FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

ANÁLISE MATEMÁTICA I
1º semestre de 2016/2017

Ficha 6 - Funções Reais de Variável Real
Teoremas de Rolle, Lagrange, Cauchy, Taylor

1. Mostre que $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 9$ satisfaz as condições do Teorema de Rolle no intervalo $[-3, 3]$. Determine os valores $c \in]-3, 3[$ que satisfazem $f'(c) = 0$.

2. Prove que a equação $x^3 - 9x - 9 = 0$ tem 3 raízes reais.

3. Prove, recorrendo ao Teorema de Rolle, que a equação $4x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = 0$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]-2, 0[$.

4. Mostre que a equação $x^3 + 2x - 1 = 0$ tem apenas uma raiz real. Mostre ainda que essa raiz se encontra no intervalo $]0, 1[$.

5. Considere a função real de variável real definida por
$$f(x) = 2(x-1)(x-3)(x-5)(x-7).$$
Quantos zeros podemos garantir para f' e f''?

6. Prove que, qualquer que seja k (real), a função $f(x) = 2x^3 - 6x + k$ não pode ter dois zeros no intervalo $]-1, 1[$.

7. Determine o número exacto de soluções da equação $\frac{x^4}{4} + x^3 = 3$.

8. Considere a função real de variável real definida por
$$f(x) = x^2 \operatorname{arctg}(x^2) + x^2 - 1 - \frac{1}{2}\log(x^4 + 1).$$
   (a) Mostre que f é uma função par.
   (b) Determine o número exacto de soluções da equação
$$x^2 \operatorname{arctg}(x^2) + x^2 = 1 + \frac{1}{2}\log(x^4 + 1).$$

9. Seja f uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e tal que $f(a) = f(b) = 0$.
   (a) Verifique se a função $g(x) = f(x)e^{-3x}$ obedece às condições do Teorema de Rolle no mesmo intervalo.
   (b) Mostre que existe c em $]a, b[$ tal que $f'(c) = 3f(c)$.

10. Em cada um dos seguintes casos verificar se o Teorema do Valor Médio de Lagrange se aplica. Em caso afirmativo encontrar o número c em $]a, b[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

    (a) $f(x) = \cos(x)$, $a = 0, \ \ b = \dfrac{\pi}{2}$;

    (b) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, $a = \dfrac{\pi}{4}, \ \ b = \dfrac{3\pi}{4}$;

    (c) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $a = -1, \ \ b = 0$.

11. Utilize o Teorema do valor médio de Lagrange para provar que:

    (a) $e^x > x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$;

    (b) $\dfrac{x - a}{1 + x^2} + \operatorname{arctg}(a) < \operatorname{arctg}(x) < \operatorname{arctg}(a) + \dfrac{x - a}{1 + a^2}, \quad \forall x > a > 0$;

    (c) $(1 + x)^{1/4} < 1 + \frac{1}{4}x, \quad \forall x > 0$;

    (d) $\operatorname{arcsen}(x) < \dfrac{\pi}{2} + x - 1$, $\forall x \in [-1, 1[$.

12. Considere a função f, real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2\, e^{1-x}, & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{x^2}{x^2 - 4}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

    Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f.

13. Considere a função f, real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\big((x - 2)^2\big) + 1, & \text{se } x \geq 2 \\ e^{x^2 - 3x + 2}, & \text{se } x < 2. \end{cases}$$

    Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f.

14. Considere a função f, real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \log(x^3 + 2x), & \text{se } x > 0 \\ x + \dfrac{1}{x + 1}, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

    Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f.

15. Considere a função f, real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{\pi}{2}, & \text{se } x > 1 \\ \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 3}, & \text{se } x \leq 1. \end{cases}$$

    Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f.

16. Calcule, justificando, os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{6(x+1)^2}{1+\operatorname{sen}(2x+\frac{\pi}{2})}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log(x)}\right)$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{\operatorname{cotg}(x)}$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} 2\ \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-2)\right)\log(x-3)$;

(e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\log\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$;

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{x^2+2x}$;

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 5^+} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)^{\frac{1}{x-5}}$;

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{2x}\right)^{\operatorname{sen}(3x)}$;

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{tg}(x))^{1/\log(x)}$;

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\cos(x^2)\right)^{\operatorname{cotg}(x)}$.

17. Determine os números reais a e b tais que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a\,x)-x}{x^3+b\,x^2}$ seja um número real diferente de zero.

18. Determine a tal que $\displaystyle\frac{e^{ax}-e^{x}-x}{x^2}$ tenha limite finito quando $x\to 0$ e calcule este limite.

19. Determine os números reais a e b de forma que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{\log(x+1)} - \frac{ax+b}{x}\right) = 0.$$

20. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Indique, justificando, para que valores de a e b pode aplicar a Regra de Cauchy ao cálculo do seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(x^2+x+a\right)}{\operatorname{sen}(bx)}.$$

Determine os valores de a e b de modo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(x^2+x+a\right)}{\operatorname{sen}(bx)} = 3.$$

21. Considere a função real de variável real definida por $h(x) = \log(x)$.

   (a) Escreva o desenvolvimento de Taylor da função h em torno do ponto 1, com resto de ordem 2.

   (b) Utilizando a alínea (a), calcule $\lim_{x\to 1} \dfrac{\log(x) - x + 1}{(x-1)^2}$.

22. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = (x-1)\log(x-1)$.

   (a) Escreva a fórmula de Taylor, com resto de Lagrange de ordem 3, para a função f, em torno do ponto $a = 2$.

   (b) Utilizando a fórmula obtida na alínea anterior, calcule

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-1)\log(x-1) - (x-2)}{(x-2)^2}.$$

23. Considere a função $f(x) = x\,e^{-x}$.

   (a) Escreva a fórmula de MacLaurin, com resto de ordem 4, de f.

   (b) Use a alínea (a) para mostrar que

$$x\,e^{-x} \leq x - x^2 + \frac{x^3}{2}, \quad \forall x < 4.$$

24. Considere a função $f(x) = x^2 \log(x)$.

   (a) Escreva a fórmula de Taylor, com resto de ordem 4, de f, em torno do ponto $x = 1$.

   (b) Use a alínea (a) para mostrar que

$$f(x) < (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

25. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \log(\operatorname{sen}(x) + 2)$.

   (a) Escreva a fórmula de MacLaurin de f, com resto de Lagrange, com três parcelas, incluindo a do resto.

   (b) Use a alínea anterior para estabelecer a desigualdade,

$$\log(\operatorname{sen}(x) + 2) \leq \log(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

26. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{x}{2}\log(x)$.

   (a) Escreva a Fórmula de Taylor da função f, no ponto $a = 1$, com resto de Lagrange de ordem 3.

   (b) Prove a seguinte desigualdade:

$$\frac{x}{2}\log(x) < \frac{x^2-1}{4}, \quad \forall x > 1.$$

(c) Estude, usando o Teorema de Taylor, a existência de extremos relativos da função f.

27. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = x\,3^x$.

    (a) Prove por indução matemática que
    $$f^{(n)}(x) = 3^x\ \big(\log(3)\big)^{n-1}\big(n + x\ \log(3)\big), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
    (b) Escreva a fórmula de MacLaurin de f com resto de Lagrange de ordem n.
    (c) Estude, usando o Teorema de Taylor, a existência de extremos relativos da função f.
    (d) Estude, usando o Teorema de Taylor, a existência de pontos de inflexão do gráfico de f.

28. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

    (a) Escreva a fórmula de Taylor, com resto de Lagrange de ordem 3, para a função f, em torno do ponto $a = 1$.
    (b) Estude, usando o Teorema de Taylor, a existência de extremos relativos da função f.
    (c) Estude, usando o Teorema de Taylor, a existência de pontos de inflexão do gráfico de f.

29. Seja g a função real de variável real definida por $g(x) = xe^{2x}$.

    (a) Determine a fórmula de Taylor de g de ordem 3 no ponto $a = -1$.
    (b) Aplicando o Teorema de Taylor, determine os pontos de inflexão do gráfico de g.

30. Seja g a função real de variável real definida por
    $$g(x) = x + \operatorname{sen}(x).$$
    Aplicando o Teorema de Taylor, determine os pontos de inflexão do gráfico de g.

31. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função cuja derivada é definida por
    $$g'(x) = \frac{x-1}{x^2+3}.$$
    Determine os pontos de inflexão e as concavidades de g.

32. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que
    $$f'(x) = \operatorname{arctg}(x^3) + \log(1+x^6).$$
    Determine os sentidos de concavidade de f e os seus pontos de inflexão.

33. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que
    $$f'(x) = \frac{\cos(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}.$$
    Estude a diferenciabilidade de f' e determine os sentidos de concavidade de f e os seus pontos de inflexão.