

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT-UNL
Primeira Chamada – 21 de Janeiro de 2003

Parte I

1. Considere as seguintes matrizes reais:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A A matriz C tem característica 2.
- ☐ B A matriz B não está em forma de escada reduzida.
- ☐ C $C^T C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 18 \end{bmatrix}$.
- ☐ D É possível calcular a matriz $B^T C^T + A$.

2. Considere a matriz, invertível,

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ g-a & h-b & i-c \end{vmatrix} = |A|$.
- ☐ B $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3d & 3e & 3f \\ \frac{1}{6}g & \frac{1}{6}h & \frac{1}{6}i \end{vmatrix} = |A|$.
- ☐ C $|2A| = \frac{1}{2}|A|$.
- ☐ D $|AA^T| = |A|^2$.

3. Considere, em $\mathbb{R}^3$, os subespaços vectoriais:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x\} \quad \text{e} \quad G = \langle (1, 0, 2), (3, 2, 6), (-1, 6, -2) \rangle.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A $((1, 0, 2), (0, 1, 0))$ é uma base de F .
- ☐ B $F \cap G \neq \emptyset$.
- ☐ C $\dim G = 2$.
- ☐ D $\dim(F + G) = 4$.

4. Considere as matrizes elementares em $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ uma matriz invertível.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A $E_1 A$ é a matriz que se obtém de A trocando as linhas 1 e 3.
- ☐ B $E_1 E_2 A = E_2 E_1 A$.
- ☐ C $E_2 E_3 A = E_3 E_2 A$.
- ☐ D $E_3 A = A$.

5. Considere no espaço afim euclidiano $\mathcal{R}^3$ um referencial ortonormado e directo. Considere os pontos

$$A = (2, 1, 1), \quad B = (3, 2, 1) \quad \text{e} \quad C = (1, -1, 0).$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A A área do triângulo cujos vértices são os pontos A , B e C é $\sqrt{3}$.
- ☐ B O vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ é perpendicular ao plano de equação geral

$$-3x + 3y - 3z + 4 = 0.$$

- ☐ C Os pontos A , B e C definem um plano e uma equação geral desse plano é

$$-x + y - z + 2 = 0.$$

- ☐ D Um sistema de equações cartesianas da recta que passa pelos pontos A e B é

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Mude de folha

[Cotação]

- [2.5] 6. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, de coeficientes reais, nas incógnitas x , y , z e w :

$$\begin{cases} x + z + 2w = 0 \\ x + y + z + (\alpha + 2)w = 0 \\ 2x + y + (\alpha + 2)z + (\alpha + 4)w = 0 \\ 4x + \beta y + 4z + 8w = \beta \end{cases}.$$

- (a) Discuta o sistema em função de α e β .
- (b) Para $\alpha = \beta = 0$ indique o conjunto das soluções do sistema.

Mude de Folha

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT-UNL
Primeira Chamada – 21 de Janeiro de 2003

Parte II

[Cotação]

[3.0] 7. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(a, b, c, d) = (2a - c, b - d, 2d),$$

para qualquer $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

- (a) Mostre que $\text{Nuc } f = \{(x, 0, 2x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.
- (b) Sem determinar a imagem de f , justifique que f é sobrejectiva.
- (c) Considere em $\mathbb{R}^4$ a base $\mathcal{B}_1 = ((1, 2, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 2, 1), (0, 0, 0, -1))$ e em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B}_2 = ((0, 0, 2), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$. Indique a matriz

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2).$$

Mude de Folha

[3.0] 8. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

- (a) Determine o polinómio característico de A .
- (b) Indique os subespaços próprios de A .
- (c) Justifique que A não é diagonalizável.

Mude de Folha

[2.0] 9. Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ e $(v_1, \dots, v_n)$ uma sequência de vectores de E . Justifique que a sequência $(v_1, \dots, v_n)$ é linearmente dependente se, e só se, existe $i \in \{1, \dots, n\}$, tal que v_i é combinação linear dos restantes vectores da sequência.

Mude de Folha

[2.0] 10. Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que

$$A^4 = I_n.$$

Mostre que:

- (a) A é invertível e indique a sua inversa.
- (b) Se α é valor próprio de A , então $\alpha \in \{-1, 1\}$.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT-UNL

Primeira Chamada – 21 de Janeiro de 2003

Uma resolução

1. B.
2. C.
3. D.
4. D.
5. A.
6. (a) Começemos por condensar a matriz ampliada do sistema, utilizando unicamente transformações elementares nas linhas:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha+2 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha+2 & \alpha+4 & 0 \\ 4 & \beta & 4 & 8 & \beta \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\ell_2 \rightarrow -\ell_1 + \ell_2 \\ \ell_3 \rightarrow -2\ell_1 + \ell_3 \\ \ell_4 \rightarrow -4\ell_1 + \ell_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & \beta \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\ell_3 \rightarrow -\ell_2 + \ell_3 \\ \ell_4 \rightarrow -\beta\ell_2 + \ell_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta & \beta \end{array} \right] (\star).$$

Tendo em conta a matriz $(\star)$ pode-se fazer a seguinte discussão do sistema:

- Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$ tem-se que

$$r(\text{matriz simples}) = r(\text{matriz ampliada}) = 4 = \text{número de incógnitas}.$$

Logo, neste caso, o sistema é possível determinado.

- Se $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$ tem-se que

$$r(\text{matriz simples}) = r(\text{matriz ampliada}) = 3 < 4 = \text{número de incógnitas}.$$

Logo, neste caso, o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação

$$1 = \text{número de incógnitas} - r(\text{matriz simples/matriz ampliada}) = 4 - 3.$$

- Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ tem-se que

$$r(\text{matriz simples}) = r(\text{matriz ampliada}) = 2 < 4 = \text{número de incógnitas}.$$

Logo, neste caso, o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação

$$2 = \text{número de incógnitas} - r(\text{matriz simples/matriz ampliada}) = 4 - 2.$$

- Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ tem-se que

$$r(\text{matriz simples}) = 2 < 3 = r(\text{matriz ampliada}).$$

Logo, neste caso, o sistema é impossível.

(b) No caso em que $\alpha = \beta = 0$ a matriz $(\star)$, obtida na resolução da alínea anterior, toma a forma

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Como esta matriz está em forma de escada reduzida, segue-se que o conjunto das soluções do sistema, relativamente ao caso pedido, é

$$\{(-\gamma - 2\theta, 0, \gamma, \theta) : \gamma, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

7. (a) Tem-se que

$$\begin{aligned} \text{Nuc } f &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : f(a, b, c, d) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : (2a - c, b - d, 2d) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : 2a - c = 0 \wedge b - d = 0 \wedge 2d = 0\} \\ &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : (a, b, c, d) \text{ é solução de } (S)\}, \end{aligned}$$

onde (S) designa o sistema homogéneo de equações lineares sobre $\mathbb{R}$, nas indeterminadas x, y, z e w ,

$$\begin{cases} 2x - z = 0 \\ y - w = 0 \\ 2w = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - z = 0 \\ y = 0 \\ w = 0 \end{cases}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \text{Nuc } f &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : 2a - c = 0, b = 0 \text{ e } d = 0\} \\ &= \{(a, 0, 2a, 0) : a \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

(b) Começemos por observar que f é sobrejectiva se, e só se,

$$\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3 = 3.$$

Pela resolução da alínea anterior tem-se que

$$\text{Nuc } f = \{(a, 0, 2a, 0) : a \in \mathbb{R}\} = \{a(1, 0, 2, 0) : a \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 2, 0) \rangle,$$

pelo que $((1, 0, 2, 0))$ é um sistema gerador de $\text{Nuc } f$. Como o vector $(1, 0, 2, 0)$ é não nulo, segue-se que o sistema $((1, 0, 2, 0))$ é linearmente independente e, portanto, $((1, 0, 2, 0))$ é uma base de $\text{Nuc } f$. Em particular, $\dim \text{Nuc } f = 1$. Como

$$4 = \dim \mathbb{R}^4 = \dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f = 1 + \dim \text{Im } f,$$

resulta que $\dim \text{Im } f = 4 - 1 = 3$. Donde f é sobrejectiva.

(c) Tem-se que

$$\begin{aligned} f(1, 2, 1, 0) &= (1, 2, 0) = \mathbf{0}(0, 0, 2) + \mathbf{2}(0, 1, 0) + \mathbf{1}(1, 0, 0) \\ f(0, 1, 0, 1) &= (0, 0, 2) = \mathbf{1}(0, 0, 2) + \mathbf{0}(0, 1, 0) + \mathbf{0}(1, 0, 0) \\ f(0, 0, 2, 1) &= (-2, -1, 2) = \mathbf{1}(0, 0, 2) - \mathbf{1}(0, 1, 0) - \mathbf{2}(1, 0, 0) \\ f(0, 0, 0, -1) &= (0, 1, -2) = -\mathbf{1}(0, 0, 2) + \mathbf{1}(0, 1, 0) + \mathbf{0}(1, 0, 0). \end{aligned}$$

Logo

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. (a) O polinómio característico da matriz A é, desenvolvendo o determinante segundo a terceira linha,

$$|A - xI_3| = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 \\ -4 & -2-x & 1 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ -4 & -2-x \end{vmatrix} = -x[(2-x)(-2-x) + 4] = -x^3.$$

(b) Os valores próprios da matriz A são as raízes do polinómio característico de A . Como

$$|A - xI_3| = 0 \iff -x^3 = 0 \iff x = 0,$$

resulta que 0 é o único valor próprio da matriz A .

Tem-se que:

$$\begin{aligned} M_0 &= \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (A - 0I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} && \left(\begin{array}{l} \text{subespaço próprio de } A \\ \text{associado ao valor próprio } 0 \end{array} \right) \\ &= \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a, b, c) \text{ é solução do sistema } (S_1) \}, \end{aligned}$$

onde (S_1) designa o sistema homogéneo de equações lineares sobre $\mathbb{R}$, nas incógnitas x, y e z ,

$$(A - 0I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{forma matricial}).$$

Resolvendo este sistema obtém-se

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \rightarrow 2\ell_1 + \ell_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_1 \rightarrow \frac{1}{2}\ell_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{matriz em f.e.r.}).$$

Logo

$$\begin{aligned} M_0 &= \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + \frac{1}{2}b = 0 \wedge c = 0 \} \\ &= \{ (-\frac{1}{2}b, b, 0) : b \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ b(-\frac{1}{2}, 1, 0) : b \in \mathbb{R} \} \\ &= \langle (-\frac{1}{2}, 1, 0) \rangle. \end{aligned}$$

- (c) Começemos por observar que a matriz A é diagonalizável se, e só se, a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios igualar a ordem de A . Como, pela resolução da alínea anterior, 0 é o único valor próprio da matriz A , segue-se que A é diagonalizável se, e só se, $\text{mg}(0) = 3 (= \text{ordem de } A)$.

Pela resolução da alínea anterior tem-se que $((-\frac{1}{2}, 1, 0))$ é um sistema gerador de M_0 . Como $(-\frac{1}{2}, 1, 0)$ é um vector não nulo, então o sistema $((-\frac{1}{2}, 1, 0))$ é linearmente independente e, por conseguinte, é uma base de M_0 . Donde $\text{mg}(0) = \dim M_0 = 1$.

Como $\text{mg}(0) = 1 < 3 (= \text{ordem de } A)$, resulta que A não é uma matriz diagonalizável.

9. Admita-se que a sequência $(v_1, \dots, v_n)$ é linearmente dependente. Então, existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_E.$$

Nestas condições, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\alpha_i \neq 0$. Da igualdade anterior resulta então que

$$\alpha_i v_i = -\alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_{i+1} v_{i+1} - \dots - \alpha_n v_n,$$

o que implica

$$v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \dots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n.$$

Logo v_i é combinação linear dos vectores $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$.

Reciprocamente, suponha-se que para um certo $i \in \{1, \dots, n\}$ se tem que

$$v_i = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_{i+1} v_{i+1} + \dots + \beta_n v_n,$$

com $\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$. Então,

$$-\beta_1 v_1 - \dots - \beta_{i-1} v_{i-1} + 1v_i - \beta_{i+1} v_{i+1} - \dots - \beta_n v_n = 0_E$$

e, portanto, o sistema $(v_1, \dots, v_n)$ é linearmente dependente, já que $1 \neq 0$.

10. (a) Tendo em conta que, por hipótese, $I_n = A^4$, tem-se que

$$AA^3 = A^4 = I_n \quad \text{e} \quad A^3A = A^4 = I_n.$$

Logo A é invertível e $A^{-1} = A^3$.

RESOLUÇÃO ALTERNATIVA: Tem-se que

$$A^4 = I_n$$

$$|A^4| = |I_n|$$

$$|A|^4 = 1.$$

Logo $|A| \neq 0$ e, portanto, A é invertível. Como A^{-1} existe, da igualdade

$$A^4 = I_n$$

resulta, multiplicando ambos os membros à esquerda por A^{-1} , que

$$\begin{aligned} A^{-1}A^4 &= A^{-1}I_n \\ A^3 &= A^{-1}. \end{aligned}$$

(b) Admita-se que α é valor próprio da matriz A . Então, existe um vector não nulo $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$AX = \alpha X,$$

onde $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$. Tendo em conta que por hipótese $A^4 = I_n$, resulta que

$$\begin{aligned} AX &= \alpha X \\ A^3(AX) &= A^3(\alpha X) \\ A^4X &= \alpha(A^3X) \\ A^4X &= \alpha A^2(AX) \\ A^4X &= \alpha A^2(\alpha X) \\ A^4X &= \alpha^2(A^2X) \\ A^4X &= \alpha^2 A(AX) \\ A^4X &= \alpha^2 A(\alpha X) \\ A^4X &= \alpha^3(AX) \\ A^4X &= \alpha^3(\alpha X) \\ A^4X &= \alpha^4 X \\ I_n X &= \alpha^4 X \\ X &= \alpha^4 X. \end{aligned}$$

Ora,

$$X = \alpha^4 X \implies (1 - \alpha^4)X = \mathbf{0} \implies 1 - \alpha^4 = 0 \vee X = \mathbf{0},$$

com $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$. Como, por hipótese, $X \neq \mathbf{0}$, tem-se que

$$1 - \alpha^4 = 0 \implies \alpha^4 = 1.$$

Como $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tem-se que $\alpha \in \mathbb{R}$ e, portanto, $\alpha = \pm 1$. Logo $\alpha \in \{-1, 1\}$. □