Álgebra Linear e Geometria Analítica

8 - Geometria Analítica

Departamento de Matemática
FCT/UNL

Programa

1. Matrizes
2. Sistemas de Equações Lineares
3. Determinantes
4. Espaços Vectoriais
5. Aplicações Lineares
6. Valores e Vectores Próprios
7. Produto Interno, Produto Externo e Produto Misto
8. Geometria Analítica

Equações da Recta e do Plano

Definem uma recta:

- Dois pontos dessa recta
- Um ponto da recta e um vector paralelo a essa recta.

Definição

A um vector não nulo paralelo a uma recta r chamamos **vector director da recta** r.

Observação

Se A e B são dois pontos distintos de uma recta r, o vector $\overrightarrow{AB}$ é um vector director da recta r.

Equação vectorial da recta

Dado um ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ de uma recta r e um vector $u(u_1, u_2, u_3)$ director da recta r chamamos **equação vectorial da recta** *r,à equação onde um qualquer ponto $P(x, y, z)$ da recta r é dado por:*

$$r : P = A + \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Atendendo a que

$$r : (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3), \lambda \in \mathbb{R},$$

a equação anterior é ainda equivalente ao sistema:

Equações cartesianas da recta

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

que habitualmente designamos por **equações paramétricas da recta** *r*.

Equações da Recta e do Plano

Para $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0 \quad e \quad u_3 \neq 0,$ *temos*

$$x = a_1 + \lambda u_1 \Longrightarrow \lambda = \frac{x - a_1}{u_1}$$
$$y = a_2 + \lambda u_2 \Longrightarrow \lambda = \frac{y - a_2}{u_2}$$
$$z = a_3 + \lambda u_3 \Longrightarrow \lambda = \frac{z - a_3}{u_3}$$

e portanto,

$$\mathbf{\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3}},$$

estas equações são designadas por **equações normais da recta**.

O que se passa se $u_1 = 0 \vee u_2 = 0 \vee u_3 = 0$?

Equações da Recta e do Plano

Quando $u_3 \neq 0$ e considerando

$$\mathbf{m} = \frac{u_1}{u_3} \quad \mathbf{n} = \frac{u_2}{u_3} \quad \mathbf{p} = a_1 - \frac{a_3 u_1}{u_3} \quad \mathbf{q} = a_2 - \frac{a_3 u_2}{u_3},$$

chamamos **equações reduzidas da recta**ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} = \mathbf{mz} + \mathbf{p} \\ \mathbf{y} = \mathbf{nz} + \mathbf{q} \end{array} \right. .$$

Equações da Recta e do Plano

Definem um plano:

- Três pontos não colineares desse plano.
- Um ponto do plano e dois vectores não paralelos desse plano.
- Um ponto do plano e um vector perpendicular a esse plano.

Definição

Aos vectores não nulos paralelos a um plano π e não colineares chamamos **vectores directores do plano** π.

Observação

Se A e B e C são três pontos distintos e não colineares de um plano π, os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são vectores directores do plano π.
Se u e v são vectores directores do plano π então o vector $u \times v$ é um vector perpendicular ao plano π.

Equação vectorial do plano

Dado um ponto A de um plano π e dois vectores directores do plano π, $u(u_1, u_2, u_3)$ e $v(v_1, v_2, v_3)$ chamamos **equação vectorial do plano** π, *à equação onde um qualquer ponto P do plano π é dado por :*

$$\pi : P = A + \lambda u + \mu v, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Atendendo a que

$$\pi : (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3), \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

equação anterior é ainda equivalente ao sistema:

Equações cartesianas do plano

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

que habitualmente designamos por **equações paramétricas do plano** π**.**

Como referimos, se u e v são vectores directores do plano π então o vector $u \times v$ é um vector perpendicular ao plano π.

Sendo assim $u \times v$ é ainda perpendicular a qualquer vector do plano π.

Sendo $A(a_1, a_2, a_3)$ um ponto do plano π então, para qualquer ponto $P(x, y, z) \in \pi$ teremos que o vector $\overrightarrow{AP}$ será sempre perpendicular ao vector $u \times v$, isto é $\overrightarrow{AP}|(u \times v) = 0$.

De facto, esta é uma caracterização dos pontos P do plano π.Assim dizer que $P \in \pi$ é equivalente a afirmar que

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x - a_1} & \mathbf{y - a_2} & \mathbf{z - a_3} \\ \mathbf{u_1} & \mathbf{u_2} & \mathbf{u_3} \\ \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Os pontos do plano π são os pontos de $\mathbb{R}^3$ que são soluções da equação linear nas incógnitas x, y e z:

$$\mathbf{ax + by + cz + d = 0}.$$

A esta equação chamamos a **equação geral do plano** π.

Observação

A sequência (a, b, c) dos coeficientes das incógnitas x, y e z da equação geral de um plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ é a sequência das coordenadas de um vector perpendicular ao plano π.

Problemas métricos: distâncias

Sejam P e Q dois pontos de $\mathbb{R}^3$. Define-se **distância entre os pontos P e Q**, e representa-se por $\mathrm{d}\,(P,Q)$, a norma do vector $\overrightarrow{PQ}$, isto é,

$$\mathrm{d}\,(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

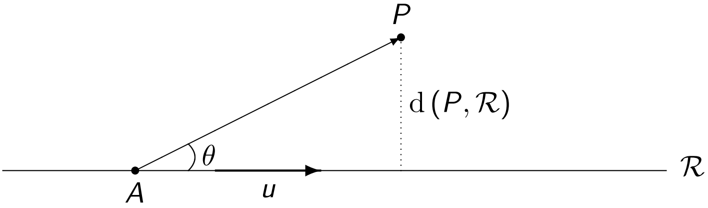
Sejam $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ pontos, rectas ou planos de $\mathbb{R}^3$. Define-se **distância entre $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$** como

$$\mathrm{d}\,(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) = \min\{\mathrm{d}\,(P,Q) : \; P \in \mathcal{F}_1, \; Q \in \mathcal{F}_2\}.$$

Observação

Se $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$ então $\mathrm{d}\,(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) = 0$.

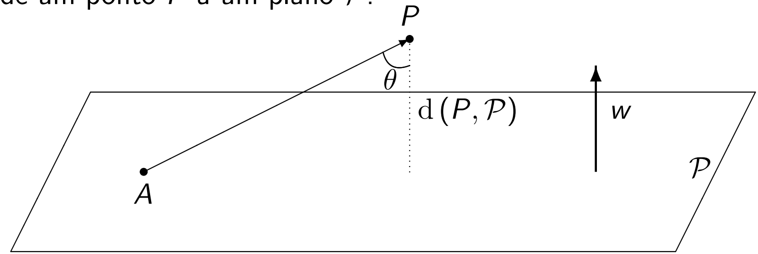
- Distância de um ponto P a uma recta $\mathcal{R}$:



$$\mathrm{d}\,(P,\mathcal{R}) = \|\overrightarrow{AP}\|\,\mathsf{sen}\,\theta = \frac{\|\overrightarrow{AP}\|\|u\|\,\mathsf{sen}\,\theta}{\|u\|} = \frac{\|\overrightarrow{AP}\times u\|}{\|u\|}.$$

$\theta = \measuredangle(u, \overrightarrow{AP})$

- Distância de um ponto P a um plano $\mathcal{P}$:



$$\mathrm{d}\left(P,\mathcal{P}\right)=\|\overrightarrow{AP}\|\,|\cos\theta|=\frac{\|\overrightarrow{AP}\|\|w\|\,|\cos\theta|}{\|w\|}=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\mid w\right|}{\|w\|}.$$

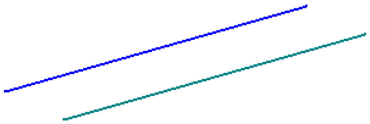
$\theta=\measuredangle(\overrightarrow{AP},w)$

Problemas não métricos: incidência e paralelismo

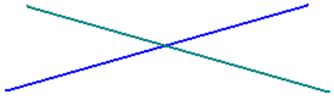
Posição relativa entre duas rectas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$:

(a) $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.

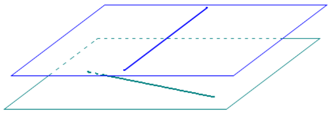
(b) $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ são estritamente paralelas.



(c) $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ são concorrentes, isto é, a sua intersecção é um ponto.



(d) $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ são enviesadas.



u_1 - vector com a direcção de $\mathcal{R}_1$
u_2 - vector com a direcção de $\mathcal{R}_2$
A_1 - ponto da recta $\mathcal{R}_1$

u_1 e u_2 têm a mesma direcção $\Longrightarrow$ (a) ou (b).
u_1 e u_2 não têm a mesma direcção $\Longrightarrow$ (c) ou (d).

(a) ou (b)? $A_1 \in \mathcal{R}_2 \Rightarrow$ (a), $A_1 \notin \mathcal{R}_2 \Rightarrow$ (b)

(c) ou (d)? $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \neq \emptyset \Rightarrow$ (c), $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset \Rightarrow$ (d)

Problemas métricos: distâncias

Distância entre duas rectas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$:

Caso (a): $\mathrm{d}\left(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\right) = 0$.

Caso (b): $\mathrm{d}\left(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\right)$ é a distância de um ponto qualquer de $\mathcal{R}_1$ à recta $\mathcal{R}_2$ (ou de um ponto qualquer de $\mathcal{R}_2$ à recta $\mathcal{R}_1$).

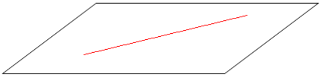
Caso (c): $\mathrm{d}\left(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\right) = 0$.

Caso (d): Considere-se um plano $\mathcal{P}_1$ contendo a recta $\mathcal{R}_1$ e paralelo à recta $\mathcal{R}_2$. A $\mathrm{d}\left(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\right)$ é a distância de um ponto qualquer de $\mathcal{R}_2$ ao plano $\mathcal{P}_1$.

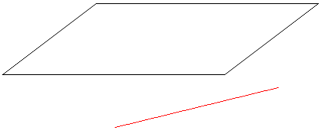
Problemas não métricos: incidência e paralelismo

Posição relativa entre uma recta $\mathcal{R}$ e um plano $\mathcal{P}$:

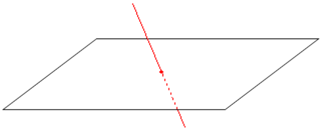
(a) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}$.



(b) $\mathcal{R}$ é estritamente paralela ao plano $\mathcal{P}$.



(c) A intersecção entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{P}$ é um ponto.



u - vector com a direcção da recta $\mathcal{R}$
w - vector perpendicular ao plano $\mathcal{P}$
A - ponto da recta $\mathcal{R}$

$u \mid w = 0 \Longrightarrow$ (a) ou (b).
$u \mid w \neq 0 \Longrightarrow$ (c).

(a) ou (b)? $A \in \mathcal{P} \Rightarrow$ (a), $A \notin \mathcal{P} \Rightarrow$ (b)

Exemplo:

Consideremos fixado um referencial ortonormado e directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

Seja $\mathcal{R}$ a recta de equações normais

$$x = 2 \qquad \text{e} \qquad \frac{y-3}{2} = \frac{z}{4}$$

e $\mathcal{P}$ o plano que passa pelos pontos

$$A = (1, 0, -1), \quad B = (2, 2, 0) \quad \text{e} \quad C = (1, 1, 1).$$

Vejamos que $\mathcal{R}$ é estritamente paralela a $\mathcal{P}$.

Exemplo:

Determinemos um vector u com a direcção de $\mathcal{R}$ e um vector w perpendicular a $\mathcal{P}$. Conforme referimos, $\mathcal{R}$ é paralela a $\mathcal{P}$ (podendo ser coincidente ou estritamente paralela) se, e só se,

$$u \mid w = 0.$$

Para obter u basta determinar dois pontos distintos da recta $\mathcal{R}$, por exemplo,

$$D = (2, 3, 0) \qquad \text{e} \qquad E = (2, 1, -4)$$

e considerar, por exemplo,

$$u = \overrightarrow{DE} = (0, -2, -4).$$

Exemplo:

Consideremos, por exemplo, $w = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Como $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$ e $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 2)$ tem-se

$$w = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (3, -2, 1).$$

$$\left(\text{Mnemónica:} \quad \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3e_1 - 2e_2 + 1e_3. \right)$$

Assim,

$$u \mid w = (0, -2, -4) \mid (3, -2, 1) = 0 \times 3 + (-2) \times (-2) + (-4) \times 1 = 0$$

e, portanto, $\mathcal{R}$ é paralela a $\mathcal{P}$.

Exemplo:

Para determinarmos se $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$ ou se $\mathcal{R}$ é estritamente paralela a $\mathcal{P}$ temos de considerar um ponto qualquer de $\mathcal{R}$ e verificar se pertence ou não ao plano $\mathcal{P}$.

Como $(3, -2, 1)$ é um vector perpendicular a $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}$ passa no ponto $A = (1, 0, -1)$, uma equação geral do plano $\mathcal{P}$ será

$$3x - 2y + 1z + d = 0$$

com

$$d = -(3 \times 1 - 2 \times 0 + 1 \times (-1)) = -2.$$

Exemplo:

Atendendo à equação geral do plano $\mathcal{P}$

$$3x - 2y + z - 2 = 0$$

concluímos que o ponto da recta $\mathcal{R}$, $D = (2, 3, 0)$, não pertence ao plano $\mathcal{P}$ pois

$$3 \times 2 - 2 \times 3 + 0 - 2 \neq 0.$$

Logo $\mathcal{R}$ é estritamente paralela a $\mathcal{P}$.

Problemas métricos: distâncias

Distância entre uma recta $\mathcal{R}$ e um plano $\mathcal{P}$:

Caso (a): $\mathrm{d}\,(\mathcal{R},\mathcal{P}) = 0.$

Caso (b): $\mathrm{d}\,(\mathcal{R},\mathcal{P})$ é a distância de um ponto qualquer da recta $\mathcal{R}$ ao plano $\mathcal{P}$.

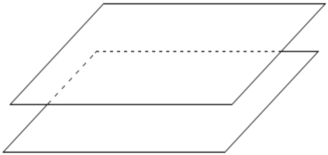
Caso (c): $\mathrm{d}\,(\mathcal{R},\mathcal{P}) = 0.$

Problemas não métricos: incidência e paralelismo

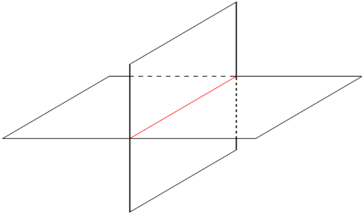
Posição relativa entre dois planos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$:

(a) $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$.

(b) $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são estritamente paralelos.



(c) A intersecção dos planos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ é uma recta.



w_1 - vector perpendicular ao plano $\mathcal{P}_1$.
w_2 - vector perpendicular ao plano $\mathcal{P}_2$.
A_1 - ponto do plano $\mathcal{P}_1$.

w_1 e w_2 têm a mesma direcção $\Longrightarrow$ (a) ou (b).
w_1 e w_2 não têm a mesma direcção $\Longrightarrow$ (c).

(a) ou (b)? $A_1 \in \mathcal{P}_2 \Rightarrow$ (a), $A_1 \notin \mathcal{P}_2 \Rightarrow$ (b)

Problemas métricos: distâncias

Distância entre dois planos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$:

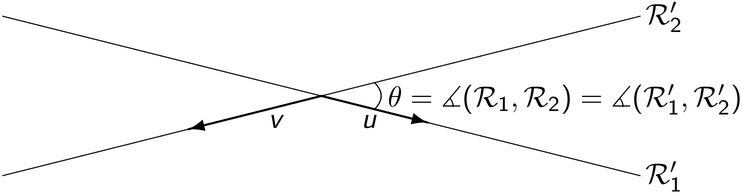
Caso (a): $\mathrm{d}\,(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = 0$.

Caso (b): $\mathrm{d}\,(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ é a distância de um ponto qualquer de $\mathcal{P}_1$ ao plano $\mathcal{P}_2$ (ou de um ponto qualquer de $\mathcal{P}_2$ ao plano $\mathcal{P}_1$).

Caso (c): $\mathrm{d}\,(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = 0$.

Problemas métricos: ângulos

Ângulo de duas rectas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$:
Define-se como o menor dos ângulos formados por duas rectas complanares $\mathcal{R}'_1$ e $\mathcal{R}'_2$, uma com a direcção de $\mathcal{R}_1$ e a outra com a direcção de $\mathcal{R}_2$.



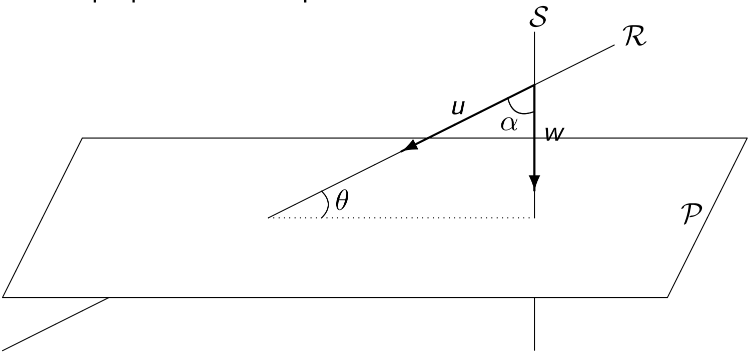
u - vector com a direcção de $\mathcal{R}_1$ (e de $\mathcal{R}'_1$).

v - vector com a direcção de $\mathcal{R}_2$ (e de $\mathcal{R}'_2$).

$$\theta = \measuredangle(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \text{arccos}\,\frac{|u \mid v|}{\|u\|\|v\|}.$$

Ângulo de uma recta $\mathcal{R}$ e um plano $\mathcal{P}$:

Define-se como sendo o complementar do ângulo formado pela recta $\mathcal{R}$ com uma recta $\mathcal{S}$ perpendicular ao plano $\mathcal{P}$.



$$\cos\alpha = \frac{|u \mid w|}{\|u\|\|w\|} = \operatorname{sen}\theta.$$

$$\measuredangle(\mathcal{R},\mathcal{P}) = \theta = \arcsin\frac{|u \mid w|}{\|u\|\|w\|}.$$

Ângulo de dois planos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$:
Define-se como sendo o ângulo formado por duas rectas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, com $\mathcal{R}_1$ perpendicular a $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{R}_2$ perpendicular a $\mathcal{P}_2$.

w_1 - vector perpendicular a $\mathcal{P}_1$.

w_2 - vector vector perpendicular a $\mathcal{P}_2$.

$$\measuredangle(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \operatorname{arccos} \frac{|w_1 \mid w_2|}{\|w_1\| \|w_2\|}.$$