Álgebra Linear e Geometria Analítica

Resolução de exercícios sobre
Geometria Analítica

*Departamento de Matemática
FCT/UNL*

- 8.15 Considere as rectas $r : (x, y, z) = (1, 2, 0) + \lambda(1, 1, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $s : (x, y, z) = (0, 0, 2) + \mu(0, 2, 0)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Determine:
- (a) A posição relativa das duas rectas.

R: Os vectores $u = (1, 1, 0)$ e $v = (0, 2, 0)$ são vectores directores das rectas r e s , respectivamente.

(a) Como u e v não são colineares, então as rectas não são paralelas. Das equações das rectas r e s implica que um ponto (x, y, z) na intersecção das rectas satisfaz

$$\begin{aligned} x &= 1 + \lambda &= 0, \\ y &= 2 + \lambda &= 2\mu \\ z &= 0 &= 2, \end{aligned}$$

para certos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, donde r e s não se intersectam. Logo r e s são rectas enviesadas.

- 8.15 Considere as rectas $r : (x, y, z) = (1, 2, 0) + \lambda(1, 1, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $s : (x, y, z) = (0, 0, 2) + \mu(0, 2, 0)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Determine:
- (a) A posição relativa das duas rectas.

R: Os vectores $u = (1, 1, 0)$ e $v = (0, 2, 0)$ são vectores directores das rectas r e s , respectivamente.

(a) Como u e v não são colineares, então as rectas não são paralelas. Das equações das rectas r e s implica que um ponto (x, y, z) na intersecção das rectas satisfaz

$$\begin{aligned}x &= 1 + \lambda &= 0, \\y &= 2 + \lambda &= 2\mu \\z &= 0 &= 2,\end{aligned}$$

para certos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, donde r e s não se intersectam. Logo r e s são rectas enviesadas.

- 8.15 Considere as rectas $r : (x, y, z) = (1, 2, 0) + \lambda(1, 1, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $s : (x, y, z) = (0, 0, 2) + \mu(0, 2, 0)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Determine:
- (a) A posição relativa das duas rectas.

R: Os vectores $u = (1, 1, 0)$ e $v = (0, 2, 0)$ são vectores directores das rectas r e s , respectivamente.

(a) Como u e v não são colineares, então as rectas não são paralelas. Das equações das rectas r e s implica que um ponto (x, y, z) na intersecção das rectas satisfaz

$$x = 1 + \lambda = 0,$$

$$y = 2 + \lambda = 2\mu$$

$$z = 0 = 2,$$

para certos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, donde r e s não se intersectam. Logo r e s são rectas enviesadas.

- (b) Uma recta ortogonal a r e a s e que as intersecte.
 (c) A distância entre r e s .

(b) É fácil verificar que o vetor $(0, 0, 1)$ é ortogonal a u e a v . Se $t : (x, y, z) = (a, b, c) + \delta(0, 0, 1), \delta \in \mathbb{R}$ é uma recta nas condições do enunciado, então como a intersecção de t com r é não vazia temos $x = 1 + \lambda = a, y = 2 + \lambda = b$ e $z = 0 = c + \delta$ (para certos $\lambda, \delta \in \mathbb{R}$) donde $a + 1 = b$. Como a intersecção de t com s é Não vazia temos $x = 0 = a, y = 2\mu = b$ e $z = 2 = c + \delta$ (para certos $\mu, \delta \in \mathbb{R}$), donde $a = 0$. Por exemplo, $t : (x, y, z) = (0, 1, 0) + \delta(0, 0, 1), \delta \in \mathbb{R}$ satisfaz as condições pedidas.

(c) Consideremos o plano $\mathcal{P}$ que contém r e é paralelo a s e por isso contém o ponto $(1, 2, 0)$ e é perpendicular ao vector $(0, 0, 1)$. O plano $\mathcal{P}$ tem equação geral $z = 0$. Consideremos o ponto $A(0, 0, 2) \in s$. Temos $d(r, s) = d(A, \mathcal{P}) = 2$.

- (b) Uma recta ortogonal a r e a s e que as intersecte.
 (c) A distância entre r e s .

(b) É fácil verificar que o vetor $(0, 0, 1)$ é ortogonal a u e a v . Se $t : (x, y, z) = (a, b, c) + \delta(0, 0, 1), \delta \in \mathbb{R}$ é uma recta nas condições do enunciado, então como a intersecção de t com r é não vazia temos $x = 1 + \lambda = a, y = 2 + \lambda = b$ e $z = 0 = c + \delta$ (para certos $\lambda, \delta \in \mathbb{R}$) donde $a + 1 = b$. Como a intersecção de t com s é Não vazia temos $x = 0 = a, y = 2\mu = b$ e $z = 2 = c + \delta$ (para certos $\mu, \delta \in \mathbb{R}$), donde $a = 0$. Por exemplo, $t : (x, y, z) = (0, 1, 0) + \delta(0, 0, 1), \delta \in \mathbb{R}$ satisfaz as condições pedidas.

(c) Consideremos o plano $\mathcal{P}$ que contém r e é paralelo a s e por isso contém o ponto $(1, 2, 0)$ e é perpendicular ao vector $(0, 0, 1)$. O plano $\mathcal{P}$ tem equação geral $z = 0$. Consideremos o ponto $A(0, 0, 2) \in s$. Temos $d(r, s) = d(A, \mathcal{P}) = 2$.

- (b) Uma recta ortogonal a r e a s e que as intersecte.
 (c) A distância entre r e s .

(b) É fácil verificar que o vetor $(0, 0, 1)$ é ortogonal a u e a v . Se $t : (x, y, z) = (a, b, c) + \delta(0, 0, 1), \delta \in \mathbb{R}$ é uma recta nas condições do enunciado, então como a intersecção de t com r é não vazia temos $x = 1 + \lambda = a, y = 2 + \lambda = b$ e $z = 0 = c + \delta$ (para certos $\lambda, \delta \in \mathbb{R}$) donde $a + 1 = b$. Como a intersecção de t com s é Não vazia temos $x = 0 = a, y = 2\mu = b$ e $z = 2 = c + \delta$ (para certos $\mu, \delta \in \mathbb{R}$), donde $a = 0$. Por exemplo, $t : (x, y, z) = (0, 1, 0) + \delta(0, 0, 1), \delta \in \mathbb{R}$ satisfaz as condições pedidas.

(c) Consideremos o plano $\mathcal{P}$ que contém r e é paralelo a s e por isso contém o ponto $(1, 2, 0)$ e é perpendicular ao vector $(0, 0, 1)$. O plano $\mathcal{P}$ tem equação geral $z = 0$. Consideremos o ponto $A(0, 0, 2) \in s$. Temos $d(r, s) = d(A, \mathcal{P}) = 2$.

8.16 Considere as rectas r e s definidas Por

$$r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(4, 0, -3), \lambda \in \mathbb{R}$$

e

$$s : \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{4}.$$

(a) Verifique que as rectas não se intersectam e que não são paralelas.

R: Os vectores $u = (4, 0, -3)$ e $v = (3, 3, 4)$ são vectores directores das rectas r e s , respectivamente.

(a) Como u e v não são colineares, então as rectas não são paralelas. A recta s é definida pela equação vetorial

$$(x, y, z) = (2, 2, -4) + \mu(3, 3, 4), \mu \in \mathbb{R}.$$

Das equações das rectas r e s resulta que um ponto (x, y, z) na intersecção das rectas satisfaz $x = 1 + 4\lambda = 2 + 3\mu$, $y = 2 = 2 + 3\mu$ e $z = 3 - 3\lambda = -4 + 4\mu$, donde $\mu = 0$ e $\lambda = \frac{1}{4} = \frac{7}{3}$, pelo que r e s não se intersectam. Logo r e s são rectas enviesadas.

8.16 Considere as rectas r e s definidas Por

$$r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(4, 0, -3), \lambda \in \mathbb{R}$$

e

$$s : \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{4}.$$

(a) Verifique que as rectas não se intersectam e que não são paralelas.

R: Os vectores $u = (4, 0, -3)$ e $v = (3, 3, 4)$ são vectores directores das rectas r e s , respectivamente.

(a) Como u e v não são colineares, então as rectas não são paralelas. A recta s é definida pela equação vetorial

$$(x, y, z) = (2, 2, -4) + \mu(3, 3, 4), \mu \in \mathbb{R}.$$

Das equações das rectas r e s resulta que um ponto (x, y, z) na intersecção das rectas satisfaz $x = 1 + 4\lambda = 2 + 3\mu$, $y = 2 = 2 + 3\mu$ e $z = 3 - 3\lambda = -4 + 4\mu$, donde $\mu = 0$ e $\lambda = \frac{1}{4} = \frac{7}{3}$, pelo que r e s não se intersectam. Logo r e s são rectas enviesadas.

8.16 Considere as rectas r e s definidas Por

$$r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(4, 0, -3), \lambda \in \mathbb{R}$$

e

$$s : \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{4}.$$

(a) Verifique que as rectas não se intersectam e que não são paralelas.

R: Os vectores $u = (4, 0, -3)$ e $v = (3, 3, 4)$ são vectores directores das rectas r e s , respectivamente.

(a) Como u e v não são colineares, então as rectas não são paralelas. A recta s é definida pela equação vetorial

$$(x, y, z) = (2, 2, -4) + \mu(3, 3, 4), \mu \in \mathbb{R}.$$

Das equações das rectas r e s resulta que um ponto (x, y, z) na intersecção das rectas satisfaz $x = 1 + 4\lambda = 2 + 3\mu$, $y = 2 = 2 + 3\mu$ e $z = 3 - 3\lambda = -4 + 4\mu$, donde $\mu = 0$ e $\lambda = \frac{1}{4} = \frac{7}{3}$, pelo que r e s não se intersectam. Logo r e s são rectas enviesadas.

- (b) Escreva uma equação do plano que contém r e é paralelo a s .
 (c) Determine a distância entre r e s .

(b) Seja $\mathcal{P}$ o plano que contém r e é paralelo a s e por isso contém o ponto $A(1, 2, 3)$ e tem vectores directores u e v .

$$\text{Assim, } \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 4 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 9x - 25y + 12z + 5 = 0 \text{ é uma}$$

equação geral do plano $\mathcal{P}$.

(c) Consideremos o ponto $P(2, 2, -4) \in s$.

$$\text{Temos } d(r, s) = d(P, \mathcal{P}) = \frac{|\vec{AP}|_w}{\|w\|} = \frac{|(1, 0, -7)|(9, -25, 12)|}{\sqrt{9^2 + (-25)^2 + 12^2}} = \frac{15}{\sqrt{34}}, \text{ pois}$$

$$\vec{AP} = (1, 0, -7).$$

- (b) Escreva uma equação do plano que contém r e é paralelo a s .
 (c) Determine a distância entre r e s .

(b) Seja $\mathcal{P}$ o plano que contém r e é paralelo a s e por isso contém o ponto $A(1, 2, 3)$ e tem vectores directores u e v .

Assim,
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 4 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 9x - 25y + 12z + 5 = 0$$
 é uma equação geral do plano $\mathcal{P}$.

(c) Consideremos o ponto $P(2, 2, -4) \in s$.

Temos $d(r, s) = d(P, \mathcal{P}) = \frac{|\vec{AP}|_w}{\|w\|} = \frac{|(1, 0, -7)|(9, -25, 12)|}{\sqrt{9^2 + (-25)^2 + 12^2}} = \frac{15}{\sqrt{34}}$, pois

$\vec{AP} = (1, 0, -7)$.

- (b) Escreva uma equação do plano que contém r e é paralelo a s .
 (c) Determine a distância entre r e s .

(b) Seja $\mathcal{P}$ o plano que contém r e é paralelo a s e por isso contém o ponto $A(1, 2, 3)$ e tem vectores directores u e v .

$$\text{Assim, } \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 4 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 9x - 25y + 12z + 5 = 0 \text{ é uma}$$

equação geral do plano $\mathcal{P}$.

(c) Consideremos o ponto $P(2, 2, -4) \in s$.

$$\text{Temos } d(r, s) = d(P, \mathcal{P}) = \frac{|\vec{AP}|_w}{\|w\|} = \frac{|(1, 0, -7)|(9, -25, 12)|}{\sqrt{9^2 + (-25)^2 + 12^2}} = \frac{15}{\sqrt{34}}, \text{ pois}$$

$$\vec{AP} = (1, 0, -7).$$

8.17 Sejam, r a recta definida por: $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

e π o plano definido por $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = 3 + \mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Determine:

- (a) Uma equação vectorial da recta r .
- (b) Uma equação geral do plano π .

R: (a) Temos $r : x = z = 3$. Logo, o vector $u = (0, 1, 0)$ é vector director da recta r . Assim, $(x, y, z) = (3, 0, 3) + \lambda(0, 1, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma equação vectorial da recta r .

(b) Os vectores $v = (2, 1, 0)$ e $w = (1, 0, 1)$ são vectores directores do

plano π . Assim, $\begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 2y - z + 3 = 0$ é uma

equação geral do plano.

8.17 Sejam, r a recta definida por: $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

e π o plano definido por $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = 3 + \mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Determine:

- (a) Uma equação vectorial da recta r .
- (b) Uma equação geral do plano π .

R: (a) Temos $r : x = z = 3$. Logo, o vector $u = (0, 1, 0)$ é vector director da recta r . Assim, $(x, y, z) = (3, 0, 3) + \lambda(0, 1, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma equação vectorial da recta r .

(b) Os vectores $v = (2, 1, 0)$ e $w = (1, 0, 1)$ são vectores directores do

plano π . Assim, $\begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 2y - z + 3 = 0$ é uma

equação geral do plano.

8.17 Sejam, r a recta definida por: $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

e π o plano definido por $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = 3 + \mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Determine:

- (a) Uma equação vectorial da recta r .
- (b) Uma equação geral do plano π .

R: (a) Temos $r : x = z = 3$. Logo, o vector $u = (0, 1, 0)$ é vector director da recta r . Assim, $(x, y, z) = (3, 0, 3) + \lambda(0, 1, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma equação vectorial da recta r .

(b) Os vectores $v = (2, 1, 0)$ e $w = (1, 0, 1)$ são vectores directores do

plano π . Assim, $\begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 2y - z + 3 = 0$ é uma equação geral do plano.

- (c) A distância de r a π .
 (d) Um plano que contenha a recta r e seja ortogonal a π .

(c) O vector $k = (1, -2, -1)$ é perpendicular ao plano π . Como $k \cdot u \neq 0$, sendo u o vector directo da recta r , concluímos que a recta r e o plano π intersectam-se. Logo, a distância de r a π é 0.

(d) Seja $\mathcal{P}$ o plano que contém r e é ortogonal a π e, por isso, contém o ponto $A(3, 0, 3)$ e tem vectores directores u e k .

O plano $\mathcal{P}$ tem equação vectorial

$$(x, y, z) = (3, 0, 3) + \lambda(0, 1, 0) + \mu(1, -2, -1), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- (c) A distância de r a π .
 (d) Um plano que contenha a recta r e seja ortogonal a π .

(c) O vector $k = (1, -2, -1)$ é perpendicular ao plano π . Como $k \cdot u \neq 0$, sendo u o vector directo da recta r , concluímos que a recta r e o plano π intersectam-se. Logo, a distância de r a π é 0.

(d) Seja $\mathcal{P}$ o plano que contém r e é ortogonal a π e, por isso, contém o ponto $A(3, 0, 3)$ e tem vectores directores u e k .

O plano $\mathcal{P}$ tem equação vectorial

$$(x, y, z) = (3, 0, 3) + \lambda(0, 1, 0) + \mu(1, -2, -1), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- (c) A distância de r a π .
 (d) Um plano que contenha a recta r e seja ortogonal a π .

(c) O vector $k = (1, -2, -1)$ é perpendicular ao plano π . Como $k \cdot u \neq 0$, sendo u o vector directo da recta r , concluímos que a recta r e o plano π intersectam-se. Logo, a distância de r a π é 0.

(d) Seja $\mathcal{P}$ o plano que contém r e é ortogonal a π e, por isso, contém o ponto $A(3, 0, 3)$ e tem vectores directores u e k .

O plano $\mathcal{P}$ tem equação vectorial

$$(x, y, z) = (3, 0, 3) + \lambda(0, 1, 0) + \mu(1, -2, -1), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- 8.18** Considere os planos: $\pi_1 : -2x + 4y - 2z + 3 = 0$;
 $\pi_2 : x + 2z - 1 = 0$; e $\pi_3 : 2x + 4y + 6z + 2 = 0$. Determine:
- Uma equação vectorial do plano π_1 .
 - O ângulo formado pelos planos π_1 e π_2 .

R: (a) O vector $u = (-2, 4, -2)$ é perpendicular ao plano π_1 . Por exemplo, os vectores $v = (1, 0, -1)$ e $w = (0, 1, 2)$ são ortogonais a u (pois, $u|v = 0$ e $u|w = 0$) e a sequência (v, w) é linearmente independente. Logo, v e w são vectores directores do plano π_1 . O ponto $(0, 0, \frac{3}{2}) \in \pi_1$. Assim, o plano π_1 tem

$$(x, y, z) = (0, 0, \frac{3}{2}) + \lambda(1, 0, -1) + \mu(0, 1, 2), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

como uma sua equação vectorial.

(b) O vector $k = (1, 0, 2)$ é perpendicular ao plano π_2 . O ângulo θ formado pelos planos π_1 e π_2 é dado por:

$$\theta = \arccos \frac{|u| |k|}{\|u\| \|k\|} = \arccos \frac{|(-2, 4, -2)| |(1, 0, 2)|}{\sqrt{24}\sqrt{5}} = \arccos \left(\frac{3}{\sqrt{30}} \right).$$

- 8.18** Considere os planos: $\pi_1 : -2x + 4y - 2z + 3 = 0$;
 $\pi_2 : x + 2z - 1 = 0$; e $\pi_3 : 2x + 4y + 6z + 2 = 0$. Determine:
- Uma equação vectorial do plano π_1 .
 - O ângulo formado pelos planos π_1 e π_2 .

R: (a) O vector $u = (-2, 4, -2)$ é perpendicular ao plano π_1 . Por exemplo, os vectores $v = (1, 0, -1)$ e $w = (0, 1, 2)$ são ortogonais a u (pois, $u|v = 0$ e $u|w = 0$) e a sequência (v, w) é linearmente independente. Logo, v e w são vectores directores do plano π_1 . O ponto $(0, 0, \frac{3}{2}) \in \pi_1$. Assim, o plano π_1 tem

$$(x, y, z) = (0, 0, \frac{3}{2}) + \lambda(1, 0, -1) + \mu(0, 1, 2), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

como uma sua equação vectorial.

(b) O vector $k = (1, 0, 2)$ é perpendicular ao plano π_2 . O ângulo θ formado pelos planos π_1 e π_2 é dado por:

$$\theta = \arccos \frac{|u| |k|}{\|u\| \|k\|} = \arccos \frac{|(-2, 4, -2)| |(1, 0, 2)|}{\sqrt{24}\sqrt{5}} = \arccos \left(\frac{3}{\sqrt{30}} \right).$$

- 8.18** Considere os planos: $\pi_1 : -2x + 4y - 2z + 3 = 0$;
 $\pi_2 : x + 2z - 1 = 0$; e $\pi_3 : 2x + 4y + 6z + 2 = 0$. Determine:
- Uma equação vectorial do plano π_1 .
 - O ângulo formado pelos planos π_1 e π_2 .

R: (a) O vector $u = (-2, 4, -2)$ é perpendicular ao plano π_1 . Por exemplo, os vectores $v = (1, 0, -1)$ e $w = (0, 1, 2)$ são ortogonais a u (pois, $u|v = 0$ e $u|w = 0$) e a sequência (v, w) é linearmente independente. Logo, v e w são vectores directores do plano π_1 . O ponto $(0, 0, \frac{3}{2}) \in \pi_1$. Assim, o plano π_1 tem

$$(x, y, z) = (0, 0, \frac{3}{2}) + \lambda(1, 0, -1) + \mu(0, 1, 2), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

como uma sua equação vectorial.

(b) O vector $k = (1, 0, 2)$ é perpendicular ao plano π_2 . O ângulo θ formado pelos planos π_1 e π_2 é dado por:

$$\theta = \arccos \frac{|u| |k|}{\|u\| \|k\|} = \arccos \frac{|(-2, 4, -2)| |(1, 0, 2)|}{\sqrt{24}\sqrt{5}} = \arccos \left(\frac{3}{\sqrt{30}} \right).$$

(c) Uma equação vectorial da recta r que é a intersecção dos planos π_1 e π_2 .

(d) A distância da recta r ao plano π_3 .

(c) É fácil ver que o ponto $A(1, -\frac{1}{4}, 0) \in r$. Os vectores u e k são vectores ortogonais ao vector director da recta r . Ora

$$\begin{aligned} u \times k &= \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} e_3 \\ &= 8e_1 + 2e_2 - 4e_3. \end{aligned}$$

Uma equação vectorial da recta r é

$$(x, y, z) = (1, -\frac{1}{4}, 0) + \lambda(8, 2, -4), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(d) O vector $j = (2, 4, 6)$ é perpendicular ao plano π_3 . Por outro lado, o vector $(8, 2, -4)$ é vector director da recta r . Como $(2, 4, 6) \cdot (8, 2, -4) = 0$ concluímos que a recta é paralela ao plano π_3 .

Tomemos um ponto $P(1, 1, -1) \in \pi_3$ e $A(1, -\frac{1}{4}, 0) \in r$. Ora

$$d(r, \pi_3) = d(A, \pi_3) = \frac{|\vec{AP} \cdot j|}{\|j\|} = \frac{3}{2\sqrt{14}}.$$

(c) Uma equação vectorial da recta r que é a intersecção dos planos π_1 e π_2 .

(d) A distância da recta r ao plano π_3 .

(c) É fácil ver que o ponto $A(1, -\frac{1}{4}, 0) \in r$. Os vectores u e k são vectores ortogonais ao vector director da recta r . Ora

$$\begin{aligned} u \times k &= \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} e_3 \\ &= 8e_1 + 2e_2 - 4e_3. \end{aligned}$$

Uma equação vectorial da recta r é

$$(x, y, z) = (1, -\frac{1}{4}, 0) + \lambda(8, 2, -4), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(d) O vector $j = (2, 4, 6)$ é perpendicular ao plano π_3 . Por outro lado, o vector $(8, 2, -4)$ é vector director da recta r . Como $(2, 4, 6) \cdot (8, 2, -4) = 0$ concluímos que a recta é paralela ao plano π_3 .

Tomemos um ponto $P(1, 1, -1) \in \pi_3$ e $A(1, -\frac{1}{4}, 0) \in r$. Ora

$$d(r, \pi_3) = d(A, \pi_3) = \frac{|\vec{AP}| \cdot |j|}{\|j\|} = \frac{3}{2\sqrt{14}}.$$

(c) Uma equação vectorial da recta r que é a intersecção dos planos π_1 e π_2 .

(d) A distância da recta r ao plano π_3 .

(c) É fácil ver que o ponto $A(1, -\frac{1}{4}, 0) \in r$. Os vectores u e k são vectores ortogonais ao vector director da recta r . Ora

$$\begin{aligned} u \times k &= \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} e_3 \\ &= 8e_1 + 2e_2 - 4e_3. \end{aligned}$$

Uma equação vectorial da recta r é

$$(x, y, z) = (1, -\frac{1}{4}, 0) + \lambda(8, 2, -4), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(d) O vector $j = (2, 4, 6)$ é perpendicular ao plano π_3 . Por outro lado, o vector $(8, 2, -4)$ é vector director da recta r . Como $(2, 4, 6) \cdot (8, 2, -4) = 0$ concluímos que a recta é paralela ao plano π_3 .

Tomemos um ponto $P(1, 1, -1) \in \pi_3$ e $A(1, -\frac{1}{4}, 0) \in r$. Ora

$$d(r, \pi_3) = d(A, \pi_3) = \frac{|\vec{AP} \cdot j|}{\|j\|} = \frac{3}{2\sqrt{14}}.$$