Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT–UNL

Primeiro Teste – 20 de Novembro de 2002

Teste A

Parte I

1. Considere as matrizes reais $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A É possível calcular as matrizes $BA + C$ e $AB^T + C^T$.

B $A^2 = I_2$.

C $CA^T = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 9 & 4 \\ 1 & -2 \\ 8 & -14 \end{bmatrix}$.

D A matriz A é invertível.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, tal que $\det A = k$, com $k \neq 0$. Seja $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, tal que $\det B = \ell$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A A é invertível e $\det(A^{-1}B^T) = \frac{\ell}{k}$.

B $\det(3AB) = 27k\ell$.

C $\det\left(\begin{bmatrix} a & d+g & g \\ b & e+h & h \\ c & f+i & i \end{bmatrix}\right) = k$.

D $\det\left(\begin{bmatrix} c & -b & a \\ f & -e & d \\ i & -h & g \end{bmatrix}\right) \neq k$.

3. Sejam $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, B a matriz que se obtém de A trocando as linhas 1 e 3 e C a matriz que se obtém de B adicionando à linha 2 a linha 3 multiplicada por 5.

Indique qual das afirmações seguintes é **VERDADEIRA**:

A $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} A$.

B $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$.

C $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A$.

D $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A$.

Continua no verso desta folha

4. Considere

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; y = 0\} \qquad \text{e} \qquad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; yz = 0\}.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A F é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

B $F \subseteq G$.

C O vector $(3, 2, 0)$ pertence a $F \cup G$.

D G é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

5. Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares, representado na forma matricial, com $A \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{C})$ e com $B \in \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{C})$. Considere que <u>$A$ está em forma de escada</u>.
Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A Se A tem uma linha nula e a linha p de B é não nula, então o sistema é impossível.

B Se A é quadrada e não tem linhas nulas, então o sistema é possível e determinado.

C Se o número de linhas não nulas de A é inferior a n, então o sistema ou é impossível ou é indeterminado.

D Se A está em forma de escada reduzida e é quadrada, com todas as linhas não nulas, então $A \neq I_n$.

[Cotação]

[2.5] **6.** Considere a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

(a) Utilizando unicamente transformações elementares nas linhas, obtenha a partir de C uma matriz em forma de escada.

(b) Indique, justificando, a característica da matriz C.

(c) Utilizando a alínea anterior, justifique se C é invertível.

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT–UNL

Primeiro Teste – 20 de Novembro de 2002

Teste A

Parte II

[Cotação]

[2.5] **7.** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} x & r & 0 \\ w & s & y \\ 0 & z & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

(a) Calcule o determinante da matriz A, por desenvolvimento segundo uma linha ou uma coluna à sua escolha.

(b) Justifique que se $xyz \neq 0$, então A é invertível e, nessas condições, determine A^{-1} a partir da matriz adjunta de A.

[3.0] **8.** Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares de coeficientes reais nas incógnitas x, y, z e w:

$$\begin{cases} x + 2z - 2w = 0 \\ y + z + \alpha w = 1 \\ 2x + y + (\alpha + 4)z - 3w = \beta + 1 \end{cases}.$$

(a) Discuta o sistema anterior em função de α e β.

(b) Para os casos em que o sistema é possível, indique o conjunto das soluções do sistema.

[1.5] **9.** Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Represente-se por $[A, B]$ a matriz

$$AB - BA.$$

Justifique que $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$.

[3.0] **10.** Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ uma matriz *ortogonal*, isto é, uma matriz tal que

$$AA^T = I_n.$$

Mostre que:

(a) $\det A \in \{-1, 1\}$.

(b) A é invertível e que A^{-1} é ortogonal.

(c) Se $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ é ortogonal, então AB é ortogonal.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT–UNL

Primeiro Teste – 20 de Novembro de 2002

Teste A

Uma resolução

1. C.

2. D.

3. C.

4. D.

5. D

6. (a) Uma forma de obter a partir da matriz C uma matriz em forma de escada, utilizando unicamente transformações elementares nas linhas, é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \to \ell_1 + \ell_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(matriz em f.e.).}$$

(b) Pela alínea anterior, a matriz em forma de escada $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ foi obtida a partir da matriz C por transformações elementares nas linhas. Nestas condições, sabe-se que a característica da matriz C é igual ao número de linhas não nulas desta matriz em forma de escada. Logo $\mathrm{r}(C) = 4$.

(c) A matriz quadrada C é invertível se, e só se,

$$\mathrm{r}(C) = \text{ordem da matriz } C = 4.$$

Como, pela alínea anterior, $\mathrm{r}(C) = 4$, segue-se que C é uma matriz invertível.

7. (a) Cálculo do determinante da matriz A, por desenvolvimento segundo a 3ª coluna:

$$\det A = y \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} x & r \\ 0 & z \end{vmatrix} = -y(xz - 0) = -xyz.$$

(b) A matriz quadrada A é invertível se, e só se, $\det A \neq 0$. Logo, pela alínea anterior, a matriz A é invertível se, e só se,

$$\det A = -xyz \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad xyz \neq 0.$$

Na hipótese de A ser invertível (isto é, de $xyz \neq 0$), tem-se que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A = -\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} s & y \\ z & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} w & y \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} w & s \\ 0 & z \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} r & 0 \\ z & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x & r \\ 0 & z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} r & 0 \\ s & y \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x & 0 \\ w & y \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x & r \\ w & s \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} -yz & 0 & wz \\ 0 & 0 & -xz \\ ry & -xy & xs-rw \end{bmatrix}^T$$

$$= -\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} -yz & 0 & ry \\ 0 & 0 & -xy \\ wz & -xz & xs-rw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 & -\frac{r}{xz} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} \\ -\frac{w}{xy} & \frac{1}{y} & \frac{rw-xs}{xyz} \end{bmatrix}.$$

8. (a) Comecemos por condensar a matriz ampliada do sistema, utilizando unicamente transformações elementares nas linhas:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 1 & \alpha+4 & -3 & \beta+1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3 \to -2\ell_1+\ell_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \beta+1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\ell_3 \to -\ell_2+\ell_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & \beta \end{array}\right] (\star).$$

Discussão do sistema:

- Se $\alpha \neq 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tem-se, tendo em conta a matriz $(\star)$, que

  $$\text{r(matriz simples)} = 3 = \text{r(matriz ampliada)} < 4 = \text{número de incógnitas}.$$

  Logo, neste caso, o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação

  $$1 = \text{ número de incógnitas } - \text{ r(matriz simples/matriz ampliada)} = 4-3.$$

- Admita-se agora que $\alpha = 1$. Então, neste caso, a matriz $(\star)$ tem a forma

  $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right] (\square)$$

  e, portanto, duas situações podem acontecer:

  – Se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, a matriz $(\square)$ tem a forma

  $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  Assim, tendo em conta esta última matriz, tem-se que

$$\text{r(matriz simples)} = 2 = \text{r(matriz ampliada)} < 4 = \text{número de incógnitas.}$$

Donde, neste caso, o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação

$$2 = \text{ número de incógnitas } - \text{ r(matriz simples/matriz ampliada)} = 4 - 2.$$

– Se $\alpha = 1$ e $\beta \neq 0$, tem-se, tendo em conta a matriz ($\square$), que

$$\text{r(matriz simples)} = 2 < 3 = \text{r(matriz ampliada)}.$$

Donde, neste caso, o sistema é impossível.

$$\text{Conclusão: } \begin{cases} \text{Se } \alpha \neq 1 \text{ e } \beta \in \mathbb{R}\text{, o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1;} \\ \text{Se } \alpha = 1 \text{ e } \beta = 0\text{, o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 2;} \\ \text{Se } \alpha = 1 \text{ e } \beta \neq 0\text{, o sistema é impossível.} \end{cases}$$

(b) Pela alínea anterior, o sistema é possível apenas nos seguintes casos:

$$(\alpha \neq 1 \text{ e } \beta \in \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad (\alpha = 1 \text{ e } \beta = 0).$$

Vamos então determinar o conjunto das soluções do sistema para estes dois casos:

- **Caso em que $\alpha \neq 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$:** Vamos começar por obter uma matriz em forma de escada reduzida a partir da matriz ($\star$):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & \beta \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3 \to \frac{1}{\alpha-1}\ell_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{\beta}{\alpha-1} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{\ell_1 \to -2\ell_3 + \ell_1 \\ \ell_2 \to -\ell_3 + \ell_2}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2\beta}{\alpha-1} \\ 0 & 1 & 0 & \alpha+1 & \frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{\beta}{\alpha-1} \end{array}\right].$$

Então, neste caso, o conjunto das soluções do sistema é o conjunto

$$\left\{\left(\tfrac{-2\beta}{\alpha-1}, \tfrac{\alpha-\beta-1}{\alpha-1} - (\alpha+1)w, \tfrac{\beta}{\alpha-1} + w, w\right) : \ w \in \mathbb{R}\right\}.$$

- **Caso em que $\alpha = 1$ e $\beta = 0$:** Nesta situação, a matriz ($\square$) tem a forma

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como esta matriz está em forma de escada reduzida, resulta que, neste caso, o conjunto das soluções do sistema é o conjunto

$$\{(-2z + 2w, 1 - z - w, z, w) : \ z, w \in \mathbb{R}\}.$$

9. Tem-se que

$$\begin{aligned}
[A, B+C] &= A(B+C) - (B+C)A && (1)\\
&= (AB + AC) - (BA + CA) && (2)\\
&= AB + AC - BA - CA && (3)\\
&= (AB - BA) + (AC - CA) && (4)\\
&= [A, B] + [A, C]. && (5)
\end{aligned}$$

Justificação: (1), (5) Por definição de $[-,-]$;
(2) Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (em $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$);
(3) Propriedade associativa da adição e o simétrico da soma é a soma dos simétricos (em $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$);
(4) Propriedade associativa e comutativa da adição (em $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

10. (a) Tem-se que

$$\begin{aligned}
1 = |I_n| &= |AA^T| && (1)\\
&= |A|\,|A^T| && (2)\\
&= |A|\,|A| && (3)\\
&= |A|^2.
\end{aligned}$$

Justificação: (1) $|I_n| = 1$ e, por hipótese, $I_n = AA^T$;
(2) O determinante do produto de matrizes quadradas é o produto dos determinantes dessas matrizes;
(3) O determinante da transposta de uma matriz é o determinante dessa matriz;

De $|A|^2 = 1$ conclui-se que $|A| = 1$ ou $|A| = -1$, ou seja $|A| \in \{-1, 1\}$.

(b) A matriz A é invertível se, e só se, $|A| \neq 0$. Logo, pela alínea anterior, A é uma matriz invertível. Sendo A uma matriz invertível, resulta da igualdade $AA^T = I_n$ que $A^{-1} = A^T$. Em particular, $A^TA = I_n$. Assim,

$$\begin{aligned}
A^{-1}(A^{-1})^T &= A^T(A^T)^T && (1)\\
&= A^TA && (2)\\
&= I_n. && (3)
\end{aligned}$$

Justificação: (1) $A^{-1} = A^T$;
(2) A transposta da transposta de uma matriz é essa própria matriz;
(3) $A^TA = I_n$.

Logo A^{-1} é uma matriz ortogonal.

(c) Admita-se que $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ é ortogonal. Tem-se que

$$\begin{aligned}
(AB)(AB)^T &= (AB)(B^TA^T) && (1)\\
&= A(BB^T)A^T && (2)\\
&= AI_nA^T && (3)\\
&= AA^T && (4)\\
&= I_n. && (5)
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ll}\textbf{Justificação:} & \text{(1) A transposta do produto de matrizes é o produto das transpostas dessas} \\ & \quad\text{matrizes, por ordem contrária;} \\ & \text{(2) Propriedade associativa da multiplicação (em } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\text{);} \\ & \text{(3) Por hipótese } B \text{ é ortogonal, isto é } BB^T = I_n\text{;} \\ & \text{(4) } I_n \text{ é elemento neutro para a multiplicação (em } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\text{);} \\ & \text{(5) Por hipótese } A \text{ é ortogonal, isto é } AA^T = I_n. \end{array}\right)$$

Donde AB é uma matriz ortogonal. $\square$