

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT-UNL

Primeiro Teste – 19 de Novembro de 2005

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 5}(\mathbb{R}).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$

☐ B A matriz B tem característica 2.

☐ C $\det A = -10$.

☐ D A matriz C está em forma de escada, mas não está em forma de escada reduzida.

2. Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ com $\det A = r \neq 0$ e $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ com $\det B = s$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g-a & h-b & i-c \end{vmatrix} = r.$

☐ B $\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ d & f & e \\ 3g & 3i & 3h \end{vmatrix} = -6r.$

☐ C $|A^{-1}B^T| = \frac{s}{r}.$

☐ D $|2A| = 2r.$

3. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$, e $\det A = 0$ então $A \operatorname{adj} A = 0$.

☐ B Existem matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ ambas com característica n tal que AB não tem característica n .

☐ C Existem matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ invertíveis tais que $A + B$ não é invertível.

☐ D Se $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ então a característica de A é inferior ou igual a n .

Continua no verso desta folha

4. Seja $A \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ uma matriz em que a linha 2 é não nula e considere A_1 a matriz que se obtém de A trocando as linhas 2 e 3, A_2 a matriz que se obtém de A multiplicando a linha 1 por 2 e A_3 a matriz que se obtém de A adicionando à linha 2 a linha 3 multiplicada por 4.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A.$

☐ B $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A.$

☐ C $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} A.$

☐ D As matrizes A_1 , A_2 e A_3 têm característica igual à de A .

5. Sejam $A, C \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tais que $A^3 = I_n$ e $CA = I_n$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A A é invertível e $A^{-1} = A^2$.

☐ B $A^2 = A^5$.

☐ C $AC \neq A^3$.

☐ D Se $D \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é tal que $AD = 0$ então $D = 0$.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

- 1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.
- 2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.
- 3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:
 - Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
 - Se responder correctamente: +1,8 valores;
 - Se responder erradamente: -0,6 valores.

- 4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max\{0, cl_M\},$$

onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT-UNL

Primeiro Teste – 19 de Novembro de 2005

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, w , sobre $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - 2w = 1 \\ -x + (\alpha - 1)y - z + 2w = 0 \\ 2\alpha z + w = \beta \\ 2x + (\alpha + 2)y - z + (\alpha - 4)w = \beta + 2 \end{cases}.$$

- [2.0] (a) Discuta o sistema em função dos parâmetros α e β .
 [2.0] (b) Resolva o sistema para $\alpha = 0$ e $\beta = 1$.

Mude de Folha

7. Considere a matriz

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & \alpha & \alpha + 2 \end{bmatrix}$$

- [1.0] (a) Calcule $\det A_\alpha$.
 [0.5] (b) Justifique que A_α é invertível se, e só se, $\alpha \neq 0$.
 [1.5] (c) Para $\alpha = 1$ determine a inversa da matriz A_α .

Mude de Folha

- [1.0] 8. (a) Seja $F = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) : A = A^\top\}$, isto é, F é o conjunto das matrizes simétricas de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Justifique que F é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.
 [1.0] (b) Mostre que qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$ hemi-simétrica (isto é, tal que $A = -A^\top$) é combinação linear das matrizes $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
 [2.0] (c) Mostre que toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ se pode escrever como a soma de uma matriz simétrica com uma matriz hemi-simétrica.
 Sugestão: Note que $A + A^\top$ é simétrica.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT-UNL

Primeiro Teste – 19 de Novembro de 2005

Uma resolução

1. C
2. D
3. B
4. C
5. C
6. (a) O sistema dado pode ser escrito na forma matricial

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = B.$$

Efectuando na matriz ampliada do sistema, a matriz $[A|B]$, transformações elementares sobre linhas, vamos obter uma matriz $[A'|B']$ a partir da qual poderemos fazer a discussão do sistema. Assim

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & \alpha - 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha & 1 & \beta \\ 2 & \alpha + 2 & -1 & \alpha - 4 & \beta + 2 \end{array} \right] \xrightarrow[l_4 + (-2)l_1]{l_2 + l_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2\alpha & 1 & \beta \\ 0 & \alpha & -1 & \alpha & \beta \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{l_4 + (-1)l_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2\alpha & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta - 1 \end{array} \right] = [A'|B'].$$

Tendo em conta a matriz $[A'|B']$ concluímos que:

- Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ então $r(A) = r([A|B]) = \text{número de incógnitas} = 4$.
Logo, neste caso, o sistema é possível e determinado.
- Se $\alpha = 0$ e $\beta - 1 = 0$, isto é, se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ então
 $r(A) = r([A|B]) = 3 < \text{número de incógnitas} = 4$.
Logo, neste caso, o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação
 $1 = \text{número de incógnitas} - r(A)$.
- Se $\alpha = 0$ e $\beta - 1 \neq 0$, isto é, se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 1$ então $r(A) = 3 < r([A|B]) = 4$.
Logo, neste caso, o sistema é impossível.

- (b) Para $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ a matriz $[A'|B']$, obtida na alínea anterior, toma a forma $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$.

Partindo desta matriz, efectuando transformações elementares sobre linhas, determinemos uma matriz em forma de escada reduzida.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)l_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 + 2l_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = [A''|B''].$$

A matriz $[A''|B'']$ está na forma de escada reduzida. Assim, o conjunto de soluções do sistema, relativamente ao caso pedido, é

$$\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = 3 - b \wedge c = -1 \wedge d = 1\} = \{(3 - b, b, -1, 1) : b \in \mathbb{R}\}.$$

7. (a) Calculemos $\det A_\alpha$ utilizando o Teorema de Laplace.

$$\begin{aligned} \det A_\alpha &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & \alpha & \alpha+2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} 1(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 \\ 2 & \alpha & \alpha+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 \\ 2 & \alpha & \alpha+2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ \alpha & \alpha+2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ \alpha & \alpha+2 \end{vmatrix} = \alpha(\alpha+2) - 2\alpha = \alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha = \alpha^2. \end{aligned}$$

Alternativamente, podíamos calcular $\det A_\alpha$ da seguinte forma.

(Observação: Podemos obter $\det A_\alpha$ calculando o determinante de uma matriz A'_α , obtida a partir de A_α , efectuando transformações elementares sobre linhas/colunas. Dado que conhecemos o efeito que cada uma das transformações elementares tem sobre o determinante de uma matriz, sabemos relacionar $\det A_\alpha$ com $\det A'_\alpha$. Como sabemos que o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal (fácil de calcular) tem especial interesse que A'_α seja triangular.)

$$\det A_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & \alpha & \alpha+2 \end{vmatrix} \stackrel{l_4 + (-2)l_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 2 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha+2 \end{vmatrix} \stackrel{l_4 + (-1)l_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times \alpha \times \alpha = \alpha^2.$$

- (b) Sabemos que A_α será invertível se, e só se, $\det A_\alpha \neq 0$.

Como, pela alínea anterior, $\det A_\alpha = \alpha^2$ e

$$\alpha^2 \neq 0 \text{ se, e só se, } \alpha \neq 0,$$

concluimos que A_α é invertível se, e só se, $\alpha \neq 0$.

Alternativamente, podíamos estudar a característica da matriz A_α . Como $A_\alpha \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$, sabemos que A_α será invertível se, e só se, $r(A_\alpha) = 4$ (= ordem de A_α).

Se atendermos às matrizes que aparecem imediatamente antes desta alínea, concluimos que

$$r(A_\alpha) = r \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \right) \quad \text{e} \quad r(A_\alpha) = 4 \text{ se, e só se, } \alpha \neq 0.$$

- (c) Determinemos a inversa de $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Abreviadamente, vamos determinar A_1^{-1} fazendo $[A_1|I_4] \xrightarrow{(\text{linhas})} [I_4|A_1^{-1}]$.

$$\begin{aligned} [A_1|I_4] &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_4 + (-2)l_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\xrightarrow{l_4 + (-1)l_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{l_3 + (-2)l_4 \\ l_1 + (-1)l_2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Logo

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. (a) Verifiquemos que $F = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) : A = A^\top\}$ é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.

- Atendendo à definição de F conclui-se que $F \subseteq \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.
- $0_{\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})} \in F$ porque $0_{\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})} = (0_{\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})})^\top$.
- Verifiquemos que

$$\forall A, B \in F \quad A + B \in F.$$

Como $A, B \in F$ tem-se $A = A^\top$ e $B = B^\top$. Assim, tem-se

$$(A + B)^\top = A^\top + B^\top = A + B.$$

Logo,

$$A + B \in F.$$

- Finalmente verifiquemos que

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall A \in F \quad \alpha A \in F.$$

Como $A \in F$ tem-se $A = A^\top$. Então

$$(\alpha A)^\top = \alpha A^\top = \alpha A.$$

Logo

$$\alpha A \in F.$$

Mostrámos, assim, que F é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.

(b) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$ é uma matriz hemi-simétrica quando $A = -A^\top$, isto é, quando

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^\top = -1 \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{bmatrix}.$$

Assim, uma matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$ é hemi-simétrica se, e só se,

$$a = -a \quad \text{e} \quad b = -c \quad \text{e} \quad d = -d,$$

ou equivalentemente,

$$a = 0 \quad \text{e} \quad c = -b \quad \text{e} \quad d = 0.$$

Então, $\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$, com $b \in \mathbb{K}$, é uma matriz hemi-simétrica arbitrária de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$. Como

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

para qualquer $b \in \mathbb{K}$, concluímos, pois, que qualquer matriz hemi-simétrica de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$ é combinação linear das matrizes $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. De acordo com a sugestão, matriz

$$A + A^\top$$

é simétrica porque

$$(A + A^\top)^\top = A^\top + (A^\top)^\top = A^\top + A = A + A^\top.$$

A matriz

$$A - A^\top$$

é hemi-simétrica porque

$$(A - A^\top)^\top = (A + (-A^\top))^\top = A^\top + (-A) = (-A) + A^\top = -1(A - A^\top) = -(A - A^\top).$$

Assim

$$(A + A^\top) + (A - A^\top)$$

é a matriz $2A$ escrita como soma de uma matriz simétrica com uma matriz hemi-simétrica.

Pretendemos obter uma decomposição, do mesmo tipo, para A . Como

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} [(A + A^\top) + (A - A^\top)] \\ &= \frac{1}{2} (A + A^\top) + \frac{1}{2} (A - A^\top), \end{aligned}$$

basta demonstrar que $\frac{1}{2} (A + A^\top)$ e $\frac{1}{2} (A - A^\top)$ continuam, respectivamente, a ser simétrica e hemi-simétrica.

Note que se $B = B^\top$ então $(\alpha B)^\top = \alpha B^\top = \alpha B$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$.

Analogamente, se $B = -B^\top$ então $(\alpha B)^\top = \alpha B^\top = \alpha(-B) = -(\alpha B)$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$.

Logo, tem-se o resultado pretendido.