Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT–UNL

Recurso – 14 de Fevereiro de 2003

Parte I

1. Considere as seguintes matrizes reais:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

[A] $AB + 2C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

[B] $\operatorname{adj} C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

[C] B tem característica 2.

[D] A está em forma de escada reduzida.

2. Seja $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ uma matriz invertível e B a matriz que se obtém de A adicionando à linha 3 a linha 2 multiplicada por 4.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

[A] $\det B = \det A$.

[B] $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} A$.

[C] $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} B$.

[D] B é invertível e $B^{-1} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Considere em $\mathbb{R}^3$ os subespaços vectoriais

$$F = \langle (2,1,1), (-1,0,1), (5,3,4) \rangle \quad \text{e} \quad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 2y \text{ e } z = y\}.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

[A] $\dim F = 2$.

[B] $\dim G = 1$.

[C] $(6,3,3) \in F \cap G$.

[D] $F + G = \mathbb{R}^3$.

Continua no verso desta folha

4. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação linear definida por

$$f(a,b,c) = (2a+b, b-c),$$

para todo $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Considere em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B}_1 = ((1,0,1),(0,1,1),(0,0,2))$ e em $\mathbb{R}^2$ a base $\mathcal{B}_2 = ((2,-1),(0,1))$. Sejam $\mathcal{B}'_1$ e $\mathcal{B}'_2$, respectivamente as bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathbb{R}^2$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

[A] $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$.

[B] $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}'_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{M}(f;\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}_2)$.

[C] $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

[D] $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}_2) = \mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

5. Considere o plano $\mathcal{P}$ de equação geral

$$2x + 3y - 2z + 5 = 0$$

e a recta $\mathcal{R}$ dada pelo sistema de equações

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ 2y + 3z = 2 \end{cases}.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

[A] Os pontos $A = (0,1,4)$ e $B = (2,1,6)$ pertencem ao plano $\mathcal{P}$ e definem com o ponto $C = (-1,3,2)$ um triângulo cuja área é 3.

[B] O vector $u = (-2,-3,2)$ não é perpendicular ao plano $\mathcal{P}$.

[C] O vector $u = (-2,-3,2)$ e a recta $\mathcal{R}$ têm a mesma direcção.

[D] O plano $\mathcal{P}$ intersecta o eixo OY no ponto $(0,-\frac{5}{3},0)$.

Mude de folha

[Cotação]

[2.5] **6.** Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, de coeficientes reais, nas incógnitas x, y, z e w:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x + 2(\alpha - 1)y + 2z = -1 \\ x + 2y + (\alpha - 1)z + 2\alpha w = \beta + 1 \end{cases}.$$

(a) Discuta o sistema em função de α e β.

(b) Para $\alpha = \beta = 0$ indique o conjunto das soluções do sistema.

Mude de Folha

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT–UNL

Recurso – 14 de Fevereiro de 2003

Parte II

[Cotação]

[3.5] **7.** Considere a aplicação linear $g : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, tal que

$$g(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & b-c \\ 2b & a \end{bmatrix},$$

para todo $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que $\operatorname{Nuc} g = \{(0,0,0)\}$.

(b) Justifique que $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ pertence à imagem de g.

(c) Sem determinar a imagem de g, justifique que g não é sobrejectiva.

(d) Indique uma base da imagem de g.

Mude de Folha

[3.0] **8.** Uma matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ admite os vectores próprios

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

correspondentes ao valor próprio 1, e o vector próprio

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

correspondente ao valor próprio 2.

(a) Mostre que $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right]$ é vector próprio de A.

(b) Justifique que A é diagonalizável.

(c) Indique uma matriz A nas condições anteriores.

[**Observação:** Nesta exercício estamos a supor que cada matriz coluna $X = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{C})$ se identifica com o vector (x,y,z) de $\mathbb{C}^3$.]

Mude de Folha

[3.5] **9.** Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tal que $AA^T = -I_n$. Mostre que:

(a) n é par.

(b) A é invertível e indique a sua inversa.

(c) Se α é valor próprio de A, então $-\alpha^{-1}$ é valor próprio de A^T.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT–UNL

Recurso – 14 de Fevereiro de 2003

Uma resolução

1. D.

2. C.

3. D.

4. C.

5. B.

6. (a) Comecemos por condensar a matriz ampliada do sistema, utilizando unicamente transformações elementares nas linhas:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2\alpha-2 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & \alpha-1 & 2\alpha & \beta+1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\ell_2 \to \ell_1+\ell_2 \\ \ell_3 \to -\ell_1+\ell_3}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 2\alpha & \beta \end{array}\right] (\star).$$

Tendo em conta a matriz $(\star)$ pode-se fazer a seguinte discussão do sistema:

- Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$\text{r(matriz simples)} = \text{r(matriz ampliada)} = 3 < 4 = \text{número de incógnitas.}$$

Logo, neste caso, o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação

$$1 = \text{número de incógnitas} - \text{r(matriz simples/matriz ampliada)} = 4 - 3.$$

- Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$, a matriz $(\star)$ toma a forma

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right].$$

Logo, neste caso,

$$\text{r(matriz simples)} = 2 < 3 = \text{r(matriz ampliada)}$$

e, portanto, o sistema é impossível.

- Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, a matriz $(\star)$ toma a forma

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

pelo que se tem

$$\text{r(matriz simples)} = \text{r(matriz ampliada)} = 2 < 4 = \text{número de incógnitas.}$$

Logo, neste caso, o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação

$$2 = \text{número de incógnitas} - \text{r(matriz simples/matriz ampliada)} = 4 - 2.$$

(b) No caso em que $\alpha = \beta = 0$ a matriz $(\star)$ toma, como vimos, a seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Continuando a condensar para se obter uma matriz em forma de escada reduzida obtém-se

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 \to \ell_2 + \ell_1]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Assim, o conjunto das soluções do sistema, relativamente ao caso pedido, é

$$\begin{aligned} \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \ a + 2b = 1 \ \wedge \ c = 0\} &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \ a = 1 - 2b \ \wedge \ c = 0\} \\ &= \{(1-2b, b, 0, d) : \ b, d \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

7. (a) Tem-se que

$$\begin{aligned} \operatorname{Nuc} g &= \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ g(a,b,c) = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]\right\} \\ &= \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ \left[\begin{smallmatrix} a & b-c \\ 2b & a \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]\right\} \\ &= \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ a = 0 \ \wedge \ b - c = 0 \ \wedge \ 2b = 0\right\}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{cases} a = 0 \\ b - c = 0 \\ 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases},$$

segue-se que

$$\begin{aligned} \operatorname{Nuc} g &= \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ a = b = c = 0\right\} \\ &= \{(0,0,0)\}. \end{aligned}$$

(b) Ora, $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ pertence à imagem de g se, e só se, existir $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, tal que $g(a,b,c) = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Mas,

$$g(a,b,c) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} a & b-c \\ 2b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b - c = 2 \\ 2b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}.$$

Logo $g(2,1,-1) = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ e, portanto, $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ pertence à imagem de g.

(c) A aplicação linear g é sobrejectiva se, e só se,

$$\dim \operatorname{Im} g = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4.$$

Pela resolução da alínea (b) sabe-se que $\operatorname{Nuc} g = \{(0,0,0)\}$. Logo $\dim \operatorname{Nuc} g = 0$, pelo que

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Nuc} g + \dim \operatorname{Im} g = 0 + \dim \operatorname{Im} g.$$

Donde $\dim \operatorname{Im} g = 3 - 0 = 3 < 4$ e, por conseguinte, g não é sobrejectiva.

(d) Como $\mathbb{R}^3 = \langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle$, resulta que

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} g &= \langle g(1,0,0), g(0,1,0), g(0,0,1)\rangle \\ &= \left\langle \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -1\\0 & 0\end{bmatrix}\right\rangle.\end{aligned}$$

Donde $\left(\left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0 & -1\\0 & 0\end{smallmatrix}\right]\right)$ é um sistema de geradores de $\operatorname{Im} g$. Para concluir que é base podemos utilizar o resultado que afirma que num espaço vectorial de dimensão n, n vectores geradores são linearmente independentes e, portanto, base. De facto, como pela resolução da alínea anterior $\dim \operatorname{Im} g = 3$, segue-se que o sistema (com três vectores) $\left(\left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0 & -1\\0 & 0\end{smallmatrix}\right]\right)$ é uma base de $\operatorname{Im} g$.

Alternativamente: Podemos demonstrar directamente que são linearmente independentes. Neste caso tem-se, com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix}0 & -1\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix}\alpha & \beta-\gamma\\2\beta & \alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{cases}\alpha = 0\\ \beta - \gamma = 0\\ 2\beta = 0\end{cases} \implies \begin{cases}\alpha = 0\\ \beta = 0\\ \gamma = 0\end{cases}$$

e, portanto, os vectores são linearmente independentes.

8. (a) Observemos primeiramente que o vector $\left[\begin{smallmatrix}1\\5\\1\end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix}0\\1\\4\end{smallmatrix}\right]$ é não nulo. Por outro lado, por hipótese, $\left[\begin{smallmatrix}1\\5\\1\end{smallmatrix}\right]$ e $\left[\begin{smallmatrix}0\\1\\4\end{smallmatrix}\right]$ são vectores próprios de A associados ao valor próprio 1 o que implica que

$$A\begin{bmatrix}1\\5\\1\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\5\\1\end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad A\begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}.$$

Então,

$$A\left(\begin{bmatrix}1\\5\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix}1\\5\\1\end{bmatrix} + A\begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\5\\1\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix} = 1\left(\begin{bmatrix}1\\5\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}\right).$$

Destes dois factos resulta que $\left[\begin{smallmatrix}1\\5\\1\end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix}0\\1\\4\end{smallmatrix}\right]$ é vector próprio de A associado ao valor próprio 1.

Alternativamente: Como os vectores $\left[\begin{smallmatrix}1\\5\\1\end{smallmatrix}\right]$ e $\left[\begin{smallmatrix}0\\1\\4\end{smallmatrix}\right]$ são vectores próprios de A correspondentes ao valor próprio 1, então pertencem ao subespaço próprio M_1 de A associado ao valor próprio 1. Pela definição de subespaço vectorial, a soma de dois vectores de M_1 continua a pertencer a M_1, tendo-se, portanto, o resultado pretendido.

(b) Por hipótese, os vectores $\left[\begin{smallmatrix}1\\5\\1\end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix}0\\1\\4\end{smallmatrix}\right]$ e $\left[\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right]$ são vectores próprios da matriz A. Como a matriz A tem ordem três, se estes três vectores forem linearmente independentes, então A é diagonalizável. Sejam então $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, tais que

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\5\\1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Então,

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ 5\alpha+\beta \\ \alpha+4\beta+\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ 5\alpha+\beta = 0 \\ \alpha+4\beta+\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

e, portanto, os vectores são de facto linearmente independentes.

(c) Pela resolução da alínea anterior, a matriz A é diagonalizável e $\left(\left[\begin{smallmatrix}1\\5\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\1\\4\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right]\right)$ é uma base de $\mathbb{C}^3$ constituída por vectores próprios de A. Nestas condições, a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

cujas colunas são precisamente estes vectores próprios, é invertível e, além disso,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{aligned} P(P^{-1}AP)P^{-1} &= P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1} \\ (PP^{-1})A(PP^{-1}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 19 & -4 & 1 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 19 & -4 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar:

$$[\, P \mid I_3 \,] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\ell_2 \to -5\ell_1+\ell_2 \\ \ell_3 \to -\ell_1+\ell_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\ell_3 \to -4\ell_2+\ell_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 19 & -4 & 1 \end{array}\right] = [\, I_3 \mid P^{-1} \,].$$

9. (a) Tem-se que

$$\begin{aligned} AA^T &= -I_n && \text{(por hipótese)} \\ |AA^T| &= |-I_n| \\ |A|\,|A^T| &= (-1)^n|I_n| \\ |A|\,|A| &= (-1)^n \\ |A|^2 &= (-1)^n. \end{aligned}$$

Como $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, então $|A| \in \mathbb{R}$ e, portanto, $|A|^2 \geq 0$. Logo de $|A|^2 = (-1)^n$ conclui-se que n é necessariamente par.

(b) Da alínea anterior deduz-se que $|A| \neq 0$ e, portanto, A é invertível. Como A^{-1} existe, de

$$A(-A^T) = I_n,$$

resulta

$$\begin{aligned} A^{-1}(A(-A^T)) &= A^{-1}I_n \\ (A^{-1}A)(-A^T) &= A^{-1} \\ I_n(-A^T) &= A^{-1} \\ -A^T &= A^{-1}. \end{aligned}$$

(c) Admita-se que $\alpha \in \mathbb{R}$ é valor próprio da matriz A. Como A é invertível, tem-se que $\alpha \neq 0$. Caso contrário, isto é, se $\alpha = 0$ fosse valor próprio de A, ter-se-ia

$$|A - 0I_n| = 0 \iff |A| = 0 \iff A \text{ não é invertível.}$$

Por outro lado, pela resolução da alínea anterior, $A^T = -A^{-1}$. Demonstremos então que se α é valor próprio de A, então $-\alpha^{-1}$ é valor próprio de $-A^{-1}$. Por hipótese, existe $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ não nulo, tal que

$$\begin{aligned} AX = \alpha X &\implies A^{-1}(AX) = A^{-1}(\alpha X) \\ &\implies (A^{-1}A)X = \alpha(A^{-1}X) \\ &\implies I_nX = \alpha(A^{-1}X) \\ &\implies X = \alpha(A^{-1}X) \\ &\implies A^{-1}X = \alpha^{-1}X \\ &\implies -(A^{-1}X) = -(\alpha^{-1}X) \\ &\implies (-A^{-1})X = (-\alpha^{-1})X \qquad (X \neq 0). \end{aligned}$$

Logo $-\alpha^{-1}$ é valor próprio de $-A^{-1} = A^T$. $\square$