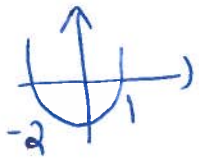


Nota: Esta é apenas uma hipótese de resolução de entre muitas outras possibilidades.

Questão 1

$$a) \frac{|x-3|}{(x+2)(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) < 0 \vee |x-3|=0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in]-2, 1[\vee x=3$$



$$\text{Logo } A =]-2, 1[\cup \{3\}$$

$$b) A \cup B =]-\infty, 2] \cup \{3, 4\} \\ B =]-\infty, 2] \cup \{4\}$$

Assim,

$$\text{int}(B) =]-\infty, 2[$$

$$f_B(B) = \{2, 4\}$$

$$B' =]-\infty, 2]$$

$$\overline{A \cup B} = (A \cup B) \cup f_B(A \cup B) =]-\infty, 2] \cup \{3, 4\}$$

c) B é aberto sse for igual ao seu interior. Como $4 \in B$ mas $4 \notin \text{int}(B)$, B não é aberto.

B é fechado sse for igual à sua aderência.

$$B = B \cup f_B(B) =]-\infty, 2] \cup \{4\} = B \text{ logo } B \text{ é fechado.}$$

Questão 2

(2)

a) Demonstramos por mostra que para $n=1$ a condição se transforma numa hipótese verdadeira.

$$u_1 = f \times 2^{1-1} - 6 = f \times 1 - 6 = 1 \rightarrow \text{hipótese verdadeira}$$

Suponhamos agora que a condição é uma hipótese verdadeira para o natural n e mostremos que o mesmo sucede para o natural $n+1$.

Hipótese: $u_n = f \times 2^{n-1} - 6$

Tese: $u_{n+1} = f \times 2^n - 6$

Prova da tese:

$$u_{n+1} = 2u_n + 6 = 2(f \times 2^{n-1} - 6) + 6 =$$

$\downarrow$
hela hipótese
de indução

$$= f \times 2^n - 12 + 6 = f \times 2^n - 6$$

Assim, pelo Princípio de Indução Matemática, podemos concluir que

$$u_n = f \times 2^{n-1} - 6, \forall n \in \mathbb{N}$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{3^n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3} \times 2^{n-1} - 6}{3^n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{6}{3^n}}{1 + \frac{2}{3^n}} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \times 0 - 0}{1 + 0} = 0$$

Questão 3

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 \times 1$$

$$= 1 \quad \text{pois} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}}$

$$\frac{n!}{(2n)!} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(2n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot (2n)!}{(2n+2)! \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n!} \cdot (n+1) \cdot \cancel{(2n)!}}{\cancel{n!} \cdot \cancel{(2n)!} \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(2n+1)} = 0$$

Assim, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}} = 0.$

(4)

e)

$$(m-4) \times \frac{2 + \sqrt{m^2+1}}{3 + \sqrt{m^4+m}} \leq \sum_{k=5}^m \frac{2 + \sqrt{m^2+1}}{3 + \sqrt{m^4+k}} \leq \frac{2 + \sqrt{m^2+1}}{3 + \sqrt{m^4+5}} (m-4), \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (m-4) \frac{2 + \sqrt{m^2+1}}{3 + \sqrt{m^4+m}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{m}\right) \frac{\frac{2}{m} + \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}}{\frac{3}{m^2} + \sqrt{1 + \frac{1}{m^3}}} = 1$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (m-4) \frac{2 + \sqrt{m^2+1}}{3 + \sqrt{m^4+5}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{m}\right) \frac{\frac{2}{m} + \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}}{\frac{3}{m^2} + \sqrt{1 + \frac{5}{m^4}}} = 1$$

Pelo Teorema das Sucessões Enquadradas

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=5}^m \frac{2 + \sqrt{m^2+1}}{3 + \sqrt{m^4+k}} = 1.$$

Questão 4

a) Para $a < -1$

$$-1 \leq 2a+3 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -4 \leq 2a \leq -2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq a \leq -1$$

Para $a > -1$

$$a^2 - 9 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \neq 9 \quad \Leftrightarrow \quad a \neq \pm 3$$

Logo

$$\begin{aligned} D &= [-2, -1[\cup]-1, +\infty[\setminus \{3\} = \\ &= [-2, +\infty[\setminus \{3\} \end{aligned}$$

(5)

b)

Para $a \in [-2, -1[$ a função é contínua pois é definida pela composta de duas funções contínuas (arccos e um polinômio)

Para $a \in]-1, +\infty[\setminus]-1, 3[$ a função é contínua pois é definida pelo quociente de duas funções contínuas (dois polinômios)

Para $a = -1$,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \arccos(ax+3) = \arccos 1 = 0 \neq a = f(-1)$$

Logo f não é contínua em $a = -1$.

$\therefore f$ é contínua em $[-2, +\infty[\setminus]-1, 3[$

c) $[0, 2]$ é um intervalo fechado e limitado.

f é contínua em $[0, 2]$ pois f é contínua em $[-2, +\infty[\setminus]-1, 3[$. O teorema de Weierstrass garante então que f tem um máximo e um mínimo absolutos em $[0, 2]$.

(6)

d)

$$\frac{x+1}{x^2-9} = 1-x \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2-9} - 1 + x = 0$$

Seja $g(x) = \frac{x+1}{x^2-9} - 1 + x$. g é contínua em $]-\frac{1}{2}, 2[$

pois é a diferença de duas funções contínuas (o quociente de duas funções holonómicas é um holonómio)

$$g(-\frac{1}{2}) = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}-9} - 1 - \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{35}{4}} - 1 - \frac{1}{2} < 0$$

$$g(2) = \frac{2+1}{4-9} - 1 + 2 = \frac{3}{-5} + 1 > 0$$

O teorema de Bolzano garante então que existe pelo menos um $c \in]-\frac{1}{2}, 2[$ tal que

$$g(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{c+1}{c^2-9} - 1 + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{c+1}{c^2+9} = 1-c$$