



Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT-UNL

Primeiro Teste – 22 de Novembro de 2003

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de alínea.

1. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A É possível efectuar $AA^T - B$ e tem-se $AA^T - B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$. ☐ B $B \cdot \text{adj } B = I_2$.
- ☐ C A matriz A tem característica 2 e a matriz AA^T é simétrica. ☐ D B é invertível e $B^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Considere, em $\mathbb{R}^3$, os subespaços vectoriais:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3y = z\} \quad \text{e} \quad G = \langle (1, 0, 1), (0, 2, 1), (2, 2, 3) \rangle.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A $F = \langle (3, 1, 3) \rangle$. ☐ B $\dim G = 3$.
- ☐ C $F + G = \langle (1, 0, 1), (0, 2, 1), (2, 2, 3), (3, 1, 3) \rangle$. ☐ D $\dim (F + G) = 3$.

3. Considere a matriz invertível

$$M = \begin{bmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ w & r & s \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ w+3x & r+3y & s+3z \end{vmatrix} = |M|$. ☐ B $\begin{vmatrix} \alpha x & \beta \alpha y & \alpha z \\ t & \beta u & v \\ w & \beta r & s \end{vmatrix} = \alpha \beta |M| \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$.
- ☐ C $|4M| = 3^4 |M|$. ☐ D $|2M^{-1}| = \frac{2^3}{|M|}$.

4. Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_p, v$ vectores de E .

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A Se $(u_1, \dots, u_n)$ é linearmente independente e $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$, então $(u_1, \dots, \alpha u_i, \dots, u_n)$ é linearmente dependente.
- ☐ B Se $(u_1, \dots, u_n)$ é linearmente independente e $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$, então $(u_1, \dots, \alpha u_i, \dots, u_n)$ é também linearmente independente.
- ☐ C Se $(u_1, \dots, u_n)$ é linearmente dependente, então o mesmo sucede a $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_p)$.
- ☐ D Se $(u_1, \dots, u_n)$ é linearmente independente e v é combinação linear de $(u_1, \dots, u_n)$, então $(u_1, \dots, u_n, v)$ é linearmente independente.

Continua no verso desta folha

5. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x , y e z , sobre $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -\alpha x + y - \alpha z = -\beta \\ -\alpha x + (\alpha + 1)y - \alpha z = -\beta \\ -\alpha x + y + z = 0 \end{cases}.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -1$, então o sistema é possível e determinado.
- ☐ B Se $\alpha = 0$, então o sistema é possível e indeterminado, com grau de indeterminação 1.
- ☐ C Se $\alpha = -1$ e $\beta \neq 0$, então o sistema é impossível.
- ☐ D Se $\alpha = -1$ e $\beta = 0$, então o sistema é possível e indeterminado, com grau de indeterminação 2.

* * * * *

[Cotação]

6. Considere, em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : b = 2c \right\} \quad \text{e} \quad G = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

- [2.5] (a) Mostre que F é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- [2.5] (b) Indique uma base de G e complete-a de forma a obter uma base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- [2.0] 7. A) Utilizando o desenvolvimento do determinante segundo linhas/colunas convenientes, indique os valores de x para os quais é invertível a matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

- B) Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tal que

$$A^2 = -I_n.$$

- [2.0] i. Utilizando a definição de matriz invertível, justifique que A é invertível.
- [2.0] ii. Indique as possibilidades para $|A|$.

[SUGESTÃO: Considere, separadamente, os casos n par e n ímpar.]

Fim



Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT-UNL

Primeiro Teste – 22 de Novembro de 2003

Uma resolução

1. B.

2. B.

3. C.

4. D.

5. D.

6. (a) Tem-se que:

i. $F \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, por definição de F ;

ii. $0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in F$;

iii. Sejam $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in F$. Por definição de F ,

$$b = 2c \quad \text{e} \quad f = 2g. \quad (1)$$

Como

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

e, por (1), $b+f = 2c+2g = 2(c+g)$, segue-se que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in F;$$

iv. Sejam $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in F$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Por definição de F ,

$$b = 2c. \quad (2)$$

Como

$$\alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}$$

e, por (2), $\alpha b = \alpha(2c) = 2(\alpha c)$, segue-se que

$$\alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in F.$$

Por i., ii., iii. e iv. pode-se concluir que F é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Comece-se por verificar se o sistema de geradores de G referido no enunciado, o qual será designado no que se segue por S , é linearmente independente. Admita-se então, com vista a esse efeito, que

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{bmatrix} \alpha + 3\gamma & \beta + 2\gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\begin{cases} \alpha + 3\gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}.$$

O sistema de equações anterior é, claramente, possível e indeterminado, pois trata-se de um sistema homogéneo com mais incógnitas do que equações. Logo o sistema S de geradores de G não é linearmente independente. Além disso, tomando no sistema anterior $\gamma = 1$, obtém-se que $\alpha = -3$ e $\beta = -2$. Assim, de (3), resulta que

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e, portanto, $G = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$.

Verifique-se agora se o sistema de geradores de G , $S_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$, é linearmente independente. Para esse efeito, admita-se que

$$\mu \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

com $\mu, \theta \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{bmatrix} \mu & \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\begin{cases} \mu = 0 \\ \theta = 0 \end{cases}.$$

Logo o sistema S_1 é linearmente independente.

Em resumo, viu-se que:

- o sistema $S_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$ gera o subespaço vectorial G ;
- o sistema S_1 é linearmente independente.

Logo pode-se concluir que o sistema S_1 é uma base de G .

É sabido que

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

é uma base do espaço vectorial real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e, portanto, trata-se de um exemplo de uma base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que inclui a base de G determinada anteriormente.

7. A) Tem-se que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{desenvolvimento segundo a 2ª linha})$$

$$= -x \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} \quad (\text{desenvolvimento segundo a 3ª coluna})$$

$$= -x \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix}$$

$$= -x(x-2).$$

[Alternativamente,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{desenvolvimento segundo a 2ª linha})$$

$$= - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & x \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \left(\left| \begin{bmatrix} 2 & 3 & x \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & x & 0 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 3 & x \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & x & 0 \end{bmatrix}^T \right| \right)$$

$$= -x \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} \quad (\text{desenvolvimento segundo a 3ª linha})$$

$$= -x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix}$$

$$= -x(x-2).]$$

A matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é invertível se, e só se, o seu determinante for não nulo. Pelos cálculos anteriores, pode-se então afirmar que a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é invertível se, e só se, $-x(x-2) \neq 0$. Isto é, se, e só se, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

B) i. Por definição, a matriz A é invertível se, e somente se, existir $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tal que

$$AB = I_n = BA.$$

Por hipótese, $A^2 = -I_n$. Então,

$$I_n = -A^2 = -(AA) = (-A)A \quad \text{e} \quad I_n = -A^2 = -(AA) = A(-A).$$

- Das igualdades anteriores conclui-se que a matriz A é invertível e que a sua inversa é a matriz $-A$.
- ii. Tendo em conta, novamente, que por hipótese $A^2 = -I_n$ e as propriedades do determinante tem-se que:

$$A^2 = -I_n$$

$$|A^2| = |-I_n|$$

$$|AA| = (-1)^n |I_n|$$

$$|A| |A| = (-1)^n \times 1$$

$$|A|^2 = (-1)^n.$$

Face ao raciocínio anterior, considere-se os seguintes dois casos:

CASO 1: Admita-se que n é par.

Neste caso, $|A|^2 = (-1)^n = 1$ e, portanto, $|A| = 1$ ou $|A| = -1$.

CASO 2: Admita-se que n é ímpar.

Neste caso, $|A|^2 = (-1)^n = -1$ e, portanto, $|A| = i$ ou $|A| = -i$ (observe-se que $|A| \in \mathbb{C}$, pois $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, e que as raízes quadradas complexas de -1 são i e $-i$). $\square$