



ATENÇÃO : QUALQUER FRAUDE DETETADA NESTA PROVA IMPLICARÁ A REPROVAÇÃO NO CORRENTE ANO LETIVO NESTA UNIDADE CURRICULAR E SERÁ PARTICIPADA AO CONSELHO EXECUTIVO PARA PROCEDIMENTO DISCIPLINAR.

## 1ª Parte

### I

Uma empresa têxtil produz três tipos de tecidos, A, B e C, recorrendo a quatro tipos de fios: 1, 2, 3 e 4.

Após a fase de produção, os tecidos poderão passar por uma fase de tingimento ou estampagem, ou alternativamente, serem disponibilizados imediatamente para venda.

O tecido do tipo A produzido será tingido ou estampado, antes de ser colocado à venda. Cada  $m^2$  de tecido do tipo A para tingir é produzido usando 0,4 quilogramas (kg) de fio tipo 1 e 0,3 kg de fio tipo 2. Se o destino final for a estampagem, cada  $m^2$  de tecido tipo A é produzido com 0,6 kg de fio tipo 2 e 0,2 kg de fio tipo 4. A produção de tecido tipo B destina-se apenas a estampagem, sendo necessários 0,8 kg de fio tipo 1 e 0,1 kg de fio tipo 3 por cada  $m^2$  produzido.

O processo produtivo do tecido tipo C é bastante elaborado, pelo que, a empresa estipula que, no caso de existir produção deste tipo de tecido, deverão ser produzidos exatamente 5000  $m^2$ . O tecido tipo C é vendido sem qualquer tingimento ou estampagem. Na fase produtiva, apenas é usado fio do tipo 4, sendo necessários 1 kg de fio por cada  $m^2$  de tecido produzido.

No quadro seguinte é apresentado o preço de venda de cada  $m^2$  de tecido, bem como o resumo da informação relativa à produção e acabamento.

Tecido	Consumo de fio (kg) por $m^2$ de tecido				Acabamento	Preço venda (u.m./ $m^2$ )
	fio 1	fio 2	fio 3	fio 4		
A	0,4	0,3			Tingimento	20
		0,6		0,2	Estampagem	
B	0,8		0,1		Estampagem	30
C				1	---	50

A empresa dispõe mensalmente de 20.000 u.m. para aquisição de fios, sendo o custo de cada kg de fio do tipo 1, 2, 3 e 4 de respetivamente, 10, 12, 11 e 13 u.m.. Sabe-se ainda que, os fornecedores disponibilizam no máximo 8000 kg de fio tipo 1 e 9000 kg de fio do tipo 2, mensalmente.

a) Sabendo que se pretende determinar o plano mensal de produção que maximiza a receita da empresa, formule o problema como um modelo de Programação Linear que poderá incluir variáveis inteiras e / ou binárias.

(2,0)

b) Suponha que por razões logísticas, a empresa exige que a produção de tecido tipo B seja ou de exatamente 100  $m^2$ , ou de 500  $m^2$  no mínimo. Como poderia modelar esta exigência adicional?

(1,0)

## II

Considere o seguinte problema (P) de Programação Linear

$$\begin{aligned} \text{Max } F &= -X + Y + 3Z \\ \text{sujeito a:} \\ 3X + 9Y + 3Z &\leq 16 \\ 2X - Y + 2Z &\leq 6 \\ X, Y, Z &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Utilizando a formulação matricial do Simplex, verifique que a solução ótima do problema é  $(X^*, Y^*, Z^*) = (0, 2/3, 10/3)$ .

(2,0)

Nota:

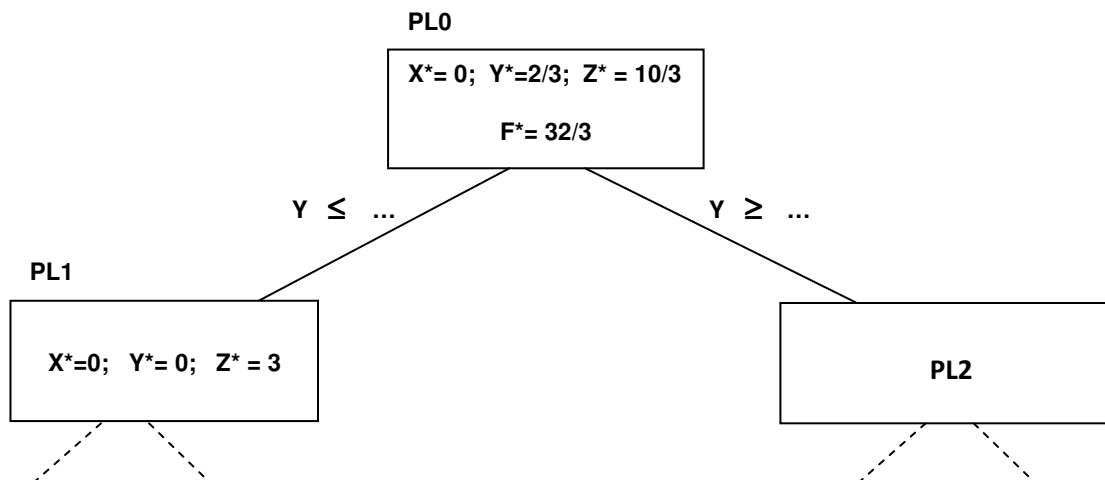
$$\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/21 & 3/7 \\ 2/21 & -1/7 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -3/2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/21 & -1/7 \\ 1/21 & 3/7 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 \\ 1/9 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Admita que o coeficiente da variável Y na função objetivo deixa de ser 1 e passa a ser  $\theta$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ). Determine para que valores desse parâmetro a solução ótima indicada se mantém ótima.

(1,5)

c) Admita que ao problema inicial P foram adicionadas as restrições de integralidade das variáveis. No esquema seguinte apresenta-se o início de resolução do correspondente PLI, utilizando o método Branch and Bound. Indique, justificando, um majorante e um minorante para o valor ótimo do PLI.

(1,0)



d) Explícite o enunciado do subproblema PL2 e resolva-o, indicando a solução ótima do PLI e o correspondente valor ótimo.

(2,5)



## 2ª Parte

### III

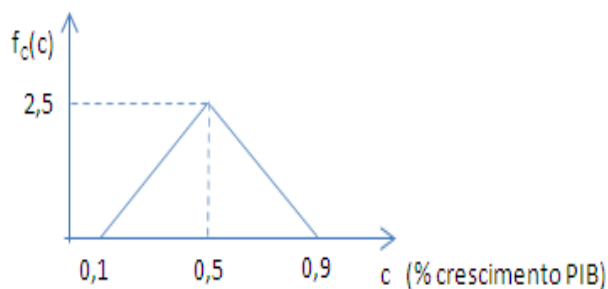
Um agente de decisão tem em mente três planos de investimento A, B ou C. Estes investimentos originam lucros (em u.m.) dependentes da evolução da situação económica nacional em 2014, indicados no quadro seguinte:

Lucros (u.m.)	Situação económica nacional		
Plano	Má	Razoável	Boa
A	23	19	15
B	15	25	30
C	13	20	50

a) Sabendo que o agente de decisão só poderá levar a cabo um plano de investimento, discuta o interesse de levar a cabo cada um dos três planos.

(1,5)

b) De acordo com os consultores económicos, o valor do crescimento do PIB (em %) no próximo ano pode considerar-se com distribuição triangular, cuja função densidade de probabilidade se esquematiza a seguir.



Os referidos consultores consideram que a situação económica será “Má” se o valor do crescimento do PIB for inferior a 0,3 %, será “Razoável” se o crescimento do PIB se situar no intervalo [0,3%; 0,7%], e será “Boa” se o crescimento do PIB for superior a 0,7%.

Nestas circunstâncias, que plano recomendaria ao decisor ? Justifique.

(1,5)

**Opção de menor cotação para a alínea b):** Admita que se sabe que a probabilidade da situação económica nacional no próximo ano ser “Má” é de 20% e a probabilidade de ser “Boa” é de 30%. Nestas circunstâncias, que decisão recomendaria? Justifique sucintamente. (0,8)

## IV

**1** - Considere um sistema de filas de espera M/M/1 e admita que a taxa de chegadas de clientes é de 10 por hora. Sabe-se que a probabilidade de se encontrar apenas 1 cliente no sistema é de  $2/9$  e a taxa de ocupação do sistema é superior a 50%.

**a)** Determine a taxa média de atendimento.  
(1,5)

**b)** Determine o número médio de clientes a aguardar o início do seu atendimento no sistema.

(Nota: Se não resolveu a alínea a), assuma que a duração média do atendimento de um cliente é igual a 5 minutos)  
(1,0)

**2** - O processo de chegadas de clientes a uma dada fila de espera com um único servidor pode ser considerado Poissoniano com taxa média igual a 6 clientes por hora. Sabe-se ainda que este sistema não permite a permanência de mais do que oito clientes em simultâneo, e que a probabilidade de se encontrarem exatamente oito clientes no sistema é de 50,1%. O tempo de atendimento de cada cliente segue uma distribuição exponencial de média 20 minutos.

**a)** Determine a taxa efetiva de entradas no sistema de espera.  
(1,0)

**b)** Sabendo que o número médio de clientes no sistema é de 7,0176, determine o tempo médio de permanência a aguardar o início do atendimento.  
(1,0)

### Formulário:

$$\text{Modelo M/M/1: } L = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

$$\text{Fórmula de Pollaczek-Khintchine: } L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)}$$

**Grupo V no verso !**

## V

Considere um processo de chegadas de clientes a um sistema com um único servidor, caracterizado por intervalos de tempo entre chegadas consecutivas com distribuição  $\chi_2^2$  (Qui-quadrado com 2 graus de liberdade) (horas).

Sabe-se, ainda, que o tempo de atendimento de um cliente pode ser considerado com distribuição Uniforme [3; 7] (min.).

### Notas:

- 1) Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são variáveis aleatórias i.i.d. tais que  $X_1 \sim X_2 \sim \dots \sim X_n \sim \text{Normal}(0; 1)$ , então  $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi_n^2$  (Qui-quadrado com n graus de liberdade)
- 2) Assuma que a Fila de Espera se começa a formar às 9 h. Para proceder à geração de NPA's utilize os seguintes NPA's Uniforme[0 ;1] e Normal(0 ;1):

Uniforme [0 ; 1]	0,351	0,266	0,610	0,704	0,483	0,194
Normal (0 ; 1)	0,050	-0,332	0,385	-0,674	0,772	1,227

**a)** Determine a duração do atendimento dos dois primeiros clientes.  
(0,7)

**b)** Proceda à geração do instante de chegada dos dois primeiros clientes.  
**Nota: Utilize o formato hh,decimal e não hh:mm:ss.**  
(1,0)

**c)** Determine o tempo total de desocupação do servidor até à chegada do 2º cliente.  
(0,8)