Álgebra Linear e Geometria Analítica

1-Matrizes

Departamento de Matemática
FCT/UNL

Programma

1.1 Algumas definições e exemplos

- $\mathbb{R}$ - conjunto dos números reais
- $\mathbb{C}$ - conjunto dos números complexos
- $\mathbb{K}$ - conjunto dos escalares
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
- $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcl} A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i, j) & \longmapsto & A(i, j) = a_{ij} \end{array}$$

1.1 Algumas definições e exemplos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{21}- elemento de A situado na linha 2 e na coluna 1

linha i de $A = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$

coluna j de $A = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$

$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ - conjunto das matrizes $m\times n$ sobre $\mathbb{K}$

1.1 Algumas definições e exemplos

Definição

Dizemos que as matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ são **iguais**, e escrevemos $A = B$, se $a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n$. Caso contrário escrevemos $A \neq B$.

- $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
- $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$
- a_{ij}, b_{ij} - elementos **homólogos**

Só podem ser iguais matrizes com igual número de linhas, igual número de colunas e com elementos homólogos iguais.

1.1 Algumas definições e exemplos

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

A diz-se uma **matriz–linha** se $m = 1$.

A diz-se uma **matriz–coluna** se $n = 1$.

A diz-se uma **matriz quadrada** se $m = n$. Neste caso diz-se que A é quadrada de **ordem** n ou, simplesmente, que A é uma matriz de ordem n.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \pi \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -e^{-2} & 5\pi \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

1.1 Algumas definições e exemplos

A= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ - **elementos diagonais** de A

$(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ - **diagonal principal** de A

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ - **triangular superior** ($a_{ij} = 0$ para $i > j$)

1.1 Algumas definições e exemplos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ - **triangular inferior** ($a_{ij} = 0$ para $i < j$)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ - **diagonal** ($a_{ij} = 0$ para $i \neq j$)

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{bmatrix}$$ - **escalar** (diagonal com $a_{ii} = \alpha, \ i = 1, \ldots, n$)

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$ - **matriz identidade**

1.1 Algumas definições e exemplos

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} e^{\pi} & 0 \\ 0 & e^{\pi} \end{bmatrix} \text{ e } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição

Designamos por **matriz nula** de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e representamos por $0_{m\times n}$ ou simplesmente por 0 se não houver ambiguidade a matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$0_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, representamos por $-A$ a matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que:

$$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.2 Operações com matrizes - Adição de matrizes

Definição

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **matriz soma** da matriz A com a matriz B, e denotamos por $A+B$ à matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cuja entrada (i,j) é $a_{ij}+b_{ij}$ isto é

$$(A+B)_{ij} = a_{ij}+b_{ij} \qquad i=1,\ldots,m \quad j=1,\ldots,n$$

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

1.2 Operações com matrizes - Propriedades da Adição de matrizes

Proposição

Tem-se:

1. $\forall_{A,B\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad A+B=B+A$ (comutativa).
2. $\forall_{A,B,C\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad (A+B)+C=A+(B+C)$ (associativa).
3. $\exists_{0_{m\times n}\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})}\ \forall_{A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad A+0_{m\times n}=0_{m\times n}+A=A$ (existência de elemento neutro).
4. $\forall_{A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})}\ \exists_{-A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad A+(-A)=(-A)+A=0_{m\times n}$ (existência de oposto).

Se $A,B\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, representamos por $A-B$ a matriz $A+(-B)$.

1.2 Operações com matrizes - Multiplicação de um escalar por uma matriz

Definição

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **matriz produto do escalar** α **pela matriz** A, e denotamos por αA, à matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cujo elemento (i,j) é αa_{ij}, isto é,

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}, \qquad i = 1,\ldots,m \quad j = 1,\ldots,n$$

$\alpha \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.2 Operações com matrizes - Propriedades da Multiplicação de um escalar por uma matriz

Proposição

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. *Tem-se*

1. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.
2. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.
4. $1A = A$.
5. $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$.
6. *Se* $\alpha A = 0_{m\times n}$ *então* $\alpha = 0$ *ou* $A = 0_{m\times n}$.

1.2 Operações com matrizes - Multiplicação de matrizes

Definição

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Define-se **produto** da matriz A pela matriz B, e representa-se por AB, a matriz de $\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ tal que

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, p.$$

Assim,

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

1.2 Operações com matrizes

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ -8 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0\times 9 + 1 \times (-8) + 2 \times (-1) & 0\times 8 + 1 \times (-2) + 2\times 0 & 0\times 7 + 1\times 6 + 2\times 4 \\ 3\times 9 + 0 \times (-8) + 5 \times (-1) & 3\times 8 + 0 \times (-2) + 5\times 0 & 3\times 7 + 0\times 6 + 5\times 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -10 & -2 & 14 \\ 22 & 24 & 41 \end{bmatrix}.$$

1.2 Operações com matrizes - Propriedades da Multiplicação de matrizes

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e sejam B, C matrizes do tipo adequado de forma a que as operações indicadas estejam definidas. Tem-se

1. $(AB)C = A(BC)$ (associativa).
2. $A(B + C) = AB + AC$ (distributiva, à esquerda),
   $(B + C)A = BA + CA$ (distributiva, à direita).
3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.
4. $AI_n = I_mA = A$.

Algumas propriedades da multiplicação em $\mathbb{K}$ não são verificadas pela multiplicação de matrizes:

- A multiplicação de matrizes não é comutativa.
- $AB = 0 \not\Rightarrow (A = 0 \quad \text{ou} \quad B = 0)$,
  isto é, pode ter-se $AB = 0$ com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.
- $(AB = AC \quad \text{e} \quad A \neq 0) \not\Rightarrow B = C$,
  $(BA = CA \quad \text{e} \quad A \neq 0) \not\Rightarrow B = C$.

1.2 Operações com matrizes - Potência de expoente k de uma matriz

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **potência de expoente** k **de** A ($k \in \mathbb{N}_0$) à matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, que representamos por A^k, definida, por recorrência, do seguinte modo:

$$A^k = \begin{cases} I_n, & \text{se } k = 0 \\ A^{k-1}A, & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Proposição

Quaisquer que sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $k, l \in \mathbb{N}_0$, tem-se

1. $A^k A^l = A^{k+l}$.
2. $(A^k)^l = A^{kl}$.

1.3 Matrizes invertíveis

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dizemos que A é **invertível**, ou que tem inversa, se A tem oposto para a multiplicação de matrizes, isto é, se existir uma matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, tal que $AB = BA = I_n$.

Teorema

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível então existe uma, e uma só, matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

Definição

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, a única matriz B tal que $AB = BA = I_n$ designa-se por a **inversa** de A e é denotada por A^{-1}.

1.3 Matrizes invertíveis

Em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $A \neq 0 \quad \not\Rightarrow \quad A$ invertível.

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *não* *tem inversa porque, para qualquer* $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, *se tem*

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ 5a & 5b \end{bmatrix} \neq I_2.$$

1.3 Matrizes invertíveis

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *uma matriz* *invertível*.

1. *Se* $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *é tal que* $AB = I_n$ *então* $B = A^{-1}$ *e, portanto,* $BA = I_n$.
2. *Se* $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *é tal que* $BA = I_n$ *então* $B = A^{-1}$ *e, portanto,* $AB = I_n$.

1.3 Matrizes invertíveis

Teorema

1. *Se* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *é invertível então* A^{-1} *é invertível e* $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. *Se* $\alpha \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ *e* A *é invertível então* αA *é invertível e* $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$.
3. *Se* $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *são invertíveis então* AB *é invertível e* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
4. *Mais geralmente, se* $k \in \mathbb{N}$ *e* $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *são invertíveis então* $A_1 \cdots A_k$ *é invertível e* $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = {A_k}^{-1} \cdots {A_1}^{-1}$.
5. *Se* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *é invertível então, para qualquer* $k \in \mathbb{N}$, A^k *é invertível e* $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

1.4 Transposição e conjugação de matrizes

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **matriz transposta** de A, e representamos por $A^\top$, a matriz de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que

$$\left(A^\top\right)_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.4 Transposição e conjugação de matrizes

Proposição

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e A, B matrizes sobre $\mathbb{K}$ de tipos adequados para que as operações indicadas tenham sentido. Tem-se

1. $\left(A^\top\right)^\top = A$.
2. $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$.
3. $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$.
4. $(AB)^\top = B^\top A^\top$.
5. $\left(A^k\right)^\top = \left(A^\top\right)^k$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$.
6. *Se A é invertível então $A^\top$ é invertível e* $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$.

1.4 Transposição e conjugação de matrizes

Definição

Uma matriz A diz-se **simétrica** se $A = A^\top$ e **hemi–simétrica** se $A = -A^\top$.

Definição

Dizemos que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é **simétrica** se $a_{ij} = a_{ji} \quad i,j = 1,\ldots,n$ e que é **hemi-simétrica** se $a_{ij} = -a_{ji} \quad i,j = 1,\ldots,n$.

Exemplo

A matriz $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & \pi \end{bmatrix}$ *é simétrica. A matriz* $\begin{bmatrix} 0 & \pi i & 2i \\ -\pi i & 0 & -3 \\ -2i & 3 & 0 \end{bmatrix}$ *é hemi–simétrica. A matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ *não é simétrica nem hemi–simétrica.*

1.4 Transposição e conjugação de matrizes

$\mathbb{K} = \mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

$i^2 = -1$

O **conjugado** de $z = a + bi$ é o número $\overline{z} = a - bi$.

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Define-se a **conjugada** de A e representa-se por $\overline{A}$ a matriz que se obtém de A substituindo cada elemento pelo seu conjugado. Tem-se, pois, $\overline{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ e $\left(\overline{A}\right)_{ij} = \overline{a_{ij}}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{m1}} & \overline{a_{m2}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

1.4 Transposição e conjugação de matrizes

Proposição

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C})$ *e* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Tem-se*

1. $\overline{\overline{A}} = A$.
2. $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$.
3. $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\,\overline{A}$.
4. $\overline{AC} = \overline{A}\;\overline{C}$.
5. $\overline{A^k} = \left(\overline{A}\right)^k$.
6. *Se* $m = n$ *e* A *for uma matriz invertível então* $\left(\overline{A}\right)^{-1} = \overline{A^{-1}}$.
7. $\left(\overline{A}\right)^\top = \overline{A^\top}$.

1.4 Transposição e conjugação de matrizes

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Define-se **transconjugada** de A e representamos por A^* a matriz

$$\left(\overline{A}\right)^\top = \overline{A^\top}.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A^* = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{m2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

Definição

Uma matriz A diz-se **hermítica** se $A = A^*$ ou, equivalentemente ,se $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ e **hemi–hermítica** se $A = -A^*$ ou, equivalentemente ,se $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$.

1.5 Transformações e matrizes elementares

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **transformação elementar sobre as linhas de** A a uma transformação de um dos seguintes tipos:

- Troca de posição, na matriz A, da linha i com a linha j, com $i \neq j$;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.5 Transformações e matrizes elementares

II Multiplicação de uma linha de A por um $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \underrightarrow{\alpha\ell_i} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.5 Transformações e matrizes elementares

III Substituição da linha de A pela sua soma com linha j de A multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$, com $i \neq j$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_i + \beta \ell_j]{} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+\beta a_{j1} & a_{i2}+\beta a_{j2} & \cdots & a_{in}+\beta a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.5 Transformações e matrizes elementares

Notação

- $A \underset{T}{\longrightarrow} B$, *para representar que a matriz B se obteve de A efectuando a transformação elementar T (de tipo não especificado).*

Definição

Diz-se que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é equivalente por linhas a $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ se B se pode obter a partir de A efectuando uma sequência finita com k, $k \in \mathbb{N}_0$, transformações elementares sobre linhas. Tal será denotado por $A \underset{(linhas)}{\longrightarrow} B$.

1.5 Transformações e matrizes elementares

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$*. Para qualquer transformação elementar sobre linhas* T *existe uma transformação elementar sobre linhas* T' *tal que*

$$A \xrightarrow[T]{} B \xrightarrow[T']{} A.$$

Dizemos então que qualquer transformação elementar sobre linhas é "*reversível*".

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$*. Tem-se:*

1. $A \xrightarrow[(linhas)]{} A.$
2. *Se* $A \xrightarrow[(linhas)]{} B$ *então* $B \xrightarrow[(linhas)]{} A.$
3. *Se* $A \xrightarrow[(linhas)]{} B$ *e* $B \xrightarrow[(linhas)]{} C$ *então* $A \xrightarrow[(linhas)]{} C.$

1.5 Transformações e matrizes elementares

Definição

Chamamos **matriz elementar** de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, sobre linhas, de tipo I, II ou III, a toda a matriz que se obtém de I_n por aplicação de uma <u>única</u> transformação elementar nas suas linhas, de tipo I, II, ou III, respectivamente.

Exemplo

São matrizes elementares de $\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, sobre linhas, as matrizes:

$$E_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ pois } I_4 \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} E_1;$$

$$E_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ pois } I_4 \xrightarrow[7\ell_3]{} E_2;$$

$$E_{III} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{pois } I_4 \xrightarrow[\ell_3 + \pi\ell_2]{} E_3.$$

1.5 Transformações e matrizes elementares

Proposição

Tem-se:

1. *Se* $I_n \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} E_1$ *então* $I_n \xrightarrow[c_i \leftrightarrow c_j]{} E_1$.
2. *Se* $I_n \xrightarrow[\alpha \ell_i]{} E_2$ *então* $I_n \xrightarrow[\alpha c_i]{} E_2$.
3. *Se* $I_n \xrightarrow[\ell_i + \beta \ell_j]{} E_3$ *então* $I_n \xrightarrow[c_j + \beta c_i]{} E_3$.

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

1. *Se* $I_m \xrightarrow[T]{} E$, *sendo* T *uma transformação elementar sobre* *linhas*, *então* $A \xrightarrow[T]{} EA$.
2. *Se* $I_n \xrightarrow[T']{} E'$, *sendo* T' *uma transformação elementar sobre* *colunas*, *então* $A \xrightarrow[T']{} AE'$.

1.5 Transformações e matrizes elementares

Proposição

Toda a matriz elementar $E \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é invertível e tem-se, quaisquer que sejam $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:

1. *Se $i \neq j$ e $I_n \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} E$ então $I_n \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} E^{-1}$.*
2. *Se $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e $I_n \xrightarrow[\alpha \ell_i]{} E$ então $I_n \xrightarrow[\frac{1}{\alpha}\ell_i]{} E^{-1}$.*
3. *Se $i \neq j$, $\beta \in \mathbb{K}$ e $I_n \xrightarrow[\ell_i + \beta \ell_j]{} E$ então $I_n \xrightarrow[\ell_i + (-\beta)\ell_j]{} E^{-1}$.*

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

Definição

Chamamos **pivô** de uma linha não nula de uma matriz ao elemento não nulo mais à esquerda dessa linha.Consideramos que uma linha nula não tem pivô.
Chamamos pivôs de uma matriz não nula aos pivôs de todas as suas linhas não nulas.

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Dizemos que A está em **forma de escada** (abreviadamente, denotado por **f.e.**) se $A = 0_{m\times n}$ ou se os pivôs da matriz A estão nas linhas $\{1, \ldots, s\}$ nas posições $(1, k_1), \ldots, (s, k_s)$, com $1 \leq k_1 < \ldots < k_s \leq n$.

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

Exemplo

Estão em forma de escada, por exemplo, matrizes com o seguinte aspecto:

$$\begin{bmatrix} 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

não está em forma de escada. Porquê?

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

Proposição

Toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *é* **equivalente por linhas** *a uma matriz em forma de escada. Abreviadamente*

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A' \quad (f.e.).$$

- **Processo para redução de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ à forma de escada.**

P1: Se $A = 0_{m\times n}$ ou A é uma matriz linha então A está em forma de escada e o processo termina.
Suponhamos então que $A \neq 0_{m\times n}$.

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

P2: Por troca de linhas (isto é, efectuando apenas uma transformação elementar do tipo I), se necessário, obtenha-se uma matriz B cuja linha 1 tem, entre todas as linhas não nulas da matriz, um pivô com índice de coluna mínimo. Seja tal elemento B_{1t}. Obtemos uma matriz da forma

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & B_{1t} & B_{1,t+1} & \cdots & B_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & B_{2t} & B_{2,t+1} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & B_{mt} & B_{m,t+1} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix},$$

onde $B_{1t} \neq 0$ (se $t = 1$ então as colunas nulas à esquerda da coluna t não existem).

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

P3: Para cada linha i de B, $i = 2, \ldots, m$, substitua-se a linha i pela sua soma com o produto de $-\frac{B_{it}}{B_{1t}}$ pela linha 1 (transformações elementares do tipo III). Obtém-se uma matriz da forma

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & B_{1t} & B_{1,t+1} & \cdots & B_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & C_{2,t+1} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & C_{m,t+1} & \cdots & C_{mn} \end{bmatrix},$$

onde $B_{1t} \neq 0$.

P4: Se a matriz C estiver em forma de escada, o processo termina e está encontrada uma matriz em forma de escada.
Caso contrário, "despreza-se" a linha 1 da matriz C e aplica-se os passos 1 e 2 à matriz resultante do tipo $(m-1)\times n$.

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

Definição

Dizemos que uma matriz está em **forma de escada reduzida** (abreviadamente, denotado por **f.e.r.**) se está em forma de escada e os pivôs, se existirem, são iguais a 1 e todos os restantes elementos das colunas dos pivôs são nulos.

Exemplo

A matriz identidade, de qualquer ordem, está em forma de escada reduzida.

A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *está em forma de escada reduzida.*

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

- **Processo para redução de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, não nula e em forma de escada, à forma de escada reduzida.**

P1: Seja A_{sk} o pivô com maior índice de linha. Para garantir que o pivô passa a "1", multiplica-se a linha s por $\frac{1}{A_{sk}}$ (transformação elementar do tipo II).
Seja B a matriz obtida. Se $s = 1$ a matriz B está em forma de escada reduzida e o processo termina.

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

P2: Para cada linha i de B, com $i = 1, \ldots, s-1$, substitua-se a linha i pela sua soma com o produto de $-B_{ik}$ pela linha s (transformações elementares do tipo III).(Note que tal corresponde a anular os elementos da coluna do pivô B_{sk}, com índice de linha inferior ao do pivô.)
Obtem-se uma nova matriz C que continua em forma de escada e em que as entradas da coluna k são todas nulas à excepção do pivô C_{sk} que é igual a 1.

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

P3: Se a matriz C estiver em forma de escada reduzida, o processo termina e está encontrada uma matriz em forma de escada reduzida. Caso contrário, "desprezem-se" as linhas de C de índice superior ou igual a s e aplique-se o processo à matriz do tipo $(s-1)\times n$ resultante.

Exemplo

$$\mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R}) \ni B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}\ell_3]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\ell_1 + 1\ell_3]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 + (-2)\ell_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{(f.e.r.)}.$$

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

Proposição

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *matrizes equivalentes por linhas. para cada* $i \in \{1, \dots, n\}$ *seja* A_i *a coluna* i *de* A *e seja* B_i *a coluna* i *de* B.
se existem $s \in \{2, \dots, n\}$ *e* $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1} \in \mathbb{K}$ *tais que*

$$A_s = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_{s-1} A_{s-1}$$

então

$$B_s = \alpha_1 B_1 + \cdots + \alpha_{s-1} B_{s-1}.$$

Proposição

UNICIDADE DA FORMA DE ESCADA REDUZIDA
Qualquer matriz A *é equivalente por linhas a uma* ***única*** *matriz em forma de escada reduzida. Abreviadamente,*

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A'' \quad (f.e.r.), \text{ com } A'' \text{ \underline{única}}.$$

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. À única matriz equivalente por linhas a A e em forma de escada reduzida chamamos **forma de escada reduzida de A ou forma de Hermite de A**.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Quaisquer matrizes equivalentes por linhas a A e em forma de escada têm o mesmo número de linhas não nulas.

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Ao número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada equivalente por linhas a A chamamos **característica** de A e denotamos por $\mathrm{r}(A)$.

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Tem-se* $\mathrm{r}(A) \leq m$ e $\mathrm{r}(\mathrm{A}) \leq \mathrm{n}$, *isto é,* $\mathrm{r}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Proposição

As transformações elementares sobre linhas não alteram a característica, isto é, se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e*

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} B$$

então

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B),$$

ou seja, matrizes equivalentes por linhas têm a mesma característica.

Proposição

$A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *são equivalentes por linhas se, e só se, têm a mesma forma de escada reduzida.*

1.8 Caracterizações das matrizes invertíveis

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. As afirmações seguintes são equivalentes:

1. *A é invertível.*
2. $\mathrm{r}(A) = n$.
3. *I_n é a forma de escada reduzida de A.*
4. *A pode escrever-se como produto de matrizes elementares.*

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível podemos calcular A^{-1} pelo **processo** seguinte:

Efectuamos transformações elementares sobre linhas de modo a obter I_n a partir de A. Se, a partir de I_n efectuarmos a mesma sequência de transformações elementares sobre linhas, a matriz que no final obtemos é A^{-1}

$$[A \mid I_n] \xrightarrow[(linhas)]{} [I_n \mid A^{-1}].$$

Exemplo

$$Seja\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

e verifiquemos se A é invertível calculando a sua característica.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 - 2\ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\ell_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(f.e.)$$

$r(A) = 3$ logo A é invertível.

Teorema

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Tem-se* AB *é invertível se, e só se,* A *e* B *são ambas invertíveis.*

Corolário

Se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e* $AB = I_n$ *então* A *e* B *são ambas invertíveis, tendo-se* $A^{-1} = B$ *e* $BA = I_n$.