Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT–UNL

Recurso – 15 de Fevereiro de 2005

Parte 1 - EXAME A

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -1 & \beta & 1 \\ \gamma & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**.

A $AB^\top = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ 2\beta - 1 & 3\beta + 2 \\ \gamma & 1 - \gamma \end{bmatrix}$.

B O determinante de A não depende de γ.

C Se $\alpha\beta \neq 0$ então A tem característica 2.

D $\text{adj } A = \begin{bmatrix} \beta & \gamma + 1 & -\beta\gamma \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha\beta \end{bmatrix}^\top$.

2. Considere a matriz invertível $M = \begin{bmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**.

A $\begin{vmatrix} \alpha r & \alpha t & \alpha s \\ u & w & v \\ x & z & y \end{vmatrix} = -\alpha |M|$.

B $\begin{vmatrix} r & s & t \\ u - r & v - s & w - t \\ x & y & z \end{vmatrix} = -|M|$.

C $|\alpha M^{-1} M^\top| = \alpha^3$, para todo o $\alpha \in \mathbb{C}$.

D $\begin{vmatrix} x & y & z \\ r + x & s + y & t + z \\ u & v & w \end{vmatrix} = |M|$.

3. Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**.

A $\{(a, b, -b, a) : a, b \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$.

B A aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(a, b, c) = (a + 2b, c + 1)$, para todo o $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, não é uma aplicação linear.

C $(-1, 2, 0) \notin < (1, 0, 1), (0, 2, 1) >$.

D $\{(a, a + 1, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ não é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Continua no verso desta folha

4. No espaço afim euclidiano $\mathbb{R}^3$ considere um referencial ortonormado e directo. Seja $\mathcal{P}$ o plano de equação geral $2x - y + z + 1 = 0$ e $\mathcal{R}$ a recta que passa pelos pontos $A(2, 3, 0)$ e $B(2, 2, -1)$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**.

A O vector $(4, -2, 2)$ é perpendicular ao plano $\mathcal{P}$.

B A recta $\mathcal{R}$ é estritamente paralela ao plano $\mathcal{P}$.

C O ponto $C(0, 1, 0)$ pertence ao plano $\mathcal{P}$ e com os pontos A e B define um triângulo cuja área é $2\sqrt{3}$.

D A distância da recta $\mathcal{R}$ ao plano $\mathcal{P}$ é $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

5. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z sobre $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ -x + \beta y - z = -1 \\ 2x + \beta y + (\alpha + 4)z = 2 + \beta \end{cases} .$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**.

A Se $\beta \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ então o sistema é possível e determinado.

B Se $\beta \neq 0$ e $\alpha = 1$ então o sistema é impossível.

C Se $\beta = 0$ então, independentemente de α, o sistema é possível e indeterminado.

D Se $\beta = 0$ o conjunto das soluções do sistema é $\{(1, 0, b) : b \in \mathbb{R}\}$.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:_____

Número de caderno: | | | | | | | | | | |

Respostas

	A	**B**	**C**	**D**
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,5$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,5$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl_M}\},$$

onde $\mathrm{cl_M}$ designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT–UNL

Recurso – 15 de Fevereiro de 2005

Parte 2

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(a, b, c) = (a - 2b + c,\ 2b),$$

para todo o $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

[1.0] (a) Determine o núcleo de f e uma sua base.

[1.0] (b) Sem determinar a imagem de f, justifique que f é sobrejectiva.

[1.0] (c) Considerando em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B} = ((1, 2, 3), (0, -1, 1), (0, 1, 1))$ e em $\mathbb{R}^2$ a base $\mathcal{B}' = ((0, 2), (1, 0))$, determine a matriz da aplicação f em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Mude de Folha

7. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ considere os subespaços

$$F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : c = 0 \ \wedge \ b = a - d\}$$

e

$$G =< (-1, -1, 2, 0), (0, 1, 2, -1), (0, 0, 2, 0) > .$$

[1.0] (a) Indique uma base de F.

[1.5] (b) Mostre que $\dim(F + G) = 3$.

Mude de Folha

8. Considere a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

[2.0] (a) Determine os valores próprios e os subespaços próprios de M.

[1.0] (b) Mostre que M é diagonalizável e indique uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}MP = D$.

9. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ é tal que:

$$A^2 + A - 2I_n = 0.$$

[1.0] (a) Justifique que A é invertível e indique a sua inversa.

[1.0] (b) Utilizando determinantes, mostre que -1 não é valor próprio de A.

[2.0] (c) Demonstre que se α é valor próprio de A então $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$ e consequentemente $\alpha \in \{1, -2\}$.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT–UNL

Recurso – 15 de Fevereiro de 2005

Uma resolução

1-5. EXAME A - C, B, C, C, D

6. (a) Tem-se que

$$\begin{aligned}\mathrm{Nuc}f &= \{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : f(a,b,c)=(0,0)\} = \{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : (a-2b+c,2b)=(0,0)\}\\ &= \{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a-2b+c=0 \ \wedge\ 2b=0\} = \{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a=-c \ \wedge\ b=0\}\\ &= \{(-c,0,c) : c\in\mathbb{R}\} = \{c(-1,0,1) : c\in\mathbb{R}\} =< (-1,0,1) > .\end{aligned}$$

Dado que $\mathrm{Nuc}f =< (-1,0,1) >$ e $((-1,0,1))$ é um sistema linearmente independente (pois só tem um vector e é não nulo) concluímos que $((-1,0,1))$ é uma base de $\mathrm{Nuc}f$.

(b) Da alínea (a) resulta que

$$\dim \mathrm{Nuc}f = 1.$$

Pelo Teorema da Dimensão tem-se

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Nuc}f + \dim \mathrm{Im}f,$$

isto é,

$$3 = 1 + \dim \mathrm{Im}f$$

e, portanto,

$$\dim \mathrm{Im}f = 2.$$

Como $\mathrm{Im}f$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^2$ e, neste caso, se tem $\dim \mathrm{Im}f = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ concluímos, por um resultado conhecido, que $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}^2$. Logo, f é sobrejectiva.

(c) De acordo com a definição de $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$, calculemos $f(1,2,3)$, $f(0,-1,1)$, $f(0,1,1)$ e as coordenadas de cada um destes vectores na base $\mathcal{B}'$. Tem-se

$$\begin{array}{rcrcrcr} f(1,2,3) &=& (0,4) &=& \mathbf{2}(0,2) &+& \mathbf{0}(1,0)\\ f(0,-1,1) &=& (3,-2) &=& -\mathbf{1}(0,2) &+& \mathbf{3}(1,0)\\ f(0,1,1) &=& (-1,2) &=& \mathbf{1}(0,2) &+& (-\mathbf{1})(1,0)\end{array} .$$

Logo

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -1\end{bmatrix}.$$

7. (a) Tem-se que

$$\begin{aligned}F &= \{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 : c=0 \ \wedge\ b=a-d\} = \{(a,a-d,0,d) : a,d\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(a,a,0,0)+(0,-d,0,d) : a,d\in\mathbb{R}\} = \{a(1,1,0,0)+d(0,-1,0,1) : a,d\in\mathbb{R}\}\\ &= <(1,1,0,0),(0,-1,0,1)> .\end{aligned}$$

O sistema $((1,1,0,0),(0,-1,0,1))$ é um sistema linearmente independente, pois a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

tem característica 2. Logo, uma base de F é $((1,1,0,0),(0,-1,0,1))$.

(b) Por um resultado teórico, sabemos que se F e G são subespaços de um espaço vectorial E tais que $F =< u_1, \ldots, u_r >$ e $G =< v_1, \ldots, v_s >$ então $F + G =< u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s >$.

Pela alínea (a) sabemos que $F =< (1,1,0,0), (0,-1,0,1) >$. Assim

$$F + G =< (1,1,0,0), (0,-1,0,1), (-1,-1,2,0), (0,1,2,-1), (0,0,2,0) > .$$

Consideremos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e obtenhamos a partir dela, por transformações elementares nas linhas, uma matriz em forma de escada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 + l_3 \to l_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 + l_4 \to l_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)l_3 + l_5 \to l_5]{(-1)l_3 + l_4 \to l_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Por um resultado dado sabemos que se tem também

$$F + G =< (1,1,0,0), (0,-1,0,1), (0,0,2,0) > .$$

Como os vectores indicados são linearmente independentes (pois são as linhas não nulas de uma matriz em forma de escada) concluímos que uma base de $F+G$ é $((1,1,0,0), (0,-1,0,1), (0,0,2,0))$. Logo $\dim(F+G) = 3$.

8. (a) Sabemos que os valores próprios de M são os zeros reais do polinómio característico de M, $|M - \lambda I_3|$. Desenvolvendo o determinante $|M - \lambda I_3|$ segundo a primeira linha,

$$\begin{aligned} |M - \lambda I_3| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] \\ &= (2-\lambda)(-2\lambda + \lambda^2) = (2-\lambda)\lambda(-2+\lambda) = -\lambda(-2+\lambda)^2. \end{aligned}$$

Assim os valores próprios de M são o $\mathbf{0}$ com multiplicidade algébrica 1 e o $\mathbf{2}$ com multiplicidade algébrica 2.

Determinemos o subespaço próprio de M associado ao valor próprio $\mathbf{0}$, $S_{\mathbf{0}}$.

$$S_0 = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : M \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \mathbf{0} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\} = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : (M - \mathbf{0}I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

pelo que $S_{\mathbf{0}}$ é o conjunto das soluções do sistema homogéneo $(M - \mathbf{0}I_3)X = 0$ de equações lineares sobre $\mathbb{R}$ nas incógnitas a, b e c. De

$$[M - \mathbf{0}I_3)|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 + l_3 \to l_3]{l_1 + l_2 \to l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 + l_3 \to l_3]{\frac{1}{2} l_1 \to l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

resulta que

$$S_{\mathbf{0}} = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0 \ \wedge \ b - c = 0 \right\} = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0 \ \wedge \ b = c \right\} = \left\{ (0,c,c) : c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Determinemos agora o subespaço próprio de M associado ao valor próprio $\mathbf{2}$, $S_{\mathbf{2}}$.

$$S_{\mathbf{2}} = \left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : M\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix} = \mathbf{2}\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix}\right\} = \left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : (M-\mathbf{2}I_3)\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\right\},$$

pelo que $S_{\mathbf{2}}$ é o conjunto das soluções do sistema homogéneo $(M-\mathbf{2}I_3)X = 0$ de equações lineares sobre $\mathbb{R}$ nas incógnitas a, b e c. De

$$[M-\mathbf{2}I_3)|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0\\ -2 & -1 & -1 & 0\\ -2 & -1 & -1 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{l_1\leftrightarrow l_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -1 & 0\\ -2 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{(-1)l_1+l_2\to l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-\frac{1}{2})l_1\to l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

resulta que

$$S_{\mathbf{2}} = \left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c = 0\right\} = \left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a = -\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c\right\} = \left\{(-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c,b,c) : b,c\in\mathbb{R}\right\}.$$

(b) Sabemos que $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ é diagonalizável se, e só se, M tem 3 vectores próprios linearmente independentes, ou equivalentemente, se a soma das multiplicidades geométricas (mg) dos seus valores próprios é 3.

Como vimos na alínea (a), tem-se

$$S_{\mathbf{0}} = \{(0,c,c) : c\in\mathbb{R}\} = \{c(0,1,1) : c\in\mathbb{R}\} =< (0,1,1) > .$$

Dado que $(0,1,1)$ é não nulo, o sistema $((0,1,1))$ é linearmente independente, tendo-se que $((0,1,1))$ é uma base de $S_{\mathbf{0}}$ e, portanto, $\mathrm{mg}(\mathbf{0}) = \dim S_{\mathbf{0}} = 1$.

Para o outro subespaço próprio tem-se que

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{2}} &= \left\{(-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c,b,c) : b,c\in\mathbb{R}\right\} = \left\{(-\frac{1}{2}b,b,0)+(-\frac{1}{2}c,0,c) : b,c\in\mathbb{R}\right\}\\ &= \left\{b(-\frac{1}{2},1,0)+c(-\frac{1}{2},0,1) : b,c\in\mathbb{R}\right\} =< (-\frac{1}{2},1,0),(-\frac{1}{2},0,1) > .\end{aligned}$$

O sistema $((-\frac{1}{2},1,0),(-\frac{1}{2},0,1))$ é um sistema linearmente independente, pois a matriz $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & 1\end{bmatrix}$ tem característica 2. Logo uma base de $S_{\mathbf{2}}$ é $((-\frac{1}{2},1,0),(-\frac{1}{2},0,1))$ e, portanto, $\mathrm{mg}(\mathbf{2}) = \dim S_{\mathbf{2}} = 2$.

Como $\mathrm{mg}(\mathbf{0})+\mathrm{mg}(\mathbf{2}) = 1+2 = 3$ concluímos que M é diagonalizável.

Por um resultado teórico sabemos que uma matriz invertível $P\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}MP = D$, com $D\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonal, é qualquer matriz que tenha por colunas 3 vectores próprios da matriz M que sejam linearmente independentes. Em particular os vectores das bases encontradas dos subespaços próprios estão nessas condições.

Tomemos por exemplo

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

em que as colunas são vectores próprios de M associados respectivamente aos valores próprios 0, 2 e 2. Neste caso teremos necessariamente

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

pois os valores próprios estão na diagonal principal de D pela ordem correspondente: 0, 2, 2.

9. (a) Como

$$A^2 + A - 2I_n = 0$$

concluímos que

$$A^2 + A = 2I_n \iff A(A + I_n) = 2I_n \iff A\left[\frac{1}{2}(A + I_n)\right] = I_n.$$

Como A é uma matriz quadrada concluímos que A é invertível e

$$A^{-1} = \left[\frac{1}{2}(A + I_n)\right].$$

(b) Vimos anteriormente que

$$A(A + I_n) = 2I_n.$$

Então

$$|A(A + I_n)| = |2I_n| \iff |A| \cdot |A + I_n| = 2^n|I_n| \iff |A| \cdot |A + I_n| = 2^n.$$

Como $2^n \neq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, concluímos que $|A| \neq 0$ e $|A + I_n| \neq 0$.

Note-se que

$$|A + I_n| = |A - (-1)I_n| \neq 0.$$

Como os valores próprios de A são os valores $\alpha \in \mathbb{C}$ tais que

$$|A - \alpha I_n| = 0,$$

concluímos que -1 **não** é valor próprio de A.

(c) Se α é valor próprio de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ então existe $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$, tal que

$$AX = \alpha X.$$

Então

$$A(AX) = A(\alpha X) \iff A^2X = \alpha(AX) \iff A^2X = \alpha(\alpha X) \iff A^2X = \alpha^2 X.$$

Da igualdade

$$A^2 + A - 2I_n = 0$$

resulta

$$(A^2 + A - 2I_n)X = 0X \implies A^2X + AX - 2X = 0 \implies \alpha^2X + \alpha X - 2X = 0 \implies (\alpha^2 + \alpha - 2)X = 0$$

pelo que

$$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \text{ ou } X = 0.$$

Como $X \neq 0$ concluímos, como pretendíamos, que

$$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$$

e, consequentemente,

$$\alpha \in \{1, -2\}.$$