



Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT-UNL

Época Normal – 19 de Janeiro de 2004

Parte 1

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{C}), \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{C}) \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

☐ A $C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$

☐ B $\text{adj } C = C^{-1}.$

☐ C $B^T A + C = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 2 \\ 7 & -10 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$

☐ D Se D é a matriz que se obtém da A multiplicando a 2ª linha por 3 e, em seguida, trocando a 1ª e a 2ª linhas, então

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A.$$

2. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(a, b, c) = (a + b - c, -b + c, 2a), \quad \text{para todo } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

☐ A $\text{Nuc } f = \{(0, c, c) : c \in \mathbb{R}\}.$

☐ B $\text{Im } f = \langle (1, 0, 2), (1, -1, 0), (-1, 1, 0) \rangle.$

☐ C A matriz de f em relação às bases $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (0, 2, 0), (0, 0, 1))$ e $\mathcal{B}' = ((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ é

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

☐ D f não é sobrejectiva.

3. Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

☐ A $F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a = d = 1 \right\}$ não é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

☐ B O subespaço vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constituído pelas matrizes simétricas, isto é, pelas matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ tem dimensão 3.

☐ C Em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ não é combinação linear das matrizes $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

☐ D Em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$ é linearmente independente.

Continua no verso desta folha

4. Seja

$$A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ r & s & t \\ u & v & w \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

uma matriz invertível.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A Se $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ é uma matriz tal que $|B| = 2$, então $|2AB^{-1}| = 4|A|$.

B $\begin{vmatrix} x+2y & z & y \\ r+2s & t & s \\ u+2v & w & v \end{vmatrix} = -|A|$.

C $\begin{vmatrix} 2x & y & \frac{1}{3}z \\ 2r & s & \frac{1}{3}t \\ 2u & v & \frac{1}{3}w \end{vmatrix} = \frac{3}{2}|A|$.

D $\begin{vmatrix} -x & r & -u \\ -y & s & -v \\ -z & t & -w \end{vmatrix} = |A|$.

5. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tem polinómio característico $(4-x)^3(-x)$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A $|A - 4I_4| = 0$.

B A é invertível.

C $|A - 2I_4| \neq 0$.

D Se o valor próprio 4 tem multiplicidade geométrica 3, então A é semelhante à matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares de coeficientes reais nas incógnitas x , y e z :

$$\begin{cases} \alpha x - y + \alpha z = \beta \\ \alpha x - (\alpha + 1)y + \alpha z = \beta \\ -2\alpha x + 2y + 2z = 0 \end{cases}.$$

[2.0] (a) Discuta o sistema anterior em função de α e β .

[1.0] (b) Para $\alpha = -1$ e $\beta = 0$ indique o conjunto das soluções do sistema.

Mude de Folha



Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT–UNL

Época Normal – 19 de Janeiro de 2004

Parte 2

[Cotação]

7. No espaço afim euclidiano $\mathbb{R}^3$ considere um referencial $(O; e_1, e_2, e_3)$ ortonormado e directo. Considere ainda o plano $\mathcal{P}$ de equação geral

$$x + 4z - 1 = 0$$

e os pontos $A(1, 2, 3)$, $B(1, 0, 2)$ e $C(0, 2, 3)$.

- [1.0] (a) Mostre que os pontos A , B e C definem um plano $\mathcal{P}'$ e indique uma equação geral desse plano.
- [0.5] (b) Indique a área do triângulo $[ABC]$.
- [1.0] (c) Determine o ângulo formado pelos planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$.
- [1.0] (d) Mostre que os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ se intersectam segundo uma recta e indique uma equação vectorial dessa recta.

Mude de Folha

8. Considere a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

- [0.5] (a) Mostre que zero e dois são os únicos valores próprios de M .
- [1.0] (b) Indique os subespaços próprios de M .
- [1.0] (c) Mostre que existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tais que

$$P^{-1}MP = D.$$

Mude de Folha

9. Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ uma matriz invertível tal que

$$A^3 = -A.$$

Justifique as afirmações:

- [0.5] (a) O termo constante do polinómio característico de A é não nulo.
- [1.0] (b) Se n é par, então $|A| \in \{-1, 1\}$.
- [2.0] (c) A não tem valores próprios reais.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT-UNL

Época Normal – 19 de Janeiro de 2004

Uma resolução

1. D.
2. C.
3. C.
4. C.
5. B.
6. (a) Começamos por condensar a matriz ampliada do sistema, utilizando unicamente transformações elementares nas linhas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & -1 & \alpha & \beta \\ \alpha & -(\alpha+1) & \alpha & \beta \\ -2\alpha & 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 \rightarrow 2\ell_1 + \ell_3]{\ell_2 \rightarrow -\ell_1 + \ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & -1 & \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha+2 & 2\beta \end{array} \right] (\star).$$

Tendo em conta a matriz $(\star)$ pode-se fazer a seguinte discussão do sistema:

- Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -1$ tem-se, para qualquer valor de $\beta \in \mathbb{R}$, que

$$r(\text{matriz simples}) = r(\text{matriz ampliada}) = 3 = \text{número de incógnitas}.$$

Logo, neste caso, o sistema é possível determinado.

- Se $\alpha = 0$, a matriz $(\star)$ toma a forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2\beta \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_2 \leftrightarrow \ell_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 2 & 2\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Logo, para qualquer valor de $\beta \in \mathbb{R}$, tem-se neste caso que

$$r(\text{matriz simples}) = r(\text{matriz ampliada}) = 2 < 3 = \text{número de incógnitas}$$

e, portanto, o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação

$$1 = \text{número de incógnitas} - r(\text{matriz simples/matriz ampliada}) = 3 - 2.$$

- Se $\alpha = -1$, a matriz $(\star)$ toma a forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta \end{array} \right] (\square).$$

Assim,

- Se $\alpha = -1$ e $\beta \neq 0$, então

$$r(\text{matriz simples}) = 2 < 3 = r(\text{matriz ampliada}).$$

Donde, neste caso, o sistema é impossível.

•• Se $\alpha = -1$ e $\beta = 0$, então

$$r(\text{matriz simples}) = r(\text{matriz ampliada}) = 2 < 3 = \text{número de incógnitas}.$$

Donde, neste caso, o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação

$$1 = \text{número de incógnitas} - r(\text{matriz simples/matriz ampliada}) = 3 - 2.$$

$$\text{Conclusão: } \begin{cases} \text{Se } \alpha \neq 0 \text{ e } \alpha \neq -1, \text{ o sistema é possível determinado;} \\ \text{Se } \alpha = 0, \text{ o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação } 1; \\ \text{Se } \alpha = -1 \text{ e } \beta \neq 0, \text{ o sistema é impossível;} \\ \text{Se } \alpha = -1 \text{ e } \beta = 0, \text{ o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação } 1. \end{cases}$$

- (b) Admita-se que $\alpha = -1$ e $\beta = 0$. Neste caso, continuando a condensação a partir da matriz $(\square)$ obtida na alínea anterior, para obter a forma de escada reduzida, resulta que:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_1 \rightarrow -\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\ell_1 \rightarrow -\ell_2 + \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{matriz em f.e.r.}).$$

Logo o conjunto das soluções do sistema é o conjunto

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0 \text{ e } y = 0\} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -z \text{ e } y = 0\} \\ &= \{(-z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

7. (a) Os pontos A , B e C definem um plano se, e só se, os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não têm a mesma direcção, ou equivalentemente, se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se tem

$$\overrightarrow{AB} \neq \alpha \overrightarrow{AC}.$$

Como

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, 2) - (1, 2, 3) = (0, -2, -1) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} = (0, 2, 3) - (1, 2, 3) = (-1, 0, 0)$$

e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(0, -2, -1) \neq \alpha(-1, 0, 0),$$

os pontos A , B e C definem um plano.

Para obter uma equação geral desse plano, determine-se um vector perpendicular ao plano. Tem-se:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = e_2 - 2e_3$$

é um vector perpendicular a este plano (cujas coordenadas são $(0, 1, -2)$). Assim, a equação geral do plano $\mathcal{P}'$ é uma das equações da família de equações

$$0x + 1y + (-2)z + d = 0 \quad (d \in \mathbb{R}),$$

isto é, da forma $y - 2z + d = 0$. Como o ponto $A = (1, 2, 3)$ pertence ao plano $\mathcal{P}'$, resulta que

$$2 - 2 \times 3 + d = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d = 4.$$

Logo a equação geral do plano $\mathcal{P}'$ é

$$y - 2z + 4 = 0.$$

- (b) Pela alínea anterior, o vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ tem por coordenadas o terno ordenado $(0, 1, -2)$. Assim,

$$\text{Área do triângulo } [ABC] = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

- (c) Da equação geral do plano $\mathcal{P}$, $x + 4z - 1 = 0$, resulta que o vector $u = (1, 0, 4)$ é um vector perpendicular ao plano $\mathcal{P}$. Por outro lado, pela alínea (a), o vector $v = (0, 1, -2)$ é um vector perpendicular ao plano $\mathcal{P}'$. Logo

$$\begin{aligned} \hat{\text{Ângulo formado por } \mathcal{P} \text{ e } \mathcal{P}'} &= \arccos \frac{|(u|v)|}{\|u\|\|v\|} \\ &= \arccos \frac{|1 \times 0 + 0 \times 1 + 4 \times (-2)|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 4^2} \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2}} \\ &= \arccos \frac{8}{\sqrt{17}\sqrt{5}} = \arccos \frac{8}{\sqrt{85}} = \arccos \frac{8\sqrt{85}}{85}. \end{aligned}$$

- (d) Tem-se que:

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 4z - 1 = 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - 2z + 4 = 0\}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 4z - 1 = 0 \text{ e } y - 2z + 4 = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -4z + 1 \text{ e } y = 2z - 4\} \\ &= \{(-4z + 1, 2z - 4, z) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1, -4, 0) + (-4z, 2z, z) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1, -4, 0) + z(-4, 2, 1) : z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Vemos assim que a intersecção do plano $\mathcal{P}$ com o plano $\mathcal{P}'$ é a recta de equação vectorial

$$(x, y, z) = (1, -4, 0) + \lambda(-4, 2, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

8. (a) Os valores próprios da matriz M são as soluções reais da equação na indeterminada x :

$$|M - xI_3| = 0.$$

Ora, desenvolvendo pela 2ª coluna, obtém-se:

$$\begin{aligned} |M - xI_3| &= \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (-x)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (-x)[(1-x)^2 - 1] = (-x)(x^2 - 2x) = x(2x - x^2) \\ &= x^2(2 - x). \end{aligned}$$

Posto isto, em $\mathbb{R}$, tem-se que

$$|M - xI_3| = 0 \iff x^2(2 - x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 2,$$

pelo que os valores próprios da matriz M são 0 e 2.

(b) Tem-se que:

$$M_0 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (M - 0I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{subespaço próprio de } M \\ \text{associado ao valor próprio } 0 \end{array} \right),$$

pelo que M_0 é o conjunto das soluções do sistema homogéneo de equações lineares sobre $\mathbb{R}$ nas incógnitas x , y e z :

$$(M - 0I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

De

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{matriz simples do sistema (1)}} \xrightarrow[\ell_3 \rightarrow -\ell_1 + \ell_3]{\ell_2 \rightarrow -\ell_1 + \ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{matriz em f.e.r.})$$

resulta que o conjunto das soluções do sistema (1) é o conjunto

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0\} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -z\} \\ &= \{(-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} M_0 &= \{(-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, y, 0) + (-z, 0, z) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(0, 1, 0) + z(-1, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (0, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

$$M_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (M - 2I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{subespaço próprio de } M \\ \text{associado ao valor próprio } 2 \end{array} \right),$$

pelo que M_2 é o conjunto das soluções do sistema homogéneo de equações lineares sobre $\mathbb{R}$ nas incógnitas x , y e z :

$$(M - 2I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

De

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{matriz simples do sistema (2)}} &\xrightarrow{\ell_1 \rightarrow -\ell_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \rightarrow -\ell_1 + \ell_3]{\ell_2 \rightarrow -\ell_1 + \ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\ell_2 \rightarrow -\frac{1}{2}\ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{matriz em f.e.r.}) \end{aligned}$$

resulta que o conjunto das soluções do sistema (2) é o conjunto

$$\begin{aligned}\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0 \text{ e } y - z = 0\} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \text{ e } y = z\} \\ &= \{(z, z, z) : z \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}M_2 &= \{(z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(1, 1, 1) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 1, 1) \rangle.\end{aligned}$$

- (c) Pela alínea anterior, $((0, 1, 0), (-1, 0, 1))$ é um sistema gerador de M_1 . Como este sistema é linearmente independente, pois

$$\text{r}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2 = \text{n}^\circ \text{ de vectores do sistema},$$

segue-se que $((0, 1, 0), (-1, 0, 1))$ é uma base de M_0 . Ainda pela alínea anterior, $((1, 1, 1))$ é um sistema gerador de M_2 . Como o vector $(1, 1, 1)$ é não nulo, segue-se que o sistema $((1, 1, 1))$ é linearmente independente e, portanto, uma base de M_2 . Nestas condições, a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

cujas colunas são os vectores das bases de M_0 e de M_2 acima indicadas, é invertível e, além disso,

$$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D \quad (\text{matriz diagonal}).$$

9. (a) Considere-se o polinómio característico de A :

$$p(x) = |A - xI_n| = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Tem-se

$$p(0) = a_0 = |A - 0I_n| = |A|,$$

pelo que o termo constante do polinómio característico da matriz A é igual ao determinante de A . Como A é uma matriz invertível, segue-se que $|A| \neq 0$ ficando justificada a afirmação do enunciado.

- (b) Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, com n par. Tem-se que:

$$\begin{aligned}A^3 &= -A && (\text{por hipótese}) \\ |A^3| &= |-A| \\ |A|^3 &= (-1)^n |A| && (\text{propriedade dos determinantes}) \\ |A|^3 &= |A| && (n \text{ é par}).\end{aligned}$$

Logo

$$|A|^3 - |A| = 0 \iff |A|(|A|^2 - 1) = 0 \iff |A| = 0 \text{ ou } |A|^2 = 1.$$

Como $|A| \neq 0$ (pois, por hipótese, A é uma matriz invertível), resulta que

$$|A|^2 = 1 \iff |A| = 1 \text{ ou } |A| = -1.$$

(c) Admita-se que $\lambda \in \mathbb{C}$ é valor próprio da matriz A . Então, existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_{\mathbb{C}^n}\}$ tal que

$$AX = \lambda X \quad \left(\text{com } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right). \quad (3)$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} AX &= \lambda X \\ -AX &= -\lambda X \\ A^3X &= -\lambda X && (\text{por hipótese, } A^3 = -A) \\ A^2(AX) &= -\lambda X \\ A^2(\lambda X) &= -\lambda X && (\text{por (3)}) \\ \lambda(A^2X) &= -\lambda X \\ \lambda A(AX) &= -\lambda X \\ \lambda A(\lambda X) &= -\lambda X && (\text{por (3)}) \\ \lambda^2(AX) &= -\lambda X \\ \lambda^2(\lambda X) &= -\lambda X && (\text{por (3)}) \\ \lambda^3X &= -\lambda X. \end{aligned}$$

Logo $(\lambda^3 + \lambda)X = 0$ e, portanto, $\lambda^3 + \lambda = 0$ ou $X = 0$. Como X é não nulo, resulta que

$$\lambda^3 + \lambda = 0 \iff \lambda(\lambda^2 + 1) = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ou } \lambda^2 + 1 = 0.$$

Mas $\lambda = 0$ não é valor próprio de A porque, nesse caso, ter-se-ia

$$0 = |A - 0I_n| = |A|,$$

o que não pode suceder uma vez que A é invertível. Logo $\lambda^2 + 1 = 0$ e, portanto, $\lambda \notin \mathbb{R}$, uma vez que esta última equação não possui soluções reais. $\square$