Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT–UNL

Recurso – 9 de Fevereiro de 2004

Parte 1

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A) A matriz A tem característica 3.

B) $\det A \neq -1$.

C) Zero é valor próprio de A.

D) O elemento da linha 2 e coluna 3 da matriz $B^T A$ é 7.

2. Em $\mathbb{R}^4$, considere os vectores

$$u_1 = (1,0,1,0),\ u_2 = (-1,2,-1,1),\ u_3 = (1,2,1,1),\ u_4 = (0,0,0,1) \text{ e } u_5 = (0,0,1,0).$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A) O vector u_3 é combinação linear dos vectores u_1 e u_2.

B) (u_1, u_3, u_4, u_5) não é uma base de $\mathbb{R}^4$.

C) (u_1, u_3, u_4) é uma sequência linearmente independente.

D) $\dim \langle u_1, u_3, u_4 \rangle = 3$.

3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A) $(4,2,1)$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 2.

B) $\{(0,0,c) : \ c \in \mathbb{C}\}$ é um subespaço próprio de A.

C) $(0,2,2)$ não é vector próprio de A.

D) A é uma matriz diagonalizável.

Continua no verso desta folha

4. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tais que

$$AB = 2I_n.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

$\boxed{\text{A}}$ B é uma matriz invertível.

$\boxed{\text{B}}$ A é uma matriz invertível e $A^{-1} = \frac{1}{2}B$.

$\boxed{\text{C}}$ Se $\det A = 2$, então $\det B = 2^n$.

$\boxed{\text{D}}$ $\det(AB)$ é um número par.

5. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear. Considere as bases de $\mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{B} = ((1,2,1),(0,1,0),(0,0,3)) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = ((-1,0,0),(0,2,0),(0,0,1)).$$

Seja

$$A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

$\boxed{\text{A}}$ $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{B}}$ $f(0,1,0) = (-3,4,0)$.

$\boxed{\text{C}}$ $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \text{b.c.}) = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \text{b.c.}, \mathcal{B}')\, A$.

$\boxed{\text{D}}$ $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = I_3$.

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. No espaço afim euclidiano $\mathcal{R}^3$ considere um referencial $(O; e_1, e_2, e_3)$ ortonormado e directo. Considere os pontos $A(0,1,1)$, $B(-2,1,5)$ e $C(0,-1,-5)$ e o plano $\mathcal{P}$ de equação geral

$$2x - y + z + 4 = 0.$$

Seja $\mathcal{R}$ a recta que passa pelo ponto A e tem como vector director o vector de coordenadas $(1,0,-2)$.

[0.5] (a) Mostre que a recta $\mathcal{R}$ é estritamente paralela ao plano $\mathcal{P}$.

[0.5] (b) Mostre que B é um ponto da recta $\mathcal{R}$.

[1.0] (c) Determine o ângulo dos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

[1.0] (d) Calcule a área do paralelogramo definido pelos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Mude de Folha

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT–UNL

Recurso – 9 de Fevereiro de 2004

Parte 2

[Cotação]

7. Considere a aplicação linear $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+d, c-b, 2d), \qquad \text{para todo } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

[1.5] (a) Mostre que $\operatorname{Nuc} f = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{bmatrix} : \ c \in \mathbb{R} \right\}$ e conclua que f não é injectiva.

[1.0] (b) Mostre que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

[1.0] (c) Determine a matriz da aplicação linear f quando se considera em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a base

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

e em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B}' = ((0,0,1), (0,1,0), (1,0,0))$.

Mude de Folha

8. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y e z, sobre $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \alpha x + y = 0 \\ \alpha x + (\beta+1)y + 2z = 2\beta \\ -\alpha x - y + \beta z = 2\alpha \end{cases} .$$

[2.0] (a) Discuta o sistema anterior em função de α e β.

[1.0] (b) Para $\alpha = \beta = 0$ indique o conjunto das soluções do sistema.

Mude de Folha

9. Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que

$$A(A^T + I_n) = A + I_n.$$

Justifique que:

[1.0] (a) $AA^T = I_n$ e $A^T A = I_n$.

[1.0] (b) $|A^T + I_n| = |A + I_n|$.

[1.0] (c) Se $|A| \neq 1$, então -1 é valor próprio de A.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT–UNL

Recurso – 9 de Fevereiro de 2004

Uma resolução

1. C.

2. B.

3. D.

4. C.

5. C.

6. (a) Para a recta $\mathcal{R}$ ser estritamente paralela ao plano $\mathcal{P}$ é suficiente que se verifiquem as duas condições seguintes:

(1) O vector director da recta $\mathcal{R}$, $w = (1, 0, -2)$, é um vector perpendicular a um vector que seja perpendicular ao plano $\mathcal{P}$;

(2) O ponto A da recta $\mathcal{R}$ não pertence ao plano $\mathcal{P}$.

Analisemos então se estas duas condições são satisfeitas:

(1) Da equação geral do plano $\mathcal{P}$ dada no enunciado, resulta que o vector $u = (2, -1, 1)$ é um vector perpendicular ao plano $\mathcal{P}$. Como

$$w|u = 1 \times 2 + 0 \times (-1) + (-2) \times 1 = 0,$$

conclui-se o pretendido.

(2) O ponto A pertence ao plano $\mathcal{P}$ se, e só se, o terno ordenado $(0, 1, 1)$, constituído pelas coordenadas do ponto A, for solução da equação $2x - y + z + 4 = 0$ (equação geral do plano $\mathcal{P}$). Como

$$2 \times 0 - 1 \times 1 + 1 + 4 = 4 \neq 0,$$

segue-se que o ponto A não pertence ao plano $\mathcal{P}$.

Verificando-se (1) e (2) podemos concluir que a recta $\mathcal{R}$ é estritamente paralela ao plano $\mathcal{P}$.

(b) Uma equação vectorial da recta $\mathcal{R}$ é, por exemplo,

$$(x, y, z) = (0, 1, 1) + \lambda(1, 0, -2), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Logo o ponto B, de coordenadas $(-2, 1, 5)$, pertence à recta $\mathcal{R}$ se, e só se, existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(-2, 1, 5) = (0, 1, 1) + \lambda(1, 0, -2) \iff (-2, 1, 5) = (\lambda, 1, 1 - 2\lambda) \iff \begin{cases} \lambda = -2 \\ 1 = 1 \\ 1 - 2\lambda = 5 \end{cases}.$$

Dado que -2 é solução do sistema anterior, pode-se concluir que o ponto B pertence à recta $\mathcal{R}$.

(c) Comecemos por calcular as coordenadas dos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 1, 5) - (0, 1, 1) = (-2, 0, 4);$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, -1, -5) - (0, 1, 1) = (0, -2, -6).$$

Posto isto, o ângulo dos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é dado por:

$$\begin{aligned}\arccos \frac{\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC}}{\| \overrightarrow{AB} \| \| \overrightarrow{AC} \|} &= \arccos \frac{-2 \times 0 + 0 \times (-2) + 4 \times (-6)}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 4^2}\sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-6)^2}} \\ &= \arccos \frac{-24}{\sqrt{20}\sqrt{40}} = \arccos -\frac{3\sqrt{2}}{5}.\end{aligned}$$

(d) Tendo em conta as coordenadas dos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ encontradas na alínea anterior, tem-se que:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 8e_1 - 12e_2 + 4e_3,$$

conforme se verifica utilizando a mnemónica do desenvolvimento do determinante

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -6 \end{vmatrix}$$

segundo a primeira linha. Logo a área do paralelogramo definido pelos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é dada por:

$$\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \| = \sqrt{8^2 + (-12)^2 + 4^2} = 4\sqrt{14}.$$

7. (a) Tem-se que:

$$\begin{aligned}\operatorname{Nuc} f &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \ f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \ (a+d, c-b, 2d) = (0,0,0) \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \ a+d = 0, \ c-b = 0 \text{ e } 2d = 0 \right\}.\end{aligned}$$

Atendendo a que

$$\begin{cases} a+d=0 \\ c-b=0 \\ 2d=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=c \\ d=0 \end{cases},$$

então

$$\begin{aligned}\operatorname{Nuc} f &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \ a=0, \ b=c \text{ e } d=0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{bmatrix} : \ c \in \mathbb{R} \right\}.\end{aligned}$$

A aplicação linear f é injectiva se, e só se,

$$\operatorname{Nuc} f = \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Como, por exemplo, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e, pela resolução anterior, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{Nuc} f$, resulta que a aplicação linear f não é injectiva.

(b) Tem-se que

$$\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f. \tag{1}$$

Pela alínea anterior

$$\operatorname{Nuc} f = \left\{\begin{bmatrix} 0 & c \\ c & 0\end{bmatrix} :\ c \in \mathbb{R}\right\} = \left\{c\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix} :\ c \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\rangle.$$

Isto é, $\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)$ é um sistema gerador de $\operatorname{Nuc} f$. Por outro lado, como $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$, segue-se que o sistema $\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)$ é linearmente independente. Logo $\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)$ é uma base de $\operatorname{Nuc} f$ e, portanto, $\dim \operatorname{Nuc} f = 1$. Assim, tendo em conta que $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$, resulta por (1) que

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) - \dim \operatorname{Nuc} f = 4 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

Isto é, $\operatorname{Im} f$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$ com dimensão igual à de $\mathbb{R}^3$. Logo $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

[Alternativamente: Tem-se que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f &= \left\{ f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\right) :\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right\} \\
&= \{(a+d, c-b, 2d) :\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(a,0,0) + (0,-b,0) + (0,c,0) + (d,0,2d) :\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a(1,0,0) + b(0,-1,0) + c(0,1,0) + d(1,0,2) :\ a,b,c.d \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (1,0,0), (0,-1,0), (0,1,0), (1,0,2)\rangle.
\end{aligned}$$

Isto é, $((1,0,0),(0,-1,0),(0,1,0),(1,0,2))$ é um sistema gerador de $\operatorname{Im} f$. Atendendo a

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}}_{\substack{\textbf{matriz cujas linhas são} \\ \textbf{os geradores de Im}\,f \\ \textbf{acima encontrados}}} \xrightarrow[\ell_4 \to -\ell_1 + \ell_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \to \ell_2 + \ell_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\ell_3 \leftrightarrow \ell_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \text{(matriz em f.e.)},$$

podemos afirmar que $((1,0,0),(0,-1,0),(0,0,2))$ é uma base de $\operatorname{Im} f$. Logo $\dim \operatorname{Im} f = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Isto é, $\operatorname{Im} f$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$ com dimensão igual à de $\mathbb{R}^3$ e, portanto, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.]

(c) Tem-se que:

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = (3,0,2) = \mathbf{2}(0,0,1) + \mathbf{0}(0,1,0) + \mathbf{3}(1,0,0);$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = (1,1,2) = \mathbf{2}(0,0,1) + \mathbf{1}(0,1,0) + \mathbf{1}(1,0,0);$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\right) = (0,1,0) = \mathbf{0}(0,0,1) + \mathbf{1}(0,1,0) + \mathbf{0}(1,0,0);$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2\end{bmatrix}\right) = (2,-3,4) = \mathbf{4}(0,0,1) + (-\mathbf{3})(0,1,0) + \mathbf{2}(1,0,0).$$

Logo

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

8. (a) Comecemos por condensar a matriz ampliada do sistema, utilizando unicamente transformações elementares nas linhas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta+1 & 2 & 2\beta \\ -\alpha & -1 & \beta & 2\alpha \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\ell_2 \to -\ell_1+\ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_1+\ell_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 2 & 2\beta \\ 0 & 0 & \beta & 2\alpha \end{array}\right] (\star).$$

Tendo em conta a matriz $(\star)$ pode-se fazer a seguinte discussão do sistema:

- Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, tem-se que

$$\text{r(matriz simples)} = \text{r(matriz ampliada)} = 3 = \text{número de incógnitas.}$$

  Logo, neste caso, o sistema é possível determinado.

- Se $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$, a matriz $(\star)$ toma a forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{array}\right]$$

  e tem-se

$$\text{r(matriz simples)} = 2 < 3 = \text{r(matriz ampliada).}$$

  Donde, neste caso, o sistema é impossível.

- Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, a matriz $(\star)$ toma a forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  e tem-se

$$\text{r(matriz simples)} = \text{r(matriz ampliada)} = 2 < 3 = \text{número de incógnitas.}$$

  Logo, neste caso, o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação

$$\text{número de incógnitas} - \text{r(matriz simples/matriz ampliada)} = 3 - 2 = 1.$$

- Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$, a matriz $(\star)$ toma a forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 2 & 2\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2 \to -\beta\ell_1+\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3 \to -\frac{\beta}{2}\ell_2+\ell_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2\beta \\ 0 & 0 & 0 & -\beta^2 \end{array}\right].$$

  Logo

$$\text{r(matriz simples)} = 2 < 3 = \text{r(matriz ampliada)}$$

  e, neste caso, o sistema é impossível.

$$\text{Conclusão: } \begin{cases} \text{Se } \alpha \neq 0 \text{ e } \beta \neq 0, \text{ o sistema é possível determinado;} \\ \text{Se } (\alpha \neq 0 \text{ e } \beta = 0) \text{ ou } (\alpha = 0 \text{ e } \beta \neq 0) \text{ o sistema é impossível;} \\ \text{Se } \alpha = 0 \text{ e } \beta = 0, \text{ o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1.} \end{cases}$$

(b) Admita-se que $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Neste caso, a matriz $(\star)$ obtida na alínea anterior toma a forma:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2 \to \frac{1}{2}\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{(matriz em f.e.r.).}$$

Logo o conjunto das soluções do sistema, relativamente ao caso pedido, é o conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y = 0 \text{ e } z = 0\} = \{(x, 0, 0)) : \ x \in \mathbb{R}\}.$$

9. (a) Tendo em conta a igualdade dada no enunciado, tem-se que:

$$\begin{aligned} A(A^T + I_n) = A + I_n &\iff AA^T + AI_n = A + I_n \\ &\iff AA^T + A = A + I_n \\ &\iff AA^T + A - A = I_n \\ &\iff AA^T = I_n. \end{aligned}$$

Por outro lado, utilizando esta última igualdade resulta que:

$$\begin{aligned} AA^T &= I_n \\ |AA^T| &= |I_n| \\ |A|\,|A^T| &= 1, \end{aligned}$$

pelo que $|A| \neq 0$ e, portanto, A é uma matriz invertível. Assim, existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que

$$AB = I_n \quad \text{e} \quad BA = I_n. \tag{2}$$

Logo

$$\begin{aligned} AA^T &= I_n \\ B(AA^T) &= BI_n \\ (BA)A^T &= B \\ I_nA^T &= B \\ A^T &= B \end{aligned}$$

e, atendendo à segunda igualdade de (2), tem-se que $A^TA = I_n$.

(b) Tem-se que:

$$|A + I_n| = |(A + I_n)^T| = |A^T + I_n^T| = |A^T + I_n|.$$

(c) Admita-se que $|A| \neq 1$. Tem-se que:

$$\begin{aligned} A(A^T + I_n) &= A + I_n && \text{(por hipótese)} \\ |A(A^T + I_n)| &= |A + I_n| \\ |A|\,|A^T + I_n| &= |A + I_n| \\ |A|\,|A + I_n| &= |A + I_n|. && \text{(por (b))} \end{aligned}$$

Logo

$$|A|\,|A + I_n| - |A + I_n| = 0 \quad \iff \quad (|A| - 1)|A + I_n| = 0 \quad \iff \quad |A| - 1 = 0 \text{ ou } |A + I_n| = 0.$$

Como, por hipótese, $|A| \neq 1$ (equivalentemente, $|A| - 1 \neq 0$), segue-se que

$$0 = |A + I_n| = |A - (-1)I_n|$$

e, portanto, -1 é valor próprio da matriz A. $\square$