

• Simulação de Processos de Poisson

Um processo de ocorrências diz-se um Processo de Poisson se os intervalos de tempo entre ocorrências consecutivas forem exponencialmente distribuídos e independentes entre si. Os Processos de Poisson são particularmente importantes na modelação - dos processos de chegada a filas de espera até aos processos de ocorrências sísmicas principais, muitas são as aplicações dos Processos de Poisson.

Consideremos o problema seguinte:

Considere um processo de ocorrências Poissoniano de média 3 por semana.

Admita que a cada ocorrência corresponde uma intensidade $I \sim N(\mu = 10; \sigma = 2)$, e que o valor da intensidade de uma ocorrência é independente dos valores de intensidade das outras ocorrências.

Elabore um modelo de simulação que lhe permita estudar a distribuição do máximo anual da intensidade das ocorrências.

Se o processo de Poisson referido tem uma taxa de 3 ocorrências por semana, então o intervalo de tempo médio entre duas ocorrências consecutivas é de $7 \cdot 24 / 3 = 56$ horas. Assim, tratando-se de um processo de Poisson, os intervalos de tempo entre duas ocorrências consecutivas deverão ser independentes entre si e exponencialmente distribuídos, ou seja:

Processo de Poisson (3 ocorr./semana) \Rightarrow $DT \sim \text{Exp}(\lambda = 1 / 56)$ [DT em horas]

[Recorde-se que se $DT \sim \text{Exp}(\lambda)$, então $\mu_{DT} = 1 / \lambda$].

A geração de valores pseudo-aleatórios correspondentes à distribuição $DT \sim \text{Exp}(\lambda = 1 / 56)$ faz-se facilmente, recorrendo-se ao Método da Inversão. Se à variável U for afectado um valor pseudo-aleatório $U[0,1]$, ter-se-ia $DT = - 56 \cdot \ln(U)$ (com DT em horas).

Assim, relativamente ao problema que nos é posto, poderíamos conceber a **rotina 'Ano'**, para gerar o máximo de intensidade anual (Max):

T = 0 ; Max = 0 ;

Repetir

gerar DT ;

T = T + DT ;

se T \leq 365 . 24, então gerar $I \sim N(\mu = 10; \sigma = 2)$; se o valor gerado de I for maior que Max, então actualizar o valor de Max: Max = I.

até que T \geq 365 . 24.

Após a invocação da rotina 'Ano' são geradas as ocorrências correspondentes ao ano que se está a simular, sendo afectado à variável Max o valor máximo das intensidades geradas para essas ocorrências.

👉 Elabore o fluxograma correspondente à **rotina 'Ano'**.

👉 Elabore os fluxogramas correspondentes ao **programa principal** e a **outras rotinas** que considere necessárias para resolver o problema apresentado.

👉 Indique as alterações que teria que introduzir no modelo desenvolvido para poder resolver o **problema seguinte**:

Considere um processo de ocorrências Poissoniano de média 3 por semana.

Admita que a cada ocorrência corresponde uma intensidade I_k que é função do valor precedente observado i_{k-1} .

Se i_{k-1} for inferior a 9, então	$I_k \sim N(\mu = 8,5; \sigma = 2,7)$;
se i_{k-1} pertencer a $[9, 11]$, então	$I_k \sim N(\mu = 10,0; \sigma = 2,0)$;
se i_{k-1} for superior a 11, então	$I_k \sim N(\mu = 11,5; \sigma = 2,7)$.

Elabore um modelo de simulação que lhe permita estudar a distribuição do máximo anual da intensidade das ocorrências.

👉 Programe os modelos desenvolvidos, leve a cabo as simulações adequadas e compare os resultados obtidos.

E, para terminarmos a apresentação de algumas aplicações da Simulação, apresentaremos em seguida uma introdução à simulação de filas de espera. De notar que o processo de chegadas a uma fila de espera pode, geralmente, ser modelado como um processo de Poisson.

• Introdução à Simulação de Filas de Espera

Embora possamos dispor de uma série de *resultados clássicos* da Teoria das Filas de Espera, muitas vezes é necessário introduzir pequenas alterações no sistema que não são contempladas pelos modelos 'standard' da Teoria das Filas de Espera. Poderemos, então, recorrer à simulação.

Não é nosso objectivo desenvolver exaustivamente um modelo de simulação de filas de espera, já que tal tarefa, não sendo obviamente intransponível, ultrapassa o grau de complexidade que consideramos adequado a esta disciplina.

Comecemos por considerar o seguinte problema:

Considere um processo de chegadas de clientes a uma fila de espera descrito pelo quadro seguinte:

Cliente nº	Instante de chegada	Duração do atendimento	Cliente nº	Instante de chegada	Duração do atendimento
1	2	13	21	202	10
2	9	6	22	212	8
3	9	8	23	223	5
4	15	15	24	231	23
5	22	10	25	232	15
6	25	5	26	252	10
7	49	9	27	259	12
8	59	11	28	263	5
9	62	12	29	266	6
10	68	18	30	268	9
11	75	9	31	271	8
12	79	13	32	272	35
13	83	19	33	283	28
14	100	2	34	295	15
15	116	3	35	306	17
16	128	6	36	312	12
17	149	15	37	315	5
18	155	18	38	325	5
19	179	5	39	329	9
20	201	10	40	350	1

Simule "manualmente" o funcionamento da fila de espera, admitindo que é válida a *disciplina FIFO* (atendimento por ordem de chegada), admitindo inicialmente a existência de apenas um atendedor (e, posteriormente, dois atendedores). Para tal, preencha um quadro como o seguinte:

T	Acontecimento	N	Tespera	Tfim	Tlivre

Notas:

T - relógio
Acontecimento - chegada de cliente; partida de cliente; início de atendimento; final de atendimento
N - tamanho da fila de espera
T espera - tempo de espera de um cliente antes do início do seu atendimento.
Tfim - instante previsto para o final do atendimento de um cliente
Tlivre - tempo livre do(s) atendedor(es)

Começemos por observar que **os vários acontecimentos devem ser hierarquizados**. Para além do '**Início de funcionamento do sistema**' e do '**Final de funcionamento do sistema**' (que, usualmente omitimos, por serem acontecimentos tão 'óbvios' ...), os acontecimentos '**Início de actividade do Atendedor nº ...**' e '**Final de actividade do Atendedor nº ...**' são claramente prioritários. Se se verificarem simultaneamente, uma chegada de um novo cliente, um final de atendimento de um cliente e um início de atendimento, poderemos considerar que o '**Final de atendimento e Partida do Cliente nº ...**' é processada antes do '**Início do atendimento do Cliente nº ...**' e, por sua vez, este 'início' é processado antes da '**Chegada do Cliente nº ...**'.

Após a chegada de um novo cliente o número de pessoas na fila de espera aumenta de uma unidade. Convencionaremos que, quando se dá início ao atendimento de um cliente, não se altera o número de clientes na fila de espera; apenas quando se dá por terminado o atendimento e o cliente deixa o sistema reduzimos uma unidade ao número de clientes na fila de espera. [Obviamente poderíamos ter optado pela estratégia 'inversa' ...].

Quando a fila de espera se encontra vazia ($N = 0$), e se dá a chegada de um cliente, seguir-se-á, de imediato o correspondente início de atendimento. No entanto, antes de processarmos esse início de atendimento, registaremos na coluna Tlivre o tempo livre do atendedor (basta subtrair o instante de tempo actual pelo correspondente ao instante do último final de atendimento processado).

É preciso ter-se atenção à *natureza discreta* que adoptaremos para o 'Tempo'. Por exemplo, o primeiro cliente chega ao sistema no instante 2, dando-se então início ao seu atendimento. Ora a duração desse atendimento é, segundo o enunciado, igual a 13 u.t., pelo que marcaremos 'Tfim = 15', embora, na realidade, o final do atendimento ocorra *no final* da 14ª u.t., podendo o atendedor iniciar novo atendimento, *no início* da 15ª u.t. .

Quando processarmos um início de atendimento de um cliente, determinaremos o correspondente tempo de espera, Tesp (basta subtrair o instante de tempo actual pelo correspondente o instante de chegada do cliente ao sistema) emarcaremos o correspondente instante de 'final de atendimento', Tfim.

Com base nos registos que faremos no "**Quadro de Simulação 'Manual' da Fila de Espera**", poderemos calcular algumas **medidas de desempenho do sistema**, que nos permitam ajuizar da adequabilidade da política de atendimento simulada (número de atendedores e seu horário de trabalho).

Uma medida de desempenho óbvia prende-se com o **número de pessoas em fila de espera**. Como se percebe facilmente, há sistemas em que existem limitações físicas, que não permitem uma fila que exceda um dado limite máximo, pelo que é importante registar o número **máximo observado** de pessoas em fila de espera. É ainda importante registar os correspondentes **valor mínimo** e **valor médio**.

Uma outra medida de desempenho muito importante diz respeito ao **tempo de espera por pessoa atendida**, sendo importante apurar o valor médio e o desvio padrão da correspondente distribuição de valores observados. Em alguns sistemas reais poderíamos acrescentar uma 'regra de desistência do cliente' que após esperar um dado limite máximo de tempo desistia do atendimento (com o correspondente 'custo de má imagem' para o sistema) ... e nada nos impediria de imaginar uma regra *flexível* com valores dos limites máximos gerados para cada cliente ... (Interessaria, nestes casos, contabilizar o número de clientes que haviam desistido de ser atendidos ...)

Finalmente, numa perspectiva do gestor do sistema, interessaria avaliar o **tempo total livre dos atendedores** (em valor absoluto e como percentagem do tempo total de trabalho). Uma muito baixa percentagem de tempo livre pode vir a ser prejudicial, mas uma percentagem elevada de tempo livre é claramente indesejável ...

Começamos então a nossa 'simulação manual', preenchendo o "**Quadro de Simulação 'Manual' da Fila de Espera**", admitindo a seguinte política de atendimento:

Atendedor nº 1 : Início de Actividade → 0 u.t. ; Final de Actividade → 200 u.t.

T	Acontecimento	N	Tesp	Tfim	Tlivre (Atend. nº)
0	Início de actividade do Atendedor nº 1	0			
2	Chegada do Cliente nº 1	1			
					2 (nº 1)
2	Início de atendimento do Cliente nº 1 (Atend.nº1)	1	0	15	
9	Chegada do Cliente nº 2	2			
9	Chegada do Cliente nº 3	3			
15	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 1	2			
15	Início de atendimento do Cliente nº 2 (Atend.nº1)	2	6	21	
15	Chegada do Cliente nº 4	3			
21	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 2	2			
21	Início de atendimento do Cliente nº 3 (Atend.nº1)	2	12	29	
22	Chegada do Cliente nº 5	3			
25	Chegada do Cliente nº 6	4			
29	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 3	3			
29	Início de atendimento do Cliente nº 4 (Atend.nº1)	3	14	44	
44	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 4	2			
44	Início de atendimento do Cliente nº 5 (Atend.nº1)	2	22	54	
49	Chegada do Cliente nº 7	3			
54	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 5	2			
54	Início de atendimento do Cliente nº 6 (Atend.nº1)	2	29	59	
59	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 6	1			
59	Início de atendimento do Cliente nº 7 (Atend.nº1)	1	10	68	
59	Chegada do Cliente nº 8	2			
62	Chegada do Cliente nº 9	3			
68	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 7	2			
68	Início de atendimento do Cliente nº 8 (Atend.nº1)	2	9	79	
68	Chegada do Cliente nº 10	3			
75	Chegada do Cliente nº 11	4			
79	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 8	3			
79	Início de atendimento do Cliente nº 9 (Atend.nº1)	3	17	91	
79	Chegada do Cliente nº 12	4			
83	Chegada do Cliente nº 13	5			
91	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 9	4			
91	Início de atendimento do Cliente nº 10 (Atend.nº1)	4	23	109	
100	Chegada do Cliente nº 14	5			
109	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 10	4			
109	Início de atendimento do Cliente nº 11 (Atend.nº1)	4	34	118	
116	Chegada do Cliente nº 15	5			
118	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 11	4			
118	Início de atendimento do Cliente nº 12 (Atend.nº1)	4	39	131	
128	Chegada do Cliente nº 16	5			
131	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 12	4			
131	Início de atendimento do Cliente nº 13 (Atend.nº1)	4	48	150	
149	Chegada do Cliente nº 17	5			
150	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 13	4			
150	Início de atendimento do Cliente nº 14 (Atend.nº1)	4	50	152	
152	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 14	3			
152	Início de atendimento do Cliente nº 15 (Atend.nº1)	3	36	155	
155	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 15	2			
155	Início de atendimento do Cliente nº 16 (Atend.nº1)	2	27	161	
155	Chegada do Cliente nº 18	3			
161	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 16	2			
161	Início de atendimento do Cliente nº 17 (Atend.nº1)	2	12	176	
176	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 17	1			
176	Início de atendimento do Cliente nº 18 (Atend.nº1)	1	21	194	
179	Chegada do Cliente nº 19	2			
194	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 18	1			
194	Início de atendimento do Cliente nº 19 (Atend.nº1)	1	15	199	
199	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 19	0			
					1 (nº 1)
200	Final de actividade do Atendedor nº 1	0			

Ruy Costa, 2011

A partir do "**Quadro de Simulação 'Manual' da Fila de Espera**" anterior poderemos concluir que a política de atendimento simulada permite atender os primeiros dezanove clientes, de acordo com o Quadro seguinte:

Cliente Nº	Instante de Chegada	Início de Atendimento	Atendedor Nº	Final de Atendimento
1	2	2	1	14 (*)
2	9	15	1	20
3	9	21	1	28
4	15	29	1	43
5	22	44	1	53
6	25	54	1	58
7	49	59	1	67
8	59	68	1	78
9	62	79	1	90
10	68	91	1	108
11	75	109	1	117
12	79	118	1	130
13	83	131	1	149
14	100	150	1	151
15	116	152	1	154
16	128	155	1	160
17	149	161	1	175
18	155	176	1	193
19	179	194	1	198

Nota (*): O final do atendimento do 1º cliente ocorre no *final da 14ª u.t.*, permitindo o atendimento de um novo cliente no *início da 15ª u.t.*

O Quadro anterior vai ser particularmente útil para a elaboração de um 'cronograma' correspondente ao funcionamento da fila de espera - ver página seguinte.

Poderemos, para a política adoptada, apresentar os seguintes valores das medidas de desempenho:

Atendedor nº 1 : Início de Actividade → 0 u.t. ; Final de Actividade → 200 u.t.	
<ul style="list-style-type: none"> Nº de pessoas em fila de espera: <p>Máx. = 5 Mín. = 0 Médio = 3,09</p> Tempo de espera por pessoa atendida : <p>Valor médio = 22,32 u.t. Desvio padrão = 14,05 u.t.</p> Tempo total livre dos atendedores: <p>Atendedor nº 1 = 3 u.t. → 1,50 % Total = 3 u.t. → 1,50 %</p> 	

Na página seguinte apresentaremos um 'cronograma' correspondente ao funcionamento da fila de espera - assinala-se com X os períodos de espera dos clientes antes do início do atendimento; assinala-se com o número do atendedor os períodos de atendimento dos clientes (neste caso, e dado que só tínhamos o atendedor nº 1 em serviço, assinala-se com 1 esses períodos de atendimento)

T	Nº Cliente											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
0												
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												
20												
21												
22												
23												
24												
25												
26												
27												
28												
29												
30												
31												
32												
33												
34												
35												
36												
37												
38												
39												
40												
41												
42												
43												
44												
45												
46												
47												
48												
49												
50												
51												
52												
53												
54												
55												
56												
57												
58												
59												
60												
61												
62												
63												
64												
65												
66												
67												
68												
69												
70												
71												
72												
73												
74												
75												
76												
77												
78												
79												
80												
81												
82												
83												
84												
85												
86												
87												
88												
89												
90												
91												
92												
93												
94												
95												
96												
97												
98												
99												

Ruy Costa, 2011

T	N° Cliente																
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
100											1	X	X	X	X		
101											1	X	X	X	X		
102											1	X	X	X	X		
103											1	X	X	X	X		
104											1	X	X	X	X		
105											1	X	X	X	X		
106											1	X	X	X	X		
107											1	X	X	X	X		
108											1	X	X	X	X		
109											1	X	X	X	X		
110											1	X	X	X	X		
111											1	X	X	X	X		
112											1	X	X	X	X		
113											1	X	X	X	X		
114											1	X	X	X	X		
115											1	X	X	X	X		
116											1	X	X	X	X		
117											1	X	X	X	X		
118											1	X	X	X	X		
119											1	X	X	X	X		
120											1	X	X	X	X		
121											1	X	X	X	X		
122											1	X	X	X	X		
123											1	X	X	X	X		
124											1	X	X	X	X		
125											1	X	X	X	X		
126											1	X	X	X	X		
127											1	X	X	X	X		
128											1	X	X	X	X		
129											1	X	X	X	X		
130											1	X	X	X	X		
131											1	X	X	X	X		
132											1	X	X	X	X		
133											1	X	X	X	X		
134											1	X	X	X	X		
135											1	X	X	X	X		
136											1	X	X	X	X		
137											1	X	X	X	X		
138											1	X	X	X	X		
139											1	X	X	X	X		
140											1	X	X	X	X		
141											1	X	X	X	X		
142											1	X	X	X	X		
143											1	X	X	X	X		
144											1	X	X	X	X		
145											1	X	X	X	X		
146											1	X	X	X	X		
147											1	X	X	X	X		
148											1	X	X	X	X		
149											1	X	X	X	X		
150											1	X	X	X	X		
151											1	X	X	X	X		
152											1	X	X	X	X		
153											1	X	X	X	X		
154											1	X	X	X	X		
155											1	X	X	X	X		
156											1	X	X	X	X		
157											1	X	X	X	X		
158											1	X	X	X	X		
159											1	X	X	X	X		
160											1	X	X	X	X		
161											1	X	X	X	X		
162											1	X	X	X	X		
163											1	X	X	X	X		
164											1	X	X	X	X		
165											1	X	X	X	X		
166											1	X	X	X	X		
167											1	X	X	X	X		
168											1	X	X	X	X		
169											1	X	X	X	X		
170											1	X	X	X	X		
171											1	X	X	X	X		
172											1	X	X	X	X		
173											1	X	X	X	X		
174											1	X	X	X	X		
175											1	X	X	X	X		
176											1	X	X	X	X		
177											1	X	X	X	X		
178											1	X	X	X	X		
179											1	X	X	X	X		
180											1	X	X	X	X		
181											1	X	X	X	X		
182											1	X	X	X	X		
183											1	X	X	X	X		
184											1	X	X	X	X		
185											1	X	X	X	X		
186											1	X	X	X	X		
187											1	X	X	X	X		
188											1	X	X	X	X		
189											1	X	X	X	X		
190											1	X	X	X	X		
191											1	X	X	X	X		
192											1	X	X	X	X		
193											1	X	X	X	X		
194											1	X	X	X	X		
195											1	X	X	X	X		
196											1	X	X	X	X		
197											1	X	X	X	X		
198											1	X	X	X	X		
199											1	X	X	X	X		

Ruy Costa, 2011

O 'cronograma' apresentado complementa de modo interessante os valores obtidos das medidas de desempenho do sistema. É fácil concluir-se que ter um só atendedor, no período 0 - 200 u.t. é muito pouco. 1,50 % de tempo livre deva qualquer atendedor a um ataque de nervos ! Por outro lado, 22,3 u.t de tempo de espera *médio* requer dos clientes verdadeiras paciências 'de santo' !

Tentemos melhorar o desempenho do nosso sistema, testando a 'nova' política de atendimento seguinte:

Atendedor nº 1 : Início de Actividade → 0 u.t. ; Final de Actividade → 150 u.t.
Atendedor nº 2 : Início de Actividade → 50 u.t. ; Final de Actividade → 200 u.t.

T	Acontecimento	N	Tesp	Tfim	Tlivre (Atend. nº)
0	Início de actividade do Atendedor nº 1	0			
2	Chegada do Cliente nº 1	1			
					2 (nº 1)
2	Início de atendimento do Cliente nº 1 (Atend.nº1)	1	0	15	
9	Chegada do Cliente nº 2	2			
9	Chegada do Cliente nº 3	3			
15	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 1	2			
15	Início de atendimento do Cliente nº 2 (Atend.nº1)	2	6	21	
15	Chegada do Cliente nº 4	3			
21	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 2	2			
21	Início de atendimento do Cliente nº 3 (Atend.nº1)	2	12	29	
22	Chegada do Cliente nº 5	3			
25	Chegada do Cliente nº 6	4			
29	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 3	3			
29	Início de atendimento do Cliente nº 4 (Atend.nº1)	3	14	44	
44	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 4	2			
44	Início de atendimento do Cliente nº 5 (Atend.nº1)	2	22	54	
49	Chegada do Cliente nº 7	3			
50	Início de actividade do Atendedor nº 2	3			
50	Início de atendimento do Cliente nº 6 (Atend.nº2)	3	25	55	
54	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 5	2			
54	Início de atendimento do Cliente nº 7 (Atend.nº1)	2	5	63	
55	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 6	1			
59	Chegada do Cliente nº 8	2			
					4 (nº 2)
59	Início de atendimento do Cliente nº 8 (Atend.nº2)	2	0	70	
62	Chegada do Cliente nº 9	3			
63	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 7	2			
63	Início de atendimento do Cliente nº 9 (Atend.nº1)	2	1	75	
68	Chegada do Cliente nº 10	3			
70	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 8	2			
70	Início de atendimento do Cliente nº 10 (Atend.nº2)	2	2	88	
75	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 9	1			
75	Chegada do Cliente nº 11	2			
					0 (nº 1)
75	Início de atendimento do Cliente nº 11 (Atend.nº1)	2	0	84	
79	Chegada do Cliente nº 12	3			
83	Chegada do Cliente nº 13	4			
84	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 11	3			
84	Início de atendimento do Cliente nº 12 (Atend.nº1)	3	5	97	
88	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 10	2			
88	Início de atendimento do Cliente nº 13 (Atend.nº2)	2	5	107	
97	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 12	1			
100	Chegada do Cliente nº 14	2			
100	Início de atendimento do Cliente nº 14 (Atend.nº1)	2	0	102	3 (nº 1)
102	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 14	1			
107	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 13	0			
116	Chegada do Cliente nº 15	1			
					14 (nº 1)
116	Início de atendimento do Cliente nº 15 (Atend.nº1)	1	0	119	
119	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 15	0			
128	Chegada do Cliente nº 16	1			
					9 (nº 1)
128	Início de atendimento do Cliente nº 16 (Atend.nº1)	1	0	134	
134	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 16	0			
149	Chegada do Cliente nº 16	1			
					15 (nº 1)
149	Início de atendimento do Cliente nº 16 (Atend.nº1)	1	0	164	
150	Final de actividade do Atendedor nº 1	1			

continua

continuação					
155	Chegada do Cliente nº 17	2			
					48 (nº 2)
155	Início de atendimento do Cliente nº 17 (Atend.nº2)	2	0	173	
164	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 16	1			
173	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 17	0			
179	Chegada do Cliente nº 18	1			
					6 (nº 2)
179	Início de atendimento do Cliente nº 18 (Atend.nº2)	1	0	184	
184	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 18	0			
					16 (nº 2)
200	Final de actividade do Atendedor nº 2	0			

A partir do "**Quadro de Simulação 'Manual' da Fila de Espera**" anterior poderemos concluir que a política de atendimento simulada permite atender os primeiros dezanove clientes, de acordo com o Quadro seguinte:

Cliente Nº	Instante de Chegada	Início de Atendimento	Atendedor Nº	Final de Atendimento
1	2	2	1	14 (*)
2	9	15	1	20
3	9	21	1	28
4	15	29	1	43
5	22	44	1	53
6	25	50	2	54
7	49	54	1	62
8	59	59	2	69
9	62	63	1	74
10	68	70	2	87
11	75	75	1	83
12	79	84	1	96
13	83	88	2	106
14	100	100	1	101
15	116	116	1	118
16	128	128	1	133
17	149	149	1	163
18	155	155	2	172
19	179	179	2	183

Nota (*): O final do atendimento do 1º cliente ocorre no *final da 14ª u.t.*, permitindo o atendimento de um novo cliente no *início da 15ª u.t.*

Poderemos, para a política adoptada, apresentar os seguintes valores das medidas de desempenho:

Atendedor nº 1 : Início de Actividade → 0 u.t. ; Final de Actividade → 150 u.t.
Atendedor nº 2 : Início de Actividade → 50 u.t. ; Final de Actividade → 200 u.t.

- **Nº* de pessoas em fila de espera:**

Máx. = 4
Mín. = 0
Médio = 1,47

- **Tempo de espera por pessoa atendida :**

Valor médio = 5,11 u.t.
Desvio padrão = 7,71 u.t.

continua

Ruy Costa, 2011

continuação

- **Tempo total livre dos atendedores:**

Atendedor nº 1	= 43 u.t.	→ 26,22 %
Atendedor nº 2	= 74 u.t.	→ 49,33 %
Total	= 117 u.t.	→ 37,26 %

Comparemos o desempenho obtido com esta segunda política testada (face à primeira):

Relativamente ao número de pessoas em fila de espera, observa-se uma diminuição ligeira do valor máximo (de 5 para 4) e uma clara diminuição do valor médio (de 3,09 para 1,47).

Relativamente ao tempo de espera por pessoa atendida observou-se uma clara diminuição, quer em termos de valor médio (de 22,32 u.t. para 5,11 u.t.), quer em termos de desvio padrão (de 14,05 u.t. para 7,71).

Relativamente ao tempo total livre dos atendedores, pode referir-se que a percentagem de tempo livre total sobe de 1,50 % para 37,26 %.

Assim e tal como se esperava, a segunda política testada traduz-se num aumento da 'qualidade de atendimento'. A percentagem de tempo livre dos atendedores aumentou consideravelmente, pelo que poderia ser recomendável testar-se uma política 'intermédia' ...

À semelhança do que se fez para a primeira política testada, apresenta-se na página seguinte um 'cronograma' correspondente ao funcionamento da fila de espera - assinala-se com X os períodos de espera dos clientes antes do início do atendimento; assinala-se com o número do atendedor os períodos de atendimento dos clientes.

Ruy Costa, 2011

T	N° Cliente																				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0																					
1																					
2	1																				
3	1																				
4	1																				
5	1																				
6	1																				
7	1																				
8	1																				
9	1	X	X																		
10	1	X	X																		
11	1	X	X																		
12	1	X	X																		
13	1	X	X																		
14	1	X	X																		
15	1	X	X																		
16	1	X	X																		
17	1	X	X																		
18	1	X	X																		
19	1	X	X																		
20	1	X	X																		
21	1	X																			
22	1	X	X																		
23	1	X	X																		
24	1	X	X																		
25	1	X	X	X																	
26	1	X	X	X																	
27	1	X	X	X																	
28	1	X	X	X																	
29	1	X	X																		
30	1	X	X																		
31	1	X	X																		
32	1	X	X																		
33	1	X	X																		
34	1	X	X																		
35	1	X	X																		
36	1	X	X																		
37	1	X	X																		
38	1	X	X																		
39	1	X	X																		
40	1	X	X																		
41	1	X	X																		
42	1	X	X																		
43	1	X	X																		
44	1	X																			
45	1	X																			
46	1	X																			
47	1	X																			
48	1	X																			
49	1	X	X																		
50	1	X	X																		
51	1	X	X																		
52	1	X	X																		
53	1	X	X																		
54	1	X																			
55	1	X																			
56	1	X																			
57	1	X																			
58	1	X																			
59	1	X																			
60	1	X																			
61	1	X																			
62	1	X	X																		
63	1	X	X																		
64	1	X	X																		
65	1	X	X																		
66	1	X	X																		
67	1	X	X																		
68	1	X	X	X																	
69	1	X	X	X																	
70	1	X	X	X																	
71	1	X	X	X																	
72	1	X	X	X																	
73	1	X	X	X																	
74	1	X	X	X																	
75	1	X	X	X	X																
76	1	X	X	X	X																
77	1	X	X	X	X																
78	1	X	X	X	X																
79	1	X	X	X	X																
80	1	X	X	X	X																
81	1	X	X	X	X																
82	1	X	X	X	X																
83	1	X	X	X	X	X															
84	1	X	X	X	X	X															
85	1	X	X	X	X	X															
86	1	X	X	X	X	X															
87	1	X	X	X	X	X															
88	1	X	X	X	X	X															
89	1	X	X	X	X	X															
90	1	X	X	X	X	X															
91	1	X	X	X	X	X															
92	1	X	X	X	X	X															
93	1	X	X	X	X	X															
94	1	X	X	X	X	X															
95	1	X	X	X	X	X															
96	1	X	X	X	X	X															
97	1	X	X	X	X	X															
98	1	X	X	X	X	X															

Ruy Costa, 2011

T	N° Clientes																			
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
100											2	1								
101											2	1								
102											2									
103											2									
104											2									
105											2									
106											2									
107											2									
108																				
109																				
110																				
111																				
112																				
113																				
114																				
115																				
116																1				
117																1				
118																1				
119																				
120																				
121																				
122																				
123																				
124																				
125																				
126																				
127																				
128																	1			
129																	1			
130																	1			
131																	1			
132																	1			
133																	1			
134																				
135																				
136																				
137																				
138																				
139																				
140																				
141																				
142																				
143																				
144																				
145																				
146																				
147																				
148																				
149																		1		
150																		1		
151																		1		
152																		1		
153																		1		
154																		1		
155																		1	2	
156																		1	2	
157																		1	2	
158																		1	2	
159																		1	2	
160																		1	2	
161																		1	2	
162																		1	2	
163																		1	2	
164																		2		
165																		2		
166																		2		
167																		2		
168																		2		
169																		2		
170																		2		
171																		2		
172																		2		
173																			2	
174																				
175																				
176																				
177																				
178																				
179																				
180																			1	
181																			1	
182																			1	
183																			1	
184																				1
185																				
186																				
187																				
188																				
189																				

Ruy Costa, 2011

As 'simulações manuais' apresentadas são do tipo 'simulação com dados históricos', já que não se gerou informação. Numa simulação 'a sério', o processo de chegadas à fila de espera estaria caracterizado estatisticamente (por exemplo, um processo de Poisson com determinada taxa média de chegadas por hora), pelo que se poderia gerar aleatoriamente esse processo. Também as durações dos atendimentos poderia estar caracterizada em termos estatísticos, pelo que, aquando do processamento de um 'início de atendimento', poderíamos gerar a correspondente duração.

Numa simulação 'a sério' teríamos que estipular uma 'duração da simulação' suficientemente longa para garantir a *precisão* desejável dos resultados (como se referiu anteriormente).

➡ E agora pode tentar criar um modelo de simulação de uma fila de espera com um só atendedor. Utilize os dados do problema apresentado, para verificar se o seu modelo conduz aos resultados apresentados (para a primeira política testada).

➡ A generalização do número de atendedores complica claramente o modelo. Pense nas alterações que deveria introduzir no modelo inicialmente desenvolvido ...

CONCLUSÃO

Na secção anterior deste capítulo apresentamos alguns exemplos de aplicação da Simulação que evidenciaram a diversidade de áreas onde a utilização desta técnica pode revelar-se muito importante. Claro que os exemplos apresentados foram todos relativamente simples, mas isso não terá certamente impedido o leitor de imaginar aplicações bem mais complexas onde a Simulação poderia ser aplicada.

Estamos certos de que o leitor terá também constatado que, a par das suas **grandes potencialidades**, esta técnica apresenta **grandes exigências** (a nível *técnico*) - a capacidade de **modelação de sistemas e/ou processos** (com a caracterização de um modelo *adequado* para descrever o sistema / processo, envolvendo a caracterização cuidadosa das variáveis *endógenas* e *exógenas*, das variáveis *controladas* e *não controladas* e com a definição de adequadas *medidas de desempenho*) deve estar associada a um domínio adequado da área das **Probabilidades e Estatística** e à capacidade de **implementação informática**.

Assim, não é de espantar que as primeiras tentativas para utilizar esta técnica estejam associadas a algumas dificuldades ...

Nestes apontamentos, pela sua natureza *introdutória*, não discutimos questões tão importantes como a **verificação de modelos**, a **validação de modelos**, o **planeamento de experiências** e a **análise de resultados**. Também seria importante abordar questões como a **implementação de soluções** (obtidas a partir de um modelo de simulação) **no sistema real** e a **monitorização** do funcionamento do sistema, com vista à formulação de **alterações no modelo**. Todos estes tópicos 'dariam pano para mangas' ... mas ultrapassariam claramente os nossos objectivos.