

ATENÇÃO: QUALQUER FRAUDE DETETADA NESTA PROVA IMPLICARÁ A REPROVAÇÃO NO CORRENTE ANO LETIVO NESTA UNIDADE CURRICULAR E SERÁ PARTICIPADA AO CONSELHO EXECUTIVO PARA PROCEDIMENTO DISCIPLINAR.

## 1ª Parte

### I

Uma fábrica de pneus recauchutados utiliza pneus gastos (ou lisos) em bom estado de conservação e incorpora-lhes nova borracha de piso, contribuindo para a preservação dos recursos naturais, uma vez que a estrutura do pneu original é mantida.

Na fase inicial da recauchutagem é efetuada uma triagem dos pneus passíveis de serem recauchutados. A fábrica dispõe semanalmente de 5000 pneus de veículos ligeiros, 2500 pneus de veículos pesados e 500 pneus de veículos agrícolas aprovados na fase de triagem.

O processo de recauchutagem, que consiste na aplicação de borracha nova de piso no pneu usado, pode ser efetuado com vulcanização a quente ou a frio, tendo cada um deles um tempo de execução (em horas) e originando receita (expressa em unidades monetárias) de acordo com a tabela seguinte, por pneu:

Pneu de veículo de tipo	Vulcanização a quente		Vulcanização a frio		Consumo de borracha nova(Kg)
	Tempo (h)	Receita (u.m.)	Tempo (h)	Receita (u.m.)	
Ligeiro	2,5	58	2,7	65	4,5
Pesado	3,2	210	3,6	180	10,4
Agrícola	2,9	147	3,8	193	7,8

Semanalmente a fábrica dispõe de máquinas que podem laborar 450 horas e 500 horas para vulcanização a quente e a frio, respetivamente. Sabe-se ainda que estão disponíveis em cada semana, um total de 10000 Kg de nova borracha para efetuar a recauchutagem dos pneus.

Depois de produzidos, os pneus recauchutados são sujeitos a uma inspeção final efetuada no laboratório de ensaios da fábrica, onde existem 7 máquinas que podem laborar um total de 35 horas semanais cada uma.

Cada ensaio demora 1,5 horas, 2 horas e 1,75 horas respetivamente, para pneus de veículos ligeiros, pesados e agrícolas. No caso do ensaio a um pneu não se poder realizar na totalidade numa determinada máquina, por exceder o seu tempo de laboração, poderá ser concluído noutra máquina, onde serão executados apenas os testes que restavam para a conclusão do ensaio.

**a)** Sabendo que se pretende determinar o plano semanal de recauchutagem que maximiza a receita da fábrica, formule o problema como um modelo de Programação Linear, que poderá incluir variáveis inteiras e / ou binárias.

**(2,0)**

**b)** Admita que se a quantidade de pneus de veículos ligeiros recauchutados semanalmente com vulcanização a quente for inferior ou igual a 2000 unidades, a receita associada a cada um destes pneus será de 53 u.m.. Se a quantidade de pneus de veículos ligeiros recauchutados com vulcanização a quente for superior a 2000 unidades então, a receita associada a cada pneu será de 63 u.m... Efetue as alterações ao modelo anterior de forma a contemplar esta nova condição.

**(1,0)**

## II

Considere o seguinte problema (P) de Programação Linear

$$\text{Max } F = -X - 3Y + 2Z$$

sujeito a:

$$-2X - Y + 5Z \leq 10$$

$$-X + Y + 3Z \leq 23$$

$$X, Y, Z \geq 0$$

**a)** Sabe-se que a solução ótima do problema é  $(X^*, Y^*, Z^*) = (0, 0, 2)$ . Utilizando a formulação matricial do Simplex, obtenha o quadro do Simplex correspondente à solução ótima.

**(1,5)**

**Nota:**  $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ ;  $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ;  $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -3/8 & 5/8 \\ 1/8 & 1/8 \end{bmatrix}$ ;

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -5/3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ -3/5 & 1 \end{bmatrix}.$$

**b)** Admita que ao problema (P) foi adicionada a restrição  $Y + Z \geq 3$ . Indique se a solução ótima fornecida se mantém ótima e em caso negativo, determine a nova solução ótima do problema, partindo do quadro ótimo determinado na alínea anterior.

**Nota: Não execute mais do que uma iteração do algoritmo!**

**(2,0)**

## III

**1 –** Considere um problema de transportes com 3 fábricas (F1, F2, F3) e 4 clientes (A, B, C, D). Os custos unitários de transporte das fábricas para os clientes, expressos em unidades monetárias (u.m./unidade), bem como as capacidades de produção (em unidades/semana) e as necessidades (em unidades/semana) encontram-se registados abaixo:

Custo (u.m./unidade)		Cliente				Capacid. Produção
		A	B	C	D	
Fábrica	F1	1	2	3	4	60
	F2	4	3	2	4	80
	F3	0	2	2	1	100
Necessidades		40	70	60	70	

Partindo da solução básica admissível apresentada ao lado, verifique se a solução fornecida é ótima e, em caso negativo, determine a solução ótima do problema e o correspondente valor ótimo do custo dos transportes semanais.

**(2,0)**

	A	B	C	D
F1	0	60	0	0
F2	0	10	60	10
F3	40	0	0	60

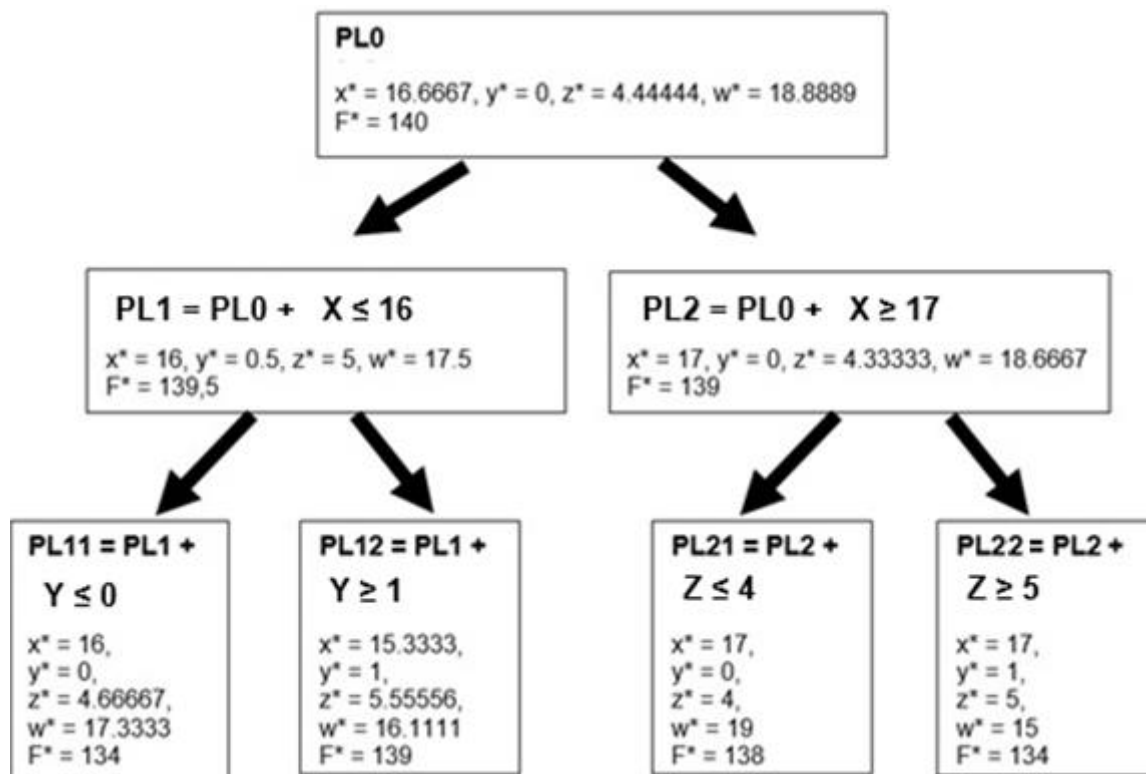


Nome: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_

ATENÇÃO: Preencher !!!

**III - 2 - A resolver NESTA Folha!**

**2** - Considere um problema de PLI com todas as variáveis inteiras e cuja função objetivo tem apenas coeficientes inteiros. Admita que a resolução (que pode estar incompleta) pelo Algoritmo Branch and Bound deste problema origina a seguinte árvore, onde cada subproblema admite uma única solução ótima:



**Assinale a(s) afirmação(ões) verdadeira(s).** (Cotações negativas para respostas erradas!)

- (1,5)
- ☐ No problema de PLI, pretende-se maximizar a função objetivo.
- ☐ Neste momento da pesquisa, ainda não há qualquer solução incumbente.
- ☐ Neste momento da pesquisa, há duas soluções incumbentes.
- ☐ Neste momento da pesquisa, pode-se indicar que  $F^* = 138$ .
- ☐ Para determinar a(s) solução(ões) ótima(s) do problema de PLI, dever-se-ia ramificar o subproblema PL11.
- ☐ Para determinar a(s) solução(ões) ótima(s) do problema de PLI, dever-se-ia ramificar o subproblema PL12.
- ☐ Para determinar a(s) solução(ões) ótima(s) do problema de PLI, dever-se-ia ramificar o subproblema PL21.



## 2ª Parte

### IV

O Primeiro-Ministro (PM) da Lusólia está a analisar a localização de um importante novo investimento. Segundo o PM há três alternativas interessantes (A, B e C), mas a escolha depende da evolução da economia lusólica.

No quadro seguinte, pode-se ver o Custo (em u.m.) previsto para o novo investimento, em função da alternativa de localização escolhida e do estado da economia lusólica:

Custos (u.m.)		Estado da Economia			
		Muito Mau	Mau	Razoável	Bom
Localização	A	120	120	100	80
	B	150	90	80	70
	C	100	100	100	100

a) Apenas com base na informação disponível, discuta a tomada de decisão.

(2,0)

b) O PM considera que o estado da economia se pode considerar “Muito Mau” se o PIB no próximo ano for inferior a 0,2%; se o PIB se situar entre 0,2% e 0,5% o estado será “Mau”; se o PIB se situar entre 0,5% e 1,5% o estado será “Razoável”; se o PIB for superior a 1,5% o estado será “Bom”.

O Gabinete de Planeamento Económico do Banco da Lusólia estima que o PIB no próximo ano tenha um comportamento aleatório com distribuição Uniforme no intervalo  $[0; 2\%]$ .

Que decisão recomendaria, com esta informação. Justifique sucintamente.

(1,0)

### V

1 - Considere um sistema M/M/1, onde o processo de chegadas de clientes pode ser considerado Poissoniano com taxa média igual a 14,5 por hora e a taxa de serviço é de 18,0 clientes por hora.

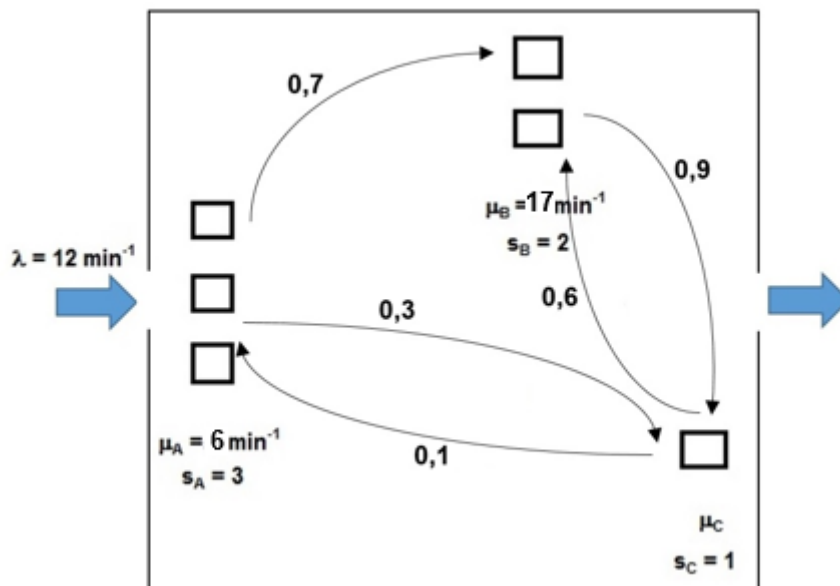
a) Determine a probabilidade de o sistema se encontrar vazio.

(1,0)

b) Determine a probabilidade de no sistema se encontrarem 3 clientes.

(1,0)

2 - Considere a rede de filas de espera do tipo M/M/s, esquematizada abaixo:



O processo de chegadas dos clientes ao sistema faz-se pelo setor A e é Poissoniano com taxa média igual a 12 por minuto.

a) Determine as taxas efetivas de chegada aos três setores.

(1,0)

b) Sabe-se que o número médio de clientes nos setores A e B é de, respetivamente, 6,09543 e 5,963949. Sabe-se, ainda, que o tempo médio de permanência de um cliente no sistema é de 1,2691 minutos.

Sabendo que no modelo M/M/1 é válida a expressão  $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ , determine a taxa de serviço no setor C,  $\mu_C$ .

**Nota: Se não resolveu a alínea a), admita que  $\lambda_C = 30$  por minuto.**

(1,5)

## VI

O Processo de chegadas dos clientes à Loja dos Brinquedos pode considerar-se Poissoniano com taxa média igual a 1,8 por minuto.

Cada cliente compra N brinquedos, com  $N \sim \text{Poisson}(m = 1,2)$ . Para simplificar, assuma, que um cliente compra no máximo 3 brinquedos.

a) Recorrendo ao **Método da Inversão**, proceda à geração dos instantes de chegada dos clientes que chegam à Loja durante um dado minuto. Para simplificar, assuma que a fila se começa a formar a partir das 0h, adote o formato mm,decimal e utilize os NPA U[0;1] seguintes:

0,51181      0,35864      0,78313      0,34575

(1,5)

b) Para os primeiros dois clientes, gere o número de brinquedos que cada um compraria, utilizando os NPA U[0;1] seguintes:

0,73854 e 0,37281 .

(1,0)

### Formulário:

Se  $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$ , então  $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$ ,  $x > 0$

Se  $X \sim \text{Poisson}(m)$ , então  $P(X = k) = \frac{e^{-m} \cdot m^k}{k!}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$