



Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT-UNL

Época de Recurso – 13 de Fevereiro de 2006

VERSÃO A

1. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^3$, $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\}$ e o subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$, $G = \langle (2, 1, 0), (1, 0, 0), (5, 2, 0) \rangle$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A H é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $\dim H = 2$.
- ☐ B $((2, 1, 0), (0, 0, 1))$ é uma base de H .
- ☐ C $\dim(G + H) = 4$.
- ☐ D $G = \langle (2, 1, 0), (1, 0, 0) \rangle$.

2. Considere as matrizes $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A $r(A) = 3$ logo A é invertível.
- ☐ B $r(AB) = 2$.
- ☐ C AA^T é simétrica.
- ☐ D $r(A) = 3$ e B está na forma de escada reduzida.

3. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $f(x, y, z) = (-z, 2x, y, x - y)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A f é injectiva.
- ☐ B $\dim \operatorname{Im} f = 3$ logo f não é sobrejectiva.
- ☐ C $((-1, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 1), (0, 0, 1, -1))$ é uma base de $\operatorname{Im} f$.
- ☐ D $(0, 0, 0, 1) \in \operatorname{Im} f$.

Continua no verso desta folha

4. Considere o sistema (S) de três equações lineares nas incógnitas x_1 , x_2 e x_3 ,

$$(S) \quad \begin{cases} 2x_1 - kx_2 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - kx_3 = 0 \end{cases}$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A Se $k = 0$, o sistema é possível indeterminado.
- ☐ B Se $k = 6$, a matriz simples do sistema não é invertível.
- ☐ C Para $k = 6$, $(0, 0, 0)$ é a única solução do sistema.
- ☐ D Se $k = 0$, $(0, \frac{2}{3}, 0)$ é solução do sistema.
5. Considere, num referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$, os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 3, 3)$, $C = (4, 3, 3)$ e $D = (0, -3, -1)$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A A área do triângulo $[ABC]$ é $2\sqrt{13}$.
- ☐ B $x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2}$ são equações normais da recta AB .
- ☐ C Os pontos A , B , C e D são coplanares.
- ☐ D O ponto D pertence à recta AB .

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL:

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

- 1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.
- 2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.
- 3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:
 - Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
 - Se responder correctamente: +1,5 valores;
 - Se responder erradamente: -0,5 valores.
- 4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max\{0, cl_M\},$$

onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.



Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT-UNL

Época de Recurso – 13 de Fevereiro de 2006

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Sejam $\mathcal{B}_1 = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((0, 1), (1, 1))$ bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente, e f a aplicação linear $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida pela matriz $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

- [0.6] (a) A partir da característica de A , averigue se f é sobrejectiva.
[0.9] (b) Qual a dimensão do subespaço $\text{Nuc } f$?
[1.5] (c) Sendo $bc_{\mathbb{R}^3}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$, determine, usando matrizes de mudança de base

$$\mathcal{M}(f; bc_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_2).$$

7. Considere a matriz $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -12 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- [0.8] (a) Determine os valores próprios de A .
[1.7] (b) Indique, justificando, a multiplicidade geométrica de cada um dos valores próprios de A .
[1.0] (c) Justifique que A é diagonalizável e indique uma matriz diagonal D , semelhante a A .

8. Sejam $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -z\}$ e $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$ subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$.

- [1.0] (a) Indique, justificando, uma base de F e uma base de G .
[1.0] (b) Determine uma base de $F \cap G$ e conclua qual a dimensão de $F + G$.

9. Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

- [2.0] (a) Mostre que $A + A^\top = I_n$ se e só se $A = \frac{1}{2}I_n + B$, onde B é uma matriz hemi-simétrica.
[2.0] (b) Supondo que $A + A^\top = I_n$ mostre que, se X é vector próprio de A associado ao valor próprio α ($\alpha \neq 0$) então X é vector próprio de $A^\top$ associado ao valor próprio $1 - \alpha$.

Fim