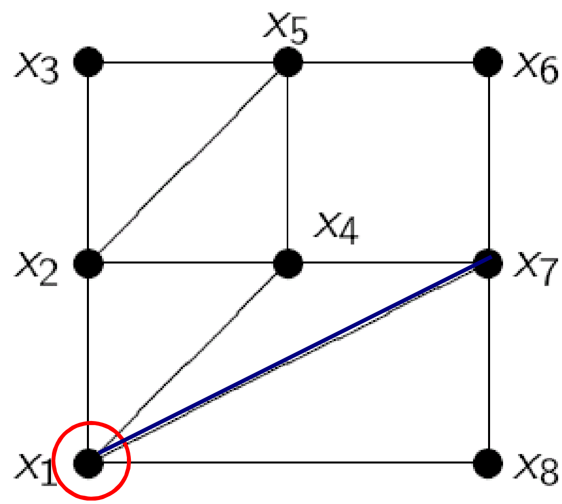
Grafo Euleriano

Algoritmo de Fleury



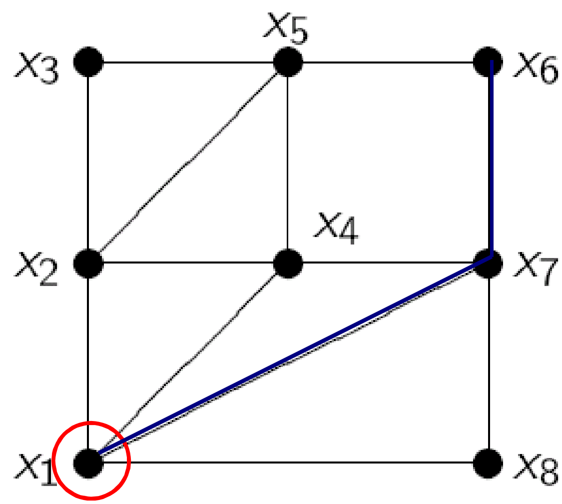
que é euleriano pois é conexo e todos os seus vértices têm grau par. Utilizemos o algoritmo de Fleury para determinar um ciclo euleriano.

Exemplo 1: Consideremos o grafo



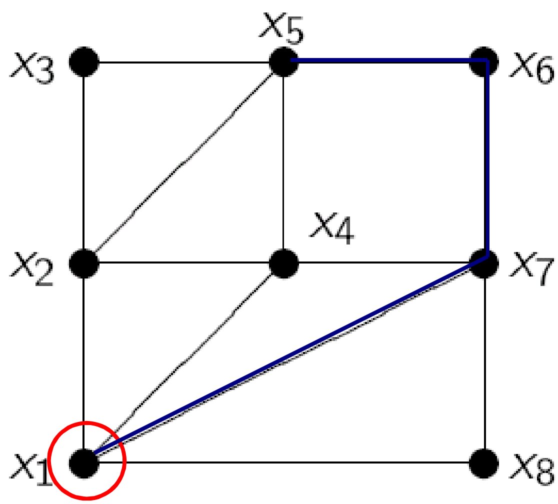
x_1, x_7

Exemplo 1: Consideremos o grafo



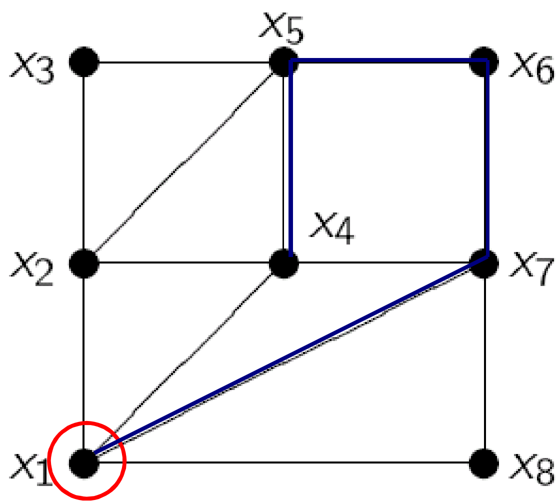
x_1, x_7, x_6

Exemplo 1: Consideremos o grafo



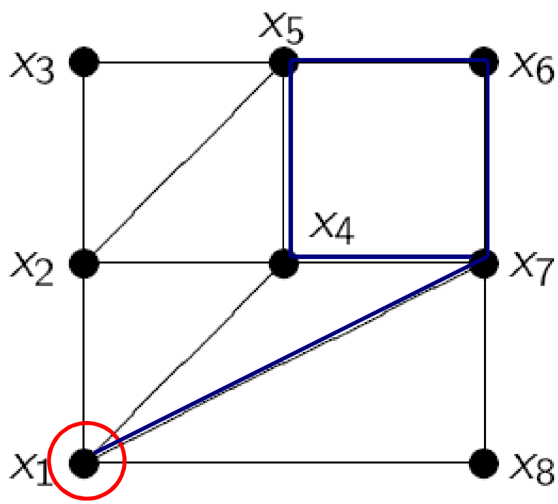
x_1, x_7, x_6, x_5

Exemplo 1: Consideremos o grafo



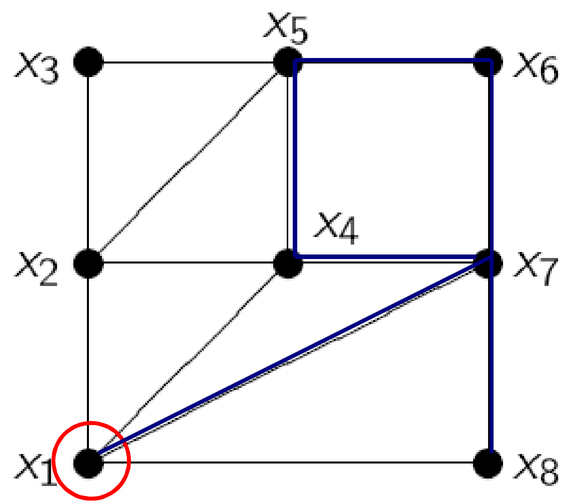
x_1, x_7, x_6, x_5, x_4

Exemplo 1: Consideremos o grafo



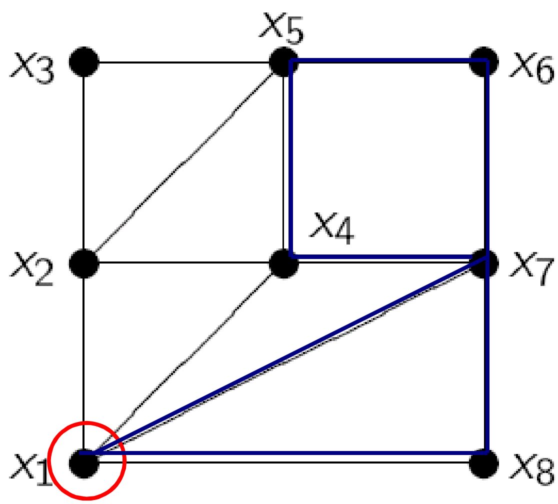
$x_1, x_7, x_6, x_5, x_4, x_7$

Exemplo 1: Consideremos o grafo



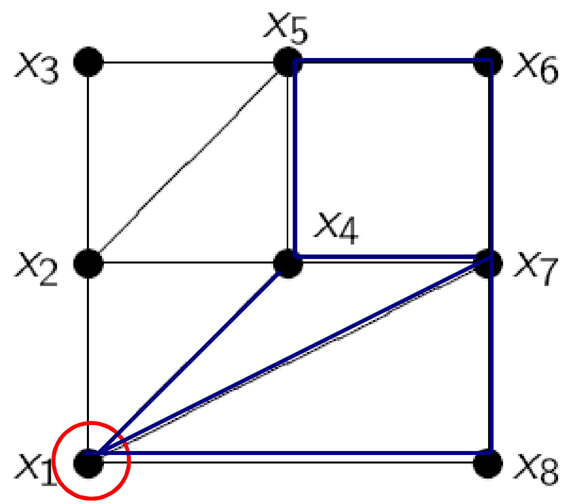
$x_1, x_7, x_6, x_5, x_4, x_7, x_8$

Exemplo 1: Consideremos o grafo



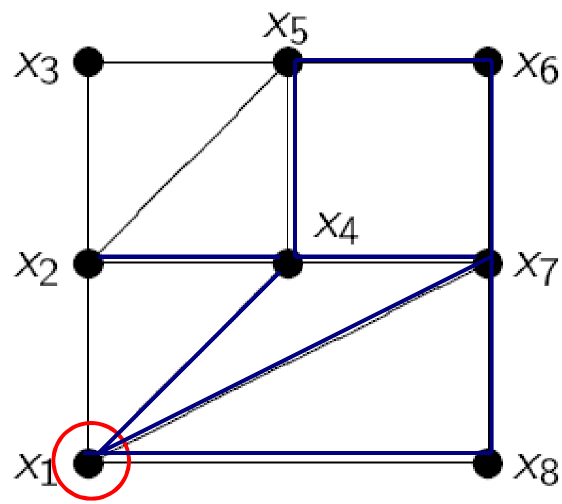
$x_1, x_7, x_6, x_5, x_4, x_7, x_8, x_1$

Exemplo 1: Consideremos o grafo



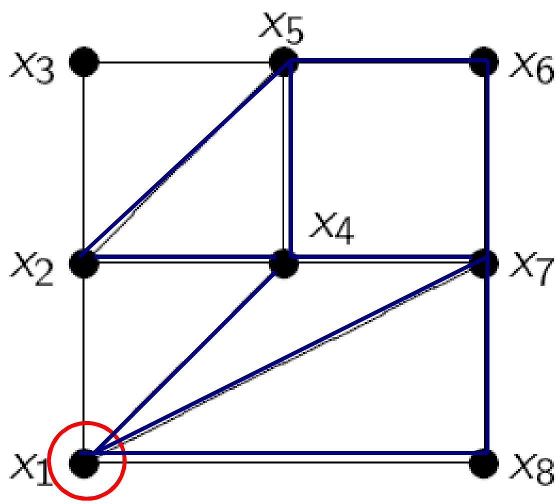
x_1, x_7, x_6, x_5, x_4, x_7, x_8, x_1, x_4

Exemplo 1: Consideremos o grafo



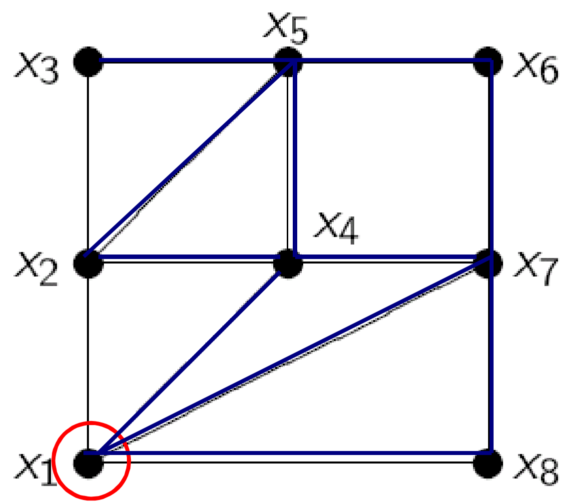
x_1, x_7, x_6, x_5, x_4, x_7, x_8, x_1,x_4, x_2

Exemplo 1: Consideremos o grafo



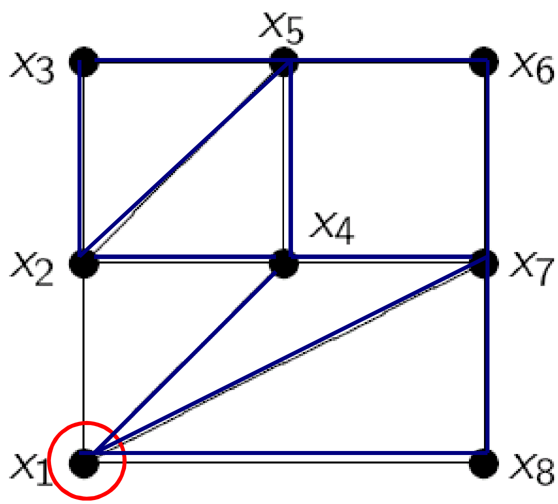
$x_1, x_7, x_6, x_5, x_4, x_7, x_8, x_1, x_4, x_2, x_5$

Exemplo 1: Consideremos o grafo



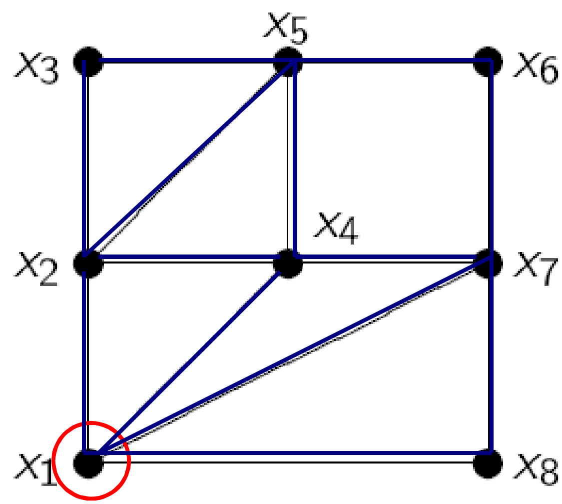
$x_1, x_7, x_6, x_5, x_4, x_7, x_8, x_1, x_4, x_2, x_5, x_3$

Exemplo 1: Consideremos o grafo



$x_1, x_7, x_6, x_5, x_4, x_7, x_8, x_1, x_4, x_2, x_5, x_3, x_2$

Exemplo 1: Consideremos o grafo

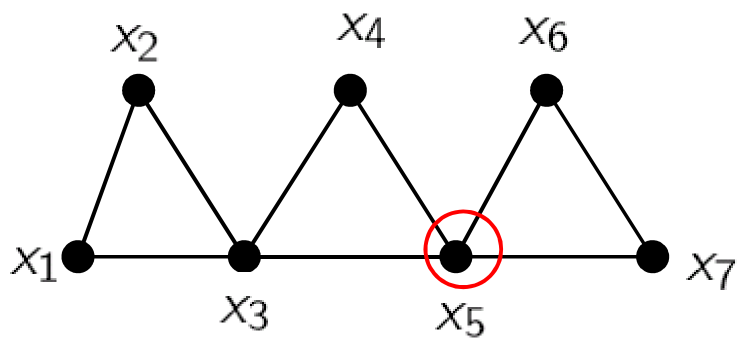


$x_1, x_7, x_6, x_5, x_4, x_7, x_8, x_1, x_4, x_2, x_5, x_3, x_2, x_1$

Exemplo 2: Consideremos o grafo

Grafo Euleriano

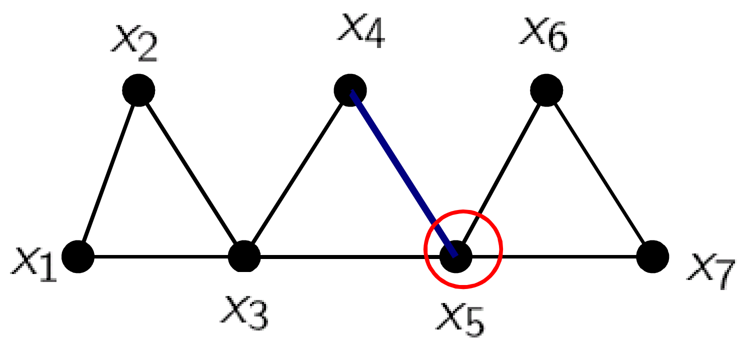
Algoritmo de Fleury



Estamos perante um grafo conexo euleriano, pois todos os vértices têm grau par.

Vamos recorrer ao algoritmo de Fleury para determinar um ciclo euleriano.

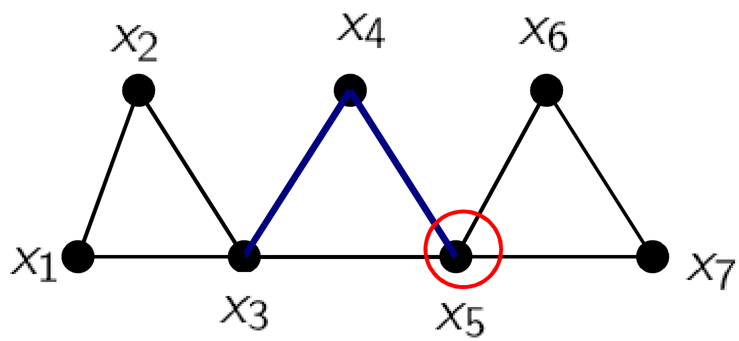
Exemplo 2: Consideremos o grafo



Vamos iniciar o algoritmo no vértice x_5.

X_5, x_4

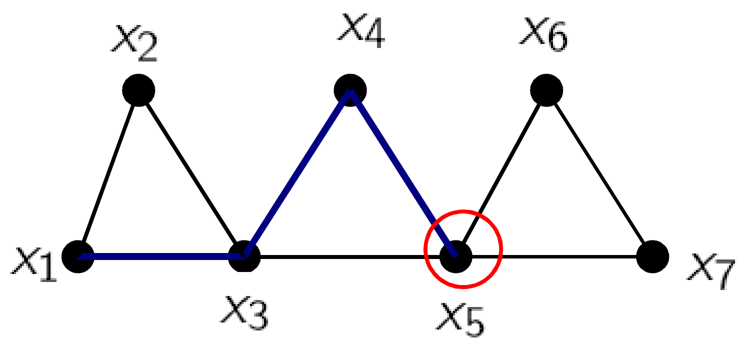
Exemplo 2: Consideremos o grafo



Vamos iniciar o algoritmo no vértice x_5.

x_5, x_4 , x_3

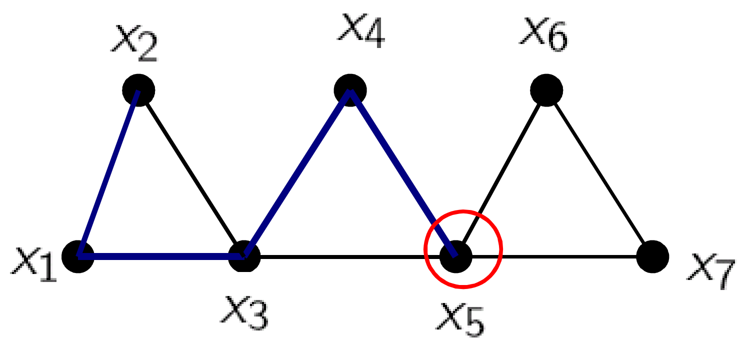
Exemplo 2: Consideremos o grafo



Vamos iniciar o algoritmo no vértice x_5.

x_5, x_4, x_3, x_1

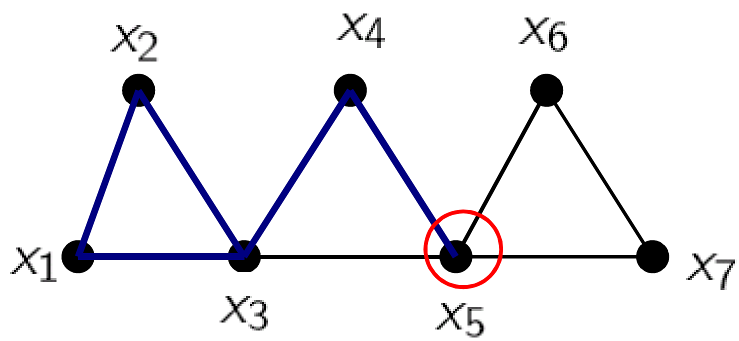
Exemplo 2: Consideremos o grafo



Vamos iniciar o algoritmo no vértice x_5.

x_5, x_4, x_3, x_1,x_2

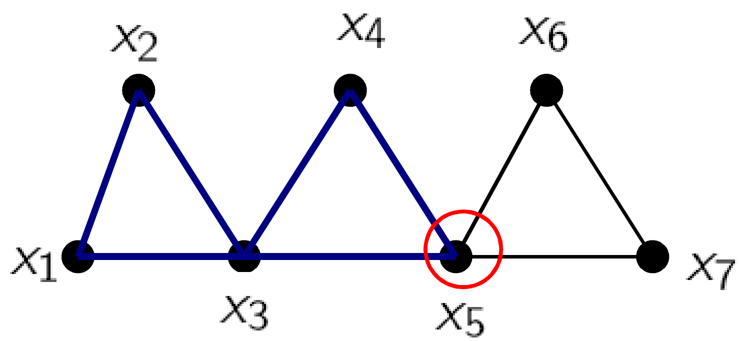
Exemplo 2: Consideremos o grafo



Vamos iniciar o algoritmo no vértice x_5.

$x_5, x_4, x_3, x_1, x_2, x_3$

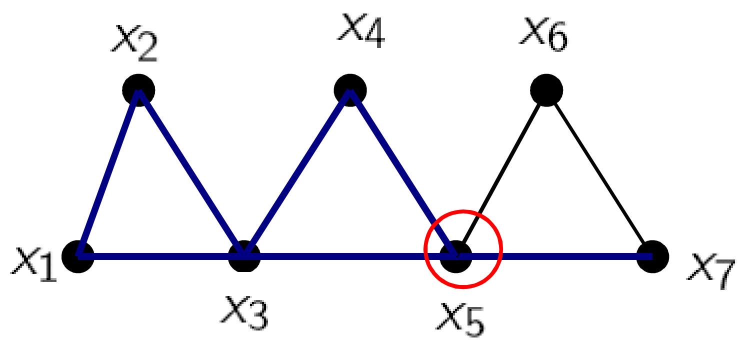
Exemplo 2: Consideremos o grafo



Vamos iniciar o algoritmo no vértice x_5.

$x_5, x_4, x_3, x_1, x_2, x_3, x_5$

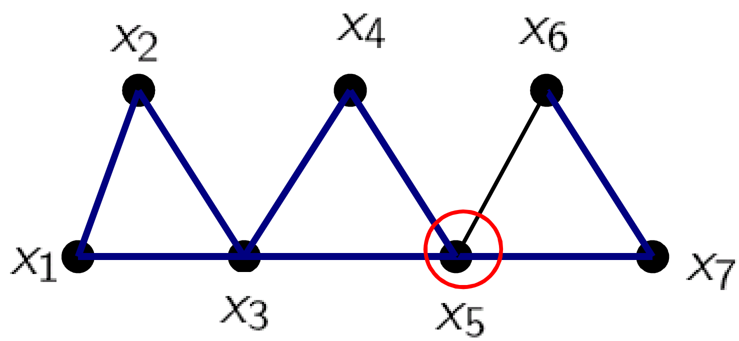
Exemplo 2: Consideremos o grafo



Vamos iniciar o algoritmo no vértice x_5.

x_5, x_4, x_3, x_1,x_2, x_3, x_5, x_7

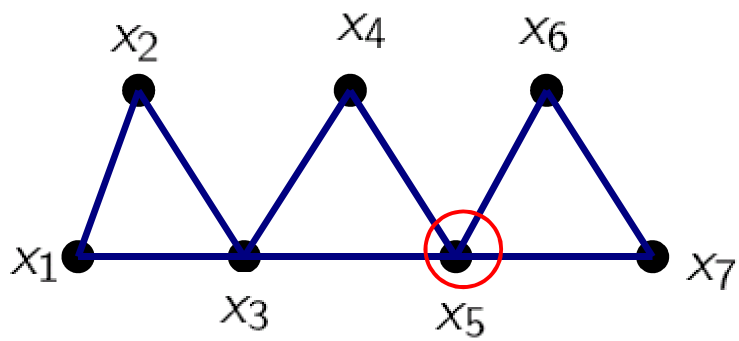
Exemplo 2: Consideremos o grafo



Vamos iniciar o algoritmo no vértice x_5.

$x_5, x_4, x_3, x_1, x_2, x_3, x_5, x_7, x_6$

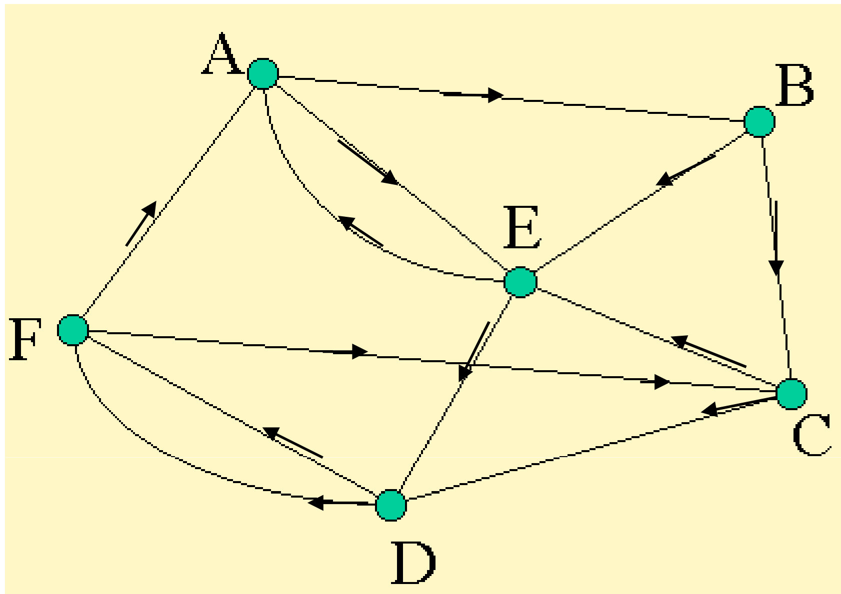
Exemplo 2: Consideremos o grafo



Vamos iniciar o algoritmo no vértice x_5.

$x_5, x_4, x_3, x_1, x_2, x_3, x_5, x_7, x_6, x_5$

Questão: **O que se passa com os multigrafos orientados?**



$d^+(A) = 2 = d^-(A)$

$d^+(C) = 2 = d^-(C)$

$d^+(D) = 2 = d^-(D)$

$d^+(F) = 2 = d^-(2)$

$\boxed{d^+(E) = 2 \quad e \quad d^-(B) = 3}$

$\boxed{d^+(B) = 2 \quad e \quad d^-(B) = 1}$

Teorema 2.4.4:

(i) *Um multigrafo orientado conexo* $G = (X, \mathcal{U})$, *com* $n \geq 2$ *vértices, tem um circuito euleriano se, e só se,*

$$d^+(x) = d^-(x),$$

para todo o $x \in X$.

(ii) *Um multigrafo orientado conexo* $G = (X, \mathcal{U})$, *com* $n \geq 2$ *vértices, tem um caminho* $x - y$ *euleriano, com* $x \neq y$ *se, e só se,*

$$d^+(x) = d^-(x) + 1,$$

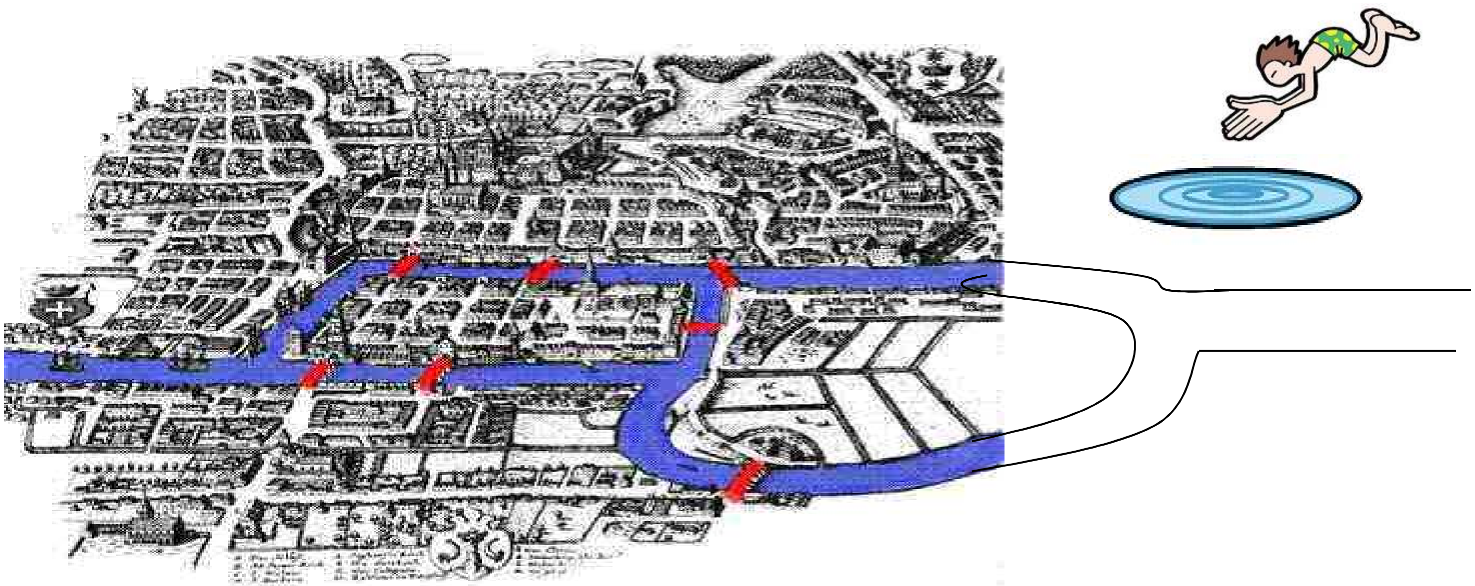
$$d^+(y) = d^-(y) - 1,$$

$$d^+(x_i) = d^-(x_i),$$

para todo o $x_i \in X \setminus \{x, y\}$.

Teorema de Euler (Mult. orientado)

A terminar…. O nadador de Konigsberg



Um nadador consegue nadar no Pregel de forma a passar por baixo de todas as pontes uma e uma só vez?