Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática FCT–UNL

Primeiro Teste – 19 de Novembro de 2005

TESTE A

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A A matriz BA é quadrada de ordem 3.

B É possível efectuar $(A + B^{\mathrm{T}})C$ e a matriz resultante é do mesmo tipo que a matriz A.

C Não é possível efectuar $A^{\mathrm{T}}C$.

D O elemento da posição $(2, 4)$ da matriz AB é 5.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & x & -1 & 2 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A Se $x = 2$ então $|A| = -8$.

B $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & x & -1 & 2 \\ 0 & x & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$.

C $|A| = -2\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & x & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

D Se $x \neq 0 \wedge x \neq 1$ então A é invertível.

3. Considere as matrizes elementares

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

e a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A $E_2E_1A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

B Se $B = E_3E_1E_2A$ então $A \xrightarrow[\ell_2+2\ell_3]{} A' \xrightarrow[\ell_2\leftrightarrow\ell_3]{} A'' \xrightarrow[\ell_1-3\ell_2]{} B$.

C Se A' é uma matriz tal que $A \xrightarrow[\ell_1-3\ell_2]{} A'$ então $A' = E_3A$.

D $E_1E_2E_3$ é uma matriz invertível.

Continua no verso desta folha

4. Considere o sistema de quatro equações lineares nas incógnitas reais $x_1,\ x_2,\ x_3$ e x_4

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ (a-1)x_2 + x_3 = a \\ bx_3 + bx_4 = b - a \\ bx_3 + ax_4 = 3b - 2a \end{cases}$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A Para $a \neq 1$ e $b = 1$ o sistema é possível determinado.

B Se $a = b = 0$ o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 2.

C Se $b = 0$ e $a \neq b$ o sistema é impossível.

D $(5, 3, -3, -2)$ é solução do sistema para $a = 0$ e $b = 1$.

5. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $A^2 = -I_n$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

A $|A| \neq 0$ e portanto A é invertível.

B $-A$ é inversa de A.

C $|A^2| = -1$.

D Se n é par e $|A| = -1$ então $|-A| = -1$.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL:

Nome:______________________________________

Número de caderno:

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,8$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,6$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl_M}\},$$

onde $\mathrm{cl_M}$ designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

Nos grupos seguintes, só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas.

Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & k \\ -1 & 2 & k & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -k & 0 & k \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

[3.0] Utilizando o desenvolvimento do determinante de A segundo linhas/colunas convenientes, indique os valores de k para os quais o sistema homogéneo $AX = 0$ é possível determinado.

7. Seja $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 2w \wedge y = z\}$.

[1.5] (a) Mostre que F é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$.

[1.5] (b) Verifique que os vectores $(2, 1, 1, 1)$, $(0, 1, 1, 0)$ e $(6, 5, 5, 3)$ pertencem a F e escreva o vector $(6, 5, 5, 3)$ como combinação linear de $(2, 1, 1, 1)$ e $(0, 1, 1, 0)$.

[1.5] (c) Mostre $F = \langle(2, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 0)\rangle$ e indique outra sequência geradora de F.

8. Considere $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes diagonais de ordem n com elementos em $\mathbb{R}$.

[1.5] (a) Mostre que $\forall A, B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}),\ AB \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

[1.0] (b) Verifique que em $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$a multiplicação de matrizes é comutativa.

[1.0] (c) Usando a alínea anterior conclua que

$$\forall A,\ B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}),\ (A - B)(A + B) = A^2 - B^2.$$

Fim