

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT-UNL
Segunda Chamada – 30 de Janeiro de 2003

Parte I

1. Considere as seguintes matrizes reais:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & -10 \end{bmatrix}.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A A matriz C tem característica 1.
- ☐ B $AB^T + C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -1 & -3 & 7 \end{bmatrix}$.
- ☐ C A é invertível e $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.
- ☐ D $A \cdot \text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Considere a matriz, invertível,

$$M = \begin{bmatrix} a & f & b \\ 0 & e & 0 \\ c & g & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A $|M| = e \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.
- ☐ B $\begin{vmatrix} -a & 0 & -c \\ -f & e & -g \\ -b & 0 & -d \end{vmatrix} = |M|$.
- ☐ C $\begin{vmatrix} 0 & e & 0 \\ c & g & d \\ a & f & b \end{vmatrix} = -|M|$.
- ☐ D $\begin{vmatrix} a & f & b \\ -a & e-f & -b \\ c & g & d \end{vmatrix} = |M|$.

3. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, considere os vectores

$$u_1 = (1, 0, 1), \quad u_2 = (1, 2, 0), \quad u_3 = (2, 0, 1) \quad \text{e} \quad u_4 = (0, -4, 1).$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A (u_1, u_2, u_3) é uma sequência linearmente independente.
- ☐ B $(0, 8, -2) \notin \langle u_2, u_3 \rangle$.
- ☐ C (u_2, u_3, u_4) é uma sequência linearmente dependente.
- ☐ D $\dim \langle u_2, u_3, u_4 \rangle = 2$.

Continua no verso desta folha

4. Considere no espaço afim euclidiano $\mathcal{R}^3$ um referencial ortonormado e directo. Considere os pontos:

$$A = (2, 1, 0), \quad B = (1, 2, 0), \quad C = (0, 0, 1) \quad \text{e} \quad D = (3, 3, -1).$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A A área do triângulo definido pelos pontos A , B e C é $\frac{\sqrt{11}}{2}$.
- ☐ B Os vectores $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ são perpendiculares.
- ☐ C Os pontos A , B , C e D não estão todos num mesmo plano.
- ☐ D O ângulo formado pelos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é $\arccos \frac{1}{\sqrt{12}}$.

5. No espaço afim euclidiano $\mathcal{R}^3$ considere a recta $\mathcal{R}$ de equação vectorial

$$(x, y, z) = (2, 0, 1) + \lambda(2, 1, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Seja $\mathcal{P}$ o plano de equação geral

$$-4x - 2y + 2z + 6 = 0.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A A recta $\mathcal{R}$ não é perpendicular ao plano $\mathcal{P}$.
- ☐ B O ponto $(-2, -2, 3)$ pertence à recta $\mathcal{R}$, mas não pertence ao plano $\mathcal{P}$.
- ☐ C $\frac{x-2}{2} = y = 1 - z$ são equações reduzidas da recta $\mathcal{R}$.
- ☐ D O plano $\mathcal{P}$ intersecta o eixo OY no ponto $(0, 3, 0)$.

Mude de folha

[Cotação]

- [2.5] 6. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, de coeficientes reais, nas incógnitas x , y e z :

$$\begin{cases} x + 2y = \alpha \\ 2x + (2\beta + 4)y + z = 2\alpha \\ -x - 2y + \alpha z = \beta - \alpha \end{cases}.$$

- (a) Discuta o sistema em função de α e β .
- (b) Para $\alpha = \beta = 0$ indique o conjunto das soluções do sistema.

Mude de Folha

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT-UNL
Segunda Chamada – 30 de Janeiro de 2003

Parte II

[Cotação]

[3.0] 7. Seja $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que:

$$f(1, 0, 0, 0) = (0, 2, 1),$$

$$f(0, 1, 0, 0) = (0, 0, -1),$$

$$f(0, 0, 1, 0) = (1, 0, 1) \quad \text{e}$$

$$f(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

- (a) Mostre que $f(a, b, c, d) = (c, 2a, a - b + c)$, para todo $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
- (b) Justifique que $\dim \text{Nuc } f = 1$.
- (c) Sem determinar a imagem de f , conclua que f é sobrejectiva.
- (d) Determine a matriz da aplicação linear f quando se considera em $\mathbb{R}^4$ a base canónica e em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B}' = ((0, -1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 2))$.

Mude de Folha

[3.0] 8. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

- (a) Justifique que o polinómio característico de A é $(2 - \lambda)^2(-3 - \lambda)$.
- (b) Determine os valores próprios e os subespaços próprios de A .
- (c) Mostre que A é semelhante à matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e indique uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, tal que $P^{-1}AP = D$.

Mude de Folha

[2.0] 9. Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tal que $A^T = -A$.

Mostre que se n é ímpar, então A não é invertível.

Mude de Folha

[2.0] 10. Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tal que $A^2 = -A$.

Justifique que se α é valor próprio de A , então $\alpha \in \{-1, 0\}$.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT–UNL
Segunda Chamada – 30 de Janeiro de 2003

Uma resolução

1. D.
2. C.
3. B.
4. C.
5. A.
6. (a) Começemos por condensar a matriz ampliada do sistema, utilizando unicamente transformações elementares nas linhas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \alpha \\ 2 & 2\beta + 4 & 1 & 2\alpha \\ -1 & -2 & \alpha & \beta - \alpha \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 \rightarrow \ell_1 + \ell_3]{\ell_2 \rightarrow -2\ell_1 + \ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 2\beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \end{array} \right] (\star).$$

Tendo em conta a matriz $(\star)$ pode-se fazer a seguinte discussão do sistema:

- Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, tem-se que

$$r(\text{matriz simples}) = r(\text{matriz ampliada}) = 3 = \text{número de incógnitas}.$$

Logo, neste caso, o sistema é possível determinado.

- Se $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$, a matriz $(\star)$ toma a forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{array} \right].$$

Continuando a condensação a partir desta matriz obtém-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_3 \rightarrow -\alpha\ell_2 + \ell_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Logo, neste caso,

$$r(\text{matriz simples}) = r(\text{matriz ampliada}) = 2 < 3 = \text{número de incógnitas}$$

e, portanto, o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação

$$1 = \text{número de incógnitas} - r(\text{matriz simples/matriz ampliada}) = 3 - 2.$$

- Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$, a matriz $(\star)$ toma a forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array} \right],$$

pelo que se tem

$$r(\text{matriz simples}) = 2 < 3 = r(\text{matriz ampliada}).$$

Logo, neste caso, o sistema é impossível.

- Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, a matriz $(\star)$ toma a forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

pelo que se tem

$$r(\text{matriz simples}) = r(\text{matriz ampliada}) = 2 < 3 = \text{número de incógnitas}.$$

Logo o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação

$$1 = \text{número de incógnitas} - r(\text{matriz simples/matriz ampliada}) = 3 - 2.$$

$$\text{Conclusão: } \begin{cases} \text{Se } \alpha \neq 0 \text{ e } \beta \neq 0, \text{ o sistema é possível determinado;} \\ \text{Se } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \beta = 0, \text{ o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação } 1; \\ \text{Se } \alpha = 0 \text{ e } \beta \neq 0, \text{ o sistema é impossível.} \end{cases}$$

- (b) No caso em que $\alpha = \beta = 0$ a matriz $(\star)$ toma, como vimos, a seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Como esta matriz está em forma de escada reduzida, pode-se afirmar que o conjunto das soluções do sistema, relativamente ao caso pedido, é

$$\begin{aligned} \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : c = 0 \wedge a + 2b = 0\} &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : c = 0 \wedge a = -2b\} \\ &= \{(-2b, b, 0) : b \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

7. (a) Seja $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ um elemento arbitrário. Tendo em conta a linearidade da aplicação f , tem-se que

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &= f(a(1, 0, 0, 0) + b(0, 1, 0, 0) + c(0, 0, 1, 0) + d(0, 0, 0, 1)) \\ &= af(1, 0, 0, 0) + bf(0, 1, 0, 0) + cf(0, 0, 1, 0) + df(0, 0, 0, 1) \\ &= a(0, 2, 1) + b(0, 0, -1) + c(1, 0, 1) + d(0, 0, 0) \\ &= (c, 2a, a - b + c). \end{aligned}$$

- (b) Tendo em conta a alínea anterior, tem-se que

$$\begin{aligned} \text{Nuc } f &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : f(a, b, c, d) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : (c, 2a, a - b + c) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : c = 0 \wedge 2a = 0 \wedge a - b + c = 0\} \\ &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : (a, b, c, d) \text{ é solução de } (S)\}, \end{aligned}$$

onde (S) designa o sistema homogéneo de equações lineares sobre $\mathbb{R}$, nas indeterminadas x, y, z e w ,

$$\begin{cases} z = 0 \\ 2x = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \text{Nuc } f &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = b = c = 0\} \\ &= \{(0, 0, 0, d) : d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{d(0, 0, 0, 1) : d \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (0, 0, 0, 1) \rangle, \end{aligned}$$

pelo que $((0, 0, 0, 1))$ é um sistema gerador de $\text{Nuc } f$. Como o vector $(0, 0, 0, 1)$ é não nulo, segue-se que $((0, 0, 0, 1))$ é uma base de $\text{Nuc } f$. Em particular, $\dim \text{Nuc } f = 1$.

(c) Começemos por observar que f é sobrejectiva se, e só se,

$$\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3 = 3.$$

Pela resolução da alínea anterior tem-se que

$$4 = \dim \mathbb{R}^4 = \dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f = 1 + \dim \text{Im } f.$$

Logo $\dim \text{Im } f = 4 - 1 = 3$ e, portanto, f é sobrejectiva.

(d) Tem-se que

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0, 0) &= (0, 2, 1) = -\mathbf{2}(0, -1, 0) + \mathbf{0}(1, 0, 0) + \frac{1}{2}(0, 0, 2), \\ f(0, 1, 0, 0) &= (0, 0, -1) = \mathbf{0}(0, -1, 0) + \mathbf{0}(1, 0, 0) - \frac{1}{2}(0, 0, 2), \\ f(0, 0, 1, 0) &= (1, 0, 1) = \mathbf{0}(0, -1, 0) + \mathbf{1}(1, 0, 0) + \frac{1}{2}(0, 0, 2), \\ f(0, 0, 0, 1) &= (0, 0, 0) = \mathbf{0}(0, -1, 0) + \mathbf{0}(1, 0, 0) + \mathbf{0}(0, 0, 2). \end{aligned}$$

Logo

$$\mathcal{M}(f; \text{b.c.}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

onde “b.c.” designa a base canónica de $\mathbb{R}^4$.

8. (a) O polinómio característico da matriz A , na indeterminada λ , é dado por

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 5 & -3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2(-3 - \lambda)$$

(Observe-se que se trata do determinante de uma matriz triangular inferior, pelo que este é igual ao produto dos elementos da diagonal principal).

(b) Os valores próprios da matriz A são os zeros do polinómio característico de A . Como

$$|A - \lambda I_3| = 0 \iff (2 - \lambda)^2(-3 - \lambda) = 0 \iff \lambda = 2 \vee \lambda = -3,$$

resulta que 2 e -3 são os valores próprios da matriz A .

Tem-se que

$$M_2 = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (A - 2I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{subespaço próprio de } A \\ \text{associado ao valor próprio } 2 \end{array} \right)$$

$$= \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a, b, c) \text{ é solução do sistema } (S_1) \},$$

onde (S_1) designa o sistema homogéneo de equações lineares sobre $\mathbb{R}$, nas incógnitas x, y e z ,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A-2I_3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = y \end{cases}.$$

Logo

$$\begin{aligned} M_2 &= \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = b \} \\ &= \{ (a, a, c) : a, c \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ a(1, 1, 0) + c(0, 0, 1) : a, c \in \mathbb{R} \} \\ &= \langle (1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

$$M_{-3} = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (A + 3I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{subespaço próprio de } A \\ \text{associado ao valor próprio } -3 \end{array} \right)$$

$$= \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a, b, c) \text{ é solução do sistema } (S_2) \},$$

onde (S_2) designa o sistema homogéneo de equações lineares sobre $\mathbb{R}$, nas incógnitas x, y e z ,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{A+3I_3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Logo

$$\begin{aligned} M_{-3} &= \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0 \wedge c = 0 \} \\ &= \{ (0, b, 0) : b \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ b(0, 1, 0) : b \in \mathbb{R} \} \\ &= \langle (0, 1, 0) \rangle. \end{aligned}$$

- (c) Por definição, dizer que a matriz A é diagonalizável significa que a matriz A é semelhante a uma matriz diagonal. Por outro lado, a matriz A é diagonalizável se, e só se, a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios igualar a ordem de A . Como, pela resolução da alínea anterior, 2 e -3 são os únicos valores próprios da matriz A , segue-se que A é diagonalizável se, e só se,

$$\text{mg}(2) + \text{mg}(-3) = 3 = \text{ordem de } A.$$

Novamente pela resolução da alínea anterior tem-se que $((1, 1, 0), (0, 0, 1))$ é um sistema gerador de M_2 e $((0, 1, 0))$ é um sistema gerador de M_{-3} . Como $r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2$ e o vector $(0, 1, 0)$ é não nulo, resulta que os

sistemas $((1, 1, 0), (0, 0, 1))$ e $((0, 1, 0))$ são linearmente independentes e, portanto, o primeiro é uma base de M_2 e o segundo é uma base de M_{-3} . Em particular, $\text{mg}(2) = \dim M_2 = 2$ e $\text{mg}(-3) = \dim M_{-3} = 1$. Logo

$$\text{mg}(2) + \text{mg}(-3) = 2 + 1 = 3 = \text{ordem de } A,$$

pelo que A é uma matriz diagonalizável.

Nestas condições, a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cujas primeira e terceira colunas são os vectores da base de M_2 e cuja segunda coluna é o vector da base de M_{-3} (referimo-nos às bases acima indicadas), é invertível e, além disso,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D \quad (\text{matriz diagonal}).$$

Donde a matriz A é semelhante à matriz D .

9. Tem-se que

$$\begin{aligned} A^T &= -A & (\text{por hipótese}) \\ |A^T| &= |-A| \\ |A| &= (-1)^n |A| \\ |A| &= -|A| & (n \text{ é ímpar}). \end{aligned}$$

Logo $2|A| = 0$ e, portanto, $|A| = 0$. Donde A não é invertível.

10. Admita-se que $\alpha \in \mathbb{C}$ é valor próprio da matriz A . Então, existe um vector não nulo $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, tal que

$$AX = \alpha X,$$

onde $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{C})$. Tendo em conta que por hipótese $A^2 = -A$, resulta que

$$\begin{aligned} AX &= \alpha X \\ A(AX) &= A(\alpha X) \\ A^2 X &= \alpha(AX) \\ -AX &= \alpha(\alpha X) \\ -\alpha X &= \alpha^2 X. \end{aligned}$$

Ora,

$$-\alpha X = \alpha^2 X \implies (\alpha^2 + \alpha)X = \mathbf{0} \implies \alpha^2 + \alpha = 0 \vee X = \mathbf{0},$$

com $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{C})$. Como, por hipótese, $X \neq \mathbf{0}$, então

$$\alpha^2 + \alpha = 0 \implies \alpha(\alpha + 1) = 0 \implies \alpha = 0 \vee \alpha + 1 = 0.$$

Logo $\alpha \in \{-1, 0\}$.

□