Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT–UNL

Época Normal – 24 de Janeiro de 2006

Primeira Parte - VERSÃO A

1. Considere o subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$, $F = \langle(1,0,1),(-1,-1,2),(1,-2,7)\rangle$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A $(1,-1,4) \in F$.

B $((1,0,1),(-1,-1,2))$ é uma base de F.

C $((1,0,1),(-1,-1,2),(0,0,0))$ é um sistema gerador de F.

D Se G é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$ e $\dim G = 2$ então $F = G$.

2. Num referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ considere o plano $\mathcal{P}$ de equação geral $2x + y - z - 1 = 0$ e a recta $\mathcal{R}$ de equação vectorial $(x,y,z) = (1,1,2) + \lambda(2,1,-1),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A $\mathcal{R}$ é perpendicular a $\mathcal{P}$.

B O ponto $A = (0,0,2)$ pertence ao plano $\mathcal{P}$.

C $\mathcal{R} \cap \mathcal{P} = (1,1,2)$.

D Se P$= (3,2,1)$, $\mathrm{d}(\mathrm{P},\mathcal{P}) = \sqrt{6}$.

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \text{-}1 \\ 1 & 1 & \text{-}1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A Zero não é valor próprio de A.

B $[\,1\ \ 1\ \ 0\,]^{\mathrm{T}}$ é vector próprio de A associado ao valor próprio 2 e $\alpha\,[\,1\ \ 1\ \ 0\,]^{\mathrm{T}}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ é vector próprio de A associado ao valor próprio 2α.

C Os vectores $[\,1\ \ 0\ \ 1\,]^{\mathrm{T}}$ e $[\,0\ \ 1\ \ 0\,]^{\mathrm{T}}$ são vectores próprios de A associados ao valor próprio 1.

D $\left([\,1\ \ 1\ \ 0\,]^{\mathrm{T}}, [\,1\ \ 0\ \ 1\,]^{\mathrm{T}}, [\,0\ \ 1\ \ 0\,]^{\mathrm{T}}\right)$ é uma base de $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ constituida por vectores próprios de A, logo A é diagonalizável.

Continua no verso desta folha

4. Sejam $\mathcal{B}_1 = ((1,0,1),(0,1,1),(1,1,0))$ e $\mathcal{B}_2 = ((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0))$ bases de $\mathbb{R}^3$ e considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

$\boxed{\text{A}}$ $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1).A$.

$\boxed{\text{B}}$ $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1).A.\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$.

$\boxed{\text{C}}$ $f(1,0,1) = (1,1,2)$.

$\boxed{\text{D}}$ $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2) = A.\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$.

5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

tal que $|A| = 3$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

$\boxed{\text{A}}$ $\det \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -g & -h & -i \\ d & e & f \end{bmatrix} = 6.$

$\boxed{\text{B}}$ $\det(3A) = 3^3$.

$\boxed{\text{C}}$ $\det \begin{bmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g+d & h+e & i+f \end{bmatrix} = 3.$

$\boxed{\text{D}}$ A é invertível e $\det A^{-1} = \dfrac{1}{3}$.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL:

Nome:____

Número de caderno: | | | | | | | | | | |

Respostas

	A	**B**	**C**	**D**
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,5$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,5$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl_M}\},$$

onde $\mathrm{cl_M}$ designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT–UNL

Época Normal – 24 de Janeiro de 2006

Segunda Parte

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ considere o sistema de três equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 - bx_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 2 \\ (2-a)x_2 + 3bx_3 = a \end{cases}.$$

[2.0] (a) Discuta o sistema anterior em função dos parâmetros a e b.

[1.0] (b) Para $a = 1$ e $b = 0$ determine o conjunto solução do sistema.

7. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (2x + y, y - z).$$

[1.5] (a) Determine uma base de $\mathrm{Nuc} f$.

[1.0] (b) Verifique que f é sobrejectiva. Justifique.

[1.5] (c) Representando por $bc_{\mathbb{R}^3}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e por $bc_{\mathbb{R}^2}$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$ determine $\mathcal{M}(f; bc_{\mathbb{R}^3}, bc_{\mathbb{R}^2})$.

8. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} k & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

[1.0] (a) Determine para que valores de k a matriz A admite zero como valor próprio. (*Sugestão*: Calcule $\det A$.)

[1.5] (b) Justifique que, para $k = 2$, a matriz A é invertível e, usando determinantes, calcule A^{-1}.

9. Considere $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$A.A^{\mathrm{T}} = I_n.$$

Mostre que:

[1.5] (a) A^{T} é invertível.

[1.5] (b) Se X é vector próprio de A^{T} associado ao valor próprio um então X é vector próprio de A associado ao valor próprio um.

Fim