



Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT-UNL

Segundo Teste – 11 de Dezembro de 2004

TESTE A

1. Sejam E e E' espaços vectoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e seja $f : E \rightarrow E'$ uma aplicação linear.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A $\dim E \geq \dim \operatorname{Im} f$.
- ☐ B Se f é injectiva então $\dim E = \dim \operatorname{Im} f$.
- ☐ C Se f é bijectiva então $\dim E = \dim E'$.
- ☐ D Se $\dim E = \dim E'$ e f é sobrejectiva então f não é injectiva.

2. Considere no espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ as bases

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 2, 3), (0, -1, 0), (3, 1, 4)) \quad \mathcal{B}_2 = ((0, -1, 0), (1, 2, 3), (3, 1, 4)) \quad \mathcal{B}_3 = ((0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)).$$

Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A $f(1, 2, 3) = (6, 8, 13)$.
- ☐ B $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2) = A\mathcal{M}(\operatorname{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1)$.
- ☐ C $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} A$.
- ☐ D $f(3, 1, 4) = (2, -1, 0)$.

3. Seja $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ uma matriz com polinómio característico

$$p(x) = -x(3+x)^2.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A $|A + 3I_3| = 0$.
- ☐ B -3 é valor próprio de A e se a sua multiplicidade geométrica é 2 então A não é diagonalizável.
- ☐ C $|A - 2I_3| \neq 0$.
- ☐ D Se A é diagonalizável então A é semelhante à matriz $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4. Sejam u e v vectores de $\mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

☐ A Se u e v são perpendiculares então $u|v = 0$.

☐ C $u \times (\alpha u) \neq \vec{0}$.

☐ B $u|(-u) = -\|u\|^2$.

☐ D $(u \times v)|(-u) = 0$.

5. No espaço afim euclidiano $\mathbb{R}^3$ considere um referencial $(O; e_1, e_2, e_3)$ ortonormado e directo. Considere os pontos

$$A(1, 2, 0), \quad B(1, 0, 1), \quad C(2, 1, 0).$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

☐ A O ângulo formado pelos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é $\arccos \sqrt{\frac{2}{5}}$.

☐ B Os pontos A , B e C são os vértices de um triângulo com área igual a $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

☐ C Existe um e um só plano que passa pelos pontos A , B e C e uma equação geral desse plano é $x + y + 2z + 3 = 0$.

☐ D As equações $x - 1 = \frac{y - 2}{-1}$ e $z = 0$ são equações normais da recta que passa pelos pontos A e C .

Preencha de forma bem legível:

Número de caderno: (“Encoste” o número à direita.)

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

- 1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.
- 2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.
- 3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:
 - Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
 - Se responder correctamente: +1,8 valores;
 - Se responder erradamente: -0,6 valores.
- 4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max \{0, cl_M\},$$

onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

Nos grupos seguintes, só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas.

Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(a + bx + cx^2) = (a - c, 0, 2b),$$

para todo $a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$.

[1.5] (a) Mostre que $\text{Nuc } f = \langle 1 + x^2 \rangle$.

[1.5] (b) Indique uma base de $\text{Im } f$.

[1.0] (c) Considerando em $\mathbb{R}_2[x]$ a base $\mathcal{B} = (2, x, -x^2)$ e em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B}' = ((0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1))$ determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

[1.0] (a) Indique os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.

[2.0] (b) Determine uma base de cada subespaço próprio de A .

[1.5] (c) Mostre que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP = D$.

8. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diz-se **estocástica generalizada** se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que a soma dos elementos de qualquer uma das linhas de A é igual a α . Mostre que:

[0.5] (a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ é estocástica generalizada então $(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ é vector próprio de A .

[2.0] (b) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ é estocástica generalizada e invertível então A^{-1} também é estocástica generalizada.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT-UNL

Segundo Teste – 11 de Dezembro de 2004

Uma resolução

TESTE A

1. D
2. D
3. B
4. C
5. C

6. Seja $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$f(a + bx + cx^2) = (a - c, 0, 2b),$$

para todo $a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$.

(a)

$$\begin{aligned} \text{Nuc } f &= \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] : f(a + bx + cx^2) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] : (a - c, 0, 2b) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] : a - c = 0 \wedge 2b = 0\} \\ &= \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] : a = c \wedge b = 0\} \\ &= \{c + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] : c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{c(1 + x^2) \in \mathbb{R}_2[x] : c \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle 1 + x^2 \rangle. \end{aligned}$$

(b) Por um resultado conhecido, sabe-se que se $f : E \rightarrow E'$ é uma aplicação linear e $u_1, \dots, u_r \in E$ são tais que $E = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$ então $\text{Im } f = f(E) = \langle f(u_1), \dots, f(u_r) \rangle$.

Como $\mathbb{R}_2[x] = \langle 1, x, x^2 \rangle$ então

$$\text{Im } f = \langle f(1), f(x), f(x^2) \rangle.$$

Tem-se,

$$f(1) = f(1 + 0x + 0x^2) = (1, 0, 0), \quad f(x) = f(0 + 1x + 0x^2) = (0, 0, 2),$$

$$f(x^2) = f(0 + 0x + 1x^2) = (-1, 0, 0),$$

logo

$$\text{Im } f = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 2), (-1, 0, 0) \rangle.$$

Como

$$(-1, 0, 0) = -1(1, 0, 0) + 0(0, 0, 2)$$

então $\text{Im } f = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 2) \rangle$. Por outro lado, o sistema $((1, 0, 0), (0, 0, 2))$ é linearmente independente (note-se que, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ (1, 0, 0) \neq \alpha(0, 0, 2)$) e portanto conclui-se que $((1, 0, 0), (0, 0, 2))$ é uma base de $\text{Im } f$.

(c) Sejam $\mathcal{B} = (2, x, -x^2)$ e $\mathcal{B}' = ((0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1))$ bases de $\mathbb{R}_2[x]$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Como,

$$f(2) = f(2 + 0x + 0x^2) = (2, 0, 0) = \underline{0}(0, 1, 0) + \underline{2}(1, 0, 0) + \underline{0}(0, 0, 1),$$

$$f(x) = f(0 + 1x + 0x^2) = (0, 0, 2) = \underline{0}(0, 1, 0) + \underline{0}(1, 0, 0) + \underline{2}(0, 0, 1),$$

$$f(-x^2) = f(0 + 0x + (-1)x^2) = (1, 0, 0) = \underline{0}(0, 1, 0) + \underline{1}(1, 0, 0) + \underline{0}(0, 0, 1),$$

logo

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

(a) O polinómio característico de A é

$$\begin{aligned} |A - xI_3| &= \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 0 \\ -4 & 2-x & 0 \\ -2 & -1 & 4-x \end{vmatrix} = (4-x) \begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ -4 & 2-x \end{vmatrix} = (4-x) [(2-x)^2 - 4] \\ &= (4-x)(4 - 4x + x^2 - 4) = (4-x)(x^2 - 4x) = (4-x)x(x-4) = -x(4-x)^2. \end{aligned}$$

Assim, os valores próprios de A , sendo os zeros reais do polinómio característico, são:

0 com multiplicidade algébrica igual a 1 e

4 com multiplicidade algébrica igual a 2.

(b) Subespaço próprio associado ao valor próprio **0** :

$$M_0 = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\} = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned} [A|0] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_1 + \ell_3 \rightarrow \ell_3]{2\ell_1 + \ell_2 \rightarrow \ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_2 \leftrightarrow \ell_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{-\frac{1}{2}\ell_2 \rightarrow \ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_2 + \ell_1 \rightarrow \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}\ell_1 \leftrightarrow \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ (matriz em f.e.r.)} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_0 &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a - c = 0 \wedge b - 2c = 0\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = c \wedge b = 2c\} \\ &= \{(c, 2c, c) \in \mathbb{R}^3 : c \in \mathbb{R}\} = \{c(1, 2, 1) \in \mathbb{R}^3 : c \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 2, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Dado que $(1, 2, 1) \neq (0, 0, 0)$ então o sistema $((1, 2, 1))$ é linearmente independente e como também é gerador de M_0 , conclui-se que $((1, 2, 1))$ é uma base deste subespaço.

Subespaço próprio associado ao valor próprio 4 :

$$M_4 = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\} = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (A - 4I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned} [A - 4I_3 | 0] &= \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{-2\ell_1 + \ell_2 \rightarrow \ell_2 \\ -\ell_1 + \ell_3 \rightarrow \ell_3}]{\substack{-2\ell_1 + \ell_2 \rightarrow \ell_2 \\ -\ell_1 + \ell_3 \rightarrow \ell_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{-\frac{1}{2}\ell_1 \rightarrow \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ (matriz em f.e.r.)} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_4 &= \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = -\frac{1}{2}b \right\} = \left\{ \left(-\frac{1}{2}b, b, c \right) \in \mathbb{R}^3 : b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b \left(-\frac{1}{2}, 1, 0 \right) + c(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left(-\frac{1}{2}, 1, 0 \right), (0, 0, 1) \right\rangle. \end{aligned}$$

Como $\forall \alpha \in \mathbb{R} \left(-\frac{1}{2}, 1, 0 \right) \neq \alpha(0, 0, 1)$ então o sistema $\left(\left(-\frac{1}{2}, 1, 0 \right), (0, 0, 1) \right)$ é linearmente independente e como também é gerador de M_4 , tem-se que $\left(\left(-\frac{1}{2}, 1, 0 \right), (0, 0, 1) \right)$ é uma base de M_4 .

- (c) $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ é diagonalizável se, e só se, A admitir **3** vectores próprios linearmente independentes.

Temos

$$\text{Base de } M_0 = ((1, 2, 1)),$$

$$\text{Base de } M_4 = \left(\left(-\frac{1}{2}, 1, 0 \right), (0, 0, 1) \right).$$

Assim, A admite 3 vectores próprios linearmente independentes, pois o sistema

$$\left(\left(-\frac{1}{2}, 1, 0 \right), (0, 0, 1), (1, 2, 1) \right)$$

é linearmente independente. Desde modo, considerando

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

tem-se que P é invertível e

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D(\text{matriz diagonal}).$$

8. Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ uma matriz estocástica generalizada cuja soma dos elementos de qualquer uma das suas linhas é igual a $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) $(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ é vector próprio de A se $(1, \dots, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ e

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : A \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como $A = [a_{ij}]$ é estocástica generalizada então,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{k=1}^n a_{ik} = \alpha.$$

Assim,

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, basta tomar $\lambda = \alpha$.

(b) Note-se que, se A é invertível e λ é valor próprio de A então $\lambda \neq 0$. De facto, como A é invertível tem-se

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow |A - 0I_n| \neq 0 \Leftrightarrow 0 \text{ não é valor próprio de } A.$$

Por outro lado, pode-se afirmar que λ^{-1} é valor próprio de A^{-1} pois,

$$AX = \lambda X \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}(\lambda X) \Rightarrow (A^{-1}A)X = \lambda(A^{-1}X) \Rightarrow X = \lambda(A^{-1}X) \xRightarrow{\lambda \neq 0} A^{-1}X = \lambda^{-1}X.$$

Como na alínea (a) foi demonstrado que se A é estocástica generalizada então $(1, \dots, 1)$ é vector próprio de A associado ao valor próprio $\alpha = \sum_{k=1}^n a_{ik}$, conclui-se que

$$A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Seja $A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$. Tem-se

$$A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n b_{1k} \\ \sum_{k=1}^n b_{2k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n b_{nk} \end{bmatrix}.$$

Como

$$\alpha^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{-1} \\ \vdots \\ \alpha^{-1} \end{bmatrix},$$

conclui-se que

$$\sum_{k=1}^n b_{1k} = \sum_{k=1}^n b_{2k} = \dots = \sum_{k=1}^n b_{nk} = \alpha^{-1}$$

e portanto, A^{-1} é estocástica generalizada.