Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Época Normal – 24 de Janeiro de 2006

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

<u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ A matriz B tem característica 2.

$\boxed{\text{B}}$ A matriz A está em forma de escada reduzida.

$\boxed{\text{C}}$ A matriz $AB \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e o elemento da linha 1 e coluna 2 de tal matriz é -4.

$\boxed{\text{D}}$ A matriz C é invertível.

2. Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, com $|A| = \alpha \neq 0$, e $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, com $|B| = \beta$.

<u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ -d & -e & -f \end{vmatrix} = \alpha.$

$\boxed{\text{B}}$ A é invertível e $|2A^{-1}| = \frac{8}{\alpha}$.

$\boxed{\text{C}}$ $\begin{vmatrix} a & d & 3g \\ b & e & 3h \\ c & f & 3i \end{vmatrix} = \frac{\alpha}{3}.$

$\boxed{\text{D}}$ $|A^2 B^\top| = \alpha^2 \beta$.

3. Considere os subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = b - c\} \quad \text{e} \quad G = \langle (-2,0,2), (1,3,2) \rangle.$$

<u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $((1,1,0), (-1,0,1))$ é uma base de F.

$\boxed{\text{B}}$ $\dim G = 2$.

$\boxed{\text{C}}$ $\dim(F+G) = 2$.

$\boxed{\text{D}}$ $\dim(F \cap G) = 1$.

Continua no verso desta folha

4. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, w, sobre $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - 2w = 1 \\ -x + (\alpha - 1)y - z + 2w = 0 \\ 2\alpha z + w = \beta \\ \alpha y - z + \alpha w = \beta \end{cases}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $\alpha \neq 0$ então, qualquer que seja $\beta \in \mathbb{R}$, o sistema é possível.

B Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ então o conjunto das soluções do sistema é

$$\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a + b = 3 \wedge b = -1 \wedge d = 1\}.$$

C Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ então o sistema é possível indeterminado, com grau de indeterminação 1.

D Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 1$ então o sistema é impossível.

5. Seja $(O; e_1, e_2, e_3)$ um referencial ortonormado directo de $\mathbb{R}^3$. Considere a recta $\mathcal{R}$ que passa pelos pontos $A = (0, 1, 0)$ e $B = (2, 1, 2)$ e a recta $\mathcal{S}$ de equação vectorial

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(-1, -1, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A As rectas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ não têm a mesma direcção.

B O ponto $(1, 1, 1)$ pertence a ambas as rectas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$.

C As rectas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são concorrentes e uma equação geral do plano que as contém é $x - 2y - z + 2 = 0$.

D $x = z$ e $y = 2$ são equações normais da recta $\mathcal{R}$.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:________________________________

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,5$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,5$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, \mathrm{cl_M}\}$, onde $\mathrm{cl_M}$ designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Época Normal – 24 de Janeiro de 2006

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

[1.0] (a) Sem determinar os valores próprios de A, justifique que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ é um vector próprio de A e indique o valor próprio correspondente.

[1.0] (b) Determine os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.

[2.0] (c) Indique, justificando, se A é diagonalizável.

Mude de Folha

7. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a aplicação linear tal que

$$f(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & 2c \\ c & a+c \end{bmatrix}, \text{ para todo } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

[1.5] (a) Determine o núcleo de f e uma sua base.

[1.0] (b) Sem determinar a imagem de f, determine a sua dimensão.

[1.0] (c) Sendo $\mathcal{B}_1$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e considerando a base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por $\mathcal{B}_1' = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$, determine a matriz

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1'),$$

isto é, a matriz da aplicação linear f em relação às bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_1'$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, respectivamente.

[1.0] (d) Sendo $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_1'$ as bases indicadas em (c) e $\mathcal{B}_2$ a base de $\mathbb{R}^3$ $((0,1,0),(1,0,0),(0,0,2))$, determine a matriz $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1')$, usando matrizes de mudança de base.

Mude de Folha

8. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $$A^2 + 2A = I_n.$$

Mostre que:

[1.0] (a) A é invertível.

[1.0] (b) -2 não é valor próprio de A.

[2.0] **9.** Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão n e seja $(e_1, \ldots, e_n)$ uma base de E. Demonstre que, qualquer que seja $u \in E$, existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, únicos, tais que

$$u = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Época Normal – 24 de Janeiro de 2006

Uma resolução

1. D

2. C

3. D

4. B

5. D

6. (a) Como $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, por definição, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é vector próprio de A associado ao valor próprio 0.

(b) O polinómio característico de A é

$$|A - xI_3| = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ 0 & 3-x & -3 \\ 0 & 2 & -2-x \end{vmatrix} \underset{c_1}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} (1-x)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3-x & -3 \\ 2 & -2-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)[(3-x)(-2-x)+6] = -(1-x)^2 x.$$

Assim os valores próprios de A, sendo os zeros reais do polinómio característico, são:

1, que por ser uma raiz dupla tem multiplicidade algébrica igual a 2 e
0, que por ser uma raiz simples tem multiplicidade algébrica igual a 1.

(c) Subespaço próprio associado ao valor próprio 1:

$$M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : A\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : (A - I_3)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$$[A - I_3|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3 + (-1)\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[(-1)\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 + 3\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ (f.e.r.)}$$

Logo,

$$M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : b = 0 \wedge c = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Dado que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ então a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é linearmente independente e como também é geradora, conclui-se que $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_1 e portanto $\text{mg}(1) = \dim M_1 = 1$.

Subespaço próprio associado ao valor próprio 0:

$$M_0=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}):A\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}):A\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$$[A|0]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&3&-3&0\\0&2&-2&0\end{array}\right]\xrightarrow[\frac{1}{3}\ell_2]{}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&2&-2&0\end{array}\right]\xrightarrow[\ell_3+(-2)\ell_2]{}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\ \text{(f.e.r.)}$$

Logo,

$$\begin{aligned}M_0&=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}):a=c\wedge b=c\right\}=\left\{\begin{bmatrix}c\\c\\c\end{bmatrix}:c\in\mathbb{R}\right\}\\&=\left\{c\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}:c\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\rangle.\end{aligned}$$

Dado que $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ então a sequência $\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$ é linearmente independente e como também é geradora, conclui-se que $\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$ é uma base de M_0 e portanto $\mathrm{mg}(0)=\dim M_0=1$.

A matriz $A\in\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ é diagonalizável se, e só se, $\mathrm{mg}(1)+\mathrm{mg}(0)=3$ (ordem de A).

Ora $\mathrm{mg}(1)+\mathrm{mg}(0)=2\neq3$ e portanto A não é diagonalizável.

7. (a) Tem-se que

$$\begin{aligned}\mathrm{Nuc}f&=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:f(a,b,c)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\}\\&=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:\begin{bmatrix}a&2c\\c&a+c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\}\\&=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:a=0\wedge2c=0\wedge c=0\wedge a+c=0\}\\&=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:a=0\wedge c=0\}\\&=\{(0,b,0)\in\mathbb{R}^3:b\in\mathbb{R}\}\\&=\{b(0,1,0)\in\mathbb{R}^3:b\in\mathbb{R}\}\\&=\langle(0,1,0)\rangle\end{aligned}$$

Dado que $(0,1,0)\neq(0,0,0)$ então a sequência $((0,1,0))$ é linearmente independente e como também é geradora de $\mathrm{Nuc}f$, conclui-se que $((0,1,0))$ é uma base deste subespaço.

(b) Por (a) $\dim\mathrm{Nuc}f=1$, assim

$$\begin{aligned}\dim\mathbb{R}^3&=\dim\mathrm{Nuc}f+\dim\mathrm{Im}f&\Leftrightarrow\\3&=1+\dim\mathrm{Im}f&\Leftrightarrow\\\dim\mathrm{Im}f&=2.\end{aligned}$$

(c) Tem-se que:

$$f(1,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{0}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{0}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(0,1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{0}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{0}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{0}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(0,0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{0}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (-\mathbf{1})\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(d) Por um resultado teórico,

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1') = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1')\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1),$$

onde $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$ designa a matriz de mudança de base $(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$.

Como

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(0,1,0) &= (0,1,0) = \mathbf{0}(1,0,0) + \mathbf{1}(0,1,0) + \mathbf{0}(0,0,1) \\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(1,0,0) &= (1,0,0) = \mathbf{1}(1,0,0) + \mathbf{0}(0,1,0) + \mathbf{0}(0,0,1) \\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(0,0,2) &= (0,0,2) = \mathbf{0}(1,0,0) + \mathbf{0}(0,1,0) + \mathbf{2}(0,0,1) \end{aligned}$$

temos que $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Portanto,

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

8. (a) Tem-se que

$$A^2 + 2A = I_n \Leftrightarrow A(A + 2I_n) = I_n \Rightarrow |A(A + 2I_n)| = |I_n| = 1 \Leftrightarrow |A||A + 2I_n| = 1. \tag{1}$$

Assim, $|A| \neq 0$ e portanto A é uma matriz invertível.

(b) Por (1) temos que $|A + 2I_n| = |A - (-2)I_n)| \neq 0$ e portanto -2 não é um valor próprio de A.

9. Seja $u \in E$. Como $(e_1, \ldots, e_n)$ é uma base de E, em particular é um conjunto gerador de E, assim, existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, tais que

$$u = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Provemos a unicidade de tais escalares. Suponhamos que

$$u = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n$$

com $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$. Então

$$(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)e_n = 0_E$$

Como $(e_1, \ldots, e_n)$ é uma sequência linearmente independente, pelo Critério de Independência Linear concluímos que

$$\alpha_1 - \beta_1 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0_{\mathbb{R}}$$

ou seja,

$$\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n.$$