# Capítulo XV

# Caminhos Mais Curtos de todos a todos os vértices

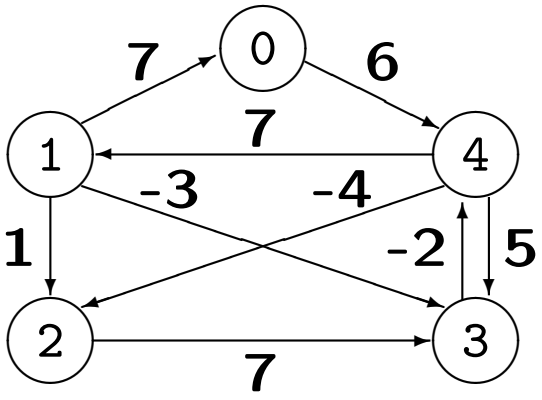
(num grafo orientado e pesado)

—

# Algoritmo de Floyd-Warshall

# Problema

Dado um grafo **orientado** e **pesado**, como encontrar um **caminho pesado mais curto de** $v$ **para** $w$, sendo $v$ e $w$ dois vértices quaisquer?




**Caminhos (não pesado e pesado) mais curtos de 4 para 3**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Caminho não pesado: | 4, 3 | Compr.: 1 | Compr. pesado: **5** |
| **Caminho pesado:** | 4, 2, 3 | Compr.: 2 | Compr. pesado: **3** |

**Observação:** os pesos dos arcos podem ser negativos.

# Algoritmos "de um para todos"

- **Quando todos os arcos têm pesos não negativos**

  Algoritmo de Dijkstra, com: $O(|V| \times \log |V| + |A|)$

  – o grafo em vetor de listas de incidências;

  – a fila com prioridade adaptável em fila de Fibonacci e vetor.

  $$O(|V|^2 \times \log |V| + |V| \times |A|) \ \surd$$

- **Quando algum arco tem peso negativo**

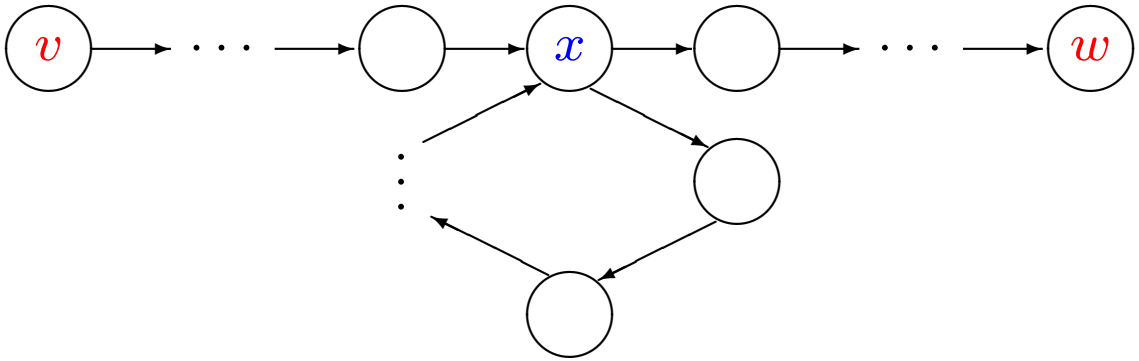
  Algoritmo de Bellman-Ford, com: $O(|V| \times |A|)$

  – o grafo em vetor de arcos ou em lista de arcos.

  $$O(|V|^2 \times |A|)$$

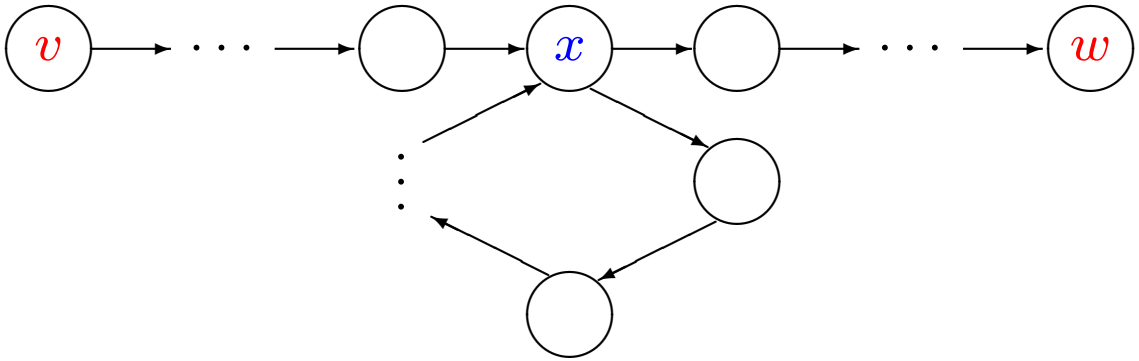
# Observações

Se existe algum caminho de $v$ para $w$ e o grafo não tem ciclos de peso negativo, então há um caminho mais curto de $v$ para $w$ que é **simples**.



# Observações

Se existe algum caminho de $v$ para $w$ e o grafo não tem ciclos de peso negativo, então há um caminho mais curto de $v$ para $w$ que é **simples**.




Se um caminho mais curto de $v$ para $w$ tem a forma

$$v,\ \ldots,\ x,\ \ldots,\ w \quad (\text{com } x \in V),$$

então

$$v,\ \ldots,\ x \quad \text{e} \quad x,\ \ldots,\ w$$

são caminhos mais curtos de $v$ para $x$ e de $x$ para $w$, respetivamente.

O vértice $x$ diz-se um **vértice intermédio** do caminho $v,\ \ldots,\ x,\ \ldots,\ w$.

# Primeiro Problema a Resolver

Para todos os vértices $v$ e $w$,

descobrir o comprimento dos caminhos mais curtos de $v$ para $w$

cujos vértices intermédios pertencem a $V$.

# Primeiro Problema a Resolver

Para todos os vértices $v$ e $w$,

descobrir o comprimento dos caminhos mais curtos de $v$ para $w$

cujos vértices intermédios pertencem a $V$.

# Generalização do Primeiro Problema

**Assuma-se que** $V = \{0, 1, \ldots, |V| - 1\}$**.**

Para todos os vértices $v$ e $w$,

descobrir o comprimento dos caminhos mais curtos de $v$ para $w$

cujos vértices intermédios pertencem a $\{0, 1, \ldots, k\}$,

para $k = -1, 0, 1, \ldots, |V| - 1$:

$\mathcal{L}(v, w, k)$.

# Resolução do Primeiro Problema

**Comprimento dos caminhos mais curtos de $v$ para $w$ cujos vértices intermédios $\in \{0, 1, \ldots, k\}$, para $k = -1, 0, 1, \ldots, |V| - 1$:** $\mathcal{L}(v, w, k)$.

- Se $k = -1$

# Resolução do Primeiro Problema

**Comprimento dos caminhos mais curtos de $v$ para $w$ cujos vértices intermédios $\in \{0, 1, \ldots, k\}$, para $k = -1, 0, 1, \ldots, |V| - 1$:** $\mathcal{L}(v, w, k)$.

- Se $k = -1$ e $v = w$, $\mathcal{L}(v, w, k) = 0$;
- Se $k = -1$, $v \neq w$ e $(v, w) \in A$, $\mathcal{L}(v, w, k) = \text{peso}(v, w)$;
- Se $k = -1$, $v \neq w$ e $(v, w) \notin A$, $\mathcal{L}(v, w, k) = +\infty$;

# Resolução do Primeiro Problema

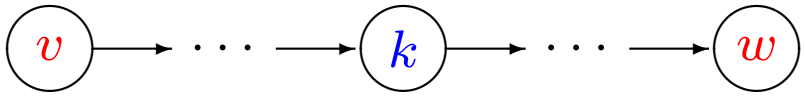
**Comprimento dos caminhos mais curtos de $v$ para $w$ cujos vértices intermédios $\in \{0, 1, \ldots, k\}$, para $k = -1, 0, 1, \ldots, |V| - 1$:** $\mathcal{L}(v, w, k)$.

- Se $k = -1$ e $v = w$, $\mathcal{L}(v, w, k) = 0$;
- Se $k = -1$, $v \neq w$ e $(v, w) \in A$, $\mathcal{L}(v, w, k) = \text{peso}(v, w)$;
- Se $k = -1$, $v \neq w$ e $(v, w) \notin A$, $\mathcal{L}(v, w, k) = +\infty$;
- Se $k \geq 0$,
  - **ou** o caminho não tem o vértice intermédio $k$ e o seu comprimento é $\mathcal{L}(v, w, k - 1)$;

# Resolução do Primeiro Problema

**Comprimento dos caminhos mais curtos de $v$ para $w$ cujos vértices intermédios $\in \{0, 1, \ldots, k\}$, para $k = -1, 0, 1, \ldots, |V| - 1$:** $\mathcal{L}(v, w, k)$.

- Se $k = -1$ e $v = w$, $\mathcal{L}(v, w, k) = 0$;
- Se $k = -1$, $v \neq w$ e $(v, w) \in A$, $\mathcal{L}(v, w, k) = \text{peso}(v, w)$;
- Se $k = -1$, $v \neq w$ e $(v, w) \notin A$, $\mathcal{L}(v, w, k) = +\infty$;
- Se $k \geq 0$,
  - **ou** o caminho não tem o vértice intermédio $k$ e o seu comprimento é $\mathcal{L}(v, w, k - 1)$;
  - **ou** o caminho tem o vértice intermédio $k$ e o seu comprimento é $\mathcal{L}(v, k, k - 1) + \mathcal{L}(k, w, k - 1)$.



# Resolução do Primeiro Problema

**Comprimento dos caminhos mais curtos de $v$ para $w$ cujos vértices intermédios $\in \{0, 1, \ldots, k\}$, para $k = -1, 0, 1, \ldots, |V| - 1$:** $\mathcal{L}(v, w, k)$.

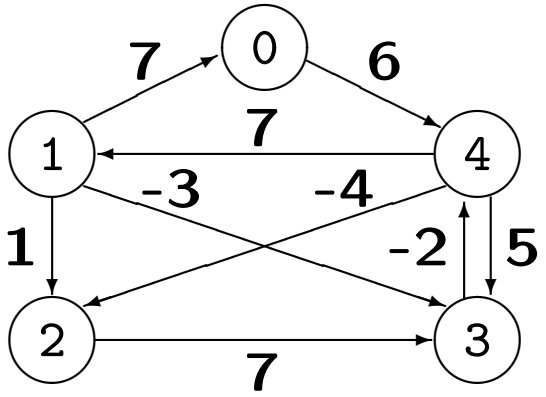
- Se $k = -1$ e $v = w$, $\mathcal{L}(v, w, k) = 0$;
- Se $k = -1$, $v \neq w$ e $(v, w) \in A$, $\mathcal{L}(v, w, k) = \text{peso}(v, w)$;
- Se $k = -1$, $v \neq w$ e $(v, w) \notin A$, $\mathcal{L}(v, w, k) = +\infty$;
- Se $k \geq 0$,
  - **ou** o caminho não tem o vértice intermédio $k$ e o seu comprimento é $\mathcal{L}(v, w, k-1)$;
  - **ou** o caminho tem o vértice intermédio $k$ e o seu comprimento é $\mathcal{L}(v, k, k-1) + \mathcal{L}(k, w, k-1)$.

  $$\mathcal{L}(v, w, k) = \min\left( \mathcal{L}(v, w, k-1),\ \mathcal{L}(v, k, k-1) + \mathcal{L}(k, w, k-1) \right)$$

# Programação Dinâmica da Função $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}(v,w,k) = \begin{cases} 0 & k = -1 \text{ e } v = w \\ \text{peso}(v,w) & k = -1,\ v \neq w \text{ e } (v,w) \in A \\ +\infty & k = -1,\ v \neq w \text{ e } (v,w) \notin A \\ \min\left(\mathcal{L}(v,w,k-1), \mathcal{L}(v,k,k-1) + \mathcal{L}(k,w,k-1)\right) & k \geq 0 \end{cases}$$

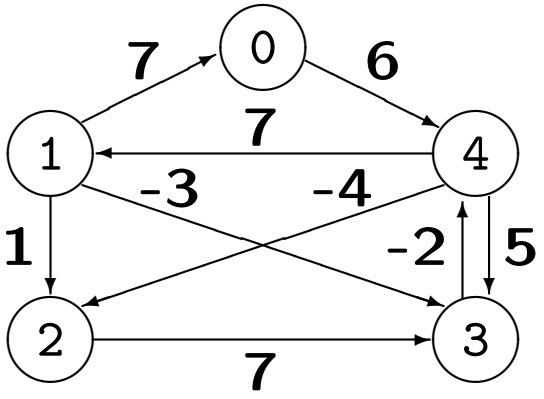
| $\mathcal{L}(v,w,-1)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 6 |
| 1 | 7 | 0 | 1 | $-3$ | $+\infty$ |
| 2 | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | 7 | $+\infty$ |
| 3 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | $-2$ |
| 4 | $+\infty$ | 7 | $-4$ | 5 | 0 |




$$\begin{aligned} \mathcal{L}(1,4,0) &= \min(\ \mathcal{L}(1,4,-1),\ \mathcal{L}(1,0,-1) + \mathcal{L}(0,4,-1)\ ) \\ &\quad \min(\ +\infty,\ 7+6\ ) \end{aligned}$$

# Algoritmo de Floyd-Warshall ({0}) [1962]

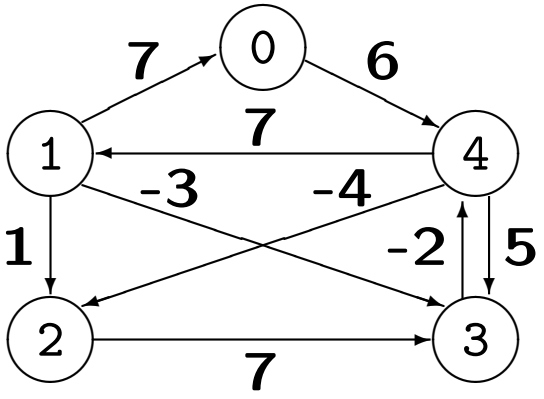
| $\mathcal{L}(v,w,-1)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 6 |
| 1 | 7 | 0 | 1 | $-3$ | $+\infty$ |
| 2 | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | 7 | $+\infty$ |
| 3 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | $-2$ |
| 4 | $+\infty$ | 7 | $-4$ | 5 | 0 |




| $\mathcal{L}(v,w,0)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 6 |
| 1 | 7 | 0 | 1 | $-3$ | 13 |
| 2 | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | 7 | $+\infty$ |
| 3 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | $-2$ |
| 4 | $+\infty$ | 7 | $-4$ | 5 | 0 |

# Algoritmo de Floyd-Warshall ($\{0, 1\}$)

| $\mathcal{L}(v, w, 0)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 6 |
| 1 | 7 | 0 | 1 | $-3$ | 13 |
| 2 | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | 7 | $+\infty$ |
| 3 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | $-2$ |
| 4 | $+\infty$ | 7 | $-4$ | 5 | 0 |

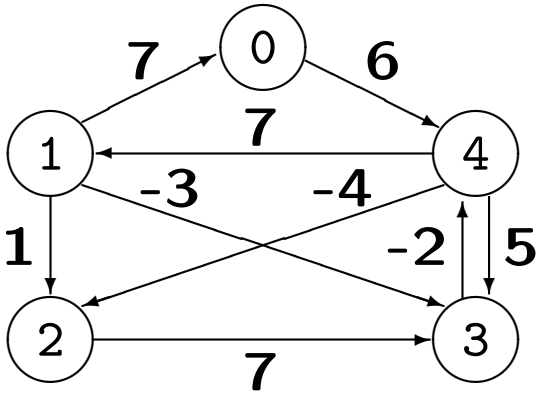



| $\mathcal{L}(v, w, 1)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 6 |
| 1 | 7 | 0 | 1 | $-3$ | 13 |
| 2 | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | 7 | $+\infty$ |
| 3 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | $-2$ |
| 4 | 14 | 7 | $-4$ | 4 | 0 |

# Algoritmo de Floyd-Warshall ($\{0, 1, 2\}$)

| $\mathcal{L}(v, w, 1)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 6 |
| 1 | 7 | 0 | 1 | $-3$ | 13 |
| 2 | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | 7 | $+\infty$ |
| 3 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | $-2$ |
| 4 | 14 | 7 | $-4$ | 4 | 0 |

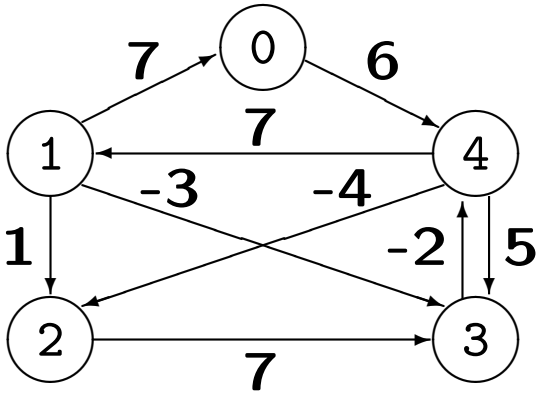
| $\mathcal{L}(v, w, 2)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 6 |
| 1 | 7 | 0 | 1 | $-3$ | 13 |
| 2 | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | 7 | $+\infty$ |
| 3 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | $-2$ |
| 4 | 14 | 7 | $-4$ | 3 | 0 |



# Algoritmo de Floyd-Warshall ($\{0, 1, 2, 3\}$)

| $\mathcal{L}(v, w, 2)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 6 |
| 1 | 7 | 0 | 1 | $-3$ | 13 |
| 2 | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | 7 | $+\infty$ |
| 3 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | $-2$ |
| 4 | 14 | 7 | $-4$ | 3 | 0 |

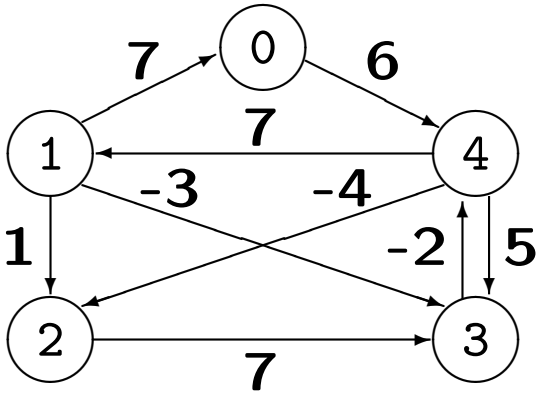
| $\mathcal{L}(v, w, 3)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 6 |
| 1 | 7 | 0 | 1 | $-3$ | $-5$ |
| 2 | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | 7 | 5 |
| 3 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | $-2$ |
| 4 | 14 | 7 | $-4$ | 3 | 0 |



# Algoritmo de Floyd-Warshall ($\{0, 1, 2, 3, 4\}$)

| $\mathcal{L}(v, w, 3)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 6 |
| 1 | 7 | 0 | 1 | $-3$ | $-5$ |
| 2 | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | 7 | 5 |
| 3 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | $-2$ |
| 4 | 14 | 7 | $-4$ | 3 | 0 |

| $\mathcal{L}(v, w, 4)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 13 | 2 | 9 | 6 |
| 1 | 7 | 0 | $-9$ | $-3$ | $-5$ |
| 2 | 19 | 12 | 0 | 7 | 5 |
| 3 | 12 | 5 | $-6$ | 0 | $-2$ |
| 4 | 14 | 7 | $-4$ | 3 | 0 |



# Utilização de uma tabela $T$ de $|V| \times |V|$
## com um Grafo sem Ciclos de Peso Negativo (1)

Sejam $v$ e $w$ dois vértices quaisquer e $k = 0, 1, \ldots, |V| - 1$.

Utilizando uma única tabela, o valor de $\mathcal{L}(v, w, k)$ pode corresponder a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k-1) + \mathcal{L}(k,w,k-1)\ ) \\
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k-1) + \mathcal{L}(k,w,k)\ ) \\
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k) + \mathcal{L}(k,w,k-1)\ ) \\
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k) + \mathcal{L}(k,w,k)\ )
\end{aligned}$$

# Utilização de uma tabela $T$ de $|V| \times |V|$
## com um Grafo sem Ciclos de Peso Negativo (1)

Sejam $v$ e $w$ dois vértices quaisquer e $k = 0, 1, \ldots, |V| - 1$.

Utilizando uma única tabela, o valor de $\mathcal{L}(v, w, k)$ pode corresponder a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k-1) + \mathcal{L}(k,w,k-1)\ ) \\
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k-1) + \mathcal{L}(k,w,k)\ ) \\
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k) + \mathcal{L}(k,w,k-1)\ ) \\
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k) + \mathcal{L}(k,w,k)\ )
\end{aligned}$$

Mas:

- $\mathcal{L}(v, k, k) \leq \mathcal{L}(v, k, k-1)$ porque $\mathcal{L}(v, k, k) = \min(\ \mathcal{L}(v, k, k-1),\ \ldots\ )$.
- Se $\mathcal{L}(v, k, k) < \mathcal{L}(v, k, k-1)$, há um ciclo de peso negativo de $k$ a $k$.

# Utilização de uma tabela $T$ de $|V| \times |V|$
## com um Grafo sem Ciclos de Peso Negativo (1)

Sejam $v$ e $w$ dois vértices quaisquer e $k = 0, 1, \ldots, |V| - 1$.

Utilizando uma única tabela, o valor de $\mathcal{L}(v, w, k)$ pode corresponder a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k-1) + \mathcal{L}(k,w,k-1)\ ) \\
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k-1) + \mathcal{L}(k,w,k)\ ) \\
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k) + \mathcal{L}(k,w,k-1)\ ) \\
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k) + \mathcal{L}(k,w,k)\ )
\end{aligned}$$

Mas:

- $\mathcal{L}(v,k,k) \leq \mathcal{L}(v,k,k-1)$ porque $\mathcal{L}(v,k,k) = \min(\ \mathcal{L}(v,k,k-1),\ \ldots\ )$.
- Se $\mathcal{L}(v,k,k) < \mathcal{L}(v,k,k-1)$, há um ciclo de peso negativo de $k$ a $k$.

Portanto, se o grafo não tiver ciclos de peso negativo:

$$\mathcal{L}(v,k,k) = \mathcal{L}(v,k,k-1)\,.$$

# Utilização de uma tabela $T$ de $|V| \times |V|$ com um Grafo sem Ciclos de Peso Negativo (2)

Sejam $v$ e $w$ dois vértices quaisquer e $k = 0, 1, \ldots, |V| - 1$.

Utilizando uma única tabela, o valor de $\mathcal{L}(v, w, k)$ pode corresponder a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k-1) + \mathcal{L}(k,w,k-1)\ ) \\
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k-1) + \mathcal{L}(k,w,k)\ ) \\
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k) + \mathcal{L}(k,w,k-1)\ ) \\
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k) + \mathcal{L}(k,w,k)\ )
\end{aligned}$$

Mas:

- $\mathcal{L}(k, w, k) \leq \mathcal{L}(k, w, k-1)$ porque $\mathcal{L}(k, w, k) = \min(\ \mathcal{L}(k, w, k-1),\ \ldots\ )$.
- Se $\mathcal{L}(k, w, k) < \mathcal{L}(k, w, k-1)$, há um ciclo de peso negativo de $k$ a $k$.

Portanto, se o grafo não tiver ciclos de peso negativo:

$$\mathcal{L}(k, w, k) = \mathcal{L}(k, w, k-1)\,.$$

# Utilização de uma tabela $T$ de $|V| \times |V|$
## com um Grafo sem Ciclos de Peso Negativo (3)

Sejam $v$ e $w$ dois vértices quaisquer e $k = 0, 1, \ldots, |V| - 1$.

Utilizando uma única tabela, o valor de $\mathcal{L}(v, w, k)$ pode corresponder a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k-1) + \mathcal{L}(k,w,k-1)\ ) \\
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k-1) + \mathcal{L}(k,w,k)\ ) \\
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k) + \mathcal{L}(k,w,k-1)\ ) \\
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k) + \mathcal{L}(k,w,k)\ )
\end{aligned}$$

Se o grafo não tiver ciclos de peso negativo:

$$\mathcal{L}(v,k,k) = \mathcal{L}(v,k,k-1)\ , \quad \mathcal{L}(k,w,k) = \mathcal{L}(k,w,k-1)$$

e, no final do passo $k$, $T[v][w] = \mathcal{L}(v,w,k)$.

# Utilização de uma tabela $T$ de $|V| \times |V|$ com um Grafo sem Ciclos de Peso Negativo (3)

Sejam $v$ e $w$ dois vértices quaisquer e $k = 0, 1, \ldots, |V| - 1$.

Utilizando uma única tabela, o valor de $\mathcal{L}(v, w, k)$ pode corresponder a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k-1) + \mathcal{L}(k,w,k-1)\ ) \\
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k-1) + \mathcal{L}(k,w,k)\ ) \\
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k) + \mathcal{L}(k,w,k-1)\ ) \\
\mathcal{L}(v,w,k) &= \min(\ \mathcal{L}(v,w,k-1),\ \mathcal{L}(v,k,k) + \mathcal{L}(k,w,k)\ )
\end{aligned}$$

Se o grafo não tiver ciclos de peso negativo:

$$\mathcal{L}(v,k,k) = \mathcal{L}(v,k,k-1)\ , \quad \mathcal{L}(k,w,k) = \mathcal{L}(k,w,k-1)$$

e, no final do passo $k$, $T[v][w] = \mathcal{L}(v,w,k)$.

Se o grafo tiver ciclos de peso negativo, no final do passo $k$:

$$T[v][w] \leq \mathcal{L}(v,w,k)\,.$$

# Deteção de Ciclos de Peso Negativo

Se existe algum ciclo de peso negativo, existe um caminho de **comprimento pesado negativo** da forma:

$$v_0,\ v_1,\ \ldots,\ v_{n-1},\ v_n \quad (\text{com } n \geq 2)$$

onde:

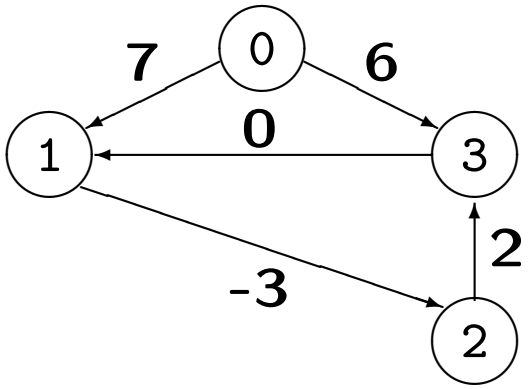
- $v_0 = v_n$ e
- os vértices $v_0,\ v_1,\ \ldots,\ v_{n-1}$ são todos distintos.

Mas, nesse caso,

$$T[v_0][v_0] \ \leq\ \mathcal{L}(v_0, v_0, |V| - 1) \ <\ 0.$$

Portanto, basta testar se, no final, algum "elemento da diagonal" da tabela $T$ é negativo.

# Exemplo com Ciclos de Peso Negativo




| $\mathcal{L}(,,-1)$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 7 | $+\infty$ | 6 |
| 1 | $+\infty$ | 0 | $-3$ | $+\infty$ |
| 2 | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | 2 |
| 3 | $+\infty$ | 0 | $+\infty$ | 0 |

| $\mathcal{L}(,,0)$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 7 | $+\infty$ | 6 |
| 1 | $+\infty$ | 0 | $-3$ | $+\infty$ |
| 2 | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | 2 |
| 3 | $+\infty$ | 0 | $+\infty$ | 0 |

| $\mathcal{L}(,,1)$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 7 | 4 | 6 |
| 1 | $+\infty$ | 0 | $-3$ | $+\infty$ |
| 2 | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | 2 |
| 3 | $+\infty$ | 0 | $-3$ | 0 |

| $\mathcal{L}(,,2)$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 7 | 4 | 6 |
| 1 | $+\infty$ | 0 | $-3$ | $-1$ |
| 2 | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | 2 |
| 3 | $+\infty$ | 0 | $-3$ | $-1$ |

| $\mathcal{L}(,,3)$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 6 | 3 | 5 |
| 1 | $+\infty$ | $-1$ | $-4$ | $-2$ |
| 2 | $+\infty$ | 2 | $-1$ | 1 |
| 3 | $+\infty$ | $-1$ | $-4$ | $-2$ |

# Caminhos Mais Curtos (1)

*(All-Pairs Shortest Paths)*

```
Pair<L[][], Node[][]> floydWarshall( Digraph<L> graph )
    throws NegativeWeightCycleException {

    int numNodes = graph.numNodes();

    L[][] length = new L[numNodes][numNodes];

    Node[][] via = new Node[numNodes][numNodes];
```

# Caminhos Mais Curtos (2)

```
for every Node v in graph.nodes()
    for every Node w in graph.nodes() {
        length[v][w] = +∞;
        via[v][w] = −1;
    }

for every Node v in graph.nodes()
    length[v][v] = 0;

for every Edge<L> e in graph.edges()
    length[ e.firstNode() ][ e.secondNode() ] = e.label();
```

# Caminhos Mais Curtos (3)

```
for every Node k in graph.nodes()
    for every Node v in graph.nodes()
        for every Node w in graph.nodes()
            if ( length[v][k] < +∞  &&  length[k][w] < +∞ ) {
                L newLength = length[v][k] + length[k][w];
                if ( newLength < length[v][w] ) {
                    length[v][w] = newLength;
                    via[v][w] = k;
                }
            }
```

# Caminhos Mais Curtos (4)

```
    // Negative-weight cycles detection.
    for every Node v in graph.nodes()
        if ( length[v][v] < 0 )
            throw new NegativeWeightCycleException();

    return new PairClass<>(length, via);
}
```

# Complexidade Espacial de **floydWarshall**

**Caminhos Mais Curtos**

num grafo orientado e pesado sem ciclos de peso negativo

ou

**Deteção de Ciclos de Peso Negativo**

num grafo orientado e pesado

| | |
|---|---|
| Matriz length | $\Theta(\|V\|^2)$ |
| Matriz via | $\Theta(\|V\|^2)$ |
| **TOTAL** | $\Theta(\|V\|^2)$ |

# Complexidade Temporal de **floydWarshall**

## Grafo em matriz de adjacências

| | |
|---|---|
| Criação de length e via | $\Theta(1)$ |
| Inicialização de length | $\Theta(\|V\|^2)$ |
| • $1^o$ ciclo ($+\infty$): $\Theta(\|V\|^2)$ | |
| • $2^o$ ciclo (diagonal): $\Theta(\|V\|)$ | |
| • $3^o$ ciclo (arcos): $\Theta(\|V\|^2)$ | |
| Cálculo dos comprimentos com vértices intermédios | $\Theta(\|V\|^3)$ |
| Deteção de ciclos de peso negativo | $\Theta(\|V\|)$ |
| **TOTAL** | $\Theta(\|V\|^3)$ |

# Complexidade Temporal de **floydWarshall**

## Grafo em vetor de listas de incidências (antecessores ou sucessores)

| | |
|---|---|
| Criação de length e via | $\Theta(1)$ |
| Inicialização de length | $\Theta(\|V\|^2)$ |
| • $1^o$ ciclo ($+\infty$): | $\Theta(\|V\|^2)$ |
| • $2^o$ ciclo (diagonal): | $\Theta(\|V\|)$ |
| • $3^o$ ciclo (arcos): | $\Theta(\|V\| + \|A\|)$ |
| Cálculo dos comprimentos com vértices intermédios | $\Theta(\|V\|^3)$ |
| Deteção de ciclos de peso negativo | $\Theta(\|V\|)$ |
| **TOTAL** | $\Theta(\|V\|^3)$ |

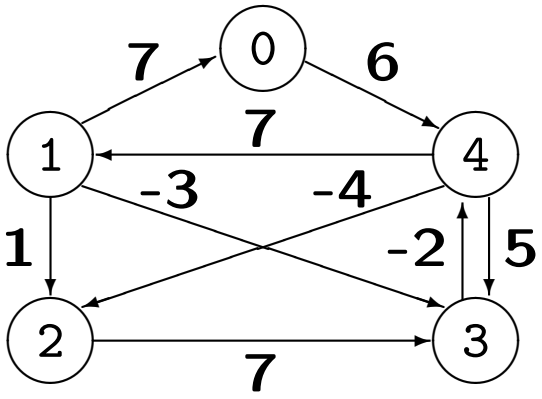
# Complexidade Temporal de **floydWarshall**

## Grafo em vetor ou lista de arcos (e $|V|$)

| | |
|---|---|
| Criação de length e via | $\Theta(1)$ |
| Inicialização de length | $\Theta(\|V\|^2)$ |
| • $1^o$ ciclo ($+\infty$): | $\Theta(\|V\|^2)$ |
| • $2^o$ ciclo (diagonal): | $\Theta(\|V\|)$ |
| • $3^o$ ciclo (arcos): | $\Theta(\|A\|)$ |
| Cálculo dos comprimentos com vértices intermédios | $\Theta(\|V\|^3)$ |
| Deteção de ciclos de peso negativo | $\Theta(\|V\|)$ |
| **TOTAL** | $\Theta(\|V\|^3)$ |

# Construção de um Caminho (mecanismo)

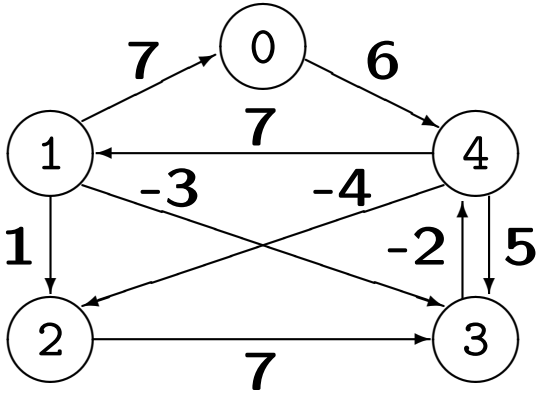
| via | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | −1 | 4 | 4 | 4 | −1 |
| 1 | −1 | −1 | 4 | −1 | 3 |
| 2 | 4 | 4 | −1 | −1 | 3 |
| 3 | 4 | 4 | 4 | −1 | −1 |
| 4 | 1 | −1 | −1 | 2 | −1 |




| | | |
|---|---|---|
| P(1,2) | via[1][2] = 4 | P(1,4) ⊕ P(4,2) |
| P(1,4) | via[1][4] = 3 | P(1,3) ⊕ P(3,4) ⊕ P(4,2) |
| P(1,3) | via[1][3] = −1 | [1,3] ⊕ P(3,4) ⊕ P(4,2) |
| P(3,4) | via[3][4] = −1 | [1,3] ⊕ [3,4] ⊕ P(4,2) |
| | | [1,3,4] ⊕ P(4,2) |
| P(4,2) | via[4][2] = −1 | [1,3,4] ⊕ [4,2] |
| | | [1,3,4,2] |

# Construção de um Caminho (implementação)

| via | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $-1$ | 4 | 4 | 4 | $-1$ |
| 1 | $-1$ | $-1$ | 4 | $-1$ | 3 |
| 2 | 4 | 4 | $-1$ | $-1$ | 3 |
| 3 | 4 | 4 | 4 | $-1$ | $-1$ |
| 4 | 1 | $-1$ | $-1$ | 2 | $-1$ |




$P(1,2)$ $\quad$ $via[1][2] = 4$ $\quad$ $P(1,4) \oplus P(4,2)$

$P(1,4)$ $\quad$ $via[1][4] = 3$ $\quad$ $P(1,3) \oplus P(3,4) \oplus P(4,2)$

$P(1,3)$ $\quad$ $via[1][3] = -1$ $\quad$ $[1[ \oplus P(3,4) \oplus P(4,2)$

$P(3,4)$ $\quad$ $via[3][4] = -1$ $\quad$ $[1[ \oplus [3[ \oplus P(4,2)$

$[1,3[ \oplus P(4,2)$

$P(4,2)$ $\quad$ $via[4][2] = -1$ $\quad$ $[1,3[ \oplus [4[$

$[1,3,4[$

NO FINAL $\quad$ $[1,3,4,2]$

# Construção de um Caminho

```
// Assume-se que o método floydWarshall já foi executado, tendo
// retornado as matrizes length e via, e que existe caminho da
// origem para o destino (i.e. length[origin][destination] < +∞).
List<Node> getPath( Node[][] via, Node origin, Node destination ) {
    List<Node> path;
    if ( origin == destination )
        path = new DoublyLinkedList<>();
    else
        path = pathWithoutLast(via, origin, destination);
    path.addLast(destination);
    return path;
}
```

```
DLL<Node> pathWithoutLast( Node[][] via, Node orig, Node dest ) {
    DLL<Node> path;
    Node interm = via[orig][dest];
    if ( interm == -1 ) {
        path = new DLL<>();
        path.addLast(orig);
    }
    else {
        path = pathWithoutLast(via, orig, interm);
        path.append( pathWithoutLast(via, interm, dest) );
    }
    return path;
}
```

DLL abrevia DoublyLinkedList

# Complexidades de **getPath**

## Temporal

Número de chamadas a pathWithoutLast:

- uma por cada vértice intermédio $\leq |V| - 2$
- uma por cada arco do caminho $\leq |V| - 1$

Complexidade de cada chamada a pathWithoutLast: $\Theta(1)$

**Total:** $O(|V|)$

## Espacial

Número de vértces do caminho: $O(|V|)$