Álgebra Linear e Geometria Analítica

2 - Sistemas de Equações Lineares

Departamento de Matemática
FCT/UNL

Programa

Definição

Uma **Equação linear** nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$, é uma equação do tipo

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b \tag{1}$$

com $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{K}$.

Chamamos a $a_1, \ldots, a_n$ os **coeficientes** da equação e a b o **segundo membro** ou **termo independente** da equação. Se $b = 0$ dizemos que a equação é linear **homogénea**.

Dizemos que $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ é uma **solução** da equação (**??**) ou que **satisfaz** a equação se substituindo x_i por β_i, $i = 1, \ldots, n$, se obtém uma proposição verdadeira, isto é, $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ é uma **solução** da equação (**??**)se é verdadeira a proposição

$$a_1 \beta_1 + \cdots + a_n \beta_n = b.$$

Definição

Um Sistema de equações lineares é uma conjunção de um número finito de equações lineares, todas nas mesmas incógnitas.

$$(S) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

com $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Diz-se que (S) é um **sistema de m equações lineares, nas n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$.**

Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ dizemos que (S) é um **sistema homogéneo**.

Definição

$(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ é uma **solução** do sistema (S) se

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}\beta_1 & + & \cdots & + & a_{1n}\beta_n & = & b_1 \\ a_{21}\beta_1 & + & \cdots & + & a_{2n}\beta_n & = & b_2 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{m1}\beta_1 & + & \cdots & + & a_{mn}\beta_n & = & b_m \end{array} \right.$$

(S) diz-se **impossível** se não existe nenhuma solução de (S), ou equivalentemente, se o conjunto das soluções do sistema (S) é o conjunto vazio.

(S) diz-se sistema **possível** se admite pelo menos uma solução.

(S) possível diz-se **determinado** se tem uma, e uma só, solução e **indeterminado** se tem mais do que uma solução.

$\mathcal{C}$ = conjunto das soluções do sistema (S)
$\mathcal{C}_i$ = conjunto das soluções da i-ésima equação de (S), $i = 1, \ldots, m$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{C}_m$$

(S) sistema homogéneo

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

então $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n$ é uma solução de (S), a que chamamos a **solução nula**. Logo um sistema **homogéneo** é sempre **possível**, podendo ser determinado se tiver **apenas** a solução nula ou indeterminado se tiver mais soluções.

Exemplo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$ *e* $(-2,1)$ *são soluções do sistema homogéneo nas incógnitas* x_1 *e* x_2*, sobre* $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} -2 + 2 \times 1 = 0 \\ -2 \times (-2) - 4 \times 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 : \ \alpha_1 = -2\alpha_2\} \\ &= \{(-2\alpha_2, \alpha_2) : \ \alpha_2 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Sistema homogéneo indeterminado.

Problemas a resolver

(1) **Discussão do sistema**: Indicar para um dado sistema se este é impossível ou possível e, no caso de ser possível, se é determinado ou indeterminado, **sem determinar o conjunto de soluções**.

(2) **Resolução do sistema**: Dado um sistema de equações lineares, determinar o conjunto das suas soluções (que será o conjunto vazio se o sistema for impossível).

Definição

Dado um sistema de equações lineares, nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

chamaremos **forma matricial** do sistema (S) a

$$(S) \qquad AX = B$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é a **matriz simples** do sistema

$X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ é a **matriz das incógnitas**

$B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$ é a **matriz dos termos independentes**.

Seja

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Matriz ampliada *do sistema* (S) *é a matriz de* $\mathcal{M}_{m\times(n+1)}(\mathbb{K})$ *cuja coluna* i, $i = 1, \ldots, n$, *é igual à coluna* i *de* A *e cuja coluna* $n+1$ *é igual à coluna (única) de* B.

$$[A \mid B]$$

Exemplo

O sistema de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3, *sobre* $\mathbb{R}$,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

Forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

e a sua matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Proposição

Dado um sistema (S) $AX = B$, $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ *é uma solução de* (S) *se, e só se,* $A \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = B$.

$A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ é solução de (S) se, e só se,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}\beta_1 & + & \cdots & + & a_{1n}\beta_n & = & b_1 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{m1}\beta_1 & + & \cdots & + & a_{mn}\beta_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \text{ i.e., } A \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = B$$

Definição

Sejam (S) e (S') sistemas de equações lineares sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que (S) e (S') são **equivalentes** se têm o mesmo conjunto de soluções.

Proposição

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. *Se* $P \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ *é uma matriz* **invertível** *então os sistemas*

$$(S) \qquad AX = B \qquad e \qquad (S') \qquad (PA)X = PB$$

são equivalentes.

Proposição

Seja $AX = B$ *um sistema de equações lineares. Se*

$$[A \mid B] \xrightarrow[(linhas)]{} [A' \mid B']$$

então os sistemas $AX = B$ *e* $A'X = B'$ *são equivalentes.*

Proposição

$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. Tem-se

$$\mathrm{r}\,([A \mid B]) = \mathrm{r}(A) \qquad \textit{ou} \qquad \mathrm{r}\,([A \mid B]) = \mathrm{r}(A) + 1$$

pelo que

$$\mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}\,([A \mid B]).$$

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. Como

$$\mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}([A \mid B]) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{r}(A) \leq n$$

temos

$$\begin{cases} \mathrm{r}(A) < \mathrm{r}([A \mid B]) \\[2em] \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B]) \begin{cases} \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B]) = n \\[2em] \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B]) < n\ . \end{cases} \end{cases}$$

Teorema

Seja $AX = B$ *um sistema de equações lineares, com* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. *Tem-se:*

1. *Se* $\mathrm{r}(A) < \mathrm{r}([A \mid B])$ *então o sistema é impossível.*
2. *Se* $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B])$ *então o sistema é possível.*

   Tem-se, ainda,

   2.1. *Se* $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B]) = n$ *então o sistema é possível determinado.*

   2.2. *Se* $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B]) < n$ *então o sistema é possível indeterminado.*

Definição

- Seja $AX = B$ um sistema possível indeterminado, com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. A $n - \mathrm{r}(A)$ chamamos o **grau de indeterminação** do sistema.
- Seja $[A'|B']$ uma matriz em forma de escada equivalente por linhas à matriz ampliada de um sistema (S). Às incognitas correspondentes aos pivôs de $[A'|B']$ damos os nome de **incógnitas básicas**. Às restantes incógnitas damos o nome de **incógnitas livres**.

Observação

O grau de indeterminação de um sistema possível indeterminado é igual ao número de **incógnitas livres**.

Resumo da discussão do sistema $AX = B$

$AX = B$
Sistema

- $\mathrm{r}(A) < \mathrm{r}([A \mid B])$
  Sistema Impossível
- $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B])$
  Sistema Possível
  - $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B]) = n$
    Sistema Possível Determinado
  - $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B]) < n$.
    Sistema Possível Indeterminado, com grau de indeterminação $n - \mathrm{r}(A)$

Exemplo

Sistema de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4, *sobre* $\mathbb{R}$,

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & -5 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 4x_4 & = & -6 \\ -x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 3 \end{array} \right. .$$

Discussão do sistema (S): *Forma matricial* $A{\color{red}X} = {\color{blue}B}$ *com*

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 2 & 4 & 4 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{l_2+(-2)l_1 \\ l_3+(1)l_1}]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -2 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[l_3+(1)l_2]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right] = [A' \mid {\color{blue}B'}] \quad f.e$$

$$\mathrm{r}(A) = 3 = \mathrm{r}([A \mid {\color{blue}B}]) < 4 = \textit{número de incógnitas},$$

(S) *é um sistema possível indeterminado, com grau de indeterminação 1* $(= 4 - 3)$.

Exemplo

Resolução do sistema (S)*:*

$$[A' \mid B'] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{2} l_3]{\frac{1}{2} l_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{l_2+(-1)l_3 \\ l_1+3l_3}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 + (-1)l_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] = [A'' \mid B''] \quad f.e.r..$$

A incógnita livre é x_2 *e o sistema* (S) *é equivalente ao sistema*

$$\begin{cases} x_1 = -11 - 2x_2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

Exemplo

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4$ *é solução do sistema* (S) *se, e só se,*

$$\left\{\begin{array}{rcrr} \alpha_1 & = & -11 & -2\alpha_2 \\ \alpha_3 & = & 3 & \\ \alpha_4 & = & -1 & \end{array}\right. .$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4 : \ \alpha_1 = -11 - 2\alpha_2 \ \wedge \ \alpha_3 = 3 \ \wedge \ \alpha_4 = -1\right\} \\ &= \{(-11 - 2\alpha_2, \alpha_2, 3, -1) : \ \alpha_2 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Definição

Um sistema de equações lineares $AX = B$ diz-se um **sistema de Cramer** se A é quadrada e invertível.

Observe-se que qualquer sistema de Cramer $AX = B$ é possível determinado. Sendo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ uma solução do sistema, tem-se

$$
\begin{aligned}
A\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} &= B \\
A^{-1}A\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} &= A^{-1}B \\
I_n\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} &= A^{-1}B \\
\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} &= A^{-1}B.
\end{aligned}
$$

Num sistema de Cramer podemos determinar a solução através da matriz A^{-1}.

Exemplo

O sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$(S) \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

tem como matriz simples

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo

Verificamos facilmente que A é invertível com $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e, portanto, (S) é um sistema de Cramer.

Pelo processo descrito anteriormente, a solução do sistema pode ser calculada atendendo a que

$$A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

sendo B a matriz dos termos independentes. Logo a solução de (S) é $(-2, 3, -1)$.

Observação

No Capítulo 1 apresentámos um método para a determinação da inversa de uma matriz invertível $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ que representámos esquematicamente por

$$[A|I_n] \xrightarrow[(linhas)]{} [I_n|A^{-1}].$$

Dispomos agora de uma forma de interpretar esse método em termos de resolução de sistemas de equações lineares.
Se A é invertível são possíveis determinados os n sistemas de equações lineares

$$(S_i) \qquad AX = B_i,$$

em que B_i corresponde à coluna i de I_n, $i = 1, \ldots, n$.
Notemos que a solução (única) do sistema (S_i) é a coluna i de A^{-1}, pois $A[\ C_1 \mid \cdots \mid C_n\ ] = I_n$, em que C_i corresponde à solução de (S_i), $i = 1, \ldots, n$.

Observação

De acordo com o Corolário 1.79

$$A^{-1} = [\ C_1 \mid \cdots \mid C_n\ ].$$

Podemos então concluir que a determinação de A^{-1} pode ser feita resolvendo os n sistemas de equações lineares

$$AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

todos com a mesma matriz simples A, e em que as matrizes dos termos independentes são, respectivamente, as colunas $1, \ldots, n$ de I_n.
Tais sistemas, por terem a mesma matriz simples, podem ser resolvidos simultaneamente, o que corresponde ao método descrito no Capítulo 1.

Proposição

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. A matriz AB é invertível se, e só se, A e B são ambas invertíveis.

Dem. Atendendo a 3 da Proposição 1.29, demonstremos apenas que se AB é invertível então A e B são ambas invertíveis.

Se B não é invertível então o sistema $BX = 0$ é possível indeterminado. Como qualquer solução deste sistema é ainda solução do sistema $(AB)X = 0$, resulta que $(AB)X = 0$ é também possível indeterminado e, portanto, AB não é invertível.

Demonstrámos assim que se AB é invertível então B é invertível e, como o produto de matrizes invertíveis é invertível, concluímos também que $(AB)B^{-1} = A$ é invertível.