Definição

Uma sucessão em $\mathbb{R}^n$ é uma função

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$$

$$m \hookrightarrow u_m = (u_1^m, \dots, u_n^m)$$

Exemplo: $u_m = \left(m^2, \frac{1}{m}\right)$

Definição

Diz-se que uma sucessão (u_m) de pontos em $\mathbb{R}^n$ converge para $a \in \mathbb{R}^n$ e escreve-se $\lim\limits_{m \to +\infty} u_m = a$ se:

$$\forall \epsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \geq p \Rightarrow d(u_m, a) < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \geq p \Rightarrow \|u_m - a\| < \epsilon$$

Teorema

É condição necessária e suficiente para que a sucessão (u_m) de pontos de $\mathbb{R}^n$ convirja para $a \in \mathbb{R}^n$ que cada uma das suas sucessões coordenadas convirja para a correspondente coordenada de a.

Exemplo e Demonstração

Definição

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $\forall m \in \mathbb{N}, u_m \in A$, então (u_m) diz-se uma sucessão de elementos de A.

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \hookrightarrow f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

Domínio (D): maior subconjunto de $\mathbb{R}^n$ onde a expressão $f(x_1, \ldots, x_n)$ tem significado

Cuidados:

- denominadores não nulos
- argumentos de raízes de índice par não negativos
- argumentos de logaritmos positivos
- argumentos de $\arcsin$ e $\arccos$ em $[-1, 1]$

Contra-domínio ($f(D)$):

$$f(D) = \{z \in \mathbb{R} : z = f(x) \wedge x \in D\}$$

Gráfico (G):

$$G = \{(x_1, \ldots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z = f(x_1, \ldots, x_n) \wedge (x_1, \ldots, x_n) \in D\}$$

Exemplos (introdução das superfícies quádricas)

Definição (Conjunto de nível)

Chama-se conjunto de nível de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *ao conjunto* C_k *solução da equação* $f(x) = k$*, onde* k *é uma constante pertencente ao contra-domínio de* f*.*

$$C_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = k \wedge k \in f(D)\}$$

Nota: Em $\mathbb{R}^2$ designa-se por curva de nível e em $\mathbb{R}^3$ por superfície de nível.

Exemplos

`https://faculty.math.illinois.edu/~nmd/quadrics/hyper2.html`

Definição (Limite segundo Cauchy)

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* $a \in \overline{D}$. *Diz-se que* f *tende para* b *quando* x *tende para* a *ou que* f *tem limite* b *em* a *e escreve-se* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ *se:*

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0, x \in D \cap V_\epsilon(a) \Rightarrow f(x) \in V_\delta(b)$$

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0, x \in D \wedge \|x - a\| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta$$

Exemplo

Teorema (Limite segundo Heine)

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* $a \in \overline{D}$. *Temos* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ *se e só se para qualquer sucessão* (x_m) *de elementos de* D *a convergir para* a, *a sucessão* $(f(x_m))$ *converge para* b.

Exemplo

Teorema (Propriedades de cálculo de limites)

Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *duas funções com limites finitos quando* x *tende para* $a \in \overline{D}$. *Então:*

- $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} (f - g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} (f.g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- *Se* $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ *então* $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f}{g} \right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$

Teorema (Teorema das funções enquadradas)

Sejam $f, g, h : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *três funções e* $a \in \overline{D}$. *Se* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *numa vizinhança de* a *e* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = b$ *então* $\lim_{x \to a} h(x) = b$.

Definição

Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diz-se limitada se existir* $L > 0$ *tal que:*

$$\forall x \in D, |f(x)| < L.$$

Corolário

Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *duas funções e* $a \in \overline{D}$. *Se* f *é limitada numa vizinhança de* a *e* $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ *então* $\lim_{x \to a} (f.g)(x) = 0$.

Definição (Limites relativos a conjuntos (Cauchy))

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* $A \subset D$ *com* $a \in \overline{A}$. *Diz-se que* f *tem limite* b *quando* x *tende para* a *segundo* A *ou que* b *é o limite de* f *relativo a* A *e escreve-se*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$$

se

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0, x \in A \wedge \|x - a\| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta$$

Nota: Segundo Heine, $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$ se e só se para qualquer sucessão (x_m) de elementos de A a convergir para a, a sucessão $(f(x_m))$ converge para b.

Exemplo

Teorema

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tal que* $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_p$. *Se* $a \in \overline{D_i}$ *e*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in D_i}} f(x) = b, \forall i \in \{1, 2, \ldots, p\}$$

então

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \hookrightarrow f(x) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n))$$

Definição (Limite segundo Cauchy)

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e $a \in \overline{D}$. Diz-se que f tende para b quando x tende para a ou que f tem limite b em a e escreve-se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ se:

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0, x \in D \cap V_\epsilon(a) \Rightarrow f(x) \in V_\delta(b)$$

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0, x \in D \wedge \|x - a\| < \epsilon \Rightarrow \|f(x) - b\| < \delta$$

Teorema

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e $a \in \overline{D}$. *O limite de* f *quando* x *tende para* a *é* $b = (b_1, \ldots, b_p)$ *se e só se:*

$$\lim_{x \to a} f_i(x) = b_i, \forall i \in \{1, \ldots, p\}$$

Exemplo

Teorema (Limite segundo Heine)

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e $a \in \overline{D}$. *Temos* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ *se e só se para qualquer sucessão* (x_m) *de elementos de* D *a convergir para* a, *a sucessão* $(f(x_m))$ *converge para* b.

Definição

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *e suponhamos que* D *é tal que faz sentido considerar* $\|x\|$ *tão grande quanto se queira. Diz-se que* $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = b$ *se:*

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0, x \in D \wedge \|x\| > \epsilon \Rightarrow \|f(x) - b\| < \delta$$

Definição

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *e* $a \in \overline{D}$. *Diz-se que* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ *se:*

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0, x \in D \wedge \|x - a\| < \epsilon \Rightarrow \|f(x)\| > \delta$$

Função Contínua

Definição

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e $a \in D$. *Diz-se que* f *é continua em* a *se existir* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Notas:

- Como consequência $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Se f não é contínua em $a \in D$ então f diz-se descontínua em a.

Definição

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e $A \subseteq D$. *Diz-se que* f *é contínua em* A *se* f *é contínua em todos os pontos de* A.

Propriedades das Função Contínuas

Teorema

Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *funções contínuas em* $a \in D_f \bigcap D_g$. *Então* $f + g, f - g$ e $f.g$ *também são contínuas em* a e *se* $g(a) \neq 0$ *então* $\frac{f}{g}$ *também é contínua em* a.

Teorema

Sejam $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *contínuas em* $a \in D_g$ e *em* $g(a) \in D_f$, *respectivamente. Então* $f \circ g$ *é contínua em* a.

Exemplos: Projecções, constantes, polinómios,...

Prolongamento por Continuidade

Definição

Sejam $f, \bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *duas funções. Diz-se que* $\bar{f}$ *é um prolongamento de* f *se:*

- $D_f \subset D_{\bar{f}}$
- $\forall x \in D_f, \bar{f}(x) = f(x)$

Teorema

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *e* $a \in \mathbb{R}^n \setminus D$. *A função* f *é prolongável por continuidade ao ponto* a *se e só se existir* $\lim_{x \to a} f(x)$.

Exemplo

Descontinuidade Removível

Definição

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *uma função descontínua em* $a \in D$. *Diz-se que* f *tem uma descontinuidade removível no ponto* a *se existir uma função* g, *contínua em* a, *que apenas difere de* f *em* a.

Teoremas Importantes para Funções Contínuas

Definição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ *diz-se compacto se for fechado e limitado.*

Teorema

A imagem de um conjunto compacto por uma função contínua é um conjunto compacto.

Teorema (Teorema de Weierstrass)

Toda a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *contínua num compacto tem um máximo e um mínimo nesse conjunto.*

Teoremas importantes para funções contínuas

Teorema (Teorema de Bolzano)

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e* $a, b \in D$. *Consideremos* k *entre* $f(a)$ *e* $f(b)$. *Então existe* c *no segmento que liga* a *a* b *tal que* $f(c) = k$.