Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Época de Recurso – 13 de Fevereiro de 2006

1. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ considere os vectores:

$$u = (1,0,1), \quad v = (1,1,0), \quad w = (2,1,1) \ \text{ e } \ z = (1,2,1).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $F = \langle u, v, w\rangle$, então $\dim F = 2$.

B (u, v, z) é uma base de $\mathbb{R}^3$.

C Se $G = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = b + c\}$, então (u, v) é uma base de G.

D O vector w não é combinação linear dos vectores u e v.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & d \\ e & f & g \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível (observe-se que $A_{21} = A_{22} = 0$ (zero)).

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ 0 & 0 & d \\ \beta e & \beta f & \beta g \end{vmatrix} = \alpha\beta|A|$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

C $|A| = d(af - be)$.

B $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c+d \\ a+e & b+f & c+g \end{vmatrix} = |A|$.

D $\begin{vmatrix} e & f & g \\ a & b & c \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} = |A|$.

3. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a,b,c) = (2c, a+b, -c), \quad \text{para todo } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $((-1,1,0))$ é uma base do núcleo de f.

B f não é injectiva.

C $((2,0,-1),(0,1,0))$ é uma base da imagem de f.

D Se considerarmos as bases de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_1 = ((2,0,1),(0,-1,1),(0,2,0))$ e $\mathcal{B}_2 = ((0,1,0),(1,0,0),(0,0,1))$, então

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Continua no verso desta folha

4. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o seguinte sistema de equações lineares de coeficientes reais, nas incógnitas x, y, z:

$$\begin{cases} \alpha x - y + \alpha z = \beta \\ -\alpha x + (\alpha+1)y - \alpha z = -\beta \\ -\alpha x + y + z = 0 \end{cases}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -1$ então o sistema é possível e determinado.

B Se $\alpha = -1$ então, qualquer que seja β, o sistema é possível e indeterminado.

C Se $\alpha = 0$ então, qualquer que seja β, o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação 1.

D Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ então o conjunto das soluções do sistema é

$$\{(a, 0, 0) : a \in \mathbb{R}\}.$$

5. Seja $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$B(B + 2I_n) = -I_n.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A B é invertível.

B $B + 2I_n$ é invertível e $(B + 2I_n)^{-1} = -B$.

C -2 é valor próprio de B.

D $|B|\,|B + 2I_n| = (-1)^n$.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:______________________________

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,5$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,5$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por max $\{0, \mathrm{cl_M}\}$, onde $\mathrm{cl_M}$ designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Época de Recurso – 13 de Fevereiro de 2006

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

[1.0] (a) Calcule os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.

[1.5] (b) Determine uma base para cada um dos subespaços próprios de A.

[1.5] (c) Mostre que A é diagonalizável e indique, se existir, uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mude de Folha

7. Seja $(\mathcal{O}; e_1, e_2, e_3)$ um referencial ortonormado directo de $\mathbb{R}^3$. Considere os pontos

$$A = (2,0,0), \quad B = (0,2,0), \quad C = (0,0,-1) \text{ e } D = (1,-1,0).$$

[1.0] (a) Mostre que os pontos A, B e C não são colineares.

[1.5] (b) Determine uma equação geral do plano $\mathcal{P}$ definido pelos pontos A, B e C.

[1.0] (c) Considere a recta $\mathcal{R}$ que passa pelo ponto D e tem a direcção do vector $u = (4,-2,1)$. Mostre que a recta $\mathcal{R}$ é estritamente paralela ao plano $\mathcal{P}$.

Mude de Folha

8. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Justifique as afirmações:

[1.0] (a) Se AB tem característica n então A e B têm ambas característica n.

[1.0] (b) Se $AB = 0$ e B é invertível então $A = 0$.

Mude de Folha

9. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$A^k = A, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{N}, \text{ com } k \text{ par}.$$

Mostre que:

[1.5] (a) $|A| \in \{0,1\}$.

[1.5] (b) Se α é valor próprio de A então $\alpha \in \{0,1\}$.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Época de Recurso – 13 de Fevereiro de 2006

Uma resolução

1. D

2. C

3. D

4. B

5. C

6. (a) Os valores próprios da matriz A são as soluções reais da equação na incógnita x,

$$|A - xI_3| = 0.$$

Como

$$|A - xI_3| = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & -1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 2-x & 0 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2(2-x),$$

então

$$|A - xI_3| = 0 \iff (1-x)^2(2-x) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = 2.$$

Conclusão, os valores próprios da matriz A são 1 e 2, onde

$$\text{ma}\,(1) = 2 \quad \text{e} \quad \text{ma}\,(2) = 1.$$

(b) Tem-se que:

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : (A - 1I_3)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad \left(\begin{array}{l} \text{subespaço próprio de } A \\ \text{associado ao valor próprio 1} \end{array} \right) \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_2 - \ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(matriz em f.e.r.)},$$

resulta que

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \; a = c \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} c \\ b \\ c \end{bmatrix} : \; b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \; b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Além disso, como o sistema de vectores $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ é linearmente independente ($\mathrm{r}\left(\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\right) = 2$), pode-se ainda concluir que este sistema é uma base de M_1.

Analogamente,

$$\begin{aligned} M_2 &= \left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : (A-2I_3)\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\} \qquad \begin{pmatrix}\text{subespaço próprio de } A\\ \text{associado ao valor próprio } 2\end{pmatrix} \\ &= \left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix}0&0&-1\\1&-1&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&-1&-1\\0&0&-1\end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&-1\\0&0&-1\end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 - \ell_2]{} \begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix} \xrightarrow[-\ell_2]{} \begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\ell_1 + \ell_2]{} \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} \quad \text{(matriz em f.e.r.)},$$

resulta que

$$\begin{aligned} M_2 &= \left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) :\ a = b \text{ e } c = 0\right\} \\ &= \left\{\begin{bmatrix}b\\b\\0\end{bmatrix} :\ b \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{b\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} :\ b \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Além disso, como o vector $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ é não nulo, pode-se ainda concluir que o sistema $\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ é uma base de M_2.

(c) Um exemplo de uma condição necessária e suficiente para que a matriz A seja diagonalizável, é que a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios iguale a ordem da matriz A. Pelo que vimos na alínea anterior, $\mathrm{mg}\,(1) = \dim M_1 = 2$ e $\mathrm{mg}\,(2) = \dim M_2 = 1$. Logo,

$$\mathrm{mg}\,(1) + \mathrm{mg}\,(2) = \dim M_1 + \dim M_2 = 2 + 1 = 3 = \text{ordem de } A$$

e, portanto, A é uma matriz diagonalizável. Nestas condições, a matriz

$$P = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix},$$

onde a primeira e a terceira colunas são os vectores da base de M_1 e a segunda coluna é o vector da base de M_2, é invertível e, além disso,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

7. (a) Os pontos A, B e C são colineares se, e só se, existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AC}.$$

Como $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 0)$ e $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, -1)$, não existe α nas condições pretendidas. Basta atender a que, caso contrário, se teria, atendendo à segunda coordenada de ambos os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, $2 = \alpha \times 0$, o que é impossível. Logo os pontos A, B e C não são colineares.

(b) Pela alínea anterior, os pontos A, B e C não são colineares. Logo, nestas condições, estes três pontos definem um único plano $\mathcal{P}$. Um vector perpendicular ao plano $\mathcal{P}$ é, por exemplo,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -2e_1 - 2e_2 + 4e_3,$$

conforme se deduz da mnemónica $\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$. Assim, uma equação geral do plano $\mathcal{P}$ é

$$-2x - 2y + 4z + d = 0,$$

onde

$$d = 2 \times 2 + 2 \times 0 - 4 \times 0 = 4,$$

uma vez que o ponto A pertence ao plano $\mathcal{P}$.

(c) Para se poder concluir que a recta $\mathcal{R}$ é estritamente paralela ao plano $\mathcal{P}$, é suficiente verificar o seguinte:

(1) $D \notin \mathcal{P}$;

(2) $u \perp (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$.

Ora, $-2 \times 1 - 2 \times (-1) + 4 \times 0 + 4 \neq 0$. Logo o ponto D não pertence ao plano $\mathcal{P}$. Por outro lado,

$$u|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = 4 \times (-2) + (-2) \times (-2) + 1 \times 4 = 0,$$

ficando provado o ponto (2).

8. (a) Admita-se que AB tem característica n. Nestas condições valem as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} \mathrm{r}\,(AB) = n \quad &\Longleftrightarrow \quad AB \text{ é invertível} \\ &\Longleftrightarrow \quad |AB| \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad |A| \neq 0 \quad \text{e} \quad |B| \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad A \text{ e } B \text{ são invertíveis} \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{r}\,(A) = n \quad \text{e} \quad \mathrm{r}\,(B) = n. \end{aligned}$$

(b) Como $AB = 0$ e B é uma matriz invertível, então

$$\begin{aligned} (AB)B^{-1} &= 0B^{-1} \\ A(BB^{-1}) &= 0 \\ AI_n &= 0 \\ A &= 0, \end{aligned}$$

como se pretendia mostrar.

9. (a) Atendendo à hipótese tem-se que:

$$\begin{aligned} A^k &= A \\ |A^k| &= |A| \\ |A|^k &= |A|. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} |A|^k - |A| = 0 \quad &\Longrightarrow \quad |A|(|A|^{k-1} - 1) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad |A| = 0 \ \vee \ |A|^{k-1} = 1 \\ &\Longrightarrow \quad |A| = 0 \ \vee \ |A| = 1 \end{aligned}$$

(Atenda-se ao facto de k ser par e, portanto, $k-1$ ser ímpar, pelo que, em $\mathbb{R}$, $|A|^{k-1} = 1$ se, e só se, $|A| = 1$).

(b) Admita-se que $\alpha \in \mathbb{R}$ é valor próprio da matriz A. Então, existe $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, X não nulo, tal que $AX = \alpha X$. Demonstre-se, por indução matemática, que $A^k X = \alpha^k X$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Para $k = 1$ obtém-se a proposição verdadeira

$$A^1 X = AX = \alpha X = \alpha^1 X.$$

Admita-se como hipótese de indução que $A^k X = \alpha^k X$, com $k \in \mathbb{N}$. Para $k + 1$ tem-se que

$$\begin{aligned} A^{k+1} X &= (AA^k)X \\ &= A(A^k X) \\ &= A(\alpha^k X) \qquad \text{(por hipótese de indução)} \\ &= \alpha^k (AX) \\ &= \alpha^k (\alpha X) \\ &= \alpha^{k+1} X. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução matemática, pode-se concluir que para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \alpha^k X$. Atendendo a que por hipótese $A^k = A$,

$$\alpha X = AX = A^k X = \alpha^k X$$

e como X é não nulo, necessariamente $\alpha^k = \alpha$. Por argumentos análogos aos da alínea (a), também neste caso, se $\alpha^k - \alpha = 0$, então $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$.