FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Probabilidades e Estatística E 2018/2019

Exame de Recurso B 21 de Junho de 2019 **Duração**: 2.5 h

Nome completo: ____________________

N.º aluno: ________ Curso: ________ Nota: ________

Em cada pergunta apenas uma das respostas está correcta. Assinale a sua resposta com uma cruz no quadrado correspondente. Se pretender anular uma resposta já assinalada, rasure por completo o respectivo quadrado. A cotação para uma resposta correcta e o desconto por uma resposta incorrecta assinala-se à esquerda da pergunta. Uma não resposta nada vale nem desconta. n.a. significa "nenhuma das anteriores".

1. Considere o universo de pizzas solicitadas em três pizzarias A, B e C. As percentagens de solicitações por pizzaria são 30%, 50% e 20% para A, B e C, respectivamente. Sendo X o tempo de preparação (em minutos) de uma pizza, sabe-se que $P(X < 1 \,|A) = 0.2$, $P(X < 1 \,|B) = 0.36$ e $P(X < 1 \,|C) = p$.

(1.0/0.2) (a) Se uma pizza solicitada numa qualquer pizzaria, é preparada em menos de 1 minuto com probabilidade 0.28, então p tem valor:

A 0.1 B 0.44 C 0.2 D n.a.

(1.0/0.1) (b) Uma pizza solicitada numa qualquer pizzaria, é preparada em menos de 1 minuto com probabilidade 0.25. A probabilidade de ser solicitada na pizzaria A é:

A 0.24 B 0.42 C 0.8 D n.a.

2. Considere duas pizzarias A e B. O tempo de preparação (em minutos) de qualquer pizza solicitada, é uma v.a. absolutamente contínua com as seguintes características:

- Na pizzaria A, o tempo de preparação é uma v.a. X_A com função densidade de probabilidade:

$$f_{X_A}(x) = \begin{cases} b - 0.08x, & x \in [a, 5] \\ 0, & x \notin [a, 5] \end{cases} \qquad a \in \,]-\infty, 5[\,, \; b \in \mathbb{R}$$

- Na pizzaria B, o tempo de preparação é uma v.a. X_B com distribuição $N(2.5, 4)$.

(0.5/0.1) (a) Se $a = 1$, a função $f_{X_A}(x)$ é realmente uma função densidade de probabilidade, se e só se,

A $b = 0.49$ B $b = 0.4$ C $b = 0.64$ D n.a.

(1.0/0.2) (b) Se $a = 0$ e $b = 0.4$, o valor da função distribuição de X_A no ponto 2.5 é:

A 0.5 B 0.25 C 0.75 D n.a.

(1.0/0.3) (c) Na pizzaria B, a probabilidade de uma pizza ter um tempo de preparação entre 2 e 2.5 minutos é:

A 0.0987 B 0.5987 C 0.9013 D n.a.

(1.0/0.3) (d) Na pizzaria B, o lucro com a venda de uma pizza é $L = 15 - 4X_B$. Se $P(L \leq l) = 0.33$ então l tem valor:

A 8.52 m B 1.48 m C 3.24 m D n.a.

(0.5/0.1) 3. (a) Numa pizzaria A, sabe-se que, numa remessa de 20 de pizzas, 5 têm um adicional de extra queijo. Se forem seleccionadas ao acaso e sem reposição, 3 pizzas desta remessa, a probabilidade de uma ter um adicional de extra queijo é:

A $\binom{3}{1}\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2$ B $\frac{\binom{5}{1}\binom{15}{2}}{\binom{20}{3}}$ C $\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{5}{3}}$ D n.a.

(b) Numa pizzaria B, sabe-se que independentemente do pedido de uma qualquer pizza, a probabilidade de ser solicitado um adicional de extra queijo é $p = 0.05$.

(1.0/0.3) i. Considere uma amostra aleatória de 10 pedidos seleccionados com reposição. A probabilidade de nela figurarem mais de 2 pedidos com um adicional de extra queijo é (valor arredondado a 4 casas decimais):

A 0.0115 B 0.0144 C 0.6102 D n.a.

(1.0/0.2) ii. Quantos pedidos de pizzas serão feitos até que o primeiro em que é solicitado um adicional de extra queijo, ocorra com probabilidade 0.04286875?

A 63 B 4 C 3 D n.a.

(c) Numa pizzaria C, o número de pizzas vendidas comporta-se-se de acordo com um Processo de Poisson. Sabe-se que o tempo (em minutos) que medeia cada venda consecutiva de pizzas, tem distribuição Exponencial de parâmetros $(0, 5)$.

(0.5/0.2) i. Podemos dizer que o número de pizzas vendidas durante 2 minutos tem distribuição

A $P(0.4)$ B $P(10)$ C $B(2, 0.2)$ D n.a.

(1.0/0.2) ii. Num período de 40 minutos de vendas, a probabilidade de nos primeiros 10 e nos últimos 20 minutos serem vendidas, respectivamente, 1 e 3 pizzas tem valor:

A $e^{-8}\,\frac{2048}{3}$ B $e^{-150}\,\frac{25000000}{3}$ C $e^{-6}\,\frac{64}{3}$ D n.a.

(1.0/0.3) 4. Considere X uma v.a. discreta com função distribuição

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.2, & -1 \le x < 0 \\ 0.5, & 0 \le x < 2 \\ 0.8, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

Para a seguinte sequência $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ de NPA's Uniformes no intervalo $]0, 1[$,

i	1	2	3	4	5
u_i	0.40	0.78	0.17	0.82	0.66

a correspondente sequência (x_1, x_2, x_3, x_4) de observações pseudo-aleatórias da v.a. X é:

A

i	1	2	3	4	5
x_i	0	2	-1	3	2

B

i	1	2	3	4	5
x_i	-1	2	0	0	3

C

i	1	2	3	4	5
x_i	0	3	2	2	3

D n.a.

Continua no verso

5. Admita que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $n \geq 2$, é uma amostra aleatória de uma população X cuja distribuição depende do valor de dois parâmetros, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\theta \in \mathbb{R}^+$. Sabemos que $E(X) = \lambda + 2\theta$ e $V(X) = 4\theta$.

Considere ainda as estatísticas: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ e $M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$

(1.0/0.2) (a) Os estimadores dos momentos para os parâmetro λ e θ, respectivamente λ^* e θ^*, são:

A $\lambda^* = \bar{X} - \frac{M_2}{2}$, $\theta^* = S^2$ B $\lambda^* = \bar{X}$, $\theta^* = M_2$ C $\lambda^* = \bar{X} - \frac{M_2}{2}$, $\theta^* = \frac{M_2}{4}$ D n.a.

(1.0/0.3) (b) A estatística $\hat{\theta} = a\, M_2$, $a \in \mathbb{R}^+$, é centrada para o parâmetro θ se e só se:

A $a = \frac{1}{4n}$ B $a = \frac{n}{4(n-1)}$ C $a = 1$ D n.a.

6. A distância percorrida por um avião, desde o contacto com o solo até à imobilização total, é uma variável aleatória X (valores em 10^3 metros) com distribuição <u>normal</u> de valor esperado μ e variância σ^2. Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $n \geq 2$, uma amostra aleatória da população X e uma sua concretização que apresenta uma média e um desvio padrão de, respectivamente, $\bar{x} = 1.75$ e $s = 0.12$.

Pretendemos uma estimação intervalar de μ com um nível de 90% de confiança.

(1.0/0.3) (a) Se $\sigma^2 = 0.01$ e $n = 50$, a variável pivot recomendável e a respectiva distribuição são:

A $\sqrt{50}\frac{\bar{X} - \mu}{0.1} \sim N(0,1)$ B $50\frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t_{49}$ C $\sqrt{50}\frac{\bar{X} - \mu}{0.1} \overset{a}{\sim} N(0,1)$ D n.a.

(1.0/0.3) (b) Considere a variável pivot e a sua distribuição: $\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t_{n-1}$.
Para uma amostra com 16 observações, a estimativa intervalar para μ é:

A [1.7437 , 1.7563] B [1.6975 , 1.8025] C [1.7005 , 1.7995] D n.a.

7. Para uma maior segurança dos condutores de veículos motorizados de duas rodas, os capacetes de protecção devem resistir a danos do tipo A, com uma probabilidade, p, superior ou igual a 80%. Foram testados 225 capacetes de protecção aleatoriamente escolhidos e 171 deles resistiram a danos de tipo A.

(1.0/0.3) (a) A hipóteses que conduzem a um teste estatístico à qualidade das condições de resistência dos capacetes de protecção são:

A $H_0: p < 0.8$ *vs* $H_1: p \geq 0.8$ B $H_0: p \geq 0.8$ *vs* $H_1: p < 0.8$

C $H_0: p \geq 0.76$ *vs* $H_1: p < 0.76$ D $H_0: p = 0.8$ *vs* $H_1: p \neq 0.8$

(b) No teste das hipóteses $H_0: p \leq 0.8$ *vs* $H_1: p > 0.8$

(1.0/0.2) i. Para um nível 0.01 de significância, devemos rejeitar H_0 se o valor observado da estatística de teste pertencer ao intervalo:

A $]-\infty, -2.33[$ B $]2.58, +\infty[$ C $]2.33, +\infty[$ D n.a.

(1.0/0.2) ii. V F Se rejeitarmos a hipótese H_0 ao nível de 5% de significância, então também rejeitamos H_0 para um nível de significância $\alpha < 5\%$.

(1.0/0.2) (c) O $p-value$ associado ao teste das hipóteses $H_0: p \geq 0.8$ *vs* $H_1: p < 0.8$ tem valor aproximado:

A $\Phi(-1.40)$ B $1 - \Phi(1.5)$ C $2 - 2\Phi(-1.5)$ D n.a.

(1.5/0.5) 8. Admita que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $n \geq 2$, é uma amostra aleatória de uma população X caracterizada por um parâmetro θ de valor desconhecido. $\frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma variável pivotal para θ com distribuição do qui-quadrado com $2n$ graus de liberdade. Para $n = 9$, o intervalo de 90% de confiança para θ é:

A $\left[\frac{2\sum_{i=1}^{9} X_i}{28.9}, \frac{2\sum_{i=1}^{9} X_i}{9.39}\right]$ B $\left[\frac{2\sum_{i=1}^{9} X_i}{28.9}, +\infty\right[$ C $\left]-\infty, \frac{2\sum_{i=1}^{9} X_i}{28.9}\right]$ D n.a.