1º Teste de Análise e Desenho de Algoritmos

Departamento de Informática, FCT NOVA

29 de Abril de 2019

Duração: 1 hora e 45 minutos

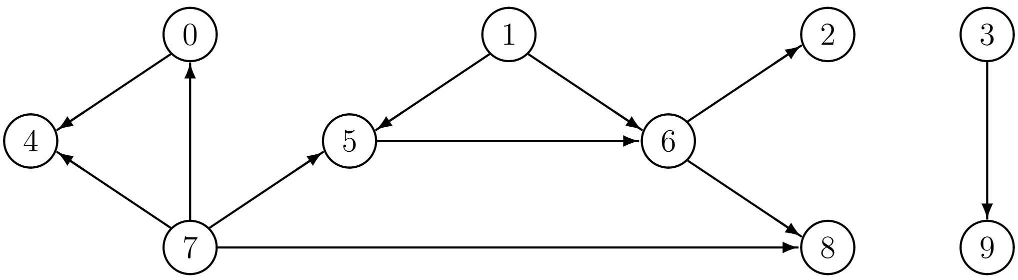
Tem de entregar os 2 cadernos, um com 2 folhas e o outro com 3.

Os cadernos não podem ser desagrafados.

Identifique os cadernos com o seu número e o seu nome.

Número: __________ **Nome:** ____

Pergunta 1 Suponha que se executa o algoritmo *topologicalSort* com o grafo G esquematizado na figura, depois de se ter alterado a disciplina do saco *ready* para *last-in first-out* (ou seja, quando *ready* é uma pilha).



Assuma que os métodos *nodes* e *outAdjacentNodes* iteram sempre os vértices por ordem crescente. Por exemplo, $G.outAdjacentNodes(7)$ produz os vértices 0, 4, 5 e 8 (por esta ordem).

(a) [2.5 valores] Qual seria a permutação de vértices computada (o conteúdo do vetor retornado)?

Permutação:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(b) [0.5 valores] Indique o maior número de vértices presentes simultaneamente na pilha (o maior valor de $ready.size()$ durante a execução do algoritmo).

Tamanho máximo da pilha: $\boxed{}$

Pergunta 2 Considere a seguinte função recursiva, $d_{X,Y}(i)$, onde:

- $X = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ são duas sequências de inteiros (com $n \geq 0$);
- i é um inteiro entre 0 e $n+1$ $(0 \leq i \leq n+1)$.

$$d_{X,Y}(i) = \begin{cases} 0, & \text{se } i = 0; \\ |x_0 - y_0|, & \text{se } i = 1; \\ \min(\, d_{X,Y}(i-1) + |x_{i-1} - y_{i-1}|, \\ \qquad d_{X,Y}(i-2) + |x_{i-1} - y_{i-2}| + |x_{i-2} - y_{i-1}| \,), & \text{se } i \geq 2. \end{cases}$$

Note que as sequências X e Y não variam entre chamadas recursivas. Por esse motivo, optou-se por escrever $d_{X,Y}(i)$ em vez de $d(X, Y, i)$.

(a) [5 valores] Apresente um algoritmo iterativo, desenhado segundo a técnica da programação dinâmica e implementado em Java, que receba duas sequências de inteiros (guardadas em vetores do tipo `int[]`):

$$X = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \text{ e } Y = (y_0, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\text{com } n \geq 0)$$

e calcule o valor de $d_{X,Y}(n+1)$.

(b) [0.5 valores] Qual é a complexidade espacial do seu algoritmo? Justifique a sua resposta.

(c) [0.5 valores] Qual é a complexidade temporal do seu algoritmo? Justifique a sua resposta.

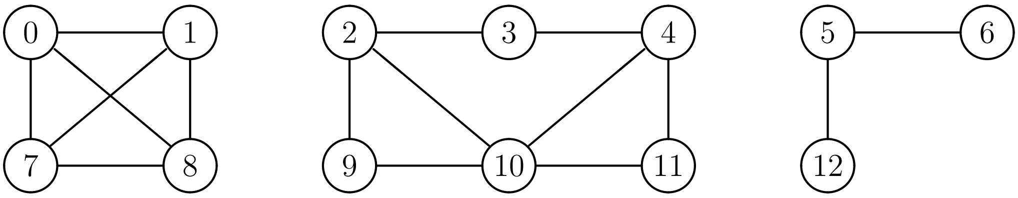
NOTA MUITO IMPORTANTE:
O que escrever nesta página não será avaliado.

Pergunta 3 O estudo das redes sociais permite compreender e prever comportamentos. Neste exercício, pretende-se calcular a coesão média dos grupos de indivíduos.

Uma rede social é modelada por um grafo não orientado. Cada vértice representa um indivíduo e a existência de um arco entre dois vértices indica que os dois indivíduos são amigos. Com base nesta relação de amizade podem-se definir caminhos (da forma usual em grafos) e componentes conexas. O *coeficiente de coesão* de uma componente conexa mede "a densidade" das amizades. Se C for uma componente conexa com $m \geq 2$ vértices e n arcos:

$$\text{coef-coesão}(C) = \frac{2\,n}{m\,(m-1)}.$$

O *coeficiente médio de coesão* de uma rede social é a média dos coeficientes de coesão das componentes conexas da rede que têm pelo menos dois vértices.



Para exemplificar, considere a rede social esquematizada na figura acima, que tem três componentes conexas.

- A componente conexa da esquerda, denotada por $C_1 = (V_1, A_1)$, tem 4 vértices e 6 arcos:

  $$V_1 = \{0, 1, 7, 8\} \text{ e } A_1 = \{(0,1), (0,7), (0,8), (1,7), (1,8), (7,8)\}.$$

  Portanto, o seu coeficiente de coesão é $\text{coef-coesão}(C_1) = \dfrac{2 \times 6}{4 \times 3} = 1.$

- A componente conexa do centro, denotada por $C_2 = (V_2, A_2)$, tem 6 vértices e 8 arcos:

  $$V_2 = \{2, 3, 4, 9, 10, 11\} \text{ e } A_2 = \{(2,3), (2,9), (2,10), (3,4), (4,10), (4,11), (9,10), (10,11)\}.$$

  Logo, $\text{coef-coesão}(C_2) = \dfrac{2 \times 8}{6 \times 5} \approx 0.533.$

- A componente conexa da direita, denotada por $C_3 = (V_3, A_3)$, tem 3 vértices e 2 arcos:

  $$V_3 = \{5, 6, 12\} \text{ e } A_3 = \{(5,6), (5,12)\}.$$

  Aplicando a fórmula, $\text{coef-coesão}(C_3) = \dfrac{2 \times 2}{3 \times 2} \approx 0.667.$

O coeficiente médio de coesão da rede é a média dos três coeficientes de coesão:

$$\frac{\text{coef-coesão}(C_1) + \text{coef-coesão}(C_2) + \text{coef-coesão}(C_3)}{3} \approx \frac{1 + 0.533 + 0.667}{3} \approx 0.733.$$

Pretende-se uma função que receba uma rede $R = (V, A)$, que é um grafo não orientado, e que calcule o coeficiente médio de coesão da rede. Assuma que todos os indivíduos têm algum amigo.

Número: __________ **Nome:** ____

(a) [5 valores] Apresente a função pretendida (em pseudo-código).

(b) [1 valor] Que estruturas de dados escolheria para implementar o grafo? Não escreva código, mas ilustre a sua resposta com o grafo do exemplo. Como o grafo é grande, ilustre apenas com uma parte.

(c) [1 valor] Qual é a complexidade temporal do seu algoritmo, no pior caso, assumindo que o grafo está implementado como indicou na alínea anterior? Justifique a sua resposta.

Pergunta 4 O Carlos, que começou a estudar Lógica, já sabe que é necessário colocar parêntesis numa expressão booleana para definir a ordem pela qual as operações são efetuadas, porque ordens diferentes podem conduzir a resultados diferentes.

Por exemplo, a expressão `T xor T and F or F` é ambígua (onde `T` denota *true* e `F` representa *false*). Quando se colocam os três pares de parêntesis para definir a ordem das três operações, obtém-se uma das cinco *expressões parentisadas* da tabela abaixo. Três dessas expressões são verdadeiras e duas são falsas.

Expressão Parentisada	Valor da Expressão
`(((T xor T) and F) or F)`	`F`
`((T xor (T and F)) or F)`	`T`
`((T xor T) and (F or F))`	`F`
`(T xor (T and (F or F)))`	`T`
`(T xor ((T and F) or F))`	`T`

Pretende-se definir **uma função matemática recursiva** que, com base:

- num inteiro positivo, k, que representa o número de operações, e
- numa expressão booleana sem parêntesis:

$$E \;=\; v_0 \; o_1 \; v_1 \; o_2 \; v_2 \; o_3 \; v_3 \; \cdots \; v_{k-1} \; o_k \; v_k$$

  onde $v_i \in \{\mathtt{F}, \mathtt{T}\}$ e $o_j \in \{\mathtt{or}, \mathtt{xor}, \mathtt{and}\}$, para $i = 0, \ldots, k$ e $j = 1, \ldots, k$,

calcula o número m de expressões parentisadas de E cujo valor é `T` e o número n de expressões parentisadas de E cujo valor é `F`. O resultado será o par (m, n).

Para o nosso exemplo, em que $k = 3$ e $E =$ `T xor T and F or F`, o resultado seria $(3, 2)$.

(a) [3.5 valores] Defina a função pretendida e indique claramente o que representa cada uma das variáveis que utilizar.

(b) [0.5 valores] Indique a chamada inicial (a chamada que resolve o problema).