# Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT–UNL

Primeiro Teste – 17 de Novembro de 2004

**1.** Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3}(\mathbb{R}).$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A $A + 2B^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

B $(BA)^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.

C $BA$ tem característica 3.

D $C$ é invertível e $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

**2.** Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ está na forma de escada reduzida.

B Para toda a matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$, a matriz $\alpha(A + A^T)$ é igual à sua transposta.

C Qualquer que seja $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, se efectuarmos em $A$ a troca da linha 1 com a linha 2 e posteriormente, na matriz obtida, adicionarmos à linha 3 a linha 2 multiplicada por $-1$, então a matriz $C$ obtida verifica a igualdade

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} A.$$

D Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ é invertível, então

$$\operatorname{adj} A = |A| A^{-1},$$

onde $\operatorname{adj} A$ representa a matriz adjunta de $A$.

**3.** Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ g+2d & h+2e & i+2f \\ d & e & f \end{vmatrix}$, onde $\left[\begin{smallmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

B Se numa matriz invertível $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ efectuarmos a troca da linha $i$ com a linha $j$, com $i \neq j$ e $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, e posteriormente na matriz obtida efectuarmos a troca da coluna $k$ com a coluna $\ell$, com $k \neq \ell$ e $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$, então a matriz $C$ obtida verifica

$$|C| = -|A|.$$

C Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tem duas linhas iguais, então $|A| = 0$.

D Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ é tal que $|A| = 0$ então, qualquer que seja $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AB$ não é invertível.

Continua no verso desta folha

**4.** Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$, $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & b \\ 0 & f & 0 & g \\ c & e & i & j \\ 0 & g & d & h \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A $|B| = -cd(ag - bf)$.

B $|\alpha AA^T| = \alpha^n |A|^2$.

C Pode ter-se $\alpha AA^T$ invertível e $A$ não invertível.

D Para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$ tem-se

$$|A| = a_{k1}\hat{A}_{k1} + \cdots + a_{kn}\hat{A}_{kn},$$

onde $\hat{A}_{kj}$ representa o complemento algébrico do elemento na posição $(k, j)$ de $A$.

**5.** No espaço vectorial real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, considere $F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a = -d \ \wedge \ b = c \right\}$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A $F$ é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, com $F \neq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

B $F = \left\langle \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$.

C $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ é combinação linear dos vectores $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

D $\dim F = 2$.

Nos grupos seguintes, só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

**6.** Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas $x$, $y$ e $z$, sobre $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + (\alpha - 2)y + 2z = 6 \\ -x + y - \alpha z = \alpha + \beta - 1 \end{cases}.$$

[2.5] (a) Discuta o sistema anterior em função de $\alpha$ e $\beta$.

[1.5] (b) Para $\alpha = \beta = 0$ indique o conjunto das soluções do sistema.

**7.** No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, considere $F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : c = a + b\}$.

[1.0] (a) Mostre que $F$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

[2.0] (b) Indique uma base de $F$.

[2.0] (c) Indique uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua todos os vectores da base indicada na alínea anterior.

[2.0] **8.** Seja $E$ um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, de dimensão $n$, com $n \geq 1$, e $u_1, \ldots, u_n$ vectores de $E$. Demonstre que se $(u_1, \ldots, u_n)$ é um sistema de geradores de $E$, então $(u_1, \ldots, u_n)$ é uma base de $E$.

Fim

# Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT–UNL

Primeiro Teste – 17 de Novembro de 2004

Uma resolução

**1.** C.

**2.** C.

**3.** B.

**4.** C.

**5.** C.

**6.** (a) Comecemos por condensar a matriz ampliada do sistema, utilizando unicamente transformações elementares nas linhas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & \alpha-2 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & -\alpha & \alpha+\beta-1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\ell_2 \to -2\ell_1+\ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_1+\ell_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -\alpha & \alpha+\beta \end{array}\right] (\star).$$

Tendo em conta a matriz $(\star)$ pode-se fazer a seguinte discussão do sistema:

- Se $\alpha \neq 0$ tem-se, para qualquer valor de $\beta$, que

$$\text{r(matriz simples)} = \text{r(matriz ampliada)} = 3 = \text{número de incógnitas.}$$

Logo, neste caso, o sistema é possível determinado.

- Se $\alpha = 0$, a matriz $(\star)$ toma a forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right] (\spadesuit).$$

Assim,

•• Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$, então

$$\text{r(matriz simples)} = 2 < 3 = \text{r(matriz ampliada)}.$$

Donde, neste caso, o sistema é impossível.

•• Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, a matriz $(\spadesuit)$ toma a forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] (\clubsuit)$$

tendo-se

$$\text{r(matriz simples)} = \text{r(matriz ampliada)} = 2 < 3 = \text{número de incógnitas.}$$

Donde, neste caso, o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação

$$1 = \text{número de incógnitas} - \text{r(matriz simples/matriz ampliada)} = 3 - 2.$$

(b) Admita-se que $\alpha = \beta = 0$. Neste caso, continuando a condensação a partir da matriz (♣) obtida na alínea anterior, para obter a forma de escada reduzida, resulta que:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2 \to \frac{1}{2}\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(matriz em f.e.r.).}$$

Logo o conjunto das soluções do sistema é o conjunto

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y = 1 \text{ e } z = 2\} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 1 + y \text{ e } z = 2\} \\ &= \{(1 + y, y, 2) : \ y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

**7.** (a) Tem-se que:

i. $F \subseteq \mathbb{R}^3$, por definição de $F$;

ii. $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F$;

iii. Sejam $(a, b, c), (d, e, f) \in F$. Por definição de $F$,

$$c = a + b \quad \text{e} \quad f = d + e. \tag{1}$$

Como

$$(a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f)$$

e, por (1),

$$c + f = (a + b) + (d + e) = (a + d) + (b + e),$$

segue-se por definição de $F$ que

$$(a, b, c) + (d, e, f) \in F;$$

iv. Sejam $(a, b, c) \in F$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Por definição de $F$,

$$c = a + b. \tag{2}$$

Como

$$\alpha(a, b, c) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c)$$

e, por (2), $\alpha c = \alpha(a + b) = (\alpha a) + (\alpha b)$, segue-se por definição de $F$ que

$$\alpha(a, b, c) \in F.$$

Por i., ii., iii. e iv. pode-se concluir que $F$ é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(b) Indicar uma base de $F$ é indicar um sistema de geradores de $F$ que seja linearmente independente.

- Seja $(a, b, c) \in F$ um elemento arbitrário. Tem-se que:

$$\begin{aligned} (a, b, c) &= (a, b, a + b) && \text{(pois } c = a + b\text{)} \\ &= (a, 0, a) + (0, b, b) \\ &= a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1). \end{aligned}$$

Logo $F \subseteq \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle$. Por outro lado, como por definição de $F$ se tem $(1, 0, 1), (0, 1, 1) \in F$, pode-se concluir que

$$F = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle$$

(isto é, $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ é um sistema de geradores de $F$).

- Considere-se o sistema de vectores $((1,0,1),(0,1,1))$. Como

$$\mathrm{r}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\right) = 2 \text{ (= número de vectores do sistema anterior)},$$

  resulta que $((1,0,1),(0,1,1))$ é um sistema linearmente independente.

Conclusão: O sistema de vectores $((1,0,1),(0,1,1))$ é uma base do subespaço $F$.

(c) O espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ tem, como se sabe, dimensão 3. Assim, qualquer sistema com 3 vectores de $\mathbb{R}^3$ que seja linearmente independente é uma base de $\mathbb{R}^3$. Ora,

$$\mathrm{r}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right) = 3\,(= \dim \mathbb{R}^3),$$

pelo que o sistema $((1,0,1),(0,1,1),(0,0,1))$ é linearmente independente e, portanto, uma base de $\mathbb{R}^3$ nas condições pedidas.

**8.** Por hipótese $E = \langle u_1,\dots,u_n\rangle$ e $\dim E = n \geq 1$.

Por um resultado dado sabe-se que existe um sistema de vectores $\mathcal{S}$ constituído por alguns dos vectores $u_1,\dots,u_n$, o qual satisfaz:

- $\mathcal{S}$ é linearmente independente;
- $\langle \mathcal{S}\rangle = \langle u_1,\dots,u_n\rangle = E$.

Nestas condições, $\mathcal{S}$ é uma base de $E$. Como qualquer base de $E$ tem $n$ vectores, então necessariamente $\mathcal{S} = (u_1,\dots,u_n)$, o que prova o pretendido. $\square$