

# Álgebra Linear e Geometria Analítica

## 3 - Determinantes

*Departamento de Matemática  
FCT/UNL*

# Programa

- 1 Matrizes
- 2 Sistemas de Equações Lineares
- 3 **Determinantes**
- 4 Espaços Vectoriais
- 5 Aplicações Lineares
- 6 Valores e Vectors Próprios
- 7 Produto Interno, Produto Externo e Produto Misto
- 8 Geometria Analítica

## 3.1 Uma definição por recorrência

Consideramos apenas matrizes quadradas.

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  é invertível se, e só se,  $r(A) = n$ .

- $n = 1$

$A = [a_{11}] \in \mathcal{M}_{1 \times 1}(\mathbb{K})$  é invertível se, e só se,  $r(A) = 1$ ,  
ou equivalentemente,  $a_{11} \neq 0$ .

- $n = 2$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  é invertível se, e só se,  $r(A) = 2$ .

Vejamos que tal é equivalente a afirmar que

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

- Se  $a_{11} \neq 0$ ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 + \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)l_1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11}} \end{bmatrix}.$$

$r(A) = 2$  se, e só se,  $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ .

- Se  $a_{11} = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

- Se  $a_{21} \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{12} \end{bmatrix} \text{ f.e.}$$

$r(A) = 2$  se, e só se,  $a_{12} \neq 0$  se, e só se,  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ .

- Se  $a_{11} = 0 = a_{21}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

**não** é invertível e  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ .

## Notação

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ , com  $n \geq 2$ . Dados  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , representamos por

$$A(i|j) \in \mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)}(\mathbb{K})$$

a matriz que se obtém de  $A$  suprimindo a linha  $i$  e a coluna  $j$ .

## Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

$$A(1|2) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad A(2|1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A(1|1) = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

## Definição

Seja  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ . Chamamos **determinante** de  $A$ , e representamos por  $\det A$  ou  $|A|$ , o elemento de  $\mathbb{K}$  definido da seguinte forma:

Se  $n = 1$  então  $\det A = a_{11}$ .

Se  $n > 1$  então

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}(-1)^{1+1}\det A(1|1) + \cdots + a_{1n}(-1)^{1+n}\det A(1|n) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{1k}(-1)^{1+k}\det A(1|k).\end{aligned}$$

Se  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}(-1)^{1+1}\det A(1|1) + a_{12}(-1)^{1+2}\det A(1|2) \\ &= a_{11}\det[a_{22}] - a_{12}\det[a_{21}] \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.\end{aligned}$$

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\det A(1|1) + a_{12}(-1)^{1+2}\det A(1|2) + a_{13}(-1)^{1+3}\det A(1|3)$$

$$= a_{11}\det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

**Regra de Sarrus:** As 3 parcelas do aditivo são dadas pelo produto dos elementos da diagonal principal e pelo produto dos elementos abrangidos por cada um dos dois triângulos com base paralela à diagonal principal. As 3 parcelas do subtractivo são obtidas procedendo de forma análoga em relação à diagonal secundária (constituída pelos elementos  $a_{13}$ ,  $a_{22}$  e  $a_{31}$ ).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Se  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  a expressão de  $\det A$  tem  $n!$  parcelas. (mostra-se por indução)

## Processos alternativos

### Definição

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ , com  $n \geq 2$ . Designa-se por **complemento algébrico** do elemento da posição  $(i, j)$  de  $A$ , o elemento de  $\mathbb{K}$ , que representaremos por  $\hat{a}_{ij}$ , dado por

$$\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j).$$

### Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \textcolor{red}{a} & 8 \end{bmatrix}, \quad \hat{a}_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -(6 - 12) = 6,$$

independente do valor de  $\textcolor{red}{a}$ .

Se  $n \geq 2$ , o determinante de  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  é igual à soma dos produtos dos elementos da linha 1 pelos respectivos complementos algébricos, ou

**Teorema (Teorema de Laplace)**

Se  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  então

$$\det A = a_{i1}\hat{a}_{i1} + \cdots + a_{in}\hat{a}_{in}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

O mesmo resultado é válido se substituirmos “linhas” por “colunas”, isto é,

$$\det A = a_{1j}\hat{a}_{1j} + \cdots + a_{nj}\hat{a}_{nj}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

À expressão (??) chamamos o desenvolvimento do determinante de  $A$  através da linha  $i$  ou dizemos que é a expressão resultante da **aplicação do Teorema de Laplace à linha  $i$  de  $A$** . Analogamente, dizemos que (??) é a expressão resultante da **aplicação do Teorema de Laplace à coluna  $j$  de  $A$** .

## Notação

$$\det A \stackrel{\text{Lapl.}}{=} l_i \quad \text{ou} \quad \det A \stackrel{\text{Lapl.}}{=} c_j$$

indica que o desenvolvimento que se segue, para o determinante de  $A$ , decorre da aplicação do Teorema de Laplace à linha  $i$  ou à coluna  $j$  de  $A$ , respectivamente.

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ , podemos calcular  $\det A$  por  $2n$  processos, aplicando o Teorema de Laplace a cada uma das  $n$  linhas de  $A$  ou a cada uma das  $n$  colunas de  $A$ , que conduzem ao mesmo escalar (o determinante de  $A$ ). Uns podem ser mais expeditos do que outros.

Se a matriz tiver elementos nulos, tem vantagem em aplicar o Teorema de Laplace a uma linha ou a uma coluna com um número máximo de zeros.

## Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

*A forma mais expedita de calcular  $\det A$  será pela aplicação do Teorema de Laplace à linha 3.*

*Aplicar o Teorema de Laplace à*

- *linha 1 de A*

$$\begin{aligned} \det A &\stackrel{\text{Lapl.}}{=} 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 9(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 10 - 9 \times 8 + 3 \times 0 = 10 - 72 = -62. \end{aligned}$$

- *linha 2 de A*

$$\begin{aligned} \det A &\stackrel{\text{Lapl.}}{=} 4(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -4 \times 18 + 5 \times 2 = -72 + 10 = -62. \end{aligned}$$

## Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- linha 3 de  $A$

$$\det A \stackrel{\text{Lapl.}}{=} 2(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times (-31) = -62.$$

- coluna 1 de  $A$

$$\begin{aligned} \det A &\stackrel{\text{Lapl.}}{=} 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 10 - 4 \times 18 = 10 - 72 = -62. \end{aligned}$$

- coluna 2 de  $A$

$$\begin{aligned} \det A &\stackrel{\text{Lapl.}}{=} 9(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -9 \times 8 + 5 \times 2 = -72 + 10 = -62. \end{aligned}$$

- coluna 3 de  $A$

$$\begin{aligned} \det A &\stackrel{\text{Lapl.}}{=} 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times 0 + 2 \times (5 - 36) = 2 \times (-31) = -62. \end{aligned}$$

## 3.2 Algumas propriedades do determinante

Os resultados sobre determinantes que sejam enunciados para linhas são válidos substituindo “linha” por “coluna”.

### Proposição

Se  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  tem uma linha nula então  $\det A = 0$ .

### Proposição

Seja  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ , com  $n \geq 2$ . Se  $A$  tem a linha  $i$  igual à linha  $j$ , com  $i \neq j$ , então

$$\det A = 0.$$

A demonstração é feita por indução em  $n$ .

- $n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} \text{ e } \det A = ab - ba = 0$$

- $n \geq 3$ . Seja  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  uma matriz que tem a linha  $i$  igual

- Hipótese de Indução: O determinante de qualquer matriz de  $\mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)}(\mathbb{K})$  com duas linhas iguais é zero.
- Como  $n \geq 3$ , existe  $k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $k \neq i$  e  $k \neq j$ . Aplicando o Teorema da Laplace à linha  $k$  de  $A$  obtemos

$$\det A = a_{k1} \hat{a}_{k1} + \dots + a_{kn} \hat{a}_{kn}.$$

Para  $l = 1, \dots, n$  tem-se, por definição,

$$\hat{a}_{kl} = (-1)^{k+l} \det A(k|l).$$

Uma vez que  $A(k|l) \in \mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)}(\mathbb{K})$  e continua a ter duas linhas iguais, pela hipótese de indução,  $\det A(k|l) = 0$ . Assim

$$\hat{a}_{k1} = \dots = \hat{a}_{kn} = 0 \text{ e } \det A = 0$$

## Teorema

Seja  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ . Tem-se  $\det A = \det A^T$ .

A demonstração é feita por indução em  $n$ .

- $n = 1$

$$A = [a_{11}] = A^T \text{ portanto } \det A = \det A^T$$

- $n \geq 2$

- Hipótese de Indução: O determinante de qualquer matriz de  $\mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)}(\mathbb{K})$ , é igual ao determinante da sua transposta.
- Seja  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  e  $B = A^T$ . Desenvolvemos o  $\det A$  segundo a linha 1

$$\det A = a_{11} \hat{a}_{11} + \cdots + a_{1n} \hat{a}_{1n}.$$

- $n \geq 2$

- Por definição,

$$\hat{a}_{1k} = (-1)^{1+k} \det A(1|k), \quad k = 1, \dots, n$$

Como  $A(1|k) \in \mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)}(\mathbb{K})$ , pela hipótese de indução

$$\hat{a}_{1k} = (-1)^{1+k} \det(A(1|k))^{\top}.$$

Como

$$(A(1|k))^{\top} = B(k|1),$$

obtemos

$$\hat{a}_{1k} = (-1)^{k+1} \det B(k|1) = \hat{b}_{k1}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \hat{b}_{11} + \dots + a_{1n} \hat{b}_{n1} \\ &= b_{11} \hat{b}_{11} + \dots + b_{n1} \hat{b}_{n1} \\ &= \det B = \det A^{\top} \end{aligned}$$

## Teorema

Seja  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ . Tem-se  $\det \bar{A} = \overline{\det A}$ .

## Teorema

Se  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  é uma matriz triangular superior (respectivamente, inferior) então o determinante de  $A$  é igual ao produto dos elementos da diagonal principal de  $A$ .

- $n = 1$ , é trivial pois  $A = [a_{11}]$  e  $\det A = a_{11}$ .
- $n \geq 2$ , seja  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  uma matriz triangular superior.
  - Hipótese de Indução: O determinante de qualquer matriz triangular superior de  $\mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)}(\mathbb{K})$  é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal.

• Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ com } n \geq 2.$$

- Aplicando o Teorema de Laplace à linha  $n$  de  $A$ , concluímos que

$$\begin{aligned}\det A &= a_{nn}(-1)^{n+n}\det A(n|n) \\ &= a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Dado que  $A(n|n) \in \mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)}(\mathbb{K})$  e é triangular superior pela hipótese de indução

$$\det A(n|n) = a_{11}a_{22} \cdots a_{n-1,n-1}.$$

Logo

$$\begin{aligned}\det A &= a_{nn}(a_{11}a_{22} \cdots a_{n-1,n-1}) \\ &= a_{11}a_{22} \cdots a_{n-1,n-1}a_{nn},\end{aligned}$$

como pretendíamos demonstrar.

- Se  $A$  é triangular inferior então  $A^T$  é triangular superior e  $\det A = \det A^T$ , concluímos que o determinante de  $A$  é igual ao produto dos elementos da diagonal principal de  $A^T$  que são iguais aos elementos da diagonal principal de  $A$ .

Sejam  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ . Pode ter-se

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B.$$

### Exemplo

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\det A = 0, \quad \det B = 0 \quad e \quad \det(A + B) = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 5.$$

## Proposição

Para  $i = 1, \dots, n$ , tem-se:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Da esquerda para a direita, sejam, respectivamente,  $A$ ,  $B$  e  $C$  as matrizes referidas no enunciado. Aplicamos o Teorema de Laplace à linha  $i$  de  $A$

$$\begin{aligned} \det A &= (b_{i1} + c_{i1})\hat{a}_{i1} + \cdots + (b_{in} + c_{in})\hat{a}_{in} \\ &= (b_{i1}\hat{a}_{i1} + \cdots + b_{in}\hat{a}_{in}) + (c_{i1}\hat{a}_{i1} + \cdots + c_{in}\hat{a}_{in}). \end{aligned}$$

Para  $l = 1, \dots, n$ ,  $A(i|l) = B(i|l) = C(i|l)$  pelo que  $\hat{a}_{il} = \hat{b}_{il} = \hat{c}_{il}$

Logo  $b_{i1}\hat{a}_{i1} + \cdots + b_{in}\hat{a}_{in} = b_{i1}\hat{b}_{i1} + \cdots + b_{in}\hat{b}_{in} = \det B$  e

$$c_{i1}\hat{a}_{i1} + \cdots + c_{in}\hat{a}_{in} = c_{i1}\hat{c}_{i1} + \cdots + c_{in}\hat{c}_{in} = \det C.$$

## 3.3 Transformações elementares e determinantes

### Teorema

Seja  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ . Tem-se

- ① Se  $i \neq j$  e  $A \xrightarrow{l_i \leftrightarrow l_j} B$  então  $\det B = -\det A$ .
- ② Se  $\alpha \neq 0$  e  $A \xrightarrow{\alpha l_i} B$  então  $\det B = \alpha \det A$ .
- ③ Se  $i \neq j$  e  $A \xrightarrow{l_i + \beta l_j} B$  então  $\det B = \det A$ .

**Dem. de 1.:** Se uma matriz tem duas linhas iguais então o seu determinante é nulo. Sendo  $L_1, \dots, L_n$ ,  $n$ -uplos, tem-se

$$\det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + L_j \\ \vdots \\ L_i + L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + L_j \\ \vdots \\ L_i + L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_i + L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i + L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \\
&= \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \quad (\text{prop. anterior}) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 0 = 0 + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = - \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

**Dem. de 2.:** (Se  $\alpha \neq 0$  e  $A \xrightarrow{\alpha I_i} B$  então  $\det B = \alpha \det A$ .)

Seja  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  e

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \alpha a_{i1} & \cdots & \alpha a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Aplicamos o Teorema de Laplace à linha  $i$  de  $B$

$$\begin{aligned} \det B &= (\alpha a_{i1}) \hat{b}_{i1} + \cdots + (\alpha a_{in}) \hat{b}_{in} \\ &= \alpha (a_{i1} \hat{b}_{i1} + \cdots + a_{in} \hat{b}_{in}). \end{aligned}$$

Para  $l = 1, \dots, n$ , tem-se  $A(i|l) = B(i|l)$  e, portanto,  $\hat{b}_{il} = \hat{a}_{il}$ . Logo

$$\det B = \alpha (a_{i1} \hat{a}_{i1} + \cdots + a_{in} \hat{a}_{in}) = \alpha \det A.$$

Dem. de 3.: (Se  $i \neq j$  e  $A \xrightarrow{L_i + \beta L_j} B$  então  $\det B = \det A$ .)

Sejam  $\beta \in \mathbb{K}$ ,  $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \textcolor{red}{L_i} \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \textcolor{red}{L_i} + \textcolor{blue}{\beta} L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$ , com  $L_1, \dots, L_n$   $n$ -uplos.

Tem-se

$$\begin{aligned} \det B &= \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \textcolor{red}{L_i} + \textcolor{blue}{\beta} L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \textcolor{red}{L_i} \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \textcolor{blue}{\beta} L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \textcolor{red}{L_i} \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \textcolor{blue}{\beta} \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \det A + \textcolor{blue}{\beta} \times 0 = \det A. \end{aligned}$$

## Proposição

Seja  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Tem-se

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A.$$

## Proposição

Seja  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  e  $A \xrightarrow{(linhas)} B$ , então

$$\det A = 0 \text{ se, e só se, } \det B = 0.$$

Atenda a que  $\det B = (-1)^r \alpha_1 \cdots \alpha_s \det A$  com  $r, s \in \mathbb{N}_0$ .

## Exemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 15 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 9 & 15 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Se  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  e  $A \xrightarrow{(linhas)} B$  (f.e.) então  $B$  é triangular superior (eventualmente com elementos nulos na diagonal principal).

**Processo para calcular o determinante de uma matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$**

- Efectuam-se transformações elementares sobre linhas de forma a transformar  $A$  numa matriz  $B$  em forma de escada.
- Considerando as correspondentes alterações no determinante resultantes de cada uma dessas transformações elementares obtém-se a relação entre  $\det A$  e  $\det B$ .
- Como  $\det B$  é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal e é conhecida a relação entre  $\det A$  e  $\det B$ , obtém-se  $\det A$ .

### Exemplo

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{l_3 + (-2)l_1} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\
 = -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{l_3 + (-2)l_2} -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-5) \times (1 \times 1 \times (-2)) = 10.$$

## Teorema

Seja  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ . Tem-se

$A$  é invertível se, e só se,  $\det A \neq 0$ .

$$A \xrightarrow{(linhas)} B \text{ f.e..}$$

Sabemos que  $A$  é invertível se, e só se,  $r(A) = n (= r(B))$ . Tal equivale a afirmar que todos os elementos da diagonal principal de  $B$  são não nulos, ou equivalentemente, que

$$\det B \neq 0.$$

Como, pela Proposição anterior,

$$\det B \neq 0 \text{ se, e só se, } \det A \neq 0,$$

obtemos o que pretendíamos.

## 3.4 Determinante do produto de matrizes

### Proposição

Seja  $A, \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  e seja  $B, \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  uma matriz elementar. Tem-se  $\det(EA) = \det E \det A$ .

### Proposição

- 1 Sejam  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ . Tem-se  $\det(AB) = \det A \det B$ .
- 2 Mais geralmente, se  $t \geq 2$  e  $A_1, \dots, A_t \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  então

$$\det(A_1 \cdots A_t) = \det A_1 \cdots \det A_t.$$

### Proposição

Seja  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  uma matriz invertível, ou equivalentemente, uma matriz tal que  $\det A \neq 0$ . Tem-se

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

De  $AA^{-1} = I_n$  resulta

$$\det(AA^{-1}) = \det I_n \Leftrightarrow \det A \det A^{-1} = 1$$

Logo,  $\det A \neq 0$  e

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

## 3.5 Cálculo da inversa a partir da adjunta

### Definição

Seja  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ , com  $n \geq 2$ . Chamamos **matriz dos complementos algébricos** de  $A$ , e representamos por  $\hat{A}$ , a matriz que se obtém de  $A$  substituindo cada elemento pelo complemento algébrico da respectiva posição.

Chamamos **adjunta** de  $A$ , e representamos por  $\text{adj } A$ , à transposta da matriz dos complementos algébricos de  $A$ , isto é,  $\text{adj } A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  e

$$\text{adj } A = \hat{A}^T.$$

### Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -8 \\ 0 & -7 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -8 \\ 0 & -7 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & -7 & 0 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

## Proposição

Seja  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ , com  $n \geq 2$ . Se  $i \neq j$ , com  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , então  $a_{i1}\hat{a}_{j1} + a_{i2}\hat{a}_{j2} + \dots + a_{in}\hat{a}_{jn} = 0$ .

## Proposição

Seja  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ . Tem-se

$$\textcircled{1} \quad A \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \det A \end{bmatrix} = (\det A) I_n.$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Se } A \text{ é invertível então } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Dem de 1.:  $A = [a_{ij}]$

$$\begin{aligned} A \text{adj } A &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \cdots & \hat{a}_{1n} \\ \hat{a}_{n1} & \cdots & \hat{a}_{nn} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \cdots & \hat{a}_{n1} \\ \hat{a}_{1n} & \cdots & \hat{a}_{nn} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pela definição de produto de matrizes, o elemento  $(i, i)$  da matriz  $A \text{adj } A$  é

$$a_{i1}\hat{a}_{i1} + a_{i2}\hat{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\hat{a}_{in}$$

que pelo Teorema de Laplace aplicado à linha  $i$ , vai ser igual a  $\det A$ . Para  $i \neq j$ , o elemento  $(i, j)$  da matriz  $A \text{adj } A$  é

$$a_{i1}\hat{a}_{j1} + a_{i2}\hat{a}_{j2} + \cdots + a_{in}\hat{a}_{jn}.$$

Que pelo Teorema de Laplace, é igual ao determinante da matriz que se obtém de  $A$  substituindo a linha  $j$  por uma linha igual à linha  $i$ . Tal matriz tem duas linhas iguais (a  $i$  e a  $j$ ), então o seu determinante é zero. Assim

$$a_{i1}\hat{a}_{j1} + a_{i2}\hat{a}_{j2} + \cdots + a_{in}\hat{a}_{jn} = 0, \text{ para } i \neq j$$

Então  $A \text{adj } A = (\det A)I_n$ .

**Dem de 2.:** Se  $A$  é invertível, da igualdade  $A \operatorname{adj} A = (\det A) I_n$  resulta, multiplicando ambos os membros, à esquerda, por  $A^{-1}$ ,

$$\operatorname{adj} A = (\det A) A^{-1},$$

ou equivalentemente, como  $\det A \neq 0$ ,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

## 3.6 Regra de Cramer

Relembremos a definição de sistema de Cramer que apresentámos no capítulo 2:

### Definição

*Sistema de Cramer é um sistema de equações lineares em que a matriz simples do sistema é quadrada e invertível.*

Seja  $AX = B$  um sistema de equações lineares, com  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  invertível. Do Capítulo 2, sabemos que um sistema deste tipo é possível determinado. Sabemos também determinar a sua solução utilizando a inversa da matriz simples do sistema.

O resultado seguinte diz-nos como podemos, utilizando determinantes, calcular a solução única de tal sistema.

## Teorema (Regra de Cramer)

Seja  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$  um sistema de equações lineares, com  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  invertível. Seja  $\mathbf{A}_{(j)}$  a matriz que se obtém de  $\mathbf{A}$  substituindo a coluna  $j$  pela coluna de  $\mathbf{B}$ . A solução (única) do sistema anterior é o elemento de  $\mathbb{K}^n$

$$\left( \frac{\det \mathbf{A}_{(1)}}{\det \mathbf{A}}, \frac{\det \mathbf{A}_{(2)}}{\det \mathbf{A}}, \dots, \frac{\det \mathbf{A}_{(n)}}{\det \mathbf{A}} \right).$$

Seja  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ . A solução (única) do sistema  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$  é

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tal que } \mathbf{A} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}.$$

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \left( \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj } \mathbf{A} \right) \mathbf{B} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \left( (\text{adj } \mathbf{A}) \mathbf{B} \right)$$

e o elemento da linha  $j$  da matriz  $(\text{adj } \mathbf{A}) \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$  é

$$\hat{a}_{1j} b_1 + \dots + \hat{a}_{nj} b_n = b_1 \hat{a}_{1j} + \dots + b_n \hat{a}_{nj}.$$

Aplicando o Teorema de Laplace à coluna  $j$  da matriz  $A_{(j)}$  concluímos que

$$\det A_{(j)} = b_1 \hat{a}_{1j} + \cdots + b_n \hat{a}_{nj}.$$

Exemplo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}, \text{ sobre } \mathbb{R}$$

tem matriz simples  $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ , invertível, pois

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{l_2 + (-2)l_1 \\ l_3 + (-1)l_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{l_3 + (-1)l_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Pelo teorema anterior, a solução, única, de tal sistema é  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$  com

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2}$$

### Exemplo

$$\alpha_1 = \frac{2}{2} = 1, \quad \alpha_2 = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{e} \quad \alpha_3 = \frac{0}{2} = 0.$$

$(1, -1, 0)$  é a solução única do sistema.

A Regra de Cramer pode utilizar-se para resolver sistemas  $\textcolor{red}{A}X = \textcolor{blue}{B}$  em que  $\textcolor{red}{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  é invertível (sistemas de Cramer). Mesmo nestes casos, salvo para valores pequenos de  $n$ , não tem interesse computacional, sendo preferível utilizar o método referido no Capítulo 2.