



Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT-UNL

Segundo Teste – 17 de Dezembro de 2003

1. Considere as aplicações $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $g : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ b+c & 1 \end{bmatrix}, & \text{para todo } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3; \\ g(a + bx + cx^2) &= (a - b, 2c), & \text{para todo } a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]; \\ h(a, b) &= 2a - 3b, & \text{para todo } (a, b) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A f não é linear, mas g é linear. ☐ B g e h são lineares.
☐ C f não é linear, mas h é linear. ☐ D f e g são lineares.

2. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tem $(1 - x)^2(-3 - x)$ como polinómio característico e o valor próprio 1 tem multiplicidade geométrica igual a 2.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A Cada valor próprio de A tem multiplicidade algébrica igual à sua multiplicidade geométrica.
☐ B $|A - 3I_3| = 0$.
☐ C A é semelhante à matriz diagonal $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.
☐ D $|A - I_3| = 0$.

3. Considere em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B}' = ((1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 2))$ e seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}(f; \text{b.c.}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = A,$$

onde b.c. significa *base canónica*.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A $\mathcal{M}(f; \text{b.c.}, \text{b.c.}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} A$. ☐ B $\mathcal{M}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}', \text{b.c.}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
☐ C $f(1, 0) = 1(1, 1, 1) + (-1)(0, 1, 0) + (-2)(0, 0, 2)$. ☐ D $f(0, 1) = (0, 3, 1)$.

4. Os vectores u e v de $\mathbb{R}^3$ dizem-se *ortogonais* se $u|v = 0$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A Se u e v são perpendiculares, então u e v são ortogonais.
☐ B Se u e v são ortogonais, $u \neq \vec{0}$ e $v \neq \vec{0}$, então u e v são perpendiculares.
☐ C Se u e v são perpendiculares, então $\|u \times v\| \neq \|u\| \cdot \|v\|$.
☐ D Se u e v são ortogonais, então $v|(u + v) = \|v\|^2$.

Continua no verso desta folha

5. No espaço afim euclidiano $\mathbb{R}^3$ considere um referencial $(O; e_1, e_2, e_3)$ ortonormado e directo.

Considere os pontos $A(1, 2, 0)$, $B(-1, 2, 4)$ e $C(2, 1, 0)$ e o vector $u(2, 5, 1)$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A Os vectores $\overrightarrow{AB}$ e u são perpendiculares.
- ☐ B Os pontos A , B e C definem um triângulo cuja área é 6.
- ☐ C A recta definida pelo sistema de equações $\begin{cases} x + y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$ passa pelos pontos A e C .
- ☐ D $2x + 2y + z - 6 = 0$ é uma equação geral do plano que passa pelos pontos A , B e C .

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$f(x, y, z) = (x + 2z, -x + y - 2z, -2y, x + 4y + 2z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

- [1.0] (a) Determine o núcleo de f .
- [1.0] (b) Determine uma base da imagem de f .
- [1.0] (c) A aplicação linear f é sobrejectiva? E injectiva?
- [1.0] (d) Indique a matriz da aplicação linear f quando se considera em $\mathbb{R}^3$ a base canónica e em $\mathbb{R}^4$ a base

$$\mathcal{B}' = ((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)).$$

7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

- [1.0] (a) Determine os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.
- [2.0] (b) Indique os subespaços próprios de A e as multiplicidades geométricas de cada valor próprio.
- [1.0] (c) Mostre que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, tal que

$$P^{-1}AP = D.$$

8. Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ uma matriz invertível e λ um valor próprio de A . Mostre que:

- [1.5] (a) Se A^{-1} é diagonalizável, então A^2 é diagonalizável.
- [1.5] (b) Se $A^{-1} = A^2$, então $\lambda^3 = 1$.

Fim



Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT-UNL

Segundo Teste – 17 de Dezembro de 2003

Uma resolução

1. D.
2. B.
3. D.
4. C.
5. B.
6. (a) Tem-se que:

$$\begin{aligned}\text{Nuc } f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^4} = (0, 0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + 2z, -x + y - 2z, -2y, x + 4y + 2z) = (0, 0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2z = 0, -x + y - 2z = 0, -2y = 0 \text{ e } x + 4y + 2z = 0\}.\end{aligned}$$

Vemos assim que $\text{Nuc } f$ é o conjunto das soluções do sistema homogéneo de equações lineares sobre $\mathbb{R}$ nas incógnitas x , y e z :

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \\ -2y = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \end{cases} . \quad (1)$$

De

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{matriz simples do sistema (1)}} \xrightarrow[\ell_4 \rightarrow -\ell_1 + \ell_4]{\ell_2 \rightarrow \ell_1 + \ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_4 \rightarrow -4\ell_2 + \ell_4]{\ell_3 \rightarrow 2\ell_2 + \ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{matriz em f.e.r.}),$$

conclui-se que o sistema (1) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

e, portanto, podemos afirmar que

$$\begin{aligned}\text{Nuc } f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2z = 0 \text{ e } y = 0\} \\ &= \{(-2z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(-2, 0, 1) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-2, 0, 1) \rangle.\end{aligned}$$

(b) Tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im} f &= \{f(x, y, z) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\
 &= \{(x + 2z, -x + y - 2z, -2y, x + 4y + 2z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{(x, -x, 0, x) + (0, y, -2y, 4y) + (2z, -2z, 0, 2z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{x(1, -1, 0, 1) + y(0, 1, -2, 4) + z(2, -2, 0, 2) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \langle (1, -1, 0, 1), (0, 1, -2, 4), (2, -2, 0, 2) \rangle.
 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \rightarrow -2\ell_1 + \ell_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{matriz em f.e.}),$$

então podemos afirmar que

$$\operatorname{Im} f = \langle (1, -1, 0, 1), (0, 1, -2, 4) \rangle.$$

Isto é, o sistema de vectores $((1, -1, 0, 1), (0, 1, -2, 4))$ é um sistema gerador de $\operatorname{Im} f$. Como, além disso, este sistema de geradores é linearmente independente, pois

$$r\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}\right) = 2 = n^\circ \text{ de vectores do sistema,}$$

então $((1, -1, 0, 1), (0, 1, -2, 4))$ é uma base de $\operatorname{Im} f$.

(c) A aplicação linear f é sobrejectiva se, e só se, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$. Como os espaços vectoriais em questão têm dimensão finita, pode-se ainda afirmar que a aplicação linear f é sobrejectiva se, e só se,

$$\dim \operatorname{Im} f = 4 = \dim \mathbb{R}^4.$$

Pela alínea anterior, $\operatorname{Im} f$ admite uma base constituída por dois vectores e, portanto, $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Logo a aplicação linear f não é sobrejectiva.

A aplicação linear f é injectiva se, e só se,

$$\operatorname{Nuc} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\} = \{(0, 0, 0)\}.$$

Pela alínea (a) tem-se que $(-2, 0, 1) \in \operatorname{Nuc} f$ e, portanto, $\operatorname{Nuc} f \neq \{(0, 0, 0)\}$. Logo a aplicação linear f não é injectiva.

(d) Tem-se que:

$$\begin{aligned}
 f(1, 0, 0) &= (1, -1, 0, 1) = \mathbf{0}(0, 0, 1, 0) + \mathbf{1}(0, 0, 0, 1) + \mathbf{1}(1, 0, 0, 0) + (-\mathbf{1})(0, 1, 0, 0) \\
 f(0, 1, 0) &= (0, 1, -2, 4) = -\mathbf{2}(0, 0, 1, 0) + \mathbf{4}(0, 0, 0, 1) + \mathbf{0}(1, 0, 0, 0) + \mathbf{1}(0, 1, 0, 0) \\
 f(0, 0, 1) &= (2, -2, 0, 2) = \mathbf{0}(0, 0, 1, 0) + \mathbf{2}(0, 0, 0, 1) + \mathbf{2}(1, 0, 0, 0) + (-\mathbf{2})(0, 1, 0, 0).
 \end{aligned}$$

$$\text{Logo } \mathcal{M}(f; \text{b.c.}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

7. (a) Os valores próprios da matriz A são as soluções reais da equação na indeterminada x :

$$|A - xI_3| = 0.$$

Ora,

$$|A - xI_3| = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2(2-x).$$

Posto isto, em $\mathbb{R}$, tem-se que

$$|A - xI_3| = 0 \iff (1-x)^2(2-x) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = 2,$$

pelo que os valores próprios da matriz A são 1 e 2.

Como 1 é uma raiz dupla e 2 é uma raiz simples da equação $|A - xI_3| = 0$, podemos afirmar que as respectivas multiplicidades algébricas (ma) são: $ma(1) = 2$ e $ma(2) = 1$.

(b) Tem-se que:

$$M_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (A - 1I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{subespaço próprio de } A \\ \text{associado ao valor próprio 1} \end{array} \right),$$

pelo que M_1 é o conjunto das soluções do sistema homogéneo de equações lineares sobre $\mathbb{R}$ nas incógnitas x , y e z :

$$(A - 1I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

De

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{matriz simples do sistema (2)}} \xrightarrow[\ell_3 \rightarrow -\ell_1 + \ell_3]{\ell_2 \rightarrow \ell_1 + \ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{matriz em f.e.r.})$$

resulta que o conjunto das soluções do sistema (2) é o conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\} = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Logo

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, y, 0) + (0, 0, z) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Isto é, $((0, 1, 0), (0, 0, 1))$ é um sistema gerador de M_1 . Como este sistema é linearmente independente, pois

$$r \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 2 = n^\circ \text{ de vectores do sistema},$$

segue-se que $((0, 1, 0), (0, 0, 1))$ é uma base de M_1 e, portanto,

$$\text{mg}(1) = \dim M_1 = 2.$$

$$M_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (A - 2I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{subespaço próprio de } A \\ \text{associado ao valor próprio 2} \end{array} \right),$$

pelo que M_2 é o conjunto das soluções do sistema homogéneo de equações lineares sobre $\mathbb{R}$ nas incógnitas x , y e z :

$$(A - 2I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

De

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{matriz simples do sistema (3)}} \xrightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \rightarrow \ell_1 + \ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ell_2 \rightarrow -\ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{matriz em f.e.r.})$$

resulta que o conjunto das soluções do sistema (3) é o conjunto

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0 \text{ e } y + z = 0\} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \text{ e } y = -z\} \\ &= \{(z, -z, z) : z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} M_2 &= \{(z, -z, z) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(1, -1, 1) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, -1, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Isto é, $((1, -1, 1))$ é um sistema gerador de M_2 . Como o vector $(1, -1, 1)$ é não nulo, segue-se que o sistema $((1, -1, 1))$ é linearmente independente e, portanto, uma base de M_2 . Logo

$$\text{mg}(2) = \dim M_2 = 1.$$

- (c) A matriz A é diagonalizável se, e só se, a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios for igual à ordem de A . Pela alínea anterior tem-se que

$$\text{mg}(1) + \text{mg}(2) = 2 + 1 = 3 = \text{ordem de } A,$$

pelo que a matriz A é diagonalizável.

Pela resolução da alínea anterior sabe-se que $((0, 1, 0), (0, 0, 1))$ é uma base de M_1 e que $((1, -1, 1))$ é uma base de M_2 . Nestas condições, a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

cujas colunas são os vectores das bases de M_1 e de M_2 acima indicadas, é invertível e, além disso,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D \quad (\text{matriz diagonal}).$$

8. (a) Admita-se que a matriz A^{-1} é diagonalizável. Então, existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tal que

$$D = P^{-1}A^{-1}P. \quad (4)$$

Pretende-se mostrar que nestas condições a matriz A^2 é diagonalizável. Isto é, que existe uma matriz invertível $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e uma matriz diagonal $D' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tal que

$$D' = Q^{-1}A^2Q.$$

Ora, da igualdade expressa em (4) resulta, em particular, que a matriz D é invertível, por ser produto de matrizes invertíveis. Assim, podemos fazer o seguinte raciocínio:

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}A^{-1}P && \text{(por (4))} \\ D^{-1} &= (P^{-1}A^{-1}P)^{-1} \\ D^{-1} &= P^{-1}(A^{-1})^{-1}(P^{-1})^{-1} \\ D^{-1} &= P^{-1}AP \\ (D^{-1})^2 &= (P^{-1}AP)^2 \\ (D^{-1})^2 &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \\ (D^{-1})^2 &= P^{-1}AI_nAP \\ (D^{-1})^2 &= P^{-1}A^2P. \end{aligned}$$

Como a matriz $(D^{-1})^2$ é diagonal (a inversa de uma matriz diagonal invertível é ainda uma matriz diagonal; o quadrado de uma matriz diagonal é ainda uma matriz diagonal), podemos concluir que a matriz A^2 é diagonalizável.

- (b) Admita-se que $A^{-1} = A^2$. Se, por hipótese, λ é valor próprio da matriz A , então sabemos que existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ tal que

$$AX = \lambda X \quad \left(\text{com } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right). \quad (5)$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} AX &= \lambda X && \text{(por (5))} \\ A^2(AX) &= A^2(\lambda X) \\ A^{-1}(AX) &= \lambda(A^2X) && \text{(por hipótese } A^{-1} = A^2) \\ (A^{-1}A)X &= \lambda A(AX) \\ I_n X &= \lambda A(\lambda X) && \text{(por (5))} \\ X &= \lambda^2(AX) \\ X &= \lambda^2(\lambda X) && \text{(por (5))} \\ X &= \lambda^3 X \\ (\lambda^3 - 1)X &= 0 \\ \lambda^3 - 1 &= 0 \vee X = 0. \end{aligned}$$

Como X é não nulo, resulta da última igualdade que $\lambda^3 = 1$.

□