

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT-UNL

Segundo Teste – 4 de Janeiro de 2003

Parte I

1. Considere os subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x, 2y, x - y, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad G = \langle (1, -1, 1, 3), (1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, -6) \rangle.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

☐ A $F = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 2, -1, 1) \rangle.$

☐ B $\dim F = 2.$

☐ C $\dim G = 3.$

☐ D $(0, 2, 0, -6) \notin (F \cap G).$

2. Sejam E e E' espaços vectoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e $f : E \rightarrow E'$ uma aplicação linear.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

☐ A Se f é injectiva, então $\dim E \neq \dim \text{Im } f.$

☐ B $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $u, v \in E.$

☐ C $f(-u) = -f(u)$, para qualquer $u \in E.$

☐ D Se $E = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$, então $\text{Im } f = \langle f(e_1), \dots, f(e_n) \rangle.$

3. Considere em $\mathbb{R}^3$ as bases:

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 1)), \quad \mathcal{B}'_1 = ((0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)),$$

$$\mathcal{B}_2 = ((0, 1, 2), (0, 0, 1), (1, 2, 3)) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}'_2 = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)).$$

Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear, tal que

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = A.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

☐ A $f(1, 2, 3) = (1, 2, 3).$

☐ C $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} A.$

☐ B $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A.$

☐ D $\mathcal{M}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2)$ é invertível e a sua inversa é $\mathcal{M}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_1).$

Continua no verso desta folha

4. No espaço afim euclidiano $\mathcal{R}^3$, seja $(O; e_1, e_2, e_3)$ um referencial ortonormado directo. Considere os vectores

$$u = e_1 - e_3, \quad v = -2e_1 + 2e_2 - 4e_3$$

e os pontos

$$A = (1, 0, 3) \quad \text{e} \quad B = (2, -1, 5).$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A Os vectores $\overrightarrow{AB}$ e v têm a mesma direcção.
- ☐ B O vector $w = 2e_1 + 6e_2 + 2e_3$ é perpendicular a u e a v .
- ☐ C O ângulo formado pelos vectores u e v é $\arccos \frac{1}{\sqrt{12}}$.
- ☐ D A área do paralelogramo determinado pelos vectores u e v é $\sqrt{10}$.

5. Considere no espaço afim euclidiano $\mathcal{R}^3$ um referencial ortonormado e directo. Seja $\mathcal{R}_1$ a recta de equação vectorial

$$(x, y, z) = (0, 1, 1) + \lambda(1, 2, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Considere os pontos $A = (3, 7, -2)$, $B = (1, 6, -2)$ e $C = (2, 5, -1)$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A O ponto C pertence à recta $\mathcal{R}_1$.
- ☐ B Os pontos A, B e C definem um plano e $-x + 2y + 3z - 5 = 0$ é uma equação geral desse plano.
- ☐ C $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot (-4, -2, 0) \neq 0$.
- ☐ D A recta $\mathcal{R}_1$ e a recta definida pelos pontos A e B intersectam-se num único ponto.

Mude de folha

[Cotação]

- [4.0] 6. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x, y, z) = (x + y, z, x + y + z, x + y - 2z),$$

para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Determine o núcleo de f e uma sua base.
- (b) Sem determinar uma base da imagem de f , indique a respectiva dimensão.
- (c) Será f injectiva? E sobrejectiva?
- (d) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua os vectores da base indicada em (a).

Mude de Folha

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT-UNL

Segundo Teste – 4 de Janeiro de 2003

Parte II

[Cotação]

[3.5] 7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

- (a) Indique o polinómio característico de A .
- (b) Determine os subespaços próprios de A .
- (c) Mostre que A é diagonalizável.
- (d) Determine uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, tal que

$$P^{-1}AP = D.$$

Mude de Folha

[2.0] 8. Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifique que as afirmações seguintes são equivalentes:

- (a) A é invertível;
- (b) A não tem o valor próprio zero;
- (c) O termo independente do polinómio característico de A é não nulo.

Mude de Folha

[3.0] 9. Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tal que

$$A^2 = I_n.$$

Mostre que:

- (a) Se α é um valor próprio de A , então $\alpha \in \{-1, 1\}$.
- (b) Se $X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ é um vector, não nulo, que não é vector próprio de A , então

$$X + AX$$

é um vector não nulo e, além disso, é um vector próprio de A . Qual é o valor próprio correspondente?

[**Observação:** Nesta alínea estamos a supor que cada matriz coluna $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ se identifica com o vector $(y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$.]

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT-UNL

Segundo Teste – 4 de Janeiro de 2003

Uma resolução

1. C.
2. A.
3. B.
4. D.
5. C.
6. (a) Tem-se que

$$\begin{aligned}
 \text{Nuc } f &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : f(a, b, c) = (0, 0, 0, 0)\} \\
 &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a + b, c, a + b + c, a + b - 2c) = (0, 0, 0, 0)\} \\
 &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b = 0, c = 0, a + b + c = 0 \text{ e } a + b - 2c = 0\} \\
 &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a, b, c) \text{ é solução de } (S)\},
 \end{aligned}$$

onde (S) designa o sistema homogéneo de equações lineares sobre $\mathbb{R}$, nas indeterminadas x, y e z ,

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo este sistema obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_4 \rightarrow -\ell_1 + \ell_4]{\ell_3 \rightarrow -\ell_1 + \ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_4 \rightarrow 2\ell_2 + \ell_4]{\ell_3 \rightarrow -\ell_2 + \ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{matriz em f.e.r.}).$$

Logo

$$\begin{aligned}
 \text{Nuc } f &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b = 0 \wedge c = 0\} \\
 &= \{(-b, b, 0) : b \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{b(-1, 1, 0) : b \in \mathbb{R}\} \\
 &= \langle (-1, 1, 0) \rangle.
 \end{aligned}$$

Como o vector $(-1, 1, 0)$ é não nulo e, pelo que acabámos de mostrar, $((-1, 1, 0))$ é um sistema gerador de $\text{Nuc } f$, resulta que $((-1, 1, 0))$ é uma base de $\text{Nuc } f$.

(b) Sabe-se que

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f.$$

Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e $\dim \text{Nuc } f = 1$ (observe-se que pela resolução da alínea anterior, $\text{Nuc } f$ admite uma base com um vector), segue-se que

$$\dim \text{Im } f = 3 - 1 = 2.$$

(c) A aplicação linear f é injectiva se, e só se, $\text{Nuc } f = \{(0, 0, 0)\}$. Equivalentemente, se, e só se,

$$\dim \text{Nuc } f = 0.$$

Como, pela resolução da alínea (a), $\dim \text{Nuc } f = 1$, segue-se que f não é injectiva.

A aplicação linear f é sobrejectiva se, e só se, $\text{Im } f = \mathbb{R}^4$. Equivalentemente, se, e só se,

$$\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^4 = 4.$$

Como, pela resolução da alínea (b), $\dim \text{Im } f = 2$, segue-se que f não é sobrejectiva.

(d) Considere-se o sistema de vectores de $\mathbb{R}^3$

$$((-1, 1, 0), (a, b, c), (d, e, g)),$$

o qual inclui o vector da base de $\text{Nuc } f$ encontrada na resolução da alínea (a). Este sistema de 3 ($= \dim \mathbb{R}^3$) vectores é uma base de $\mathbb{R}^3$ se, e só se, for um sistema linearmente independente. Isto é, se, e só se,

$$\text{r} \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & g \end{bmatrix} \right) = 3.$$

Tomando $a = d = e = c = 0$ e $b = g = 1$, tem-se que

$$\text{r} \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 3$$

(trata-se da característica de uma matriz de ordem três que está em forma de escada e possui três linhas não nulas). Donde o sistema de vectores

$$((-1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$ nas condições pretendidas.

7. (a) O polinómio característico da matriz A é, desenvolvendo o determinante segundo a terceira coluna,

$$|A - xI_3| = \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x) \begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ 0 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)^2(3-x).$$

(b) Os valores próprios da matriz A são as raízes do polinómio característico de A . Como

$$|A - xI_3| = 0 \iff (2-x)^2(3-x) = 0 \iff 2-x = 0 \text{ ou } 3-x = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x = 3,$$

resulta que os valores próprios da matriz A são 2 e 3.

Tem-se que:

$$\begin{aligned} M_2 &= \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (A - 2I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} && \left(\begin{array}{l} \text{subespaço próprio de } A \\ \text{associado ao valor próprio } 2 \end{array} \right) \\ &= \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a, b, c) \text{ é solução do sistema } (S_1) \}, \end{aligned}$$

onde (S_1) designa o sistema homogéneo de equações lineares sobre $\mathbb{R}$, nas incógnitas x, y e z ,

$$(A - 2I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{forma matricial}).$$

Resolvendo este sistema obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \rightarrow -\ell_1 + \ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{matriz em f.e.r.}).$$

Logo

$$\begin{aligned} M_2 &= \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b = 0 \} \\ &= \{ (-b, b, c) : b, c \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ b(-1, 1, 0) + c(0, 0, 1) : b, c \in \mathbb{R} \} \\ &= \langle (-1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3 &= \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (A - 3I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} && \left(\begin{array}{l} \text{subespaço próprio de } A \\ \text{associado ao valor próprio } 3 \end{array} \right) \\ &= \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a, b, c) \text{ é solução do sistema } (S_2) \}, \end{aligned}$$

onde (S_2) designa o sistema homogéneo de equações lineares sobre $\mathbb{R}$, nas incógnitas x, y e z ,

$$(A - 3I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{forma matricial}).$$

Resolvendo este sistema obtém-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \rightarrow \ell_2 + \ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \rightarrow -\ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\ell_1 \rightarrow -\ell_2 + \ell_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{matriz em f.e.r.}). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} M_3 &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a - c = 0 \wedge b = 0\} \\ &= \{(c, 0, c) : c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{c(1, 0, 1) : c \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

- (c) Pela resolução da alínea (b) tem-se que o sistema $((-1, 1, 0), (0, 0, 1))$ é um sistema gerador de M_2 . Por outro lado, como

$$\text{r} \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 2,$$

segue-se que o sistema $((-1, 1, 0), (0, 0, 1))$ é linearmente independente. Logo $((-1, 1, 0), (0, 0, 1))$ é uma base de M_2 e, portanto, $\text{mg}(2) = \dim M_2 = 2$.

Também pela resolução da alínea (b) tem-se que o sistema $((1, 0, 1))$ é um sistema gerador de M_3 . Como $(1, 0, 1)$ é um vector não nulo, então $((1, 0, 1))$ é uma base de M_3 e, portanto, $\text{mg}(3) = \dim M_3 = 1$.

Como $\text{mg}(2) + \text{mg}(3) = 2 + 1 = 3 (= \text{ordem de } A)$, resulta que A é uma matriz diagonalizável.

- (d) Pela resolução da alínea (c) sabe-se que $((-1, 1, 0), (0, 0, 1))$ é uma base de M_2 . Analogamente, pela resolução da alínea (c) sabe-se que $((1, 0, 1))$ é uma base de M_3 .

Nestas condições, a matriz

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

cujas colunas são os vectores das bases de M_2 e M_3 acima indicadas, é invertível e, além disso,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{matriz diagonal}).$$

8. Vamos mostrar que (a) $\Leftrightarrow$ (b) e (b) $\Leftrightarrow$ (c).

(a) $\Leftrightarrow$ (b) A é uma matriz invertível se, e só se, $|A| \neq 0$, isto é,

$$0 \neq |A| = |A - 0I_n|$$

o que equivale a afirmar que zero não é valor próprio da matriz A .

(b) $\Leftrightarrow$ (c) Zero não é valor próprio da matriz A se, e só se, $|A - 0I_n| \neq 0$. Seja $p(x) = |A - xI_n|$. Então, $|A - 0I_n| \neq 0$ equivale a afirmar que $p(0) \neq 0$. Como para qualquer polinómio $q(x)$, $q(0)$ representa o seu termo independente, concluímos como se pretendia que o termo independente do polinómio característico de A é não nulo.

9. (a) Admita-se que α é valor próprio da matriz A . Então, existe um vector não nulo $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$AX = \alpha X,$$

onde $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Tendo em conta que por hipótese $A^2 = I_n$, então

$$\begin{aligned} AX &= \alpha X \\ A(AX) &= A(\alpha X) \\ A^2X &= \alpha(AX) \\ A^2X &= \alpha(\alpha X) \\ A^2X &= \alpha^2 X \\ I_n X &= \alpha^2 X \\ X &= \alpha^2 X. \end{aligned}$$

Ora,

$$X = \alpha^2 X \implies (1 - \alpha^2)X = 0 \implies 1 - \alpha^2 = 0 \vee X = 0.$$

Como, por hipótese, $X \neq 0$, tem-se que

$$1 - \alpha^2 = 0 \implies \alpha^2 = 1 \implies \alpha = \pm 1.$$

Logo $\alpha \in \{-1, 1\}$.

- (b) (1) Ora, $X + AX \neq \mathbf{0}$, onde $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$. Com efeito, se fosse $X + AX = \mathbf{0}$, então $AX = -1X$, pelo que o vector (não nulo) X seria vector próprio da matriz A (associado ao valor próprio -1), contrariamente à hipótese.
- (2) Como, por hipótese, $A^2 = I_n$, então

$$A(X + AX) = AX + A^2X = AX + I_n X = AX + X = 1(X + AX).$$

Por (1) e (2) pode-se concluir que $X + AX$ é vector próprio da matriz A associado ao valor próprio 1. □