



Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT-UNL

Segundo Teste – 3 de Janeiro de 2006

TESTE A

1. Considere, em $\mathbb{R}^3$, o subespaço vectorial

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\}.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A $((2, 1, 0), (4, 2, 1))$ é uma base de F .
- ☐ B $((2, 1, 2), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclui uma base de F .
- ☐ C $((2, 1, 0), (0, 2, 1))$ é uma sequência, de vectores de F , linearmente independente.
- ☐ D $((2, 1, 0), (0, 0, 1))$ é uma base de F .

2. Sejam E um espaço vectorial real de dimensão finita e F e G dois subespaços vectoriais de E tais que

$$\dim(F \cap G) = 5 \quad \text{e} \quad \dim G = 6.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A Se $\dim(F + G) = 7$ então $F = G$.
- ☐ B Se $\dim(F + G) = 6$ então $F + G = G$.
- ☐ C Se $\dim(F + G) = 6$ então $\dim F = 5$.
- ☐ D $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

3. Seja $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1))$ uma base do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- ☐ A $(0, 0, 0) \in \text{Nuc } f$.
- ☐ B $f(1, 1, 1) \neq f(1, 0, 0) + f(0, 1, 1)$.
- ☐ C A aplicação f é injectiva.
- ☐ D $f(1, 1, 1) = (-1, 1, 1)$.

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

☐ A $[0 \ 0 \ 0]^\top$ é vector próprio de A associado ao valor próprio 1.

☐ B $|A - I_3| = 0$.

☐ C $p(x) = -x(1-x)^2$ é o polinómio característico de A .

☐ D $\langle [-4 \ 0 \ 1]^\top \rangle$ é um subespaço próprio de A .

5. Sejam u e v vectores de $\mathbb{R}^3$.

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

☐ A $(u+v) \times v = u \times v$.

☐ C $(u \times v)(v \times u) = -\|u \times v\|^2$.

☐ B Se $u \times v = 0$ então u e v são perpendiculares.

☐ D $(u \times v) \times (v \times u) = \vec{0}$.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL:

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1,8 valores;
- Se responder erradamente: -0,6 valores.

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max\{0, cl_M\},$$

onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

Nos grupos seguintes, só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas.

Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c) = (2a + b, b, -a)$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- [1.0] (a) Determine uma base de $\text{Nuc } f$.
[1.0] (b) Sem determinar uma base da imagem de f , indique a respectiva dimensão.
[1.5] (c) Considere em $\mathbb{R}^3$ as bases

$$\mathcal{B}_1 = ((0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 = ((0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)).$$

Indique a matriz $M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

- [1.2] (a) Verifique que os vectores $[-1 \ 1 \ 0]^\top$, $[-1 \ 0 \ 1]^\top$ e $[3 \ -1 \ -1]^\top$ são vectores próprios de A e indique a que valor próprio está, cada um deles, associado.
[0.6] (b) Indique, justificando, a multiplicidade algébrica de cada um dos valores próprios de A .
[0.9] (c) Utilizando as alíneas anteriores, indique uma base para cada um dos subespaços próprios de A .
[0.8] (d) Justifique a afirmação: " A é uma matriz diagonalizável mas não invertível".

8. Seja $E \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ a matriz elementar que se obtém de I_n adicionando à linha i , a linha j multiplicada por α , com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $j < i$.

- [1.0] (a) Determine os valores próprios de E .
[1.0] (b) Indique a multiplicidade geométrica dos valores próprios de E .
[2.0] (c) Mostre que E é diagonalizável se e só se $\alpha = 0$.

Fim