

1 - Matrizes

1.1 - Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Indique quais são matrizes:

- (a) Quadradas.
- (b) Triangulares inferiores.
- (c) Diagonais.
- (d) Escalares.

1.3 - Considere as matrizes de $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine:

- (a) $A + B + C$.
- (b) $2A + 2C + 2B$.
- (c) $A - B$.
- (d) $2A - 3(B + C)$.

1.4 - Dadas as matrizes de $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

determine uma matriz $X \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, tal que

$$X + A = 2(X - B).$$

1.5 - Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1 \times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$.

Determine, se possível, AB e BA .

1.7 - Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine, se possível, cada um dos seguintes produtos:

- (a) AB .
- (b) BA .
- (c) CD .
- (d) DC .

1.8 - Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Verifique que:

- (a) $AB \neq BA$.
- (b) $AB = 0$ com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.
- (c) $BA = CA$ e $A \neq 0$ mas $B \neq C$.

1.9 - Sejam $D, D' \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ matrizes diagonais. Mostre que DD' é uma matriz diagonal com $(DD')_{ii} = d_{ii}d'_{ii}$, $i = 1, \dots, n$, e que $DD' = D'D$.

1.10 - Sejam $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$. Justifique que:

- (a) Se A tem a linha i nula então a matriz AB tem a linha i nula.
- (b) Se B tem a coluna k nula então a matriz AB tem a coluna k nula.
- (c) Se A tem as linhas i e j iguais, com $i \neq j$, então a matriz AB tem as linhas i e j iguais.
- (d) Se B tem as colunas k e l iguais, com $k \neq l$, então a matriz AB tem as colunas k e l iguais.

1.14 - Sem calcular $(A+B)^2$, $(A-B)^2$ e $A^2 - B^2$, verifique que para as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ se tem:

- (a) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
- (b) $(A-B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$.
- (c) $A^2 - B^2 \neq (A-B)(A+B)$.

1.15 - Seja $D \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ uma matriz diagonal. Determine D^k , com $k \in \mathbb{N}$.

1.19 - Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Atendendo ao Exercício 1.10, justifique que:

- (a) Se A tem uma coluna nula então A não é invertível.
- (b) Se A tem as colunas i e j iguais, com $i \neq j$, então A não é invertível.

1.26 - Seja $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ invertível com $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

- (a) Determine uma matriz B tal que $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ e justifique que tal matriz é única.
- (b) Determine uma matriz C tal que $AC = A + 2I_3$ e justifique que tal matriz é única.

1.34 - Indique quais das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) são simétricas.
- (b) são hemi-simétricas.

1.40 - Considere as matrizes

$$A = I_n, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2-3i \\ -2-3i & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & i & 2 \\ -i & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & i & 2 \\ -i & 0 & 1+2i \\ 2 & 1-2i & 1 \end{bmatrix}.$$

Indique quais são matrizes:

- (a) Hermíticas.
- (b) Hemi-hermíticas.

1.42 - Indique se cada uma das seguintes matrizes é uma matriz elementar e, em caso afirmativo, se é do tipo I, II ou III.

- (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- (e) I_n .

1.43 - Seja $A \in \mathcal{M}_{3 \times 5}(\mathbb{K})$. Determine as matrizes elementares que, multiplicadas à esquerda de A , efectuam em A cada uma das seguintes transformações:

- (a) Troca das linhas 1 e 3.
- (b) Multiplicação da linha 1 por 6.
- (c) Adição, à linha 3, da linha 2 multiplicada por $\frac{1}{5}$.

1.44 - Sem efectuar multiplicações de matrizes, indique o resultado de:

- (a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$.
- (b) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$.
- (c) $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- (d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.46 - Determine a inversa de cada uma das seguintes matrizes elementares:

- (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$(b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.48 - Indique se estão em forma de escada cada uma das seguintes matrizes:

$$(a) I_n.$$

$$(b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(c) [0 \ 5 \ 0 \ 0].$$

$$(d) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.49 - Indique uma matriz em forma de escada e equivalente por linhas a cada uma das matrizes:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & -4 & 7 & 5 \\ -2 & -4 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.51 - Indique se estão em forma de escada reduzida cada uma das seguintes matrizes em forma de escada:

$$(a) [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 5].$$

$$(b) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(d) [0 \ 1 \ 2 \ 5].$$

$$(e) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1.52 - Indique a forma de escada reduzida de cada uma das seguintes matrizes:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & -4 & 7 & 5 \\ -2 & -4 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Observação – Caso tenha resolvido o Exercício 1.49 já determinou uma matriz em forma de escada e equivalente por linhas a cada uma destas matrizes.

1.55 - Determine se são equivalentes por linhas as matrizes:

- (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.
- (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

1.56 - Mostre que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

são equivalentes por linhas e indique uma sequência de transformações elementares sobre linhas tal que:

- (a) $A \xrightarrow{(linhas)} B$.
- (b) $B \xrightarrow{(linhas)} A$.

1.57 - Considere as matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine a característica de A_i , com $i = 1, 2, 3, 4$.

1.58 - Discuta, segundo os valores de α e de β , a característica das matrizes de elementos reais

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & -1 & \beta \\ 1 & 0 & \beta & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.59 - Calculando as características, justifique que as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

não são equivalentes por linhas.

1.62 -

- (a) Determine o conjunto dos valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 7 + \alpha \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

é invertível.

- (b) Determine o conjunto dos valores de α e o conjunto dos valores de β , com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, para os quais a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & \alpha + 3 & 2 \\ 2 & 4 & \beta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

é invertível.

1.65 - Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- (a) Mostre que A é invertível e determine A^{-1} .
- (b) Exprima A^{-1} e A como produto de matrizes elementares.

1.66 - Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}),$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R}).$$

Indique quais são invertíveis e, em caso afirmativo, determine a respectiva inversa.

2 - Sistemas de Equações Lineares

2.2 - Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$$

e (S) o sistema de equações lineares $AX = B$. Sem resolver o sistema, mostre que:

- (a) $(-1, 1, 1, 3)$ é solução de (S) .
- (b) $(1, 0, 1, 0)$ não é solução de (S) .

2.3 - Justifique que existe um sistema (S) de equações lineares, $AX = B$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 3}(\mathbb{R})$$

e tal que $(1, 2, 3)$ é solução de (S) . Indique as equações de um sistema nessas condições.

2.7 - Discuta cada um dos seguintes sistemas de equações lineares, nas incógnitas x_1, x_2, x_3 , sobre $\mathbb{R}$, e resolva-os nos casos em que são possíveis.

$$(S_1) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$
$$(S_3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

2.8 - Com a informação dada no quadro seguidamente apresentado determine, caso seja possível, se cada um dos sistemas de equações lineares $AX = B$ é possível (determinado ou indeterminado) ou impossível e, para os sistemas indeterminados, indique o respectivo grau de indeterminação.

	Matriz A	$r(A)$	$r([A \mid B])$
(a)	3×3	3	3
(b)	3×3	2	3
(c)	3×3	1	1
(d)	5×7	3	3
(e)	5×7	2	3
(f)	6×2	2	2
(g)	4×4	0	0

2.9 - Indique um sistema de equações lineares com 3 incógnitas que seja possível indeterminado, com grau de indeterminação

(a) 1.

(b) 2.

O grau de indeterminação pode ser 3?

2.11 - Indique o conjunto $\mathcal{C}$ dos valores reais de k para os quais o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 3y = k \end{cases}$$

nas incógnitas x, y , sobre $\mathbb{R}$, é

(a) impossível.

(b) possível determinado.

(c) possível indeterminado.

2.15 - Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ é invertível e utilize A^{-1} para resolver o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z , sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} -3x + 2y - z = \alpha \\ 2x - 2z = \beta \\ -x + y + z = \gamma \end{cases}, \quad \text{com } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

2.24 - Discuta cada um dos seguintes sistemas de equações lineares, nas incógnitas x_1, x_2, x_3 , sobre $\mathbb{R}$,

e resolva-os nos casos em que são possíveis.

$$\begin{aligned}
 (S_1) \quad & \begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_3 = -2 \\ -6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} & (S_2) \quad & \begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = -1 \end{cases} \\
 (S_3) \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} & (S_4) \quad & \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \\
 (S_5) \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = -1 \end{cases} & (S_6) \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = -1 \end{cases} \\
 (S_7) \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 - x_3 = -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

2.35 - Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z , sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x - \alpha y + z = -1 \\ -x - y + (\alpha + 1)z = \beta - 2 \end{cases}.$$

(a) Discuta o sistema, em função de α e β .

(b) Para $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ indique o conjunto das soluções do sistema.

2.37 - Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z , sobre $\mathbb{R}$,

$$(S_{\alpha, \beta}) \quad \begin{cases} x + \alpha y + \beta z = 1 \\ \alpha(\beta - 1)y = \alpha \\ x + \alpha y + z = \beta^2 \end{cases}.$$

(a) Discuta o sistema, em função de α e β .

(b) i. Justifique que $S_{2,2}$ tem uma e uma só solução.

ii. Justifique que a matriz simples de $S_{2,2}$ é invertível.

iii. Determine a solução de $S_{2,2}$, utilizando a inversa da matriz simples do sistema.

3 - Determinantes

3.1 - Calcule o determinante das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$.

3.2 - Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, com $a \neq 0$. Calcule o determinante de A pela Regra de Sarrus.

3.3 - Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Determine:

(a) $\hat{a}_{11}$.

(b) $\hat{a}_{32}$.

(c) $\hat{a}_{23}$.

3.4 - Calcule, de duas formas diferentes, o determinante de cada uma das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 2 \\ -i & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -6 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$.

3.6 - Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, considere

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -3 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & -3 & 3-\lambda \end{bmatrix}.$$

Determine o conjunto dos valores de λ para os quais $\det A_\lambda = 0$.

3.10 - Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\det A = \gamma$.

Indique, em função de γ , o valor de cada um dos seguintes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$.

(b) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$.

(c) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$.

(d) $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$.

(e) $\begin{vmatrix} b & e & h \\ a & d & g \\ c & f & i \end{vmatrix}$.

3.15 - Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere a matriz

$$B_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & k \\ 0 & k & -k & k \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R}).$$

Determine o conjunto dos valores de k para os quais se tem $\det B_k = 2$.

3.19 - Para cada $t \in \mathbb{R}$, seja

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -7 & t+3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Determine o conjunto dos valores de t para os quais A_t é invertível.

3.20 - Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tais que $\det A = 2$, $\det B = -5$ e $\det C = 4$. Calcule $\det(AB^T C)$, $\det(3B)$ e $\det(B^2 C)$.

3.21 - Mostre que, para quaisquer $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, se tem:

(a) $\det(AB) = \det(BA)$.

(b) Se AB é invertível então o mesmo sucede a A e a B .

3.22 - Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1 \times 2}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 1}(\mathbb{R})$.

(a) Mostre que $\det(AB) \neq \det(BA)$.

(b) Comente a alínea anterior, atendendo à alínea (a) do Exercício 3.21.

3.23 - Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ uma matriz idempotente (isto é, $A^2 = A$). Mostre que $\det A \in \{0, 1\}$.

3.25 - Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

(a) Calcule $\det A$ e $\det B$.

(b) Determine se A e B são invertíveis e, em caso afirmativo, indique o determinante da respectiva inversa.

(c) Indique se são determinados os sistemas

i. $AX = 0$.

ii. $BX = 0$.

3.26 - Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Verifique que $\text{adj } A = A$.

3.28 - Mostre que cada uma das matrizes seguintes é invertível e determine a sua inversa a partir da sua adjunta.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

(b) $V_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$, com $z \neq 0$ ou $w \neq 0$.

3.32 - Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$$

e considere o sistema (S) de equações lineares $AX = B$.

(a) Calcule $\det A$ e justifique que o sistema (S) é um sistema de Cramer.

(b) Utilizando a Regra de Cramer, determine a solução do sistema (S) .

3.33 - Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere a matriz

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & -k & 1 \\ 0 & k & k \\ k & k & -k \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

- (a) Usando determinantes, indique para que valores de k a matriz A_k é invertível.
- (b) Para $k = -1$ justifique que o sistema de equações lineares

$$AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é um sistema de Cramer e determine a sua solução.

4 - Espaços Vectoriais

4.3 - Considere $\mathbb{R}^2$ com uma adição e uma multiplicação externa definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ \alpha(a_1, a_2) &= (\alpha a_1, 0), \end{aligned}$$

para quaisquer $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostre que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ não é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$.

4.6 - Indique 0_E nos seguintes casos:

- (a) $E = \mathbb{R}^4$.
- (b) $E = \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$.
- (c) $E = \mathbb{R}_3[x]$.

4.8 - Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e sejam $u, v \in E$. Justifique que:

- (a) Se $\alpha u = \alpha v$ e $\alpha \neq 0$ então $u = v$.
- (b) Se $\alpha u = \beta u$ e $u \neq 0_E$ então $\alpha = \beta$.

4.13 - Determine quais dos seguintes conjuntos são subespaços do espaço vectorial indicado.

- (a) $F_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0\}$ em $\mathbb{R}^2$.
- (b) $F_2 = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0)\}$ em $\mathbb{R}^3$.
- (c) $F_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a = b \wedge c = 0\}$ em $\mathbb{R}^3$.
- (d) $F_4 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a = b\}$ em $\mathbb{R}^3$.

4.15 - Mostre que é um subespaço de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$:

- (a) Com a diagonal principal nula.
- (b) Triangulares superiores.
- (c) Diagonais.
- (d) Escalares.
- (e) Simétricas.

(f) Hemi-simétricas.

4.16 - Justifique que não é um subespaço de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$:

(a) Com a diagonal principal não nula.

(b) Invertíveis.

(c) Não invertíveis.

4.20 - Mostre que os seguintes conjuntos são subespaços do espaço vectorial indicado:

(a) $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a - 2b = 0 \wedge b + c = 0\}$ em $\mathbb{R}^4$.

(b) $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a - 2b = 0 \wedge b + c = 0 \right\}$ em $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

(c) $H = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : a - 2b = 0 \wedge b + c = 0\}$ em $\mathbb{R}_3[x]$.

4.22 - Seja $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ -b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Mostre que G é um subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ indicando uma sequência geradora de G .

4.23 - Apresentando uma sequência geradora, justifique que os seguintes conjuntos são subespaços do espaço vectorial indicado.

(a) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a - c = 0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a + d = 0 \right\}$ em $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

(c) $\{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : a - 2c + d = 0\}$ em $\mathbb{R}_3[x]$.

4.31 - Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $u_1, u_2, u_3 \in E$. Justifique as afirmações:

(a) $S = (u_1, u_2, u_3)$ é linearmente independente se, e só se,

$$S' = (u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3)$$

é linearmente independente.

(b) $S = (u_1, u_2, u_3)$ é linearmente independente se, e só se,

$$S'' = (u_1 - u_2, u_2 - u_3, u_1 + u_3)$$

é linearmente independente.

(c) A sequência

$$S''' = (u_1 - u_2, u_2 - u_3, u_1 - u_3)$$

é linearmente dependente.

4.33 - Em $\mathbb{R}^3$, considere o subespaço $F = \langle (2, 3, 3) \rangle$. Indique, para F , duas bases distintas.

4.35 - Seja $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ -b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ o subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ referido no Exercício 4.22. Determine uma base de G .

4.41 - Em $\mathbb{R}^3$, considere o subespaço

$$F = \langle (1, 2, 1), (2, -1, -3), (0, 1, 1) \rangle.$$

(a) Verifique que $((1, 2, 1), (2, -1, -3), (0, 1, 1))$ não é uma base de F .

(b) Determine uma base de F constituída por vectores da sequência indicada na alínea anterior.

4.44 - Em $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, considere as bases

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

e

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

(a) Determine a sequência das coordenadas do vector $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ em cada uma das bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

(b) Determine a sequência das coordenadas de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ em cada uma das bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

4.48 - Sejam

$$F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a - c = 0 \wedge a - b + d = 0\}$$

e

$$G = \langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 2, -1) \rangle.$$

Determine uma base de $F \cap G$.

4.52 - Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços

$$F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a - b = 0 \wedge a = b + d\},$$

$$G = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b - c = 0 \wedge d = 0\}$$

e

$$H = \langle (1, 0, 0, 3), (2, 0, 0, 1) \rangle.$$

Determine uma base de

(a) F .

(b) G .

(c) $F + G$.

(d) $F + H$.

4.56 - Em $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, considere os subespaços

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad G = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Mostre que $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

(b) Considerando $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ determine a projecção de A sobre F , segundo G , e a projecção de A sobre G , segundo F .

4.62 - Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços

$$F = \langle (1, 0, 1), (1, -1, 2) \rangle \quad \text{e} \quad G = \langle (1, \alpha, 3) \rangle.$$

(a) Determine o conjunto dos valores de α para os quais se tem

$$\dim(F + G) = 3.$$

(b) Conclua que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ se, e só se, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

4.65 - Em $\mathbb{R}^3$, considere a sequência de vectores

$$S_k = \left((1, 0, 2), (-1, 2, -3), (-1, 4, k) \right).$$

Determine o conjunto dos valores de k para os quais S_k é uma base de $\mathbb{R}^3$.

4.69 - Em $\mathbb{R}^4$, considere o subespaço $F = \langle (1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 1), (1, 1, 2, 1) \rangle$.

(a) Indique uma base de F .

(b) Verifique que $(1, 2, 3, 2) \in F$.

(c) Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua os vectores da base de F indicada em (a).

4.71 - Em $\mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$, considere as sequências

$$S_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad \text{e} \quad S_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Determine se S_i , $i = 1, 2$, é uma sequência linearmente dependente e, em caso afirmativo, indique um vector da sequência que seja combinação linear dos restantes.

4.74 - Indique a dimensão e uma base do subespaço

(a) $F = \langle 2x^3 + 2x^2 - 2x, x^3 + 2x^2 - x - 1, x^3 + x + 5, x^3 + 3, 2x^3 + 2x^2 - x + 2 \rangle$ de $\mathbb{R}_3[x]$.

(b) $G = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

4.155 - Em $\mathbb{R}_4[x]$, considere o subespaço

$$F = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \in \mathbb{R}_4[x] : -2a_0 + 2a_1 + a_4 = 0 \wedge -a_0 + a_1 + 5a_4 = 0\}.$$

(a) Determine uma base de F .

(b) Determine uma base de $\mathbb{R}_4[x]$ que inclua a base de F indicada em (a).

(c) Indique, caso exista, um subespaço G de $\mathbb{R}_4[x]$ tal que

$$\dim(F + G) = 4 \quad \text{e} \quad \dim(F \cap G) = 1.$$

4.156 - Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços

$$F = \langle (0, 1, 0, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4) \rangle$$

e

$$G_t = \langle (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (t, 2, -1, 1) \rangle.$$

(a) Mostre que existe um, e um só, valor de t para o qual $\dim G_t = 2$.

(b) Para o valor de t determinado em (a), determine uma base de $F + G_t$ e a dimensão de $F \cap G_t$.

5 - Aplicações Lineares

5.2 - Determine se é linear a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que, para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, se tem

- (a) $f(x, y, z) = (y, 0)$.
- (b) $f(x, y, z) = (x - 1, y)$.
- (c) $f(x, y, z) = (xy, 0)$.
- (d) $f(x, y, z) = (x, |z|)$.

5.4 - Seja $g : \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ tal que

$$g(A) = A^\top,$$

para qualquer $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Justifique que g é uma aplicação linear.

5.6 - Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ uma aplicação linear. Justifique que:

- (a) $f(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- (b) $f(2, 4, -2) = 2f(1, 2, -1)$.
- (c) $f(-3, 1, 2) = f(-2, 0, 1) + f(-1, 1, 1)$.

5.7 - Determine se é linear cada uma das aplicações seguintes:

- (a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(a, b, c) = (2a, b + 1),$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- (b) $g : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$g(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} c & b \\ a + b & 2 \end{bmatrix},$$

para qualquer $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$.

5.10 - Determine o núcleo, uma base do núcleo e uma base da imagem de cada uma das aplicações lineares seguintes:

- (a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x, y, z) = (y, z),$$

para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

- (b) $g : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (2a, c + d, 0),$$

para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- (c) $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$h(a, b, c) = (a + b)x^2 + c,$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- (d) $t : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$t(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{bmatrix} a - c & 0 \\ 0 & b + d \end{bmatrix},$$

para qualquer $ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x]$.

5.14 - Indique se cada uma das aplicações lineares seguintes é injectiva, determinando o seu núcleo.

- (a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(a, b, c) = (2a, b + c, b - c)$,
para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
- (b) $g : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que $g(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ 0 & a+b-c \end{bmatrix}$,
para qualquer $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$.

5.17 - Determine a nulidade de cada uma das aplicações lineares seguintes:

- (a) $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^8$ com $\dim \operatorname{Im} f = 4$.
- (b) $g : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ com $\dim \operatorname{Im} g = 1$.
- (c) $h : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com h sobrejectiva.
- (d) $t : \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ com t sobrejectiva.

5.18 - Justifique que não existe nenhuma aplicação linear $f : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cujo núcleo tenha dimensão inferior ou igual a 3.

5.19 - Seja $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear com nulidade $n(f)$ e característica $r(f)$. Indique todos os pares possíveis $(n(f), r(f))$.

5.22 - Utilizando a Proposição adequada, determine se é bijectiva cada uma das seguintes aplicações lineares.

- (a) A aplicação da alínea (a) do Exercício 5.14, $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c) = (2a, b + c, b - c),$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- (b) $g : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ tal que

$$g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + d)x^3 + 2ax^2 + (b - c)x + (a + c),$$

para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

5.26 - Indique se existe alguma aplicação linear nas condições referidas e, em caso afirmativo, dê um exemplo.

- (a) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Im} f = \langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 2, 0) \rangle$ e $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.
- (b) $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{Ker} g = \langle (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1) \rangle$ e $(1, 1, 1) \in \operatorname{Im} g$.
- (c) $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Im} h = \langle (1, 2, 0, -4), (2, 0, -1, -3) \rangle$.

5.36 - Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x, y, z) = (y, z),$$

para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e a aplicação linear $g : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (2a, c + d, 0),$$

para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

(a) Determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ sendo

$$\mathcal{B} = \left((1, 2, 3), (0, -2, 1), (0, 0, 3) \right) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \left((0, -2), (-1, 0) \right).$$

(b) Determine $\mathcal{M}(g; \mathcal{B}'', \text{b. c.}_{\mathbb{R}^3})$ sendo

$$\mathcal{B}'' = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

5.39 - Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, e seja $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calculando a característica da matriz anterior, determine se f é sobrejectiva.

5.42 - Seja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$f(a, b, c) = (a + b, b + c),$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Em $\mathbb{R}^3$, considere as bases

$$\mathcal{B}_1 = \text{b. c.}_{\mathbb{R}^3}, \quad \mathcal{B}_2 = \left((0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0) \right)$$

e, em $\mathbb{R}^2$, considere as bases

$$\mathcal{B}'_1 = \text{b. c.}_{\mathbb{R}^2}, \quad \mathcal{B}'_2 = \left((1, 1), (1, 0) \right).$$

(a) Calcule $f(1, 2, 3)$.

(b) Determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1)$ e calcule $f(1, 2, 3)$ utilizando esta matriz.

(c) Determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_1)$ e calcule $f(1, 2, 3)$ utilizando esta matriz.

(d) Determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_2)$ e calcule $f(1, 2, 3)$ utilizando esta matriz.

(e) Determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2)$ e calcule $f(1, 2, 3)$ utilizando esta matriz.

5.43 - Em $\mathbb{R}^3$, considere as bases

$$\mathcal{B}_1 = \left((1, -1, 0), (-1, 1, -1), (0, 1, 0) \right), \quad \mathcal{B}_2 = \text{b. c.}_{\mathbb{R}^3}$$

e

$$\mathcal{B}_3 = \left((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1) \right).$$

Determine a matriz de mudança de base de

(a) $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$.

(b) $\mathcal{B}_2$ para $\mathcal{B}_1$.

(c) $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_3$.

5.46 - Seja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}(f; \text{b. c.}_{\mathbb{R}^3}, \text{b. c.}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere as bases

$$\mathcal{B} = \left((0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0) \right) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \left((1, 1), (1, 0) \right)$$

de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Utilizando matrizes de mudança de base, determine:

- (a) $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^2})$.
- (b) $\mathcal{M}(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}')$.
- (c) $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

5.110 - Seja E um espaço vectorial real e seja $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ uma base de E . Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow E$ tal que

$$f(a, b, c, d, e) = (-b - c + d)u_1 + (2a + b + 3c - 3d)u_2 + (b + c - d)u_3,$$

para quaisquer $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

- (a) Determine $\mathcal{M}(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^5}, \mathcal{B}')$.
- (b) Determine uma base de $\text{Im } f$.
- (c) Em $\mathbb{R}^5$, considere os vectores

$$v_1 = (2, 2, 0, 2, 2), \quad v_2 = (-1, -1, 1, 0, 1) \text{ e } v_3 = (0, 0, 0, 0, 1).$$

Mostre que (v_1, v_2, v_3) é uma base de $\text{Ker } f$.

- (d) Determine uma base de $\mathbb{R}^5$ que inclua os vectores v_1, v_2 e v_3 .
- (e) Sendo $\mathcal{B}$ a base obtida em (d), determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

6 - Valores e Vectores Próprios

6.1 - Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$f(a, b, c) = (a + b, b, 2c),$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Considere os vectores $u_1 = (2, 0, 0)$, $u_2 = (0, 0, 7)$ e $u_3 = (0, 0, 0)$. Verifique se cada um dos vectores u_1, u_2, u_3 é um vector próprio de f e, em caso afirmativo, indique o valor próprio associado.

6.2 - Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- (a) Mostre que $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ são vectores próprios de A e indique os valores próprios correspondentes.
- (b) Questão análoga à de (a) para $\begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

6.3 - Seja α um valor próprio de $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$. Justifique que $\bar{\alpha}$ é valor próprio de $\bar{A}$.

6.7 - Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ uma matriz idempotente (isto é, $A^2 = A$).

- (a) Mostre que todo o valor próprio de A pertence ao conjunto $\{0, 1\}$.
- (b) Indique uma matriz que tenha todos os valores próprios no conjunto $\{0, 1\}$ e que não seja idempotente.

6.12 - Determine os valores próprios da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -i & 0 \\ i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$$

e as respectivas multiplicidades algébricas.

6.13 - Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$. Mostre que:

- (a) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ então A não tem valores próprios.
- (b) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ então A tem dois valores próprios distintos.
- (c) As matrizes A e B têm o mesmo polinómio característico.

6.14 - Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

- (a) Determine os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.
- (b) Calcule o determinante de A .

6.19 - Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível. Mostre que:

- (a) Se α é valor próprio de A então $\alpha \neq 0$ e α^{-1} é valor próprio de A^{-1} .
- (b) Se $X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ é vector próprio de A associado ao valor próprio α então X é vector próprio de A^{-1} associado ao valor próprio α^{-1} .

6.28 - Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$f(a, b, c) = (-b - c, -2a + b - c, 4a + 2b + 4c),$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Determine os valores próprios e os subespaços próprios de f .

6.35 - Considere as matrizes triangulares

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Sem efectuar cálculos, justifique que A e B são ambas diagonalizáveis e indique uma matriz diagonal D_A semelhante a A e uma matriz diagonal D_B semelhante a B .

6.36 - Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Calcule os valores próprios de A e, sem determinar os subespaços próprios de A , conclua que A é diagonalizável.

6.37 - Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

- (a) Calcule os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.
- (b) Determine uma base para cada um dos subespaços próprios de A .
- (c) Mostre que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal D tais que

$$P^{-1}AP = D.$$

6.41 - Seja f um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ e seja $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Sabendo que

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

determine:

- (a) Os valores próprios de f .
- (b) Uma base $\mathcal{B}'$, de $\mathbb{R}^3$, constituída por vectores próprios de f .
- (c) $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}', \mathcal{B}')$ sendo $\mathcal{B}'$ a base indicada em (b).

Observação: Compare os resultados com os obtidos no Exercício 6.37.

6.89 - Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

- (a) Determine os valores próprios de cada uma das matrizes e indique as respectivas multiplicidades algébricas.
- (b)
 - i. Mostre que A é diagonalizável.
 - ii. Indique se B é diagonalizável.
- (c) Determine uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal e os elementos da diagonal principal de $P^{-1}AP$ estejam ordenados por ordem crescente.

6.93 - Seja $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Indique os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades geométricas.
- (b) Indique, se existir, uma matriz diagonal semelhante a A .
- (c) Determine uma matriz A nas condições do enunciado.

6.95 - Em $\mathbb{R}^3$, considere o subespaço

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}.$$

Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que $(1, -1, 0)$ é vector próprio de f associado ao valor próprio 2 e

$$f(a, b, c) = (0, 0, 0),$$

para qualquer $(a, b, c) \in F$.

- (a) Justifique que $\mathcal{B} = ((1, -1, 0), (1, 1, -3), (1, 0, -1))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de f .
- (b) Mostre que 0 é valor próprio de f e que $\text{mg}(0) = \text{ma}(0)$.
- (c) Determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \text{b. c. } \mathbb{R}^3)$.

7 - Produto Interno, Externo e Misto

7.1 - No referencial ortonormado $(O; e_1, e_2, e_3)$ considere os seguintes vectores:

$$a = 2e_1 + \alpha e_2 + e_3 \quad \text{e} \quad b = 4e_1 - 2e_2 - 2e_3.$$

Determine para que valor de α os vectores são perpendiculares.

7.2 - No referencial ortonormado $(O; e_1, e_2, e_3)$ considere os seguintes vectores:

$$a = 2e_1 + e_2 - e_3 \quad \text{e} \quad b = 6e_1 - 3e_2 + e_3.$$

Determine o ângulo formado pelos vectores a e b .

7.3 - No referencial ortonormado $(O; e_1, e_2, e_3)$ considere os seguintes vectores:

$$a = e_1 + e_2 + e_3 \quad \text{e} \quad b = e_1 - 2e_2 + 3e_3.$$

Determine o seno e o co-seno do ângulo formado pelos vectores a e b .

7.4 - Considere, no referencial ortonormado e directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ os seguintes vectores:

$$u = e_1 - e_2 + e_3, v = e_2 + 2e_3 \quad \text{e} \quad w = e_1 + e_2.$$

Determine

- (a) $u \times v$;
- (b) $v \times w$;
- (c) $(u \times v) \times w$;
- (d) $u \times (v \times w)$;
- (e) Um vector perpendicular a u e a v de norma igual a $\sqrt{15}$.

7.5 - Determine, considerando o referencial ortonormado e directo $(O; e_1, e_2, e_3)$, a área do triângulo que tem por vértices os pontos $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, 1)$ e $C(-1, 2, 3)$.

7.6 - No referencial ortonormado $(O; e_1, e_2, e_3)$ em que $O = (0, 0, 0)$, considere os seguintes vectores:

$$\overrightarrow{OA} = e_1 - 3e_2 + 2e_3 \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OB} = 2e_1 + e_2 - e_3.$$

Justifique que os pontos O , A e B definem um plano e determine um vector perpendicular a esse plano.

7.7 - No referencial ortonormado $(O; e_1, e_2, e_3)$, considere os vectores

$$a = e_1 + e_2, b = e_2 + e_3 \quad \text{e} \quad c = e_1 + e_3.$$

Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vectores a , b e c .

7.8 - No referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ em que $O = (0, 0, 0)$, considere os seguintes vectores:

$$\overrightarrow{OP} = 2e_1 - e_2 + e_3 \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OQ} = e_1 + e_2 + e_3.$$

Determine:

- (a) A expressão do vector $\overrightarrow{PQ}$ utilizando as suas componentes e os seus co-senos directores.
- (b) Um vector do plano OXY , com norma 4, que faz com os eixos OX e OY , respectivamente, os ângulos de 30° e 60° .
- (c) A área do triângulo $[OPQ]$.

7.9 - Considere o referencial ortonormado e directo $(O; e_1, e_2, e_3)$.

- (a) Determine λ de modo que sejam perpendiculares os vectores $u(2, -1, \frac{1}{5})$ e $v(\lambda, -3, \lambda^2)$.

- (b) Considere os vectores $a(3, -1, 0)$ e $b(1, 1, 1)$.
- Determine a amplitude do ângulo formado pelos vectores a e b .
 - Determine a expressão geral dos vectores perpendiculares ao vector b .
 - Determine um vector unitário perpendicular aos vectores a e b .
- (c) Dados os pontos $A(6, 0, 0)$, $B(2, 3, 0)$ e $C(1, 5, k)$, determine k de modo a que os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ formem um ângulo de 60° .

7.10 - Considere o referencial ortonormado e directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ e os pontos

$$A(0, k, -3), B(-1, 2, 2) \quad \text{e} \quad C(2, -3, 0).$$

Determine k de modo que:

- O volume do paralelepípedo de arestas $[OA]$, $[OB]$ e $[OC]$ seja igual a 10.
- Os pontos O, A, B e C sejam coplanares.

8 - Recta e Plano

Nota: Nos exercícios que se seguem, consideramos sempre o espaço $\mathbb{R}^3$ e um referencial ortonormado e directo $(O; e_1, e_2, e_3)$.

8.1 - Determine uma equação vectorial e um sistema de equações cartesianas para cada uma das seguintes rectas:

- Recta que passa pelo ponto $A(3, 2, -1)$ e tem vector director $u(-2, 2, 3)$.
- Recta que passa pelos pontos $A(3, 2, -1)$ e $B(2, 1, -1)$.
- Recta que passa pelo ponto $C(1, 0, 2)$ e é ortogonal ao plano de equação geral $2x - y + z = 0$.
- Recta que passa pelo ponto $C(1, 0, 2)$ e tem vector director $u = (2e_1 - 3e_2) \times (e_1 + e_2 + e_3)$.
- Recta que passa pelo ponto O e tem vector director e_1 (esta recta é habitualmente designada por **eixo dos xx**).
- Recta que passa pelo ponto O e tem vector director e_2 (esta recta é habitualmente designada por **eixo dos yy**).
- Recta que passa pelo ponto O e tem vector director e_3 (esta recta é habitualmente designada por **eixo dos zz**).

Às rectas consideradas em (e), (f) e (g) damos o nome de **eixos coordenados**.

8.2 - Determine uma equação vectorial da recta representada em cada uma das alíneas seguintes:

- $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3z \end{cases} ;$
- $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y - z - 2 = 0 \end{cases} ;$
- $\begin{cases} y = 2 \\ z = -4 \end{cases} ;$
- $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{6}.$

8.3 - Para cada um dos seguintes planos determine uma equação vectorial e uma equação geral.

- (a) Plano que passa pelo ponto $A(1, 0, 2)$ e é paralelo aos vectores $u(-2, -1, 0)$ e $v(3, 0, 2)$.
- (b) Plano que passa pelos pontos $A(2, -1, 4)$, $B(0, 0, 1)$ e $C(0, 3, -5)$.
- (c) Plano que passa pelo ponto de coordenadas $(3, 0, 0)$ e é ortogonal ao vector $v(1, 2, 3)$.
- (d) Plano que passa pelo ponto O e é paralelo aos vectores e_1 e e_2 (este plano é habitualmente designado por **plano xOy**).
- (e) Plano que passa pelo ponto O e é paralelo aos vectores e_1 e e_3 (este plano é habitualmente designado por **plano xOz**).
- (f) Plano que passa pelo ponto O e é paralelo aos vectores e_2 e e_3 (este plano é habitualmente designado por **plano yOz**).

Aos planos das alíneas (d), (e) e (f) damos o nome de **planos coordenados**.

8.4 - Escreva uma equação vectorial de cada um dos planos de equação geral:

- (a) $x + 5z = 0$;
- (b) $z = x - 2y$;
- (c) $x + 3 = 0$;
- (d) $3x - 2y + 4z - 6 = 0$.

8.5 - Escreva uma equação geral do plano definido pelo ponto A e pelos vectores u e v , com:

- (a) $A(0, 1, 2)$; $u(2, 0, -1)$ e $v(0, -1, 3)$;
- (b) $A(2, 0, 0)$; $u(5, 1, -1)$ e $v(-10, 1, 2)$.

8.6 - Determine os pontos de intersecção do plano de equação $3x - 2y + 5z - 6 = 0$ com os eixos coordenados.

8.7 - Considere a recta r definida pelo sistema de equações cartesianas :

$$\begin{cases} x - 3 = z \\ y = z - 1 \end{cases} .$$

- (a) Determine uma representação da recta s paralela à recta dada e que passa pelo ponto de coordenadas $(1, -2, 3)$.
- (b) Escreva uma equação geral do plano que contém as rectas r e s .
- (c) Determine um sistema de equações cartesianas da recta que passa por $A(1, -2, 3)$ e é ortogonal ao plano de equação $3x - z = y - 2$.
- (d) Determine uma equação vectorial e um sistema de equações cartesianas da recta que passa pelo ponto $C(1, 0, 2)$ e é paralela aos planos de equações $2x - y = 5$ e $x + y + z = 4$.

8.8 - Verifique se as rectas, consideradas em cada uma das seguintes alíneas, são paralelas.

- (a) $r : (x, y, z) = (2, 2, 2) + \lambda(1, 10, 1), \lambda \in \mathbb{R}$
 $s : (x, y, z) = (1, 2, 1) + \mu(0, 1, 2), \mu \in \mathbb{R}$.
- (b) $r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1), \lambda \in \mathbb{R}$
 $s : (x, y, z) = (1, 2, 1) + \mu(0, 1, 2), \mu \in \mathbb{R}$.

8.9 - Sejam r e s rectas representadas, respectivamente, pelos seguintes sistemas de equações cartesianas:

$$\begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = z + 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = z + 5 \end{cases} .$$

Determine um sistema de equações cartesianas de uma recta ortogonal a r e a s .

8.10 - Para cada $k \in \mathbb{R}$ e para cada $m \in \mathbb{R}$, considere os planos de equações gerais:

$$2x + ky + 3z - 5 = 0 \quad \text{e} \quad mx - 6y - 6z + 2 = 0.$$

Determine os valores de k e de m para os quais os planos são paralelos.

8.11 -

- (a) Determine uma equação geral do plano que passa pelo ponto $(0, -8, -2)$ e é ortogonal à recta de equação vectorial

$$(x, y, z) = (0, 7, 1) + \lambda(0, -1, 1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (b) Determine o ângulo do plano da alínea anterior com uma recta paralela à recta de equação vectorial

$$(x, y, z) = (3, 1, 2) + \mu(1, 1, 0), \mu \in \mathbb{R}.$$

8.12 - Determine o ângulo formado pelos planos de equações:

(a) $x + y = 0$ e $y + z = 0$;

(b) $(x, y, z) = \lambda(-3, 3, 0) + \mu(1, 4, -10), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $2x - 2y - z = 0$.

8.13 - Em cada uma das alíneas seguintes, determine a distância do ponto A ao plano π .

(a) $A(-2, -4, 3)$ e $\pi : 2x - y + 2z = 0$;

(b) $A(3, -6, 7)$ e $\pi : 4x - 3z - 1 = 0$.

8.14 - Determine a distância do ponto $A(1, 2, 0)$ à recta de equação vectorial:

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 0, 1), \lambda \in \mathbb{R}$$

8.15 - Considere as rectas

$$r : (x, y, z) = (1, 2, 0) + \lambda(1, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s : (x, y, z) = (0, 0, 2) + \mu(0, 2, 0), \mu \in \mathbb{R}.$$

Determine:

- (a) A posição relativa das duas rectas.
(b) Uma recta ortogonal a r e a s e que as intersecte.
(c) A distância entre r e s .

8.16 - Considere as rectas r e s definidas Por

$$r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(4, 0, -3), \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s : \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{4}.$$

- (a) Verifique que as rectas não se intersectam e que não são paralelas.
(b) Escreva uma equação do plano que contém r e é paralelo a s .
(c) Determine a distância entre r e s .

8.17 - Sejam, r a recta definida por:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

e π o plano definido por

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = 3 + \mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Determine:

- (a) Uma equação vectorial da recta r .
- (b) Uma equação geral do plano π .
- (c) A distância de r a π .
- (d) Um plano que contenha a recta r e seja ortogonal a π .

8.18 - Considere os planos:

$$\pi_1 : -2x + 4y - 2z + 3 = 0; \quad \pi_2 : x + 2z - 1 = 0; \quad \pi_3 : 2x + 4y + 6z + 2 = 0.$$

Determine:

- (a) Uma equação vectorial do plano π_1 .
- (b) O ângulo formado pelos planos π_1 e π_2 .
- (c) Uma equação vectorial da recta r que é a intersecção dos planos π_1 e π_2 .
- (d) A distância da recta r ao plano π_3 .

Soluções

1 - Matrizes

- | | |
|--|---|
| <p>1.1 - (a) B, E, F, H, I
 (b) B, E, F, H, I
 (c) B, E, F, I
 (d) E, F, I</p> <p>1.3 - (a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
 (b) $\begin{bmatrix} 8 & 2 & 10 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$
 (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
 (d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -15 \\ 11 & 2 & -2 \end{bmatrix}$</p> <p>1.4 - $X = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$</p> <p>1.5 - $AB = [-1], BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$</p> <p>1.7 - (a) $[2 \ 5]$
 (b) Não está definido
 (c) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$
 (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$</p> <p>1.15 - Se $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ então
 $D^k = \text{diag}(d_1^k, \dots, d_n^k)$</p> <p>1.26 - (a) $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 12 & 4 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$
 (b) $C = I_3 + 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix}$</p> <p>1.34 - (a) A, C</p> | <p>(b) A, E</p> <p>1.40 - (a) A, E
 (b) B</p> <p>1.42 - (a) Sim, do tipo III
 (b) Sim, do tipo II
 (c) Não
 (d) Não
 (e) Sim, do tipo II ou do tipo III</p> <p>1.43 - (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
 (b) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}$</p> <p>1.44 - (a) $\begin{bmatrix} e & f & g & h \\ a & b & c & d \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$
 (b) $\begin{bmatrix} 5e & 5f & 5g & 5h \\ a & b & c & d \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$
 (c) $\begin{bmatrix} a & b & c & d+3c \\ e & f & g & h+3g \\ i & j & k & l+3k \end{bmatrix}$
 (d) $\begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c-10b \\ d & e & f-5e \end{bmatrix}$</p> <p>1.46 - (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$</p> |
|--|---|

- (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 1.48 - (a) Sim
(b) Não
(c) Sim
(d) Não
- 1.49 - (a) Por exemplo,
 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
(b) Por exemplo,
 $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
(c) Por exemplo,
 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- 1.51 - (a) Sim
(b) Sim
(c) Não
(d) Sim
(e) Sim
- 1.52 - (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- 1.55 - (a) Não
(b) Sim
- 1.56 - (a) Por exemplo,
 $(\frac{1}{2}l_1, l_2 + (-1)l_1, l_1 + 2l_2, 4l_2, l_2 + (-1)l_1)$
- (b) Por exemplo,
 $(l_2 + l_1, \frac{1}{4}l_2, l_1 + (-2)l_2, l_2 + l_1, 2l_1)$
- 1.57 - $r(A_1) = 3, r(A_2) = 3,$
 $r(A_3) = 2, r(A_4) = 3$
- 1.58 - $r(A_\alpha) = \begin{cases} 2, & \text{se } \alpha = 2 \\ 3, & \text{se } \alpha \neq 2 \end{cases}$
 $r(B_\alpha) = \begin{cases} 3, & \text{se } \alpha = 2 \\ 4, & \text{se } \alpha \neq 2 \end{cases}$
 $r(C_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 2, & \text{se } \alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0 \\ 3, & \text{se } \alpha \neq 0 \text{ e } \beta \neq 0 \end{cases}$
 $r(D_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 3, & \text{se } \beta = 0 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R} \\ 4, & \text{se } \beta \neq 0 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$
- 1.59 - $r(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}) = 1$ e $r(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}) = 2$
- 1.62 - (a) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$
(b) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$
- 1.65 - (a) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
(b) Por exemplo,
 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$
 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 1.66 - $B^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$
 $C^{-1} = \begin{bmatrix} -i & -1+i \\ 1 & -i \end{bmatrix}$
 $D^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2 - Sistemas

Abreviaturas utilizadas:

S.P.D. – Sistema **P**ossível **D**eterminado
S.I. – Sistema **I**mpossível
S.P.I. – Sistema **P**ossível **I**ndeterminado
g.i. – grau de indeterminação

2.3 - Basta tomar a matriz

$$B = A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 19 \\ 17 \end{bmatrix}$$

resultando o sistema, nas incógnitas x, y, z , sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x - z = -2 \\ 2x + 4y + 3z = 19 \\ -x + 2z = 5 \\ 3x + 4y + 2z = 17 \end{cases}$$

2.7 - (S_1) S.P.D.

Conjunto das soluções de (S_1) :
 $\{(1, -1, 0)\}$

(S_2) S.P.I. com g.i. 1

Conjunto das soluções de (S_2) :
 $\{(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\alpha, \frac{5}{7} - \frac{2}{7}\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

(S_3) S.I.

2.8 - (a) S.P.D.

(b) S.I.

(c) S.P.I. com g.i. 2

(d) S.P.I. com g.i. 4

(e) S.I.

- (f) S.P.D.
 (g) S.P.I. com g.i. 4
- 2.9 - (a) Por exemplo, $\begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = -4 \end{cases}$
 (b) Por exemplo, $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$
 Sim, basta tomar o sistema
 $0x + 0y + 0z = 0$
- 2.11 - (a) $\mathcal{C} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
 (b) $\mathcal{C} = \emptyset$
 (c) $\mathcal{C} = \{3\}$
- 2.15 - Conjunto das soluções:
 $\{(-\frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{8}\beta + \frac{1}{2}\gamma, \frac{1}{2}\beta + \gamma, -\frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{8}\beta + \frac{1}{2}\gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$
- 2.24 - (S_1) S.P.D.
 Conjunto das soluções de (S_1) :
 $\{(\frac{3}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{4}{5})\}$
 (S_2) S.P.I. com g.i. 1
 Conjunto das soluções de (S_2) :
 $\{(-1 + 2\alpha, -\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$
 (S_3) S.I.
- (S_4) S.P.I. com g.i. 1
 Conjunto das soluções de (S_4) :
 $\{(-\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\alpha, \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$
 (S_5) S.P.I. com g.i. 1
 Conjunto das soluções de (S_5) :
 $\{(1, 0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$
 (S_6) S.I.
 (S_7) S.P.I. com g.i. 1
 Conjunto das soluções de (S_7) :
 $\{(1 - \alpha, -1 + 2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$
- 2.35 - (a) Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$, S.P.D.
 Se $\alpha = 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$, S.P.I. com g.i. 1
 Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 1$, S.I.
 Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, S.P.I. com g.i. 1
 (b) Conjunto das soluções:
 $\{(1 + \gamma, 0, \gamma) : \gamma \in \mathbb{R}\}$
- 2.37 - (a) Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 1$, S.P.D.
 Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, S.P.I. com g.i. 2
 Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 1$, S.P.I. com g.i. 1
 Se $\alpha \neq 0$ e $\beta = 1$, S.I.
 (b) (iii) $(5, 1, -3)$

3 - Determinantes

- 3.1 - (a) 1
 (b) -3
 (c) 0
- 3.2 - 2
- 3.3 - (a) 0
 (b) -7
 (c) -1
- 3.4 - (a) -1
 (b) -4
 (c) 3
- 3.6 - $\{0, 1, 3\}$
- 3.10 - (a) γ
 (b) -12γ
 (c) γ
 (d) -3γ
 (e) $-\gamma$
- 3.15 - $k \in \{-2, 1\}$
- 3.19 - $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$
- 3.20 - $|AB^T C| = -40$
 $|3B| = 3^n(-5)$
 $|B^2 C| = (-5)^2 \cdot 4$
- 3.25 - (a) $|A| = -32$
 $|B| = 0$
 (b) $|A^{-1}| = -\frac{1}{32}$
 (c) (i) Sim
 (ii) Não
- 3.28 - (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$
 (b) $V_\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = V_{-\alpha}$
 (c) $A^{-1} = \frac{1}{|z|^2 + |w|^2} \begin{bmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{bmatrix}$
- 3.32 (a) $|A| = -3$
 (b) $(1, 2, 3)$
- 3.33 (a) $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}$
 (b) $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

4 - Espaços Vectoriais

- 4.6 - (a) $(0, 0, 0, 0)$
 (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
 (c) $0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$
- 4.13 - (a) Não
 (b) Não
 (c) Sim
 (d) Sim
- 4.22 - (a) Por exemplo, $G = \langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \rangle$
- 4.23 - (a) Por exemplo, $((1, 0, 1), (0, 1, 0))$
 (b) Por exemplo,
 $\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$
 (c) Por exemplo,
 $(x^2, 2x^3 + x, -x^3 + 1)$
- 4.33 - Por exemplo, $((2, 3, 3))$ e $((-4, -6, -6))$
- 4.35 - Por exemplo, $\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$
- 4.41 - (b) Por exemplo, $((1, 2, 1), (0, 1, 1))$
- 4.44 - (a) $(1, 1, 1, 1)$, na base $\mathcal{B}$
 $(4, 3, 2, 1)$, na base b. c. $\mathbb{R}^4$
 (b) $(a - b, b - c, c - d, d)$, na base $\mathcal{B}$
 (a, b, c, d) , na base b. c. $\mathbb{R}^4$
- 4.48 - Por exemplo, $((2, 1, 2, -1))$
- 4.52 - (a) Por exemplo,
 $((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$
 (b) Por exemplo,
 $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0))$
 (c) Por exemplo,
 $((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0))$
- (d) $((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 3), (2, 0, 0, 1))$
- 4.56 - (b) Projecção de A sobre F , segundo G :
 $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
 Projecção de A sobre G , segundo F :
 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$
- 4.62 - (a) $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$
- 4.65 - $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$
- 4.69 - (a) Por exemplo,
 $((1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 1))$
 (c) Por exemplo,
 $((1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$
- 4.71 - (a) S_1 é linearmente independente
 S_2 é linearmente dependente
- 4.74 - (a) $\dim F = 3$
 Por exemplo,
 $(x^3 + x^2 - x, x^2 - 1, x + 2)$
 (b) $\dim G = 3$
 Por exemplo,
 $\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$
- 4.155 - (a) Por exemplo, $(1 + x, x^2, x^3)$
 (b) Por exemplo,
 $(1, 1 + x, x^2, x^3, x^4)$
 (c) Por exemplo, $G = \langle x^3, x^4 \rangle$
- 4.156 - (a) $t = 1$
 (b) Por exemplo,
 $((1, 2, 1, 2), (1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (1, 1, 0, 1))$
 $\dim(F \cap G_t) = 1$

5 - Aplicações Lineares

- 5.2 - (a) Sim
 (b) Não
 (c) Não
 (d) Não
- 5.7 - (a) Não
 (b) Não
- 5.10 - (a) $\text{Ker } f = \{(a, 0, 0) : a \in \mathbb{R}\}$
 Por exemplo,
 Base de $\text{Ker } f$: $((1, 0, 0))$
 Base de $\text{Im } f$: $((1, 0), (0, 1))$
 (b) $\text{Ker } g = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -a & d \end{bmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\}$
 Por exemplo,
 Base de $\text{Ker } g$: $\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)$
 Base de $\text{Im } g$: $((2, 0, 0), (0, 1, 0))$
 (c) $\text{Ker } h = \{(-b, b, 0) : b \in \mathbb{R}\}$

- Por exemplo,
 Base de $\text{Ker } h$: $((-1, 1, 0))$
 Base de $\text{Im } h$: $(x^2, 1)$
- (d) $\text{Ker } t = \{ax^3 + bx^2 + ax - b : a, b \in \mathbb{R}\}$
 Por exemplo,
 Base de $\text{Ker } t$: $(x^3 + x, x^2 - 1)$
 Base de $\text{Im } t$: $(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$
- 5.14 - (a) $\text{Ker } f = \{(0, 0, 0)\}$
 Injectiva
 (b) $\text{Ker } g = \{0x^2 + 0x + 0\}$
 Injectiva
- 5.17 - (a) $n(f) = 1$
 (b) $n(g) = 3$
 (c) $n(h) = 3$
 (d) $n(t) = 0$
- 5.19 - $(2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)$
- 5.22 - (a) Sim
 (b) Sim
- 5.26 - (a) Não
 (b) Sim, por exemplo,
 $f(0, 1, 1, 0) = (0, 0, 0),$
 $f(1, 1, 1, 1) = (0, 0, 0),$
 $f(0, 0, 1, 0) = (1, 1, 1),$
 $f(0, 0, 0, 1) = (1, 1, 0)$
 (c) Sim, por exemplo,
 $f(1, 0, 0) = (1, 2, 0, -4),$
 $f(0, 1, 0) = (2, 0, -1, -3),$
 $f(0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$
- 5.36 - (a) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
 (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- 5.39 - $r(\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')) = 2 = \dim \text{Im } f \neq \dim \mathbb{R}^3$
 f não é sobrejectiva.
- 5.42 - (a) $(3, 5)$
 (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
 (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
 (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
 (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 5.43 - (a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
 (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
 (c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$
- 5.46 - (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
 (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
 (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 5.110 - (a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
 (b) Por exemplo, $(u_1 - u_3, u_2)$
 (d) Por exemplo,
 $((2, 2, 0, 2, 2), (-1, -1, 1, 0, 1),$
 $(0, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 0),$
 $(0, 0, 0, 1, 0))$
 (e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

6 - Valores e Vectores Próprios

- 6.1 - u_1 vector próprio associado ao valor próprio 1
 u_2 vector próprio associado ao valor próprio 2
 u_3 não é vector próprio
- 6.2 - (a) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ vector próprio associado ao valor próprio 1
 $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ vector próprio associado ao valor próprio 2
 (b) $\begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$ vector próprio associado ao valor próprio 1
 $\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ vector próprio associado ao valor próprio 2
- 6.7 - (b) Por exemplo, $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 6.12 - Valores próprios de A : 3 e 1
 $\text{ma}(3) = 2$ e $\text{ma}(1) = 1$
- 6.14 - (a) Valores próprios de A : 3
 $\text{ma}(3) = 1$
- 6.28 - Valores próprios de f : 1 e 2
 $E_1 = \langle (-1, -1, 2) \rangle$
 $E_2 = \langle (-1, 2, 0), (-1, 0, 2) \rangle$
- 6.35 - $D_A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, D_B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 6.37 - (a) Valores próprios de A : -1 e 1
 $\text{ma}(-1) = 2$ e $\text{ma}(1) = 1$

- (b) Por exemplo,
 Base de M_{-1} : $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$
 Base de M_1 : $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$
- (c) Por exemplo, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
 e $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 6.41- (a) Valores próprios de f : -1 e 1
 (b) Por exemplo,
 $\mathcal{B} = (e_1 - 2e_2, e_3, e_1 - e_2 + e_3)$
 (c) $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 6.89 -
- (a) Valores próprios de A : $1, 2$ e 3
 $\text{ma}(1) = \text{ma}(2) = \text{ma}(3) = 1$
 Valores próprios de B : 1
 $\text{ma}(1) = 3$
- (b) (ii) Não
- (c) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$
- 6.93 - (a) Valores próprios de A : 0 e 2
 $\text{mg}(0) = 1$ e $\text{mg}(2) = 2$
 (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
 (c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \end{bmatrix}$
- 6.95 - (c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7 - Produto Interno, Externo e Misto

- 7.1 - $\alpha = 3$
- 7.2 - $\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{69}}\right)$
- 7.3 - $\text{sen}(\alpha) = \sqrt{\frac{19}{21}}$
 $\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{21}}$
- 7.4 - (a) $-3e_1 - 2e_2 + e_3$
 (b) $-2e_1 + 2e_2 - e_3$
 (c) $-e_1 + e_2 - e_3$
 (d) $-e_1 - e_2$
 (e) $\left(-3\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}}, -2\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}}, \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}}\right)$
- 7.5 - $\frac{\sqrt{52}}{2} = \sqrt{13}$
- 7.6 - $e_1 + 5e_2 + 7e_3$
- 7.7 - 2
- 7.8 - (a) $\overrightarrow{PQ} = -e_1 + 2e_2$
 $\sqrt{5}(\cos(\overrightarrow{PQ}, e_1)e_1 + \cos(\overrightarrow{PQ}, e_2)e_2 + \cos(\overrightarrow{PQ}, e_3)e_3) = \sqrt{5}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}e_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}e_2 + \frac{0}{\sqrt{5}}e_3\right)$
 (b) $2\sqrt{3}e_1 + 2e_2$
 (c) $\sqrt{\frac{7}{2}}$
- 7.9 - (a) $-\lambda = 5 \pm \sqrt{10}$
 (b) i. $\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{15}}\right)$
 ii. $\{(-y - z, y, z) : (y, z) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$
 iii. $\left(\frac{-1}{\sqrt{26}}, \frac{-3}{\sqrt{26}}, \frac{4}{\sqrt{26}}\right)$ ou $\left(\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{-4}{\sqrt{26}}\right)$
 (c) $k = \pm\sqrt{146}$
- 7.10 - (a) $k = \frac{7}{4} \vee k = -\frac{13}{4}$
 (b) $k = -\frac{3}{4}$

8 - Recta e Plano

- 8.1 - (a) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (3, 2, -1) + \lambda(-2, 2, 3), \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}$$
- (b) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (3, 2, -1) + \lambda(-1, -1, 0), \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{-1} \wedge z = -1$$
- (c) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(2, -1, 1), \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = -y = z - 2$$
- (d) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(-3, -2, 5), \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2 + 5\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{5}$$
- (e) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0), \lambda \in \mathbb{R}$

- $$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \wedge z = 0$$
- 8.2 - (f) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(0, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \wedge z = 0$$
- (g) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0), \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$$
- (a) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (0, 3, 1) + \lambda(0, 3, 1), \lambda \in \mathbb{R}$
- (b) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (1, -1, 0) + \lambda(0, 1, -1), \lambda \in \mathbb{R}$
- (c) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (0, 2, -4) + \lambda(1, 0, 0), \lambda \in \mathbb{R}$
- (d) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (1, -2, 0) + \lambda(3, 2, 6), \lambda \in \mathbb{R}$
- 8.3 - (a) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(-2, -1, 0) + \mu(3, 0, 2), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 $2x - 4y - 3z + 4 = 0$
- (b) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(2, -1, 3) + \mu(0, -3, 6), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 $x - 4y - 2z + 2 = 0$
- (c) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, 1, -1) + \mu(1, -2, 1), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 $x + 2y + 3z - 3 = 0$
- (d) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 $z = 0$
- (e) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 0, 1), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 $y = 0$
- (f) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(0, 1, 0) + \mu(0, 0, 1), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 $x = 0$
- 8.4 - (a) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(0, 5, 0) + \mu(5, 0, -1), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- (b) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(1, 1, -1), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- (c) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (-3, 0, 0) + \lambda(0, 1, 0) + \mu(0, 0, 1), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- (d) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (2, 0, 0) + \lambda(2, 3, 0) + \mu(2, 1, -1), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- 8.5 - (a) $x + 6y + 2z - 10 = 0$
(b) $x + 5z - 2 = 0$
- 8.6 - $\pi \cap xx = (2, 0, 0)$
 $\pi \cap yy = (0, -3, 0)$
 $\pi \cap zz = (0, 0, \frac{6}{5})$
- 8.7 - (a) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (1, -2, 3) + \lambda(1, 1, 1), \lambda \in \mathbb{R}$
- (b) $-4x + 5y - z + 17$
(c) $\frac{x-1}{3} = -2 - y = 3 - z$
(d) $1 - x = -\frac{y}{2} = \frac{z-2}{3}$
- 8.8 - (a) Não
(b) Não
- 8.9 - $x = 1 \wedge 7 + 2y = 3 - 2z$
- 8.10 - $m = -4 \wedge k = 3$
- 8.11 - (a) $-y + z - 6 = 0$
(b) $\pi/6$
- 8.12 - (a) $\pi/3$
(b) $\arccos(1/9)$
- 8.13 - (a) 2
(b) 2
- 8.14 - $\sqrt{3/2}$
- 8.15 - (a) enviesadas
(b) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (0, 1, 2) + \lambda(0, 0, 2), \lambda \in \mathbb{R}$
(c) 2
- 8.16 - (b) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(4, 0, -3) + \mu(3, 3, 4), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 $9x - 25y + 12z + 5 = 0$
- (c) $\frac{15}{\sqrt{34}}$
- 8.17 - (a) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (3, 0, 3) + \lambda(0, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R}$
(b) $x - 2y - z + 2 = 0$
(c) 0
(d) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (3, 0, 3) + \lambda(0, 1, 0) + \mu(1, -2, -1), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 $x + z - 6 = 0$
- 8.18 - (a) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (1, \frac{1}{4}, 1) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(1, \frac{3}{2}, 2), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- (b) $\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{30}}\right)$
(c) Por exemplo,
 $(x, y, z) = (1, -\frac{1}{4}, 0) + \lambda(-2, -\frac{1}{2}, 1), \lambda \in \mathbb{R}$
(d) $\frac{3}{2\sqrt{14}}$