Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Segundo Teste – 6 de Janeiro de 2006

1. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$f(a,b,c) = (a+b, c, 0, c), \text{ para todo } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\operatorname{Im} f = \langle f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1) \rangle$.

B $\operatorname{Nuc} f = \{(-b,b,0) : b \in \mathbb{R}\}$.

C f não é injectiva.

D $\dim \operatorname{Im} f = 3$.

2. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\dim \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) = \dim \mathbb{R}^6$.

B Se $F = \langle (1,1,2), (0,1,2), (1,2,4), (3,4,8) \rangle$ então $\dim F = 2$.

C $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathbb{R}_3[x]$.

Sendo $\mathbb{R}_3[x]$ o espaço vectorial dos polinómios, na variável x, com coeficientes reais, de grau menor ou igual a 3.

D Se $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a = d \wedge b = -c \right\}$ então $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de G.

3. Considere em $\mathbb{R}^3$ as bases

$\mathcal{B}_1 = ((1,-1,0), (2,1,3), (0,0,4))$, $\quad \mathcal{B}_1' = ((1,1,1), (0,1,1), (0,0,1))$

$\mathcal{B}_2 = ((0,0,4), (1,-1,0), (2,1,3))$, $\quad \mathcal{B}_2' = ((0,0,1), (0,1,0), (1,0,0))$.

Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1') = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1') = A\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$.

B $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2') = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) A \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_1', \mathcal{B}_2')$.

C $f(2,1,3) = (5,5,6)$.

D $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_1', \mathcal{B}_2') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Continua no verso desta folha

4. Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}0\\3\\-1\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}0\\3\\-1\end{bmatrix} \text{ e } A\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A tem o valor próprio zero.

B O polinómio característico de A é $-(x-2)^2x$.

C A não é invertível.

D A não é diagonalizável e se $P = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 3 & 0\\2 & -1 & 1\end{bmatrix}$ então $P^{-1}AP = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

5. Seja $(O; e_1, e_2, e_3)$ um referencial ortonormado directo. Considere os pontos

$$A = (-1,0,4),\ B = (2,0,1) \text{ e } C = (-1,3,1).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Os pontos A, B e C definem um triângulo cuja área é $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

B O ângulo formado pelos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é $\frac{\pi}{3}$.

C O vector $w = e_1 + 5e_2 - e_3$ é perpendicular ao vector $\overrightarrow{AB}$.

D O triângulo cujos vértices são os pontos A, B e C é isósceles.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:______________________________

Número de caderno:

Respostas

	A	**B**	**C**	**D**
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,8$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,6$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl_M}\},$$

onde $\mathrm{cl_M}$ designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Segundo Teste – 6 de Janeiro de 2006

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

[1.0] (a) Determine os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.

[2.0] (b) Indique uma base para cada um dos subespaços próprios de A.

[1.0] (c) Mostre que A não é diagonalizável.

Mude de Folha

7. Seja $(O; e_1, e_2, e_3)$ um referencial ortonormado directo. Considere os pontos

$$A = (-1, 0, 4),\ B = (2, 0, 1) \text{ e } C = (5, 3, 1).$$

[1.5] (a) Indique equações normais da recta $\mathcal{R}$ que passa pelos pontos A e B.

[1.5] (b) Determine uma equação geral do plano $\mathcal{P}$ que passa pelos pontos A, B e C.

Mude de Folha

[2.0] **8.** (a) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ um vector próprio de A associado ao valor próprio α. Mostre que, qualquer que seja $\beta \in \mathbb{R}$, X é também vector próprio da matriz $A - \beta I_n$ e indique o valor próprio correspondente.

[2.0] (b) Seja $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz tal que

$$(B + I_n)B^\top = (B + I_n)^\top.$$

Justifique que se $\det B = -1$ então -1 é valor próprio de B.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Segundo Teste – 6 de Janeiro de 2006

Uma resolução

1. D

2. C

3. B

4. D

5. C

6. (a) O polinómio característico de A é

$$|A - xI_3| = \begin{vmatrix} -1-x & 0 & 0 \\ 2 & 3-x & 2 \\ 1 & 0 & -1-x \end{vmatrix} \underset{\ell_1}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} (-1-x)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 0 & -1-x \end{vmatrix}$$

$$= (-1-x)(3-x)(-1-x) = (-1-x)^2(3-x).$$

Assim os valores próprios de A, sendo os zeros reais do polinómio característico, são:

-1 com multiplicidade algébrica igual a 2 e
3 com multiplicidade algébrica igual a 1.

(b) Subespaço próprio associado ao valor próprio -1:

$$M_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : (A + I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$$[A + I_3|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2 + (-2)\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{4}\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ (f.e.r.)}$$

Logo,

$$M_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : a = 0 \wedge b = -\frac{1}{2}c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}c \\ c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ c \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Dado que $\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ então o sistema $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é linearmente independente e como também é gerador de M_{-1}, conclui-se que $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base deste subespaço.

Subespaço próprio associado ao valor próprio 3:

$$M_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : (A-3I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$$[A-3I_3|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[(-\frac{1}{4}\ell_1)]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\ell_2+(-2)\ell_1 \\ \ell_3+(-1)\ell_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3+4\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_3 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : a = 0 \wedge c = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Dado que $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ então o sistema $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é linearmente independente e como também é gerador de M_3, conclui-se que $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é uma base deste subespaço.

(c) $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é diagonalizável se, e só se, $\text{mg}(-1) + \text{mg}(3) = 3$ (ordem de A). Ora $\text{mg}(-1) = \dim M_{-1} = 1$ e $\text{mg}(3) = \dim M_3 = 1$. Então $\text{mg}(-1) + \text{mg}(3) = 2 \neq 3$ e portanto A não é diagonalizável.

7. (a) A e B são dois pontos de $\mathbb{R}^3$, com $A \neq B$. Existe uma, e uma só, recta que passa pelos pontos A e B. Considerando como ponto de $\mathcal{R}$, por exemplo, o ponto A e como vector com a direcção de $\mathcal{R}$, por exemplo, o vector $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 0, -3)$, temos que

$$(x, y, z) = (-1, 0, 4) + \lambda(3, 0, -3) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

é uma equação vectorial da recta $\mathcal{R}$. Desta equação obtemos o seguinte sistema de equações paramétricas de $\mathcal{R}$:

$$\begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 0 \\ z = 4 - 3\lambda \end{cases} , \lambda \in \mathbb{R}.$$

Então $\begin{cases} \frac{x+1}{3} = \frac{z-4}{-3} \\ y = 0 \end{cases}$ são equações normais da recta $\mathcal{R}$.

(b) Uma vez que $\overrightarrow{AB} = (3, 0, -3)$ e $\overrightarrow{AC} = C - A = (6, 3, -3)$ e, portanto, $\overrightarrow{AB} \neq \alpha\overrightarrow{AC}$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, concluímos que os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são linearmente independentes. Assim, o plano $\mathcal{P}$ está univocamente determinado, ou seja, existe um e um só plano que passa pelos pontos A, B e C.

O vector $w = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ é, por definição de produto externo, um vector perpendicular ao plano. Calculando esse vector, utilizando a conhecida mnemónica,

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

concluímos que $w = (9, -9, 9)$.

Assim o plano $\mathcal{P}$ tem uma equação geral da forma

$$9x - 9y + 9z + d = 0.$$

Como o plano $\mathcal{P}$ passa no ponto $A = (-1, 0, 4)$ concluímos que

$$9 \times (-1) - 9 \times 0 + 9 \times 4 + d = 0$$

isto é, $d = -27$.

Assim

$$9x - 9y + 9z - 27 = 0,$$

ou equivalentemente,

$$x - y + z - 3 = 0$$

é uma equação geral do plano $\mathcal{P}$.

8. (a) Como $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ é um vector próprio de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ associado ao valor próprio α então $X \neq 0_{n\times 1}$ e $AX = \alpha X$. Logo, qualquer que seja $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(A - \beta I_n)X &= AX - (\beta I_n)X \\ &= \alpha X - \beta(I_n X) \\ &= \alpha X - \beta X \\ &= (\alpha - \beta)X.\end{aligned}$$

Então X é vector próprio da matriz $A - \beta I_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ associado ao valor próprio $\alpha - \beta$.

(b) Como $(B + I_n)B^\top = (B + I_n)^\top$ então

$$|(B + I_n)B^\top| = |(B + I_n)^\top| \Leftrightarrow |(B + I_n)||B^\top| = |(B + I_n)| \Leftrightarrow |(B + I_n)||B| = |(B + I_n)|.$$

Mas $|B| = -1$ donde $-|(B+I_n)| = |(B+I_n)|$. Logo $|B+I_n| = 0$. Dado que $|B-(-1)I_n| = |B+I_n| = 0$ concluímos que -1 é valor próprio de B.